

Blatt 1

Zentralübungsaufgaben

1. Es seien M, N Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
 - a) Für alle $A, B \subset M$ gilt $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
 - b) Für alle $A, B \subset M$ gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
 - c) Im allgemeinen gilt nicht $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.
 - a) $f_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x + y$;
 - b) $f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, (a, b) \mapsto 2^a 3^b$;
 - c) $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + ax$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Bei dieser Teilaufgabe darf mit einer Skizze argumentiert werden.
3. Es seien M, N Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Zeigen Sie:
 - a) f ist injektiv genau dann, wenn $\forall A, B \subset M : f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
 - b) f ist bijektiv genau dann, wenn $\forall A \subset M : f(M \setminus A) = N \setminus f(A)$.

Hausaufgaben

1.
 - a) Es sei $A := \{1, 2, \{5, 7\}, \{2\}, 1\}$. Geben Sie die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ von A explizit an.
 - b) Es seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie, dass $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Bitte wenden!

- c) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage für vier Mengen A, B, C, D :
 $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.
2. Es seien X, Y Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Es sei weiterhin $\mathcal{B}$ ein System von Teilmengen von Y . Zeigen Sie die folgenden Aussagen.
- a) Für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ gilt, $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.
- b) $f^{-1}(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} f^{-1}(B)$.
3. Es seien A, B, C, D Mengen und $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ und $h : C \rightarrow D$ Abbildungen. Zeigen Sie:
- a) Wenn f und g injektiv sind, so ist $g \circ f$ injektiv.
- b) Wenn f und g surjektiv sind, so ist $g \circ f$ surjektiv.
- c) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f injektiv.
4. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität, Bijektivität und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung.
- a) $f_1 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2$;
- b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$;
- c) $f_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, k \mapsto \begin{cases} 2k, & \text{falls } k > 0, \\ 1 - 2k, & \text{falls } k \leq 0. \end{cases}$
- 5.* Es seien A, B, C Mengen und $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ und $h : C \rightarrow A$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass wenn die Abbildungen $h \circ g \circ f$ und $g \circ f \circ h$ beide surjektiv und die Abbildung $f \circ h \circ g$ injektiv ist, dann sind die Abbildungen f, g und h alle bijektiv.

Bonusaufgaben: Bonusaufgaben sind (meistens schwierigere) Hausaufgaben mit denen Sie extra Punkte sammeln können. Sie sind mit einem Stern (z.B. 5.*) gekennzeichnet.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 26.10. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.