

Analysis I

Yichuan Shen

19. Oktober 2011

Aufgabe 1.8

(a) A, B Mengen, so gilt: $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$

(b) M_0 Menge, F System von Mengen, so dass gilt:

$$M \in F \Rightarrow M \subset M_0$$

Dann gilt für alle bezüglich M_0 gebildeten Komplemente:

$$\left(\bigcup_{M \in F} M \right)^c = \bigcap_{M \in F} M^c, \quad \left(\bigcap_{M \in F} M \right)^c = \bigcup_{M \in F} M^c$$

Definition 1.9 Für Mengen X, Y heißt die Menge aller geordneten Paare

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

das *kartesische Produkt* von X und Y .

Kapitel 2

Abbildungen

Definition 2.1 Es sei X, Y nichtleere Mengen. Eine Funktion f (oder Abbildung) von der Menge X in die Menge Y ist eine Vorschrift, die jeden $x \in X$ in eindeutiger Weise ein $y \in Y$ zuordnet, das mit $f(x)$ bezeichnet wird. X heißt *Definitionsbereich* von f . $f(x)$ heißt *das Bild von x* .

$$\text{Schreibweise: } f : \begin{cases} X \rightarrow Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

- Für $A \subset X$ heißt $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \subset Y$ das *Bild von A unter f*
- $f(X)$ heißt *Wertebereich von f*
- Die Menge $\text{Graph} f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subset X \times Y$ heißt *Graph von f*
- Für $B \subset Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$ Urbild von B unter f .
- Die Abbildung $f : X \rightarrow Y, g : X \rightarrow Y$ heißen gleich $:\Leftrightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in X$

Beispiel $X = \{1, 2, 3\}, \quad Y = \{4, 5, 6, 7\}$ $f : X \rightarrow Y$ sei definiert durch $f(1) = 5, f(2) = 7, f(3) = 5$.

$$f(X) = \{5, 7\} \subsetneq Y$$

$$\text{Graph} f = \{(1, 5), (2, 7), (3, 5)\}$$

$$f^{-1}(\{5\}) = \{1, 3\}$$

Definition 2.2 Sei $X \neq \emptyset$, dann heißt die Funktion

$$I : \begin{cases} X \rightarrow X \\ x \mapsto I(x) = x \end{cases}$$

die Identität auf X .

Sind $X, Y, Z \neq \emptyset$ Mengen und $f : Y \rightarrow Z, g : X \rightarrow Y$ Abbildungen, dann heißt

$$f \circ g : \begin{cases} X \rightarrow Z \\ x \mapsto (f \circ g)(x) := f(g(x)) \end{cases}$$

Komposition von f und g .

Übung 2.3 Seien $V, X, Y, Z \neq \emptyset$ Mengen, $f : V \rightarrow X, g : X \rightarrow Y, h : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Definition 2.4 Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. f heißt

- injektiv : $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
- surjektiv : $\Leftrightarrow f(X) = Y$
- bijektiv : $\Leftrightarrow f$ ist injektiv und surjektiv.

Beachte

- f ist injektiv, wenn gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Ist f bijektiv, so existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. D.h. durch

$$g : \begin{cases} Y \rightarrow X \\ y \mapsto x, \text{ wobei } f(x) = y \end{cases}$$

wird eine Abbildung von Y nach X definiert. g heißt Umkehrabbildung von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

Bemerkung

- (1) $f^{-1} \circ f$ ist Identität auf X
- (2) $f \circ f^{-1}$ ist Identität auf Y

Bezeichnung 2.5 Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $\emptyset \neq A \subset X$, so heißt die Abbildung

$$h : \begin{cases} A \rightarrow Y \\ x \mapsto h(x) := f(x) \end{cases}$$

Restriktion von f auf A und wird mit $f|_A$ bezeichnet.

Übung 2.6 $f : X \rightarrow Y$ Abbildung, A System von Teilmengen von X , B System von Teilmengen von Y , $A_n^c = X \setminus A_n, B_n^c = Y \setminus B_n$

- (1) $A_1, A_2 \in A, \quad A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
- (2) $B_1, B_2 \in B, \quad B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

Kapitel 3

Körper der reellen Zahlen

Definition 3.1 Sei $K \neq \emptyset$ eine Menge und es gebe zwei Abbildungen,

$$+ : \begin{cases} K \times K \rightarrow K \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}, \quad \cdot : \begin{cases} K \times K \rightarrow K \\ (x, y) \mapsto x \cdot y \end{cases}$$

die den folgenden Eigenschaften genügen:

$$(A1) \quad \forall x, y, z \in K : x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(A2) \quad \forall x \in K, \exists 0 \in K : x + 0 = x$$

$$(A3) \quad \forall x \in K, \exists y \in K : x + y = 0$$

$$(A4) \quad \forall x, y \in K : x + y = y + x$$

$$(A5) \quad \forall x, y, z \in K : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$(A6) \quad \forall x \in K, \exists 1 \in K : x \cdot 1 = x$$

$$(A7) \quad \forall x \in K \setminus \{0\}, \exists y \in K : x \cdot y = 1$$

$$(A8) \quad \forall x, y \in K : x \cdot y = y \cdot x$$

$$(A9) \quad \forall x, y, z \in K : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Eine Menge K mit diesen Abbildungen $+, \cdot$ heißt *Körper*. Bezeichnung: $(K, +, \cdot)$