

Symbole

Eine naive Vorstellung von Mathematik (die aber von vielen Logikern geteilt wird) ist, dass in der Mathematik lediglich Symbole manipuliert werden. Es ist in der Tat so, dass die Sprache der Mathematik durch die Verwendung von Symbolen geprägt ist; diese sind aber kein Selbstzweck, sondern sie dienen sowohl dazu, die Objekte, die die Mathematiker wirklich interessieren, als auch die Beziehungen zwischen diesen Objekten mit Standardsymbolen kontrollierbar zu bezeichnen.

Einige Symbole haben sich durchgesetzt; diese sollten Sie verwenden, und zwar in ihrer richtigen Bedeutung. Einige davon sind: $\{ \mid \}$, $(, , ,)$, $\in$, $\notin$, $\cap$, $\cup$, $\times$, $A-B$ oder $A \setminus B$, $\emptyset$, $\subseteq$, $\supseteq$, $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$.

Sie lernen die Bedeutung dieser Symbole in den Anfängervorlesungen. Deshalb soll auf ihre mathematische Bedeutung hier nicht eingegangen werden.

* * *

Beachten Sie, dass eine zu konzentrierte Verwendung von Symbolen Ihre Texte unlesbar machen kann. Dies wird durch die folgende Gegenüberstellung von drei Texten klar (die durch einen Abschnitt des Buches *Humor in der Mathematik* von F. Wille inspiriert ist). Alle drei Texte versuchen, den gleichen Sachverhalt, nämlich den sogenannten Heiratssatz, zu beschreiben. Die erste Beschreibung lautet wie folgt:

Satz. Sind zwei Mengen $A = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ von je n Elementen gegeben sowie eine Relation $R \subseteq A \times B$, so ist es dann und nur dann möglich, eine Permutation $(j_1, \dots, j_n)$ der Zahlen $1, 2, \dots, n$ so anzugeben, dass

$$(A_i, B_{j_i}) \in R \text{ für alle } i = 1, 2, \dots, n$$

gilt, wenn für jede Teilmenge A' von A gilt, dass die Menge

$$B' = \{B_k \in B \mid \exists A_i \in A' : (A_i, B_k) \in R\}$$

größere oder gleiche Mächtigkeit wie A' hat.

Wenn Sie diesen Text auf Anhieb verstanden haben, ziehe ich meinen Hut vor Ihnen! Die zweite Version ist in dem Stil geschrieben, in dem üblicherweise seriöse Lehrbücher (etwa das Buch von R. Halder und W. Heise, in dem Sie auch einen Beweis des Heiratssatzes finden) verfasst sind:

Definition. Sei $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_n)$ eine Familie von Mengen. Wir nennen ein n -Tupel $(m_1, \dots, m_n)$ ein **Vertretersystem** von $\mathbf{M}$, falls $m_i \in M_i$ ist und die Elemente $m_1, \dots, m_n$ verschieden sind.

Satz. Eine Familie $\mathbf{M}$ endlicher Mengen besitzt genau dann ein Vertretersystem, wenn die Vereinigung von je k Mengen aus $\mathbf{M}$ mindestens k Elemente umfasst.

Schließlich die in eine anschauliche Fragestellung eingebettete Formulierung:

Wir betrachten eine Menge unverheirateter junger Frauen und Männer. Die Frage ist, ob jede der jungen Damen sich einen der mit ihr befreundeten Männer zum Mann wählen kann, so dass alle Frauen einen Mann haben und die Gesetze der Monogamie (nur ein Mann pro Frau, nur eine Frau pro Mann) strikt eingehalten werden. Der Heiratssatz gibt die Bedingung an, unter der dies möglich ist:

Heiratssatz. Eine solche Massenhochzeit ist genau dann möglich, wenn es für je k Frauen mindestens k Männer gibt, von denen jeder mit mindestens einer der k Frauen befreundet ist.

* * *

Der Vorteil einer konkreten Formulierung liegt in ihrer Anschaulichkeit, die unter anderem bewirkt, dass man sich eine solche Formulierung leicht merken kann. Sie werden im Mathematikstudium aber in der Regel mit relativ abstrakt formulierten Gedanken umgehen müssen.

Mein Rat: Wenn sich eine anschauliche Version eines Satzes anbietet, merken Sie sich diese! Entwickeln Sie aber zusätzlich die Fähigkeit, jeden Sachverhalt immer eine Stufe abstrakter (formaler, symbolischer) formulieren zu können. So werden Sie sich einerseits die Sätze gut merken können, andererseits aber keine Probleme mit der Abstraktion mehr haben.

Übungen

- 1 Machen Sie sich die Bedeutung der im Text aufgeführten Symbole klar.
- 2 Überzeugen Sie sich, dass alle drei Formulierungen des Heiratssatzes das gleiche bedeuten.
- 3 Machen Sie sich die Bedingung des Heiratssatzes in den Fällen $k = 1, 2, 3$ klar.