

Algebra I

Yichuan Shen

21. Oktober 2011

Folgerung 3.2

- (i) Die Elemente 0 und 1 sind eindeutig.

Beweis: Sei $0'$ ein weiteres Element aus K mit der Eigenschaft (A2).

$$\implies 0 = 0 + 0 = 0' + 0 = 0'$$

Analog für 1.

□

- (ii) Die Elemente $y \in K$ aus (A3) und (A7) sind auch eindeutig bestimmt.

Beweis: Für $x \in K$ seien $y, z \in K$ mit

$$x + y = 0 = x + z$$

$$z = z + 0 = z + (x + y) = (x + z) + y = 0 + y = y$$

Analog für $\cdot$.

□

- (iii) $\forall x \in K : 0 \cdot x = 0$

Beweis:

$$0x + x = 0x + 1x = (0 + 1)x = x$$

$$0 = x + (-x) = (0x + x) + (-x) = 0x + (x + (-x)) = 0x + 0 = 0x$$

□

- (iv) $(-1) \cdot (-1) = 1$

Beweis: $0 = 0 \cdot (-1) = (1 + (-1)) \cdot (-1) = 1(-1) + (-1)(-1)$

$$\begin{aligned} \implies 1 &= 1 + 0 = 1 + (1(-1) + (-1)(-1)) \\ &= (1 + 1(-1)) + (-1)(-1) \\ &= (1(1 + (-1))) + (-1)(-1) \\ &= (1 \cdot 0) + (-1)(-1) \\ &= 0 + (-1)(-1) \\ &= (-1)(-1) \end{aligned}$$

□

- (v) $\forall x, y \in K$ gilt:

(a) $(-x)y = -(xy)$

(b) $(-x)(-y) = xy$

Beweis:

(a) $x \cdot y + (-x)y = (x + (-x))y = 0y = 0$

$$\implies -(xy) = (-x)y \quad (\text{Inversen sind eindeutig})$$

□

(b) $(-x)(-y) - (xy) = (-x)(-y) + (-x)y = (-x)(-y + y) = 0$

$$\implies (-x)(-y) = xy \quad (\text{Inversen sind eindeutig})$$

□

(vi) Definiere: $x - y := x + (-y)$, $\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}$ Dann gilt: $\forall x, y, z \in K, a, b, c, d \in K :$

(a)

$$(x - y)z = xz - yz$$

(b)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

(c)

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Beweis:

(b) Zeige zunächst:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} &= \frac{1}{bd} \\ \left(\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}\right) \cdot (b \cdot d) &= \left(\frac{1}{b} \cdot b\right) \cdot \left(\frac{1}{d} \cdot d\right) = 1 \cdot 1 = 1 \\ &\implies \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{1}{bd} \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= a \frac{1}{b} + c \frac{1}{d} \\ &= \left(a \frac{1}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{d} d\right) + \left(c \frac{1}{d}\right) \cdot \left(\frac{1}{b} b\right) \\ &= a \frac{1}{bd} d + c \frac{1}{bd} b \\ &= \frac{1}{bd} (ad + cb) \\ &= \frac{ad + cb}{bd} \end{aligned}$$

□

(vii)

$$\begin{aligned} x + y + z &:= (x + y) + z = x + (y + z) \\ xyz &:= (xy) \cdot z = x \cdot (yz) \end{aligned}$$

(viii) $\forall x, y \in K \setminus \{0\} : xy \neq 0$

Beweis: Wäre $xy = 0$ und $x, y \neq 0$

$$\implies \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \underbrace{(xy)}_0}_{0} = \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_1 y = y \quad (\text{Widerspruch})$$

□

Definition 3.3 Sei K ein Körper, $P \subset K$ mit folgenden Eigenschaften:

(A10) $\forall x \in K$ gilt entweder $x \in P$ oder $x = 0$ oder $-x \in P$, wobei jede dieser Eigenschaften die anderen ausschließt.

(A11) $\forall x, y \in P \implies xy \in P, x + y \in P$

K heißt *angeordneter Körper*, P heißt *Menge der positiven Elemente*.

$$x \in K \text{ heißt positiv} :\Leftrightarrow x \in P \quad (x > 0)$$

$$x \in K \text{ heißt negativ} :\Leftrightarrow x \neq 0, x \in P \quad (x < 0)$$

Bezeichnung:

$$x < y :\Longleftrightarrow y - x > 0$$

$$x < 0 \Longleftrightarrow 0 - x > 0 \Longleftrightarrow -x > 0 \Longleftrightarrow -x \in P$$

Rechenregeln 3.4 Sei K ein angeordneter Körper, $x, y, z \in K$. Dann gilt:

(i) $1 > 0$ (insbesondere $1 \neq 0$)

(ii) $x < 0, y < 0 \implies x \cdot y > 0$

(iii) $x > 0, y < 0 \implies x \cdot y < 0$

(iv) $x \neq 0 \implies x^2 := x \cdot x > 0$

(v) $x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0$

(vi) $x < y, y < z \implies x < z$

(vii) $x < y, z > 0 \implies xz < yz$

(viii) $x < y, z \in K \implies x + z < y + z$

(ix) $x < y, z < 0 \implies xz > yz$

(x) $0 < x < y \implies \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

(xi) $x < y, u < v \implies x + u < y + v$

Beweis ...¹

¹Anm.: Macht das als Übung selber... Ich hab keine Lust den ganzen Kleinkram hier abzutippen...