

Analysis I

Yichuan Shen

28. Oktober 2011

Definition 3.17. $A \subset \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- monoton wachsend : $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton wachsend : $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 : f(x_1) > f(x_2)$
- monoton fallend : $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton fallend : $\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in A, x_1 > x_2 : f(x_1) < f(x_2)$

f heißt beschränkt : $\Longleftrightarrow f(A)$ ist beschränkt.

Kapitel 4

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Definition 4.0. Eine Menge M heißt induktiv : $\Longleftrightarrow$

- (i) $1 \in M$
- (ii) $x \in M \implies x + 1 \in M$

Bemerkung 4.1.

1. $\mathbb{R}, \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ sind induktive Mengen.
2. Der Durchschnitt beliebig vieler induktiver Mengen ist induktiv.

Definition 4.2. $F := \{M \subset \mathbb{R} \mid M \text{ ist induktiv}\}$

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in F} M \subset \mathbb{R}$$

ist die Menge der natürlichen Zahlen.

Satz 4.3. (*Vollständige Induktion*) Die Aussage $A(n)$ sei für alle natürliche Zahlen $n \geq n_0$ definiert und es gelte:

- (i) $A(n_0)$ ist richtig
- (ii) Ist $A(k)$ richtig für $k = n_0, n_0 + 1, \dots, n \implies A(n + 1)$ ist richtig

Dann ist $A(n)$ richtig $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$.

Beweis. $M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n_0), A(n_0 + 1), \dots, A(n_0 + n - 1) \text{ sind richtig}\} \subset \mathbb{N}$ ist eine induktive Menge $\implies M = \mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist.

□

Beispiel 4.4.

- (i) $\forall n \in \mathbb{N} : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- (ii) $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, x_j > 0, x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = 1 \implies x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n$

Beweis.

- (i) • IA: Für $n = 1 : 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} \checkmark$
 • IS:

$$\begin{aligned}
 & (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{Nach Induktionsvoraussetzung}) \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
 \end{aligned}$$

□

- (ii) • IA: $A(1)$ ist richtig, da $x_1 = 1 \implies x_1 \geq 1 \checkmark$
 • IS: $A(1)$ bis $A(n)$ seien richtig, und es gilt

$$x_1 \cdots x_{n+1} = 1$$

Falls $\forall j = 1, \dots, n+1 : x_j = 1 \implies x_1 + \dots + x_{n+1} \geq n+1$

Wenn nicht $\implies \exists k \in \{1, \dots, n+1\} : x_k \neq 1$. Falls

$$- x_k < 1 \implies \exists l \in \{1, \dots, n+1\} : x_l > 1$$

$$- x_k > 1 \implies \exists l \in \{1, \dots, n+1\} : x_l < 1$$

o.B.d.A: Seien $x_n < 1, x_{n+1} > 1$. Setze:

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{für } j = 1, \dots, n-1 \\ x_n x_{n+1} & \text{für } j = n \end{cases}$$

Nach Voraussetzung folgt $y_1 \cdots y_n = 1 \implies y_1 + \dots + y_n = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n x_{n+1} \geq n$

$$\begin{aligned}
 & \implies x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1} \\
 &= \underbrace{x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n x_{n+1}}_{\geq n} + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} \\
 &\geq n + x_n + x_{n+1} - x_n x_{n+1} \\
 &= (n+1) - \underbrace{(1-x_n)}_{>0} \underbrace{(1-x_{n+1})}_{<0} \\
 &\geq n+1
 \end{aligned}$$

□

Satz 4.5.

- (i) $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1$
 (ii) $\forall m, n \in \mathbb{N}, m > n : m - n \geq 1$
 (iii) $\emptyset \neq M \subset \mathbb{N} \implies M$ besitzt ein kleinstes Element
 (iv) $\mathbb{N}$ ist nicht nach oben beschränkt

Beweis.

- (i) IA: $n = 1$ gilt $n \geq 1$ IS: Gilt $n \geq 1 \implies n+1 \geq 1$
 (ii) Definiere $A(n)$ wie folgt: Ist $m \in \mathbb{N}, m > n \implies m - n \geq 1$

- IA: Zu zeigen: $A(1)$ ist richtig

$$M := \{1\} \cup \{m \in \mathbb{N} \mid m - 1 \geq 1\} \subset \mathbb{N}$$

$$1 \in M \wedge (m \in M \implies m + 1 \in M) \implies M = \mathbb{N}, \text{ da } M \text{ induktiv ist.}$$

- IS: Zu zeigen: $A(n) \implies A(n + 1)$. Es gilt:

$$\forall m \in \mathbb{N}, m > n : m - n \geq 1$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} m - (n + 1) &= (m - n) + 1 \geq 1 + 1 = 2 \quad \text{für } m > n \\ \implies m - (n + 1) &\geq 1 \quad \text{für } m > n + 1 \end{aligned}$$

(iii) $\mathbb{N}$ ist durch 1 nach unten beschränkt $\implies \beta = \inf M$ existiert

$$\implies \exists m \in M : m \geq \beta, m < \beta + 1$$

Wäre $k \neq m, k \in M$ mit $k < \beta + 1, k \geq \beta \implies |k - m| < 1 \implies k - m < 1 \vee m - k < 1$. Das ist ein Widerspruch zu (ii). D.h.

$$\forall k \in M, k \neq m : k \geq \beta + 1 > m$$

$$\implies m = \min M$$

(iv) Wäre $\mathbb{N}$ nach oben beschränkt $\implies \gamma = \sup \mathbb{N}$ existiert $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n > \gamma - 1 \implies n + 1 > \gamma$. Da $\mathbb{N}$ induktiv ist $\implies n + 1 \in \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch zu $\gamma = \sup \mathbb{N}$.

□

Satz 4.6. (Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{N}$)

(i) $\forall a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0, \exists n \in \mathbb{N} : n \cdot a > b$

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$

Bezeichnung 4.7. $n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n a_i := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad \prod_{j=1}^n a_j := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

Beachte.

$$(1) \sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k$$

(2) Ist $S : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijektiv, dann gilt:

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{j=1}^n a_{S(j)}, \quad \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{j=1}^n a_{S(j)}$$

(3) Ist $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$:

$$a^n := \prod_{j=1}^n a, \quad a^0 := 1 \text{ für } a \neq 0, \quad a^{-n} := (a^{-1})^n$$

Beispiel 4.8.

$$(i) \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(iii) \prod_{j=1}^n \frac{j}{j+1} = \frac{1}{n+1}$$

$$(iv) \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} : \sum_{j=0}^n q^j = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

$$(v) h \in \mathbb{R}, h \geq -1, n \in \mathbb{N} \implies (1+h)^n \geq 1+nh$$

Beweis.

- (v) • IA: $n = 1 \implies 1+h \geq 1+h \checkmark$
 • IS:

$$\begin{aligned} (1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h) \\ &\geq (1+nh)(1+h) \\ &= 1 + (n+1)h + \underbrace{nh^2}_{>0} \\ &\geq 1 + (n+1)h \end{aligned}$$

□

Bezeichnung.

$$(i) 0! := 1, n \in \mathbb{N} : n! := 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{j=1}^n j$$

$$(ii) \alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{k!}$$

Beachte.

$$(i) \binom{\alpha}{k} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j}$$

$$(ii) \binom{\alpha}{1} = \alpha$$

$$(iii) k, n \in \mathbb{N}_0 : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(iv) \forall k \in \mathbb{N}_0 : \binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$$

Satz 4.10.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Beweis. (*Induktion*)

- IA: $n = 1 : a + b = \binom{1}{0}b^1 + \binom{1}{1}a^1 = a + b \checkmark$
- IS: Die Behauptung gelte für $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^{n+1} &= (a+b)^n(a+b) \\
 &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1}
 \end{aligned}$$

Definition 4.11. $k \in \mathbb{N}, \mathbb{N}(k) = \{1, \dots, k\}$. Eine Menge M heißt endlich : $\iff M$ ist entweder leer oder es existiert eine bijektive Abbildung von $\mathbb{N}(k)$ auf M .

$$k = \#M$$

Ist M nicht endlich, so heißt M unendlich.

Beispiel 4.12. Sei M eine Menge mit n Elementen, $n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq n$

$$C_k^n := \#\{A \subset M \mid \#A = k\} = \binom{n}{k}$$

Beweis. (*Induktion*) $M = \{a_1, \dots, a_n\}$

- IA: $n = 1 \checkmark$
- IS: Die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}$. $k = 0, k = n + 1$ klar, wegen

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

Für $1 \leq k \leq n$ setze:

$$\left. \begin{aligned} K_0 &:= \{A \subset M \mid \#A = k, a_{n+1} \notin A\} \\ K_1 &:= \{A \subset M \mid \#A = k, a_{n+1} \in A\} \end{aligned} \right\} \implies C_k^{n+1} = \#K_0 + \#K_1$$

Es gilt: $\#K_0 = \binom{n}{k}, \#K_1 = \binom{n}{k-1}$

$$\implies C_k^{n+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

□