

Blatt 2

Zentralübungsaufgaben

1. Es sei $K : \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$, wobei $\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen bezeichnet.
 - a) Zeigen Sie, dass K mit den von den reellen Zahlen induzierten Operationen ein Körper ist.
 - b) Es seien $P := \{a + b\sqrt{2} \mid a + b\sqrt{2} > 0\}$ und $P' := \{a + b\sqrt{2} \mid a - b\sqrt{2} > 0\}$. Zeigen Sie, dass P und P' Positivbereiche von K sind.
 - c) Zeigen Sie, dass $P \neq P'$.
2. Es sei K ein angeordneter Körper. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\frac{|x + y|}{1 + |x| + |y|} \leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|} \quad \text{für } x, y \in K.$$

3.
 - a) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer. Jedes positive $\varepsilon \in \mathbb{R}$ sei eine obere Schranke von A . Zeigen Sie, dass $\sup A \leq 0$.
 - b) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Setze $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie, dass das Supremum von $A + B$ existiert, und es gilt $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Hausaufgaben

1. Konstruieren Sie einen Körper mit zwei Elementen. Erklären Sie dazu explizit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf der Menge $\{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass dieser Körper nicht angeordnet ist.
2.
 - a) Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen für $x, y \in \mathbb{R}$:
 - i) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ für $x > 0, y > 0$,

Bitte wenden!

- ii) $2xy \leq \frac{1}{2}(x+y)^2 \leq x^2 + y^2$.
- b) Entscheiden Sie, ob Supremum, Infimum, Maximum, Minimum der Menge $M := \{2^{-m} + n^{-1} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ existieren und berechnen Sie diese Größen gegebenenfalls.
3. a) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie: Aus $A \subset B$ folgt, dass $\sup A \leq \sup B$.
- b) Es sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach unten beschränkt. Es gelte $\inf A > 0$ und wir definieren $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$. Beweisen Sie: Die Menge A^{-1} ist nach oben beschränkt, und es gilt $\sup(A^{-1}) = (\inf A)^{-1}$.
4. a) *Behauptung:* In jedem Sack Erbsen gibt es nur gelbe oder nur nichtgelbe Erbsen.
Beweis mit vollständiger Induktion über die Anzahl $n \in \mathbb{N}$ der Erbsen im Sack:
 Der Induktionsanfang $n = 1$ ist trivial. Nehmen wir im Induktionsschritt aus einem Sack mit $n \geq 1$ Erbsen eine Erbse e heraus (ohne sie anzusehen), so sind die restlichen $n - 1$ Erbsen nach der Induktionshypothese alle gelb oder alle nichtgelb. Um diesen Farbton festzustellen, entnehmen wir dem Sack eine weitere Erbse g und legen die Erbse e wieder in den Sack. Der Sack enthält also wieder $n - 1$ nach der Induktionshypothese ausschließlich gelbe oder nichtgelbe Erbsen. Also ist e genau dann gelb, wenn auch g gelb ist. Der Induktionsbeweis ist beendet. $\square$
- Wo liegt der Fehler?
- b) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Abgabe der Hausaufgaben: Mittwoch, den 2.11. um 9:15 Uhr in den Briefkästen im Foyer des INF 294.