

Beweise

Beweise sind das Herz der Mathematik. Die Mathematiker sind zu Recht stolz darauf, dass die von ihnen gemachten Aussagen (die Sätze) rein logisch, also objektiv nachgewiesen werden können, und nicht durch ‚Expertengutachten‘, ‚Experimente‘, ‚Technologievoraussetzungen‘ gestützt werden müssen. Die revolutionäre Erkenntnis, dass Beweise möglich sind, geht auf die alten Griechen zurück. EUKLID (ca. 300 v. Chr.) hat die damals bekannte Mathematik in seinen *Elementen* zusammengefasst und dabei konsequent nicht beobachtete Naturgesetze aufgelistet, sondern Sätze bewiesen. Diese Vorgehensweise ist bis heute vorbildlich.

Daher sollten Sie Beweise äußerst sorgfältig darstellen, um so die Überlegenheit mathematischer Argumentation dem Leser deutlich zu machen.

Entscheidend ist die Organisation des Beweises.

1. Sagen Sie, was Sie beweisen!

Zu Beginn eines Beweises werden Bezeichnungen festgelegt. Außerdem sollten Sie präzise sagen, was Sie zu beweisen gedenken. Der Leser muss zu jedem Zeitpunkt wissen, welche Teilbehauptung gerade gezeigt wird, und was danach folgt:

**Sagen Sie, was Sie vorhaben, tun Sie es,
und sagen Sie dann, dass Sie es getan haben!**

Ich empfehle, die zu beweisende Aussage zu Beginn des Beweises nochmals in mathematischer Symbolik auszudrücken.



Satz. *Jede endliche Menge linear unabhängiger Vektoren eines Vektorraums V kann zu einer Basis von V ergänzt werden.*

Beweis. Sei $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine endliche Menge linear unabhängiger Vektoren von V . Es ist zu zeigen, dass es Vektoren $v_{k+1}, \dots$ gibt derart, dass $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots\}$ eine Basis von V ist.

Die Schlüsselformulierungen lauten „es ist zu zeigen“, „es genügt zu beweisen“,...

2. Gliedern Sie Ihren Beweis!

Dies ist bei langen Beweisen (länger als eine halbe Seite) unbedingt notwendig. Isolieren Sie Unterbehauptungen, die man beweisen muss; diese kann man durch die Bezeichnung „Schritt 1“, „Schritt 2“, ... kennzeichnen.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist, den Beweis in *Fälle* zu untergliedern. Achten Sie dabei darauf, dass Sie alle Fälle erfassen. Dies ist besonders dann kritisch, wenn Sie mehr als zwei Fälle unterscheiden:



Satz. *Jede nichtleere endliche Menge hat genau so viele Teilmengen ungerader Mächtigkeit wie Teilmengen gerader Mächtigkeit*

Beweis. Sei M eine endliche Menge.

1. *Fall:* Die Mächtigkeit von M ist ungerade.

Dann ist die Abbildung $X \rightarrow M \setminus X$ eine Bijektion von der Menge der Teilmengen ungerader Mächtigkeit auf die Menge der Teilmengen gerader Mächtigkeit.

2. *Fall:* Die Mächtigkeit von M ist gerade.

Betrachte ein Element m von M . Dann leistet die durch

$$f(X) := (M \setminus X) \cup \{m\}, \quad \text{falls } m \in X,$$

$$f(X) := (M \setminus X) \setminus \{m\}, \quad \text{falls } m \notin X.$$

definierte Abbildung f das Gewünschte.

Warnung: Unnötige Fallunterscheidungen verwirren nur! Machen Sie eine Fallunterscheidung nur, wenn Sie die einzelnen Fälle mit verschiedenen Argumenten behandeln. Es ist schlecht, eine Fallunterscheidung vorzunehmen, den ersten Fall zu behandeln und dann zu sagen



Der zweite Fall wird genau so wie der erste gelöst.

(Das ist ein sinnvolles Vorgehen auf dem ‚Schmierpapier‘, in der ‚Reinschrift‘ sollten Sie das vermeiden.) Wenn der zweite Fall nur im Wesentlichen so gelöst werden kann wie der erste, so sollte man das auch ausdrücken:



Um den zweiten Fall zu lösen, geht man entsprechend wie im ersten vor; man hat nur die Ungleichung () durch die folgende Ungleichung (**) zu ersetzen:*

3. Kennzeichnen Sie den Schluss eines Beweises!

Sie können natürlich sagen: „Der Leser muss das selbst merken“, aber es hat sich gezeigt, dass die Leser äußerst dankbar sind, wenn ihnen signalisiert wird, dass der Autor so viele Argumente zusammengestellt hat, dass die Aussage – seiner Meinung nach – bewiesen ist.

Für die Markierung des Beweisendes haben Sie viele Möglichkeiten. Sie können schreiben

- *Damit ist alles gezeigt* oder – volltönender, aber eigentlich überflüssig –
- *damit ist der Satz vollständig bewiesen.*

- ... wie wir behauptet hatten.
- *Dieser Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war, also die Behauptung richtig ist.*
- ..., w.z.b.w. („was zu beweisen war“), oder vornehm lateinisch
- ..., *Q.E.D.* („quod erat demonstrandum“).

Am ökonomischsten ist sicherlich das Beweisabschlusszeichen

- $\square$

Übung

- 1 Bei der Formulierung des Beweises des Satzes, dass jede endliche Menge genau so viele Teilmengen gerader Mächtigkeit wie ungerader Mächtigkeit hat, habe ich gegen eine Grundregel guter Bezeichnungen verstoßen. Gegen welche?
- 2 Beweisen Sie den in Aufgabe 1 erwähnten Satz durch Induktion nach der Anzahl der Elemente der Menge.