

Analysis I

Yichuan Shen

26. Oktober 2011

Bezeichnung 3.6. Sei K ein angeordneter Körper, $x, y \in K$

$$(i) \quad x \leq y :\Leftrightarrow x < y \vee x = y$$

$$x \geq y :\Leftrightarrow x > y \vee x = y$$

$$(ii) \quad |x| :\Leftrightarrow \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Eigenschaften 3.6. K ist angeordneter Körper, $\delta, x, y \in K$

$$(i) \quad x < y \implies x \leq y$$

$$(ii) \quad |x| = |-x|$$

$$(iii) \quad x \leq |x|, -x \leq |x|, -|x| \leq x \leq |x|$$

$$(iv) \quad |x| < \delta \iff -\delta < x < \delta$$

$$(v) \quad |x| \leq \delta \iff -\delta \leq x \leq \delta$$

Beweis. (i)+(ii) aus der Definition.

$$(iii) \quad x \geq 0 \implies |x| = x, \quad x < 0 \implies x < 0 < -x \leq |-x| = |x| \implies x \leq |x|.$$

$$\text{Ersetze } x \text{ durch } -x \implies -x \leq |-x| = |x| \text{ (ii)} \implies -|x| \leq x \implies -|x| \leq x \leq |x|$$

$$(iv) \quad |x| < \delta \implies -\delta < -|x| \implies -\delta < -|x| < x \leq |x| < \delta \text{ (iii)}$$

$$(v) \quad \text{analog wie (iv)}$$

Satz 3.7. Sei K ein angeordneter Körper, $x, y \in K$

$$(i) \quad |x| \geq 0, \quad |x| = 0 \iff x = 0$$

$$(ii) \quad |xy| = |x||y|$$

$$(iii) \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

Beweis.

$$(i) \quad \text{folgt aus der Definition}$$

$$(ii) \quad (a) \quad x \geq 0, y \geq 0 \implies |xy| = xy = |x||y|$$

$$(b) \quad x \geq 0, y < 0 \implies |xy| = |x(-y)| = x(-y) = |x||y|$$

$$(c) \quad x < 0, y < 0 \implies |xy| = |(-x)(-y)| = (-x)(-y) = |x||y|$$

$$(iii) \quad (a) \quad x + y \geq 0 \implies |x + y| = x + y \leq |x| + |y| \text{ (3.6)}$$

$$(b) \quad x + y < 0 \implies |x + y| = -x - y \leq |x| + |y| \text{ (3.6)}$$

□

Folgerung 3.8. $x, y \in K$, K ein angeordneter Körper.

$$(i) \quad ||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$(ii) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$$

Beweis. (ii) folgt aus (i)

$$(i) \quad |x| = |(x+y) + (-y)| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y|$$
$$\implies \left. \begin{array}{l} \gamma := |x| - |y| \leq |x+y| \\ -\gamma = |y| - |x| \leq |x+y| \end{array} \right\} \implies (i)$$

□

Definition 3.9. K ist angeordneter Körper; $M \subset K$. M heißt

- nach oben beschränkt $:\Leftrightarrow \exists c \in K : x \leq c \quad \forall x \in M$, c heißt *obere Schranke* von M .
- nach unten beschränkt $:\Leftrightarrow \exists c \in K : x \geq c \quad \forall x \in M$, c heißt *untere Schranke* von M
- beschränkt $:\Leftrightarrow M$ ist nach unten und oben beschränkt.
- γ heißt *Supremum* von M ($\gamma = \sup M$) $:\Leftrightarrow$
 - (i) γ ist eine obere Schranke von M
 - (ii) Ist γ' eine obere Schranke von $M \implies \gamma' \geq \gamma$D.h. γ ist kleinste obere Schranke von M .

- γ heißt *Infimum* von M ($\gamma = \inf M$) $:\Leftrightarrow$
 - (i) γ ist eine untere Schranke von M
 - (ii) Ist γ' eine obere Schranke von $M \implies \gamma' \leq \gamma$D.h. γ ist größte untere Schranke von M .

Beispiel. $M = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

$$\inf M = 0 \notin M, \quad \sup M = 1 \in M$$

Definition 3.10. Ein angeordneter Körper heißt *vollständig* $:\Leftrightarrow$

(A12) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum in K

Satz 3.11. Es gibt einen vollständigen angeordneten Körper, der im Wesentlichen eindeutig ist und mit $\mathbb{R}$ bezeichnet wird. (Körper der reellen Zahlen)

Beweis. W. Rudin S. 19-23 “Principles of Mathematical Analysis”

Beispiel. $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \implies \inf M = 0$

Beweis. Zunächst $2 := 1 + 1 > 0 \implies \frac{1}{2} > 0$.

(i) 0 ist eine untere Schranke

(ii) Sei b eine weitere untere Schranke. Zu zeigen: $b \leq 0$

Wäre

$$b > 0 \implies \underbrace{\frac{1}{2} \cdot b}_{\in M} > 0 \implies \frac{1}{2}b \geq b \implies b \geq 2b \implies 0 \geq b$$

$\implies$ Widerspruch

$\implies 0 = \inf M$

Satz 3.12. Jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge von M besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Beweis. Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt. $\implies A := \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in M\}$ ist nach oben beschränkt $\implies \exists \gamma = \sup A$. Sei $b \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M

$$\implies \forall x \in M : b \leq x \implies \forall x \in M : -b \geq -x \implies \forall y \in A : -b \geq y \implies -b \geq \gamma \implies b \leq -\gamma \quad (1)$$

$$\gamma = \sup A \implies \forall y \in A : \gamma \geq y \implies \forall y \in A : -\gamma \leq -y \implies \forall x \in M : -\gamma \leq x \quad (2)$$

$$\text{Aus (1)+(2)} \implies -\gamma = \inf M$$

□

Satz 3.13. $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R}$

$$(a) \gamma = \sup M \iff$$

$$(i) \forall x \in M : x \leq \gamma$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon$$

$$(b) \gamma = \inf M \iff$$

$$(i) \forall x \in M : \gamma \leq x$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0, \exists x \in M : x < \gamma + \varepsilon$$

Beweis.

$$(a) \implies: \text{Da } \gamma = \sup M \implies (i)$$

$$(ii) \forall \varepsilon > 0 \text{ ist } \gamma - \varepsilon \text{ keine obere Schranke von } M$$

$$\implies \exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon$$

$$\iff: \text{Es gelten (i)+(ii)} \implies \gamma \text{ ist eine obere Schranke von } M$$

$$\text{Ist } \alpha = \sup M \implies \alpha \leq \gamma \text{ (Zu zeigen: } \alpha = \gamma)$$

$$\text{Wäre } \alpha < \gamma$$

$$\implies \varepsilon := \frac{1}{2}(\gamma - \alpha) > 0$$

$$\implies \exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha) > \alpha$$

$$(b) \text{ analog}$$

□

Übung 3.14. $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$

$$\bullet B \text{ ist nach oben beschränkt} \implies \sup A \leq \sup B$$

$$\bullet B \text{ ist nach unten beschränkt} \implies \inf B \leq \inf A$$

Definition 3.15. $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. M hat ein größtes (bzw. kleinstes) Element $:\Leftrightarrow$

$$\exists x_0 \in M : x \leq x_0 \text{ (bzw. } x_0 \leq x) \quad \forall x \in M$$

$$x_0 = \max M \text{ (bzw. } x_0 = \min M)$$

Beachte:

$$x_0 = \sup M = \max M \iff x_0 \in M$$

Beispiel 3.16. $x, y \in \mathbb{R}$

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$