

Übungsaufgaben

Im Folgenden sind einige Übungsaufgaben mit Lösungen angegeben. Die Lösungen sind mathematisch (na ja) richtig, aber indiskutabel aufgeschrieben. Dabei habe ich mir nichts aus den Fingern gesogen, sondern alles tatsächlich „gelöst“ Übungsaufgaben entnommen.

Ihre Aufgabe besteht erstens darin, alle Unklarheiten und Ungeschicklichkeiten zu entdecken und zweitens, selbst eine gute Lösung zu produzieren.

-
- 1 Zeigen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden natürlichen Zahl ergibt bei Division durch 4 den Rest 1.

n Quadrat $\Rightarrow n^2$

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = \text{Rest } 1$$

$\uparrow$
modulo 4

-
- 2 Zeigen Sie: Sei p eine Primzahl, und sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt:

$$p \mid n^2 \Leftrightarrow p \mid n.$$

Zu zeigen: $p \text{ teilt } n^2 \Leftrightarrow \text{wenn } p \mid n$

Klar: notwendig ✓

Umgekehrt: Wenn $p \nmid n \Rightarrow$ auch $p \nmid n^2$
wg. Eindeutigkeit PFE.

- 3 Zeigen Sie: Eine 1001-elementige Menge hat genau so viele Teilmengen gerader Mächtigkeit wie Teilmengen ungerader Mächtigkeit.

Sei Y Teilmenge einer Menge mit $|Y| = y$ gerade

O.B.d.A. $|Y| = y = 2y'$, $y' \in \mathbb{N}$

Dann $\overset{\text{Komplement}}{\uparrow} C(Y)$ ungerade, weil $2n+1 - 2y'$
 $= 2(n-y') + 1$ unger

Umkehrung analog.

- 4 Zeigen Sie: Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn ihre letzte Stelle durch 2 teilbar ist.

$$\Rightarrow a_n 10^n + \dots + a_1 10^1 + a_0 \text{ gerade}$$

$$\Rightarrow a_0 \text{ gerade, da } 2 \mid 10$$

$$\Leftrightarrow 2 \mid 10 a_0 = 2 a_0'$$

$$\Rightarrow n = a_k 10^k + \dots + a_1 10 + a_0 \text{ gerade}$$

- 5 Zeigen Sie: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Zu zeigen: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad 2q^2 = p^2$$

$$p, q \text{ gerade} \Rightarrow \nexists \text{ Q.E.D.}$$

- 6 (a) Definieren Sie die Summe zweier binärer n-Tupel.
 (b) Was ist das „Negative“ eines binären n-Tupels?

$$(a) X = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}) \quad a_{i_j} \in \{0, 1\}$$

$$y = (b_{n-1, n-1}, \dots, b_{1,1}, b_{0,0}) \quad \forall i, j$$

$$b_{k,k} \in \{0, 1\} \quad \forall k, k$$

$$X + y =: (\dots, a_{i_j} + b_{n-j, n-j}, \dots)$$

$$(b) -a_i$$

- 7 Sei f die durch

$$f: (1, 0) \rightarrow (3, 2)$$

$$f: (0, 1) \rightarrow (1, 0)$$

definierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ in sich. Geben Sie (mit Begründung) eine Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis $\{(1,1), (1,-1)\}$ an.

O.B.d.A. $B = (1,1), (1,-1)$ Basis.

$$f(1,1) = (4,2) = x \cdot (1,1) + y(1,-1)$$

$$f(1,-1) = (2,2) = x \cdot (1,1) + y \cdot (1,-1)$$

Nun:

$$x+y=4, \quad x-y=2 \quad \xrightarrow{\text{trivial}} \quad x=3, y=1$$

$$x+y=2, \quad x-y=2 \quad \Rightarrow \quad x=2, y=0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Q.E.D.}$$