

Abbildung, Funktion, Operator

Der Abbildungsbegriff ist zentral in der Mathematik; er wurde aber erst vergleichsweise spät formal definiert. Dementsprechend gibt es viele Wörter, die in speziellen Situationen für Abbildung verwendet werden. Mit anderen Worten: Man muss sich an den Sprachgebrauch halten, der in dem Gebiet herrscht, in dem man gerade arbeitet.

Abbildung ist der in unserem Zusammenhang allgemeinste Begriff: Eine **Abbildung** ist eine Vorschrift f , die jedem Element des Definitionsbereichs (Urbildmenge) X genau ein Element des Bildbereichs Y zuordnet; man schreibt dafür $f: X \rightarrow Y$. Das Bild eines Elementes $x \in X$ wird in der Regel (in der Analysis stets) mit $f(x)$ bezeichnet; mitunter (vor allem in der Algebra) verwendet man auch die Schreibweise x^f ; dies hat Vorteile, ist aber für den Anfänger ungewohnt.

Was ist eine **Funktion**? Hierfür gibt es meiner Beobachtung nach zwei Antworten.

Erste Antwort: ‚Abbildung‘ und ‚Funktion‘ sind synonym; sie bedeuten exakt das Gleiche.

Zweite Antwort: Eine Funktion ist eine Abbildung einer beliebigen Menge in einen Körper. Man spricht von reellwertigen Funktionen und komplexwertigen Funktionen; dies sind Abbildungen, die irgendwelchen Objekten reelle oder komplexe Zahlen zuordnen. In diesem Sinne ist eine Funktion eine Abbildung, mit deren Bildern man rechnen (addieren und multiplizieren) kann. Eine entsprechende Erklärung ist etwa im *Vieweg Mathematik Lexikon* zu finden.

Ich habe mir angewöhnt, den Begriff ‚Funktion‘ im letzteren Sinne zu gebrauchen.

Eine **Transformation** ist eine Abbildung einer Menge in sich. Zum Beispiel spricht man davon, dass Drehungen, Verschiebungen usw. geometrische Transformationen sind. Eine Transformation einer endlichen Menge, die bijektiv ist, nennt man eine **Permutation**.

Nun kommen noch zwei schwierigere Begriffe.

Auch ein **Operator** ist eine Abbildung, hierüber gibt es keine Meinungsverschiedenheiten. Häufig wird das Wort „Operator“ für eine Abbildung verwendet, bei der Urbild- und Bildbereich aus Abbildungen besteht. Klar? Ein Beispiel:



Die Abbildung, die jeder (differenzierbaren) Funktion f ihre Ableitung f' zuordnet, heißt **Ableitungsoperator**.

In manchen Gebieten, wie etwa in der Funktionalanalysis, wird das Wort ‚Operator‘ sehr großzügig eingesetzt; dort wird das Wort ‚Operator‘ für fast jede vorkommende Abbildung gebraucht.

Von einer **Form** spricht man schließlich bei Abbildungen, die einen oder mehrere Vektoren auf ein Körperelement abbilden. Ist V ein K -Vektorraum, so ist zum Beispiel eine **Linearform** eine Abbildung von V in K , die eine lineare Abbildung ist. Eine **quadratische Form** und eine **hermitesche Form** sind ebenfalls eine Abbildung von V in K mit gewissen Eigenschaften. **Bilinearformen**, **Semibilinearformen**, **Sesquilinearformen** usw. sind Abbildung von $V \times V$ in K mit gewissen Linearitätseigenschaften; bei diesen wird also jeweils einem Paar von Vektoren ein Körperelement zugeordnet.

Noch zwei wichtige *Bemerkungen*.

1. Unterscheiden Sie zwischen f und $f(x)$! Wenn f eine Abbildung von X nach Y ist, so heißt die Abbildung, wie gesagt, f – und nicht $f(x)$; $f(x)$ bezeichnet vielmehr das Bild des Elements x unter der Abbildung f . Auch wenn es viele berühmte Vorbilder gibt – es ist schlecht zu schreiben



Die Abbildung $f(x)$...

oder



Das Polynom $f(t)$...

Gut ist dagegen



Sei f die durch $f(x) := x+1$ ($x \in \mathbb{N}$) definierte Abbildung.

oder



Das Polynom f hat die Nullstelle 2, da $f(2) = 0$ ist.

2. Noch liest man in vielen älteren Büchern



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist $f(x)$ **identisch Null**.

oder



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist $f(x) \equiv 0$.

Das heißt in moderner Sprache:



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist f die **Nullabbildung**.

Man kann dafür auch kürzer schreiben



... es folgt $f(x) = 0$ für alle x ; also ist $f = 0$.

Das Zeichen $\equiv$ sollte nur für die Kongruenzrelation in der Zahlentheorie bzw. in der Geometrie verwendet werden. Siehe den Abschnitt „modulo“ in „Wörter, die man wissen muss“.

Bei Polynomen muss man übrigens genau zwischen dem *Polynom* und der zugehörigen *Polynomfunktion* unterscheiden. Ein Polynom ist ein formaler Ausdruck der Form

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

wobei die a_i aus einem Körper K kommen. Die zugehörige **Polynomfunktion** ist die Abbildung, die jedem Körperelement k das Element

$$f(k) = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k + a_0$$

zuordnet.

Es ist durchaus möglich, dass eine Polynomfunktion die Nullabbildung ist, ohne dass das Polynom das Nullpolynom ist. Dies passiert zum Beispiel über endlichen Körpern. Zum Beispiel hat das Polynom $f = x^2 - x$ jedes Element des Körpers $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ als Nullstelle; die Polynomfunktion ist also die Nullabbildung von $\mathbb{Z}_2$, obwohl das Polynom nicht das Nullpolynom ist.

Übungen

- 1 Sind die „Funktionen“ Ihres Taschenrechners Funktionen im mathematischen Sinne?
- 2 **Gut oder weniger gut?**
 - ☐ Der Ableitungsoperator ist die Funktion $f(x)$.
 - ☐ Wenn ein Polynom über $\mathbf{R}$ vom Grad n mehr als n Nullstellen hat, ist es identisch Null.
 - ☐ Eine Funktion ist eine Abbildung, bei der jedes Urbild genau ein Bild hat.
 - ☐ Eine Funktion ist eine Abbildung, bei der jedes Bild genau ein Urbild hat.
- 3 Gibt es zwei verschiedene Polynome $f_1, f_2 \in K[x]$, die dieselbe Polynomfunktion haben?