

II. Folgen und Reihen

Wie in der Einführung in diese Vorlesung schon verdeutlicht wurde, steht im Mittelpunkt der Analysis die Untersuchung von *Grenzwerten*. Viele wichtige mathematische und physikalische Begriffe lassen sich (nur) durch Grenzwerte definieren, z.B. die Geschwindigkeit, Beschleunigung, Arbeit, Energie, Leistung, Wirkung, Volumen und Oberfläche, Länge und Krümmung von Kurven, die Krümmung von Flächen. Grundidee ist dabei, dass man versucht ein unbekanntes oder schwierig zu erfassendes (mathematisches oder physikalisches) Objekt durch bekannte oder leichter zugängliche Objekte zu approximieren. Viele Größen (wie z.B. die Kreiszahl π) lassen sich nicht durch einen in endlich vielen Schritten exakt berechenbaren Ausdruck darstellen, sondern nur mit "beliebiger Genauigkeit" approximieren.

Was das genau bedeutet, wollen wir zunächst am Beispiel reeller und komplexer Zahlenfolgen verdeutlichen. Später werden wir so wichtige Funktionen, wie z.B. die Exponentialfunktion oder die Winkelfunktionen, ebenfalls mittels Grenzprozessen einführen.

Grenzprozesse (der verschiedensten Arten) sind ein wesentliches Kennzeichen der Analysis.

Quadratwurzeln aus nicht negativen Zahlen existieren zwar in $\mathbb{R}$, allgemeiner k -te Wurzeln ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), aber wir kennen bis jetzt kein systematisches Verfahren, das den Wurzelexponenten k und ein beliebiges $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ als Input akzeptiert und Zahldaten vorgeschriebener Genauigkeit für $\sqrt[k]{a}$ produziert.

Frage: Wie berechnet ein Taschenrechner $\sin 23,5^\circ$?

Wir entwickeln daher ein allgemeines Konstruktionswerkzeug für Zahlen und Funktionen, und zwar in zweierlei Hinsicht:

- erstens geht es darum, neue Objekte begrifflich zu konzipieren und formelmäßig darzustellen, wie z.B. die Eulersche Zahl

$$e = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

oder die Kreiszahl π .

- zweitens sollte man in die Lage versetzt werden, diese Objekte mit endlich vielen Schritten mit beliebiger Genauigkeit (numerisch) zu berechnen.

Ein derartiger Konstruktionswerkzeug ist der *Folgenbegriff* und im unmittelbaren Zusammenhang damit steht der Begriff der "Reihe".

7 Folgen (Begriff der Konvergenz, erste Beispiele)

7.1 Definition

Ist X eine beliebige (nicht leere) Menge, so versteht man unter einer *Folge von Elementen aus X* eine Zuordnung (Abbildung), die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein eindeutig bestimmtes Element $a_n \in X$ zuordnet.

Man schreibt hierfür: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder suggestiver $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ oder kurz (a_n)

a_n heißt das n -te Glied der Folge, n der Folgenindex, er kann durch jedes andere Symbol ersetzt werden. Statt die natürlichen Zahlen als Indexbereich zu verwenden, kann man etwas allgemeine Menge vom Typ $\{n \in \mathbb{Z}; n \geq k\}$ mit einer Zahl $k \in \mathbb{Z}$ betrachten, so erhält man Folgen

$$(a_n)_{n \geq k} \text{ oder } (a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$$

Häufig ist $k = 0$ oder $k = 1$.

Wir betrachten zunächst nur *reelle* oder *komplexe* Zahlenfolgen, d.h. wir wählen $X = \mathbb{R}$ oder $X = \mathbb{C}$; hierbei verwenden wir wieder die gemeinsame Bezeichnung $\mathbb{K}$.

7.2 Beispiele

- (1) Ist $c \in \mathbb{K}$ ein festes Element und setzt man $a_n := c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhält man die *konstante Folge*

$$(a_n) = (c, c, c, \dots)$$

- (2) Setzt man $a_n := n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots),$$

also die *Folge der natürlichen Zahlen*.

- (3) Setzt man $b_n := n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhält man die *Folge der Quadratzahlen*

$$(b_n) = (1, 4, 9, 16, 25, \dots).$$

Offensichtlich gilt $b_n = a_n^2$.

- (4) Setzt man $a_n := p_n$, wobei p_n die n -te Primzahl in der natürlichen Reihenfolge ist, so erhält man die *Folge der Primzahlen*

$$(p_n) = (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots)$$

- (5) Setzt man $a_n := \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhält man die *Folge der Stammbrüche*

$$(a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$$

- (6) Setzt man $a_n := (-1)^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, so erhält man die *alternierende Folge*

$$(a_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

Man beachte, dass hier

$$\{a_n; n \in \mathbb{N}\} = \{1, -1\}$$

gilt. Man muss also zwischen einer Folge und ihrer *Wertemenge* $W(a_n) := \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ unterscheiden.

- (7) Für $a_n := \frac{n}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, erhält man

$$(a_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\right)$$

- (8) $a_n := \frac{n}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ liefert

$$(a_n) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{5}{32}, \frac{3}{32}, \dots\right)$$

- (9) Häufig sind Folgen *rekursiv* definiert, z.B. erhält man für $f_1 := f_2 := 1$ und

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

für $n \geq 3$ eine berühmte *Fibonacci-Folge*

$$(1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

(10) Für $q \in \mathbb{C}$ und $a_n := q^n$ für $n \in \mathbb{N}$ erhält man die *geometrische Folge*

$$(q^n)_{n \geq 0} = (1, q, q^2, q^3, \dots)$$

(11) $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}$, liefert

$$(a_n) = \left(2, \frac{9}{4}, \frac{64}{27}, \frac{625}{265}, \dots\right).$$

(12) $a_n := \frac{n!}{20^n}$ für $n \in \mathbb{N}$ liefert

$$(a_n) = \left(\frac{1}{20}, \frac{1}{200}, \frac{3}{4000}, \frac{3}{20000}, \frac{3}{80000}, \frac{9}{800000}, \frac{63}{16 \cdot 10^6}, \dots\right)$$

Hier geben die ersten Folgenglieder einen völlig falschen Eindruck von der "wahren Größe" der späteren Folgenglieder, hier ist z.B.

$$a_{60} \approx 7217,3 \text{ und } a_{100} \approx 0,375 \cdot 10^{1267}$$

(13) $a_n := i^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, liefert

$$(a_n) = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \dots)$$

Hier gilt also $a_{n+4} = a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(14) Die Folge $a_n := (1 - \frac{1}{n})(1 + i)$ für $n \in \mathbb{N}$ liefert

$$(a_n) = \left(0, \frac{1+i}{2}, \frac{2}{3}(1+i), \frac{3}{4}(1+i), \dots\right)$$

Bei wachsenden n verhalten sich die betrachteten Folgen sehr unterschiedlich.

Während die Folge $(a_n) = (n)$ der natürlichen Zahlen "größer und größer" wird, kommen die Glieder a_n der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ der Zahl Null "beliebig nahe".

Die in der Vorlesung behandelten Beispiele zur Motivation des Konvergenzbegriffes:

- Das *Babylonische Wurzelziehen* (für die k -te Wurzel, $k \geq 2$)
- "Multiplizieren statt Dividieren" (Lösung der Gleichung $ax = 1$ für $a \neq 0$)
- *Kreismessung nach Archimedes* (siehe Übungsaufgabe 5 auf dem Blatt 7)
- die Auswirkungen einer Investition von K Euro auf das Volkseinkommen

werden im laufenden Text als Beispiele vorkommen.

Um die obigen wagen Begriffe (wie z.B. "beliebig nahe") zu präzisieren führen wir den Begriff der ε -Umgebung ein.

7.3 Definition (ε -Umgebung)

Sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige (positive) reelle Zahl und $a \in \mathbb{K}$. Dann heißt (vergl. §5.13)

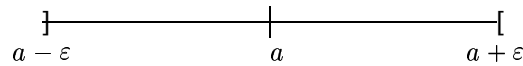
$$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{K}; |z - a| < \varepsilon\}$$

ε -Umgebung von a .

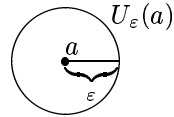
Im Fall $a \in \mathbb{R}$ ist

$$U_\varepsilon(a) = \{z \in \mathbb{R}; |z - a| < \varepsilon\} =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

also das *offene Intervall* mit Mittelpunkt a und Randpunkten $a - \varepsilon$ bzw. $a + \varepsilon$:



Im Fall $a \in \mathbb{C}$ ist $U_\varepsilon(a)$ die *offene Kreisscheibe* mit Mittelpunkt a und Radius ε :



7.4 Definition (Konvergenz von Folgen)

Eine Folge (a_n) mit $a_n \in \mathbb{K}$ heißt *konvergent* (in $\mathbb{K}$), wenn es ein $a \in \mathbb{K}$ mit folgender Eigenschaft gibt:

Zu jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ gibt es eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt:

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad (\Leftrightarrow |a_n - a| < \varepsilon). \quad (*)$$

Die Zahl a heißt *Grenzwert(Limes)* der Folge (a_n) und man schreibt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

oder

$$a_n \rightarrow a \text{ für } n \rightarrow \infty$$

oder

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Diese Schreibweise ist jedoch erst gerechtfertigt, wenn man sich überlegt hat, dass eine konvergente Folge nicht zwei *verschiedene Grenzwerte* haben kann:

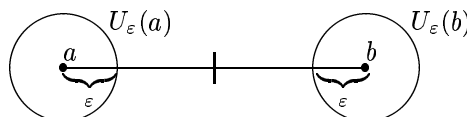
Das liegt an der sogenannten

7.5 Hausdorffsche Trennungseigenschaft von $\mathbb{R}$ bzw $\mathbb{C}$

Sind $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq b$, dann gibt es stets ε -Umgebungen $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$ mit

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset.$$

Kurz: Verschiedene Punkte lassen sich durch ε -Umgebungen trennen:



Wegen $a \neq b$ ist $\varepsilon := \frac{|a-b|}{3} > 0$, und es gilt

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset.$$

Wenn (a_n) gegen c konvergiert, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt

$$a_n \in U_\varepsilon(a)$$



In $U_\varepsilon(b)$ können dann höchstens die Glieder $a_1, \dots, a_{N-1}$ liegen, d.h. eine konvergente Folge kann nicht zwei verschiedene Grenzwerte haben.

7.6 Bemerkungen

- (1) Eine mit dem Grenzwert Null konvergente Folge heißt *Nullfolge*.
- (2) Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.
- (3) Die geometrische Bedingung (*) aus Def. 7.4 ist äquivalent zu

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

d.h. (a_n) konvergiert genau dann gegen a , wenn die Folge $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist; letztes ist jedoch auch mit " $(|a_n - a|)$ ist Nullfolge" äquivalent. Das bedeutet geometrisch, dass die *Folge der Abstände* eine Nullfolge ist.

Man kann die Konvergenzbedingung noch schlagkräftiger formulieren, wenn man sich der folgenden Sprechweise bedient:

7.7 Sprechweise (fast alle, schließlich alle)

Ist $E(n)$, $n \in \mathbb{N}$ eine Eigenschaft, die eine natürliche Zahl haben kann oder nicht, so sagt man: $E(n)$ gilt für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ oder *schließlich alle* $n \in \mathbb{N}$, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle Indizes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ die Eigenschaft $E(n)$ richtig ist.

Mit dieser Sprechweise kann man die Konvergenzdefinition dann so fassen:

Eine Folge (a_n) , $a_n \in \mathbb{K}$ konvergiert genau dann gegen $a \in \mathbb{K}$, wenn in jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ fast alle Glieder der Folge liegen.

Aufgabe: Formulieren Sie möglichst einfach die Aussage: Die Folge (a_n) konvergiert *nicht* gegen $a \in \mathbb{K}$.

7.8 Beispiele konvergenter und divergenter Folgen

- (1) Die konstante Folge $(a_n) = (c, c, c, \dots)$, $c \in \mathbb{K}$, ist konvergent mit dem Grenzwert c , denn es ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n - c = 0; \text{ damit auch für jedes } \varepsilon > 0$$

$a_n \in U_\varepsilon(c)$, sogar für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (2) Obwohl wir später einfacher beweisen können, dass die Folge $(a_n) = (n)$ der natürlichen Zahlen, nicht konvergiert, geben wir hier einen anderen Beweis:

Wir nehmen an, $(a_n) = (n)$ sei konvergent und $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Wir wählen $\varepsilon = 1$, dann gibt es $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ gilt

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{d.h.}$$

$$|a_n - a| = |n - a| < 1 \quad (*)$$

Die Ungleichung $(*)$ gilt für alle $n \geq N$, also z.B. für $n := N$ und $m := N + 2$.

Wir erhalten also

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |N - a| < 1 \text{ und} \\ |a_m - a| &= |a_{N+2} - a| = |N + 2 - a| < 1. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt dann aber

$$2 = |2| = |(N + 2 - a) - (N - a)| \leq |N + 2 - a| + |N - a| < 1 + 1 = 2,$$

also ein Widerspruch.

□

- (3) Dass $(a_n) = (\frac{1}{n})$ eine Nullfolge ist, ist mit der *Archimedischen Eigenschaft* von $\mathbb{R}$ äquivalent: Ist nämlich $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann gibt es wegen der Archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$N > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Diese Bedingung ist äquivalent zu

$$\frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ist nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, so gilt

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

d.h. $(a_n) = (\frac{1}{n})$ ist eine Nullfolge.

- (4) Betrachtung der ersten Folgenglieder $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$ lassen die Vermutung aufkommen, dass die Folge

$$(a_n) = \left(\frac{n}{n+1} \right) = \left(\frac{n+1-1}{n+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

den Grenzwert 1 hat, denn es ist

$$|a_n - 1| = |1 - a_n| = \left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| = \left| \frac{n+1-n}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so bestimmen wir wieder auf Grund der Archimedischen Eigenschaft von $\mathbb{R}$ eine natürliche Zahl N mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ ist dann

$$|a_n - 1| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

also $a_n \in U_\varepsilon(1)$ für alle $n \geq N$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- (5) Dass die Folge $(a_n) = ((-1)^{n+1}) = (1, -1, 1, -1, \dots)$ divergiert, zeigt man nach dem gleichen Muster, wie beim Beispiel(2):

Wir nehmen an, (a_n) sei konvergent und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Zu $\varepsilon := 1$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < 1$ gilt für alle $n \geq N$.

Für alle $n \geq N$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2,$$

also erhalten wir den Widerspruch $2 < 2$.

- (6) Welchen falschen Eindruck die ersten Glieder vermitteln können, zeigt der Beispiel

$$(a_n) = \left(\frac{n!}{20^n} \right).$$

Hier gilt

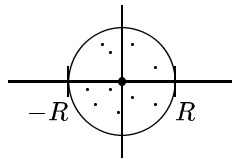
$$(a_n) = (0,05; 0,005; 7,5 \cdot 10^{-4}; 1,5 \cdot 10^{-4}, \dots)$$

Es ist $a_{20} \approx 2,32 \cdot 10^{-8}$ und die Vermutung, dass (a_n) eine Nullfolge ist, liegt auf der Hand. Berechnet man jedoch a_{60} oder a_{100} , so ergibt sich

$$a_{60} \approx 7217,3; \quad a_{100} \approx 0,375 \cdot 10^{1267}$$

Die Folge $(a_n) = \left(\frac{n!}{n^n} \right)$ ist nicht (nach oben) beschränkt, und damit divergent, denn

- (7) Eine konvergente Folge (a_n) ist *beschränkt*, dabei heißt eine Folge (a_n) , $a_n \in \mathbb{K}$, *beschränkt*, wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq R$



Alle (a_n) liegen also im komplexen Fall in einer abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius R um das Nullpunkt, im reellen Fall im abgeschlossenen Intervall $[-R, R]$.

Ist nämlich $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, so gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < 1$. Also folgt

$$|a_n| \leq |a| + |a_n - a| \leq |a| + 1$$

für alle $n \geq 1$. Setzt man $R := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\}$, so ist $|a_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe dieses Kriteriums erhalten wir einen viel einfacheren Beweis, dass die Folge

$$(a_n) = (n)$$

der natürlichen Zahlen nicht konvergent ist, denn sie ist nicht beschränkt.

Die Folge (f_n) der Fibonacci-Zahlen

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 17, 21, 34, 55, \dots)$$

kann damit auch nicht konvergent sein, denn es gilt $f_{n+1} \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge (f_n) ist also nicht (nach oben) beschränkt.

Wir werden in Beispiel (13) sehen, dass sogar für jedes $z \in \mathbb{C}$ die Folge $\left(\frac{z^n}{n!} \right)$ eine Nullfolge ist, insbesondere ist $\left(\frac{20^n}{n!} \right)$ eine Nullfolge:

Das ist äquivalent mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $C > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\frac{n!}{20^n} > C$$

Eine Fülle von weiteren Beispielen für Nullfolgen erhält man mit Hilfe des folgenden Vergleichssatzes.

- (7) Ist (r_n) eine reelle Nullfolge und (a_n) eine beliebige Folge mit $a_n \in \mathbb{K}$. Gibt es dann eine positive reelle Zahl C , so dass für fast alle n gilt

$$|a_n| \leq C r_n,$$

dann ist (a_n) ebenfalls eine Nullfolge.

Der Beweis ist evident: Da (r_n) eine (reelle) Nullfolge ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_1$ gilt

$$r_n = |r_n| < \frac{\varepsilon}{C}$$

(Beachte: $\frac{\varepsilon}{C}$ ist ebenfalls eine positive reelle Zahl).

Außerdem gilt für fast alle n , etwa für alle $n \geq N_1$ die Ungleichung

$$|a_n| \leq C r_n.$$

Für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ folgt daher

$$|a_n| \leq C r_n < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Hieraus ergibt sich sofort, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Folge $(\frac{1}{n^k})$ eine Nullfolge ist.

- (8) Wir behaupten, dass auch die Folge

$$(a_n) = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}} \right)$$

eine Nullfolge ist.

Wir gehen dabei heuristisch vor und versuchen zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$, ein $N \in \mathbb{N}$ so zu bestimmen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt

$$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon.$$

Wir gehen dabei versuchsweise von der Ungleichung, die wir beweisen sollen, aus:

$$(1) \quad \frac{1}{1 + \sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Hieraus folgt $1 + \sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$, oder $\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, oder also

$$(2) \quad n > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2.$$

Damit scheint das Problem gelöst: Denn wählt man eine natürliche Zahl $N > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2$, so gilt für alle $n \geq N$ die gewünschte Ungleichung

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Aber: Wir haben lediglich gesagt, dass aus (1) die Ungleichung (2) folgt.

Der eigentliche Konvergenzbeweis verläuft nun so:

Zum beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$, wähle man ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$N > \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)^2$$

gilt.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt dann (Monotonie der Wurzel)

$$\sqrt{n} \geq \sqrt{N} > \left| \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right| \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1,$$

also

$$1 + \sqrt{n} \geq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{1 + \sqrt{n}} < \varepsilon.$$

(9) Für die Folge

$$(a_n) = \left(\frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} \right)$$

legt die Umformung

$$\frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} = \frac{2}{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

die Vermutung nahe, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

gilt.

Wir betrachten zum Beweis

$$\begin{aligned} |a_n - 2| &= \left| \frac{2n^2}{n^2 + 2n + 3} - 2 \right| = \left| \frac{2n^2 - 2n^2 - 4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| = \\ &= \left| \frac{-4n - 6}{n^2 + 2n + 3} \right| = \frac{4n + 6}{n^2 + 2n + 3} = \\ &= \frac{4n}{n^2 + 2n + 3} + \frac{6}{n^2 + 2n + 3} \leq \frac{4n}{n^2} + \frac{6}{2n} = \frac{7}{n} \end{aligned}$$

Jetzt wende man den Vergleichssatz mit $C = 7$ und $r_n = \frac{1}{n}$ an.

(10) Für jedes reelle $a > 0$ gilt

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1}$$

Bem.: Die Existenz n -ter Wurzeln aus nicht negativen reellen Zahlen wird hier vorausgesetzt. Vergleiche hierfür den im Anschluss an §1.3 formulierten Existenzsatz.

Wir benutzen: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und jedem $a \in \mathbb{R}_+$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}_+$ mit $x^n = a$.

Bez.: $x = \sqrt[n]{a}$.

Weitere Beweise für die Existenz n -ter Wurzel werden wir in dem nächsten Paragraphen über konvergente Folgen bzw. im nächsten Kapitel (Zwischenwertsatz) kennen lernen.

Im Fall $a = 1$ haben wir die konstante Folge $(1, 1, 1, \dots)$.

Sei daher zunächst $a > 1$.

Dann ist

$$\delta_n := \sqrt[n]{a} - 1 > 0 \text{ und } a = (1 + \delta_n)^n.$$

Nach dem binomischen Satz oder der Bernoullischen Ungleichung ist

$$\begin{aligned} (1 + \delta_n)^n &\geq 1 + n\delta_n, \text{ daher} \\ 0 \leq \delta_n &\leq \frac{a - 1}{n} = \frac{C}{n} \text{ (mit } C = a - 1) \end{aligned}$$

Also folgt

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = |\delta_n| = \delta_n \leq \frac{C}{n}.$$

Damit ist $(\sqrt[n]{a} - 1)$ eine Nullfolge, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Mit den Rechenregeln aus dem nächsten Paragraphen führt man den Fall $0 < a < 1$ auf den oben behandelten zurück.

(11) Wie "nivellierend" die n -te Wurzel ist, zeigt sich am nächsten Beispiel:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Auf die Vermutung, dass diese Folge den Grenzwert 1 hat, kann man mit Hilfe eines einfachen Taschenrechners kommen. Stellt man für die x -Taste $x = n$, die y -Taste $y = \frac{1}{n}$ ein und belegt dann die x^y -Taste, so erhält man etwa folgende Werte:

$n = 10\,000$	$a_n = 1,0009215$
$n = 100\,000$	$a_n = 1,0001151$
$n = 10^6$	$a_n = 1,0000138$
$n = 10^7$	$a_n = 1,0000016$

Die Folge konvergiert "langsam" gegen 1, d.h. man braucht sehr große Indizes, um der 1 beliebig nahe zu kommen.

Zum Beweis setzen wir wieder

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n \quad (*)$$

mit $\delta_n > 0$ und haben $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ zu zeigen.

Aus $(*)$ folgt nach dem binomischen Satz

$$n = (1 + \delta_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} \delta_n^2 \quad \text{oder}$$

$$\binom{n}{2} \delta_n^2 \leq n - 1.$$

Nun ist aber

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

und daher ist für $n \geq 2$

$$\delta_n^2 \leq \frac{2}{n} \quad \text{oder} \quad \delta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$$

Wählt man jetzt zum vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{2}{\varepsilon^2}$, so ist diese Bedingung äquivalent mit $\frac{2}{N} < \varepsilon^2$. Daher folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = |\delta_n| = \delta_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{N}} < \varepsilon.$$

(12) Auf den ersten Blick überraschend ist es, dass $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ eine Nullfolge ist. Nun gilt aber für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ die Formel

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Wendet man diese hier an mit

$$a = \sqrt{n+1}; \quad b = \sqrt{n},$$

so erhält man

$$a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Also ist $|a_n - 0| = |a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Der Trick $a - b$ in der Form $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ mit $a \neq -b$ zu schreiben, wird uns noch mehrmals begegnen.

- (13) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $(\frac{z^n}{n!})$ eine Nullfolge. Für $z = 0$ ist dies ohnehin klar.

Setze $a_n := \frac{|z|^n}{n!}$, dann ist

$$a_n = \frac{|z|}{n} a_{n-1} \leq \frac{1}{2} a_{n-1} \quad \text{falls } n \geq N \text{ und } N > 2|z|$$

$$\Rightarrow a_n \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{mit} \quad C := \frac{(2|z|)^N}{N!}$$

Nach dem Vergleichssatz ist damit $(\frac{z^n}{n!})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ eine Nullfolge.

- (14) *Geometrische Folge*

Das Grenzwertverhalten der geometrische Folge (q^n) hängt von q ab.

Für $|q| > 1$ ist (q^n) nicht beschränkt (nach ???), also nicht konvergent.

Für $q = 1$ ist (q^n) die konstante Folge $(1, 1, 1, \dots)$, also konvergent.

Für $|q| = 1$, aber $q \neq 1$, ist die Folge (q^n) nicht konvergent, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden.

Es gilt jedoch: für $|q| < 1$ ist (q^n) eine Nullfolge.

Für $q = 0$ ist dies klar.

Sei also $0 < |q| < 1$, dann betrachten wir $\frac{1}{|q|} = 1 + h$, dabei ist dann $h > 0$ und die Bernoulli'sche Ungleichung oder der Binomische Satz liefert

$$\left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh > nh,$$

und damit

$$|q^n - 0| = |q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1 + h)^n} < \frac{1}{h} \frac{1}{n} = C \cdot \frac{1}{n} \quad \text{mit } C = \frac{1}{h}.$$

- (15) Bei der Untersuchung, wie sich eine Investition von K Euro auf das Volkseinkommen auswirkt, waren wir nach n Konsumschritten auf die Erhöhung um

$$a_n = K + qK + q^2K + \dots + q^nK = \frac{K}{1 - q} - K \frac{q^{n+1}}{1 - q}$$

Euro gekommen, dabei ist q ($0 < q < 1$) die *Grenzneigung zum Verbrauch*. Die damalige Vermutung, dass a_n für große n durch $\frac{K}{1-q}$ "hinreichend gut" approximiert wird, können wir jetzt bestätigen, denn wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$, gilt tatsächlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{K}{1 - q}.$$

Eine Investition von $K = 10^9$ Euro, ergibt also eine Erhöhung des Volkseinkommen auf $3 \cdot 10^9$ Euro.

In diesem Beispiel hat uns der Grenzwert als Näherungswert für alle a_n mit hinreichend großem Folgenindex gedient.

Meist ist es aber umgekehrt:

Wir sind nicht so sehr an der Folge (a_n) interessiert, sondern an ihrem Grenzwert. Dabei werden die Folgenglieder mit hinreichend großem Index als Approximationen für den nicht der Größe nach bekannten Grenzwert betrachtet.

(16) Für jedes feste $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ und jedes feste $p \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$$

Man sagt: “ (q^n) geht schneller gegen Null als (n^p) gegen Unendlich.“

Hier sind offensichtlich zwei gegensätzliche Kräfte am Werk:

Die Folge (n^p) wächst über jede Grenze, d.h. zu jedem $C > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $n^p > C$, während (q^n) für $|q| < 1$ eine Nullfolge ist. Die Nullfolge bleibt bei diesem Kräftemessen Sieger.

Zum Beweis können wir $0 < |q| < 1$ annehmen. Dann ist wieder

$$\frac{1}{|q|} = 1 + h \quad \text{mit } h > 0.$$

Für alle $n \geq p + 1$ ist dann

$$\begin{aligned} |n^p q^n - 0| = n^p |q|^n &= \frac{n^p}{(1+h)^n} = \frac{n^p}{1 + nh + \dots + \binom{n}{p+1} h^{p+1} + \dots + \binom{n}{n} h^n} \\ &\leq \frac{n^p}{\binom{n}{p+1} h^{p+1}} = \frac{(p+1)!}{n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{n}\right) h^{p+1}} \\ &\leq \frac{(p+1)!}{n \left(1 - \frac{1}{p+1}\right) \left(1 - \frac{2}{p+1}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{p+1}\right) h^{p+1}} \\ &= \frac{C}{n}, \end{aligned}$$

wobei $C := \frac{(p+1)!}{\left(1 - \frac{1}{p+1}\right) \left(1 - \frac{2}{p+1}\right) \dots \left(1 - \frac{p}{p+1}\right) h^{p+1}}$ von n unabhängig ist.

Nach dem Vergleichssatz ist also $(n^p q^n)$ eine Nullfolge.

(17) Die Folge $(H_n)_{n \geq 1}$ (sog. “Harmonische Reihe”) mit

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

ist divergent, denn sie ist nicht (nach oben) beschränkt.

Betrachtet man nämlich die Partialsumme

$$H_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}\right),$$

so ist offensichtlich

$$H_{2^k} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{2^3} + \dots + \frac{2^{k-1}}{2^k} > 1 + \frac{k}{2},$$

also sind die Partialsummen nicht beschränkt, denn ist $n \geq 2^k$, so ist $H_n \geq H_{2^k}$.

Die Folge (H_n) wächst sehr langsam. Einige Werte seien (mit Hilfe von Maple) angegeben:

n	$(H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$\ln n + \gamma$
10	2.9289682539682539682539682539682539682	2.8798007578955785446245035447667666
10 ²	5.1873775176396202608051176756582531579	5.1823858508896242286424949994511308
10 ³	7.4854708605503449126565182043339001765	7.4849709438836699126604864541354950
10 ⁴	9.7876060360443822641784779048516053348	9.7875560368777155966784779088198592
10 ⁵	12.090146129863427947363219363504219500	12.090141129871761280696469363504223
10 ⁶	14.392726722865723631381127493188587676	14.392726222865806964714460818188587
10 ⁷	16.695311365859851815399118939540451884	16.695311315859852648732452272872951
10 ⁸	18.997896413853898324417110394223982841	18.997896408853898332750443727557316
10 ⁹	21.300481502347944016685101848908346966	21.300481501847944016768435182241680
10 ¹⁰	23.603066594891989700785593303592711173	23.603066594841989700786426636926044
10 ¹¹	25.905651687841035384804409758277075381	25.905651687836035384804418091610408
10 ¹²	28.208236780830581068822409462961439588	28.208236780830081068822409546294772
10 ¹³	30.510821873824176752840401000145803796	30.510821873824126752840401000979137
10 ¹⁴	32.813406966818177436858392455655168004	32.813406966818172436858392455663501
10 ¹⁵	35.115992059812218620876383910347782211	35.115992059812218120876383910347865
10 ¹⁶	37.418577152806263854894375365032228919	37.418577152806263804894375365032229
10 ¹⁷	39.721162245800309493912366819716593951	39.721162245800309488912366819716593
10 ¹⁸	42.023747338794355173430358274400958167	42.023747338794355172930358274400958
10 ¹⁹	44.326332431788400856998349729085322375	44.326332431788400856948349729085322
10 ²⁰	46.628917524782446540971341183769686583	46.628917524782446540966341183769686

$H_{250 \cdot 10^6}$ ist noch kleiner als 20, jedoch $H_{500 \cdot 10^6} > 20$. Um über Hundert zu kommen, braucht man schon etwa $15 \cdot 10^{42}$ Summanden.

Ein *Divergenzkriterium*, mit welchem man häufig leicht über die Divergenz einer Folge entscheiden kann, beruht auf folgender Tatsache:

- (18) Ist (a_n) eine konvergente Folge mit dem Grenzwert a , dann konvergiert auch jede *Teilfolge* und jede *Umordnung* gegen a . Dabei heißt eine Folge (b_k) *Umordnung* der Folge (a_n) , wenn es eine Folge (n_k) von natürlichen Zahlen gibt, in der jede natürliche Zahl genau einmal vorkommt und für die $b_k = a_{n_k}$ gilt.

Eine Folge (b_k) heißt *Teilfolge* von (a_n) , falls es eine Folge (n_k) natürlicher Zahlen gibt mit $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$ und falls $b_k = a_{n_k}$ gilt.

So ist z.B.

$$\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots\right)$$

eine Teilfolge von $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, dabei ist $n_k = 2k - 1$, $k \geq 1$ und

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots\right)$$

ist eine Umordnung von $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Ferner konvergiert jede Folge, die aus (a_n) durch *Abänderung endlich vieler Glieder* entsteht, ebenfalls gegen a .

Ist nun (a_n) konvergent mit dem Grenzwert a , dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt

$$a_n \in U_\varepsilon(a)$$

Höchstens die Folgenglieder a_n mit $n \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$ liegen nicht in $U_\varepsilon(a)$. Für $k \neq k'$ ist aber (in beiden Fällen) $n_k \neq n_{k'}$, daher gibt es höchstens $N - 1$ Zahlen n_k mit $n_k \in$

$\{1, \dots, N-1\}$, also für fast alle k gilt $n_k \notin \{1, \dots, N-1\}$.
 Daher liegt für fast alle k das Folgenglied a_{n_k} in $U_\varepsilon(a)$, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Ist schließlich (b_k) eine Folge, die aus (a_n) durch Abänderung endlich vieler Glieder entsteht, dann gibt ab einem $N_1 \in \mathbb{N}$ $b_n = a_n$ für alle $n \geq N_1$.

Also ist $|b_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq M := \max\{N_1, N\}$

Wir schließen diesen Paragraphen mit einer Feststellung, die sich auch unmittelbar aus der Tatsache ergibt, dass $\mathbb{Q}$ *dicht* in $\mathbb{R}$ ist (sogar mit dieser Tatsache äquivalent ist).

- (19) Jede reelle Zahl x ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen, d.h. zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge (r_n) , $r \in \mathbb{Q}$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$.

Beweis: Man kann $r_n = \frac{[nx]}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, nehmen. Man kann auch so schließen: Aus Satz 2.3.5 folgt, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine rationale Zahl r_n gibt mit

$$|r_n - x| < \frac{1}{n}.$$

Nach dem Vergleichssatz ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x.$$

□

Zusatz: Man kann sogar erreichen, dass $r_n \leq r_{n+1}$ bzw. $r_{n+1} \leq r_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

8 Rechenregel für konvergente Folgen

Die Beispiele zeigen, dass es für eine vorgelegte Folge mühselig sein kann nachzuweisen, dass sie konvergiert, insbesondere, wenn sie durch einen komplizierten Rechenausdruck gegeben ist, oder etwa rekursiv definiert ist. Die folgenden *Rechenregeln* erleichtern die Bestimmung von Grenzwerten, sie stellen Beziehungen her zwischen den *algebraischen Operationen* in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und der *Grenzwertbildung* bzw. zwischen der *Anordnung* in $\mathbb{R}$ und der *Grenzwertbildung*.

Betrachten wir als Beispiel die reellen Zahlenfolgen

$$(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right), \quad (b_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

dann gilt für *alle* $n \in \mathbb{N}$

$$a_n < b_n,$$

aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1.$$

Es gilt jedoch wenigstens

8.1 Satz (Monotonie des Grenzwertes)

Sind (a_n) und (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen mit $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ und gilt für fast alle n

$$a_n \leq b_n,$$

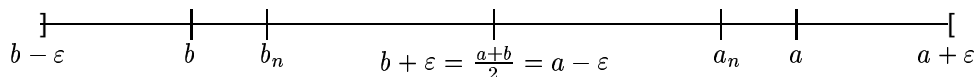
dann gilt auch

$$a = \lim a_n \leq \lim b_n = b.$$

1. Beweis durch Widerspruch.

Wir nehmen $a > b$ an und wählen

$$\varepsilon := \frac{a-b}{2} > 0,$$



Dann gilt für fast alle n

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ und } b_n \in U_\varepsilon(b),$$

daher ist für fast alle n

$$b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < a_n$$

ein Widerspruch zur Voraussetzung

$$a_n \leq b_n, \text{ für fast alle } n.$$

□

2. Beweis mit dem Fundamentallemma der Analysis,

das ja (vergl. §1.2.4) besagt:

Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x \leq \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, dann ist

$$x \leq 0.$$

Nach Voraussetzung gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass gleichzeitig gilt (für jedes $\varepsilon > 0$)

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < a_n, \quad a_n \leq b_n, \quad b_n < b + \frac{\varepsilon}{2},$$

daher gilt auch

$$a - \frac{\varepsilon}{2} < b + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ oder}$$

$$a - b < \varepsilon \text{ für jedes } \varepsilon > 0,$$

nach dem Fundamentallemma ist daher

$$a \leq b.$$

□

8.2 FolgerungGilt für eine mit dem Grenzwert a konvergente Folge (a_n) reeller Zahlen die Ungleichung $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

$$\alpha \leq a_n \leq \beta, \text{ für fast alle } n,$$

dann gilt auch

$$\alpha \leq a \leq \beta.$$

8.3 Satz (Sandwich-Lemma)Sind (a_n) und (b_n) konvergente reelle Zahlenfolgen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, und ist (x_n) eine reelle Zahlenfolge mit

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \text{ für fast alle } n,$$

dann ist auch (x_n) konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Beweis: Ist $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann liegen in $U_\varepsilon(a)$ fast alle Folgenglieder (a_n) und (b_n) , wegen

$$a_n \leq x_n \leq b_n$$

liegen auch fast alle x_n in $U_\varepsilon(a)$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

□

8.4 Beispiel

Sind $a_1, \dots, a_k$, ($k \in \mathbb{N}$ fest), nicht negative reelle Zahlen, dann ist die Folge (x_n) mit

$$x_n = \sqrt[k]{a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n}$$

konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \max\{a_1, \dots, a_k\}$$

Beweis: Ist $m := \max\{a_1, \dots, a_k\}$, dann gilt

$$m = \sqrt[k]{m^n} \leq \sqrt[k]{a_1^n + \dots + a_k^n} \leq \sqrt[k]{km^n} = \sqrt[k]{k} m.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$ (beachte k ist fest!) folgt nach dem Sandwich-Lemma

$$m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_1^n + \dots + a_k^n} \leq m, \text{ also}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_1^n + \dots + a_k^n} = m.$$

□

Betrachtet man die Folge

$$(c_n) = \left(\frac{n+1}{n^2} \right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = (a_n + b_n),$$

mit $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, dann lässt es nahe zu vermuten, dass (c_n) eine Nullfolge ist, da (a_n) und (b_n) Nullfolgen sind.

Die folgenden Permanenzeigenschaften von $\lim$ vereinfachen die Bestimmung von Grenzwerten wesentlich. Wir betrachten dabei i.a. Folgen in $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

8.5 Satz (Permanenzeigenschaften von $\lim$)

Die Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) , $a_n, b_n \in \mathbb{K}$, seien konvergent und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Dann gilt:

- (1) Die (Summen-)Folge $(a_n + b_n)$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

- (2) Die (Produkt-)Folge $(a_n b_n)$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Speziell ist für $\lambda \in \mathbb{K}$ die Folge (λa_n) konvergent mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

- (3) Ist $b \neq 0$, dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$ gilt:
Die (Quotienten-)Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_1}$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}.$$

(4) Die (reelle) Zahlenfolge $(|a_n|)$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right|.$$

(5) Die Folge $(\bar{a}_n)$ ist konvergent, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \bar{a} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

(6) Für $a_n \in \mathbb{C}$ konvergieren die Folgen $(\operatorname{Re}(a_n))$ und $(\operatorname{Im}(a_n))$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a) = \operatorname{Re}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right) \text{ und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(a_n) = \operatorname{Im}(a) = \operatorname{Im}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right).$$

Umgekehrt folgt aus der Konvergenz von $(\operatorname{Re}(a_n))$ und $(\operatorname{Im}(a_n))$ die Konvergenz von (a_n) , wobei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) + i \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(a_n) \text{ gilt.}$$

Beweis: Beim Beweis werden folgende Prinzipien verwendet:

(a) Ist (a_n) konvergent mit dem Grenzwert a und ist (b_n) konvergent mit dem Grenzwert b , dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ (gleichzeitig) gilt

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ und } b_n \in U_\varepsilon(b).$$

(b) Ist (x_n) eine Nullfolge und (y_n) eine beschränkte Folge, dann ist auch die Produktfolge $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.

(1) Die Summenregel ist klar:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es (nach (a)) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach der Dreiecksungleichung erhält man

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

(2) Der Beweis für das Produkt ist etwas trickreicher.

Man benutzt die Zerlegung

$$a_n b_n - ab = a_n b_n - ab_n + ab_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$$

und die Voraussetzung, dass a_n gegen a konvergiert, also $(a_n - a)$ eine Nullfolge ist, dass (b_n) gegen b konvergiert, also $(b_n - b)$ eine Nullfolge ist und dass (b_n) als konvergente Folge beschränkt ist und verwendet dann (b).

Der geneigte Leser (die geneigte Leserin) möge die Einzelheiten ausführen.

Den Spezialfall erhält man, in dem man für (b_n) die konstante Folge $(b_n) = (\lambda)$ wählt. Dieser Spezialfall lässt sich natürlich auch einfach direkt beweisen.

(3) Ist $b \neq 0$, dann ist $\varepsilon := \frac{|b|}{2} > 0$ und in $U_\varepsilon(b)$ liegen fast alle Glieder der Folge (b_n) , d.h. es gibt ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt

$$|b_n - b| < \frac{|b|}{2}.$$

Aus der Dreiecksungleichung für Abschätzungen nach unten folgt daher

$$|b| - |b_n| \leq |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \text{ und damit}$$

$$|b_n| \geq \frac{|b|}{2} > 0 \text{ für alle } n \geq n_1.$$

Nun folgt nach Standardschlüssen die Konvergenz von $(\frac{1}{b_n})_{n \geq n_1}$ gegen $\frac{1}{b}$ aus

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n| |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b|$$

und die Konvergenz von $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_1}$ folgt wegen $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ aus (2) und dem ersten Teil von (3).

(4) folgt unmittelbar aus $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$.

(5) Wegen $|z| = |\bar{z}|$ für $z \in \mathbb{C}$ und $\overline{a_n - a} = \bar{a}_n - \bar{a}$ ist (5) ebenfalls klar:

$$|\bar{a}_n - \bar{a}| = |\overline{a_n - a}| = |a_n - a|$$

(6) Ist die komplexe Zahlenfolge (a_n) konvergent mit dem Grenzwert a , dann konvergiert nach (5) die Folge $(\bar{a}_n)$ und zwar mit dem Grenzwert $\bar{a}$, daher konvergiert auch die Folge $(\frac{1}{2}(a_n + \bar{a}_n)) = (Re(a_n))$ und zwar gegen $\frac{1}{2}(a + \bar{a}) = Re(a)$.

Ebenso kann man für den Imaginärteil schließen:

Die Konvergenz von $(Re(a_n))$ gegen $Re(a)$
von $(Im(a_n))$ gegen $Im(a)$

ergibt sich auch aus den elementaren Abschätzungen

$$|Re(a_n - a)| \leq |a_n - a| \text{ bzw.}$$

$$|Im(a_n - a)| \leq |a_n - a|.$$

Die Umkehrung ergibt sich etwa aus der Ungleichung

$$|z - a| \leq |Re(z - a)| + |Im(z - a)|$$

8.6 Bemerkungen und Beispiele

(a) Für die Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{18n^3 + 2n^2 - 4711}{3n^3 - 17n^2 - 11n - 19}$$

ergibt sich durch Kombination der Rechenregeln

$$(a_n) = \left(\frac{18 + 2 \cdot \frac{1}{n} - \frac{4711}{n^3}}{3 - 17 \cdot \frac{1}{n} - 11 \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{19}{n^3}} \right),$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{18}{3} = 6.$$

(b) Was würden Sie als Tutor einer Übungsgruppe zur Analysis 1 zu folgendem Argument eines Übungsgruppenteilnehmers sagen?

Die Folge (a_n) mit

$$(a_n) = \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2} \right)$$

ist eine Nullfolge, denn es gilt

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

und jeder Summand ist eine Nullfolge.

Beachte: Die Summandenregel (2) lässt sich sofort auf eine *endliche* Anzahl von Summanden ausdehnen in diesem Beispiel wächst aber die Anzahl der Summanden mit n gegen Unendlich.

Korrekt kann man so schließen:

Nach der Gaußschen Formel ist

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ also}$$

$$(a_n) = \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2} \right) = \left(\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} \right) = \left(\frac{n+1}{2n} \right) = \left(\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right), \text{ daher}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

- (c) Der Fall $0 < a < 1$ in Beispiel (10) aus §7.8 lässt sich ganz einfach behandeln.

Ist nämlich $0 < a < 1$, dann ist $a^{-1} > 1$ und nach 2.5(3) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^{-1}}} = \frac{1}{1} = 1.$$

- (d) Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, folgt durch mehrfache Anwendung von 2.5(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = a^k \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Ist daher $P : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ definiert durch

$$P(x) := a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \quad (a_j \in \mathbb{K}),$$

(P ist ein Polynom) dann folgt (mehrfache Anwendung 2.5(1) und 2.5(2))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a_n) = P(a).$$

Das bedeutet, dass *Polynome* (in ihrem Definitionsbereich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) *stetige Funktionen* sind (Vergl. Kap.III).

- (e) Ist $s = s(\mathbb{K}) = \text{Abb}(\mathbb{N}; \mathbb{K})$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{K}$ und $c = c(\mathbb{K})$ die Menge aller *konvergenter Folgen* in $\mathbb{K}$, dann kann man die Eigenschaften von Satz 2.5 auch so zusammenfassen:

$c(\mathbb{K})$ ist ein Untervektorraum von $s = s(\mathbb{K})$ und Abbildung

$$\lim : c(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{ist } \mathbb{K}\text{-linear}$$

$$(a_n) \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Was ist der Kern von $\lim$? Antwort: $\text{Kern}(\lim) = c_0(\mathbb{K}) := \{(a_n) \in s; (a_n) \text{ ist Nullfolge}\}$ Der Kern besteht also gerade aus allen Nullfolgen.

$s(\mathbb{K})$ ist mit der Multiplikation

$$(a_n) \cdot (b_n) = (a_n b_n)$$

sogar ein *Ring*, also insgesamt eine $\mathbb{K}$ -*Algebra*.

Allerdings hat $s(\mathbb{K})$ Nullteiler, wie etwa das einfache Beispiel

$$(a_n) = (1, 0, 0, 0, \dots)$$

$$(b_n) = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

zeigt.

- (f) Um die Konvergenz einer komplexen Zahlenfolge zu untersuchen, braucht man sie nicht unbedingt in Real- und Imaginärteil zu zerlegen. Die Folge $(\frac{i^n}{1+in})$ ist eine Nullfolge in $\mathbb{C}$. Eine elementare Umformung ergibt

$$\frac{i^n}{1+in} = \frac{1}{n} \frac{i^n}{i + \frac{1}{n}}$$

Die Abschätzung (für $n \geq 2$)

$$\left| i + \frac{1}{n} \right| \geq |i| - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

zeigt, dass $(|\frac{i^n}{i + \frac{1}{n}}|)$ beschränkt ist:

$$\left| \frac{i^n}{i + \frac{1}{n}} \right| = \frac{|i^n|}{|i + \frac{1}{n}|} \leq \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

für $n \geq 2$, also ist $(\frac{i^n}{1+in})$ eine Nullfolge. □

- (g) So suggestiv die Schreibweisen wie z.B.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

auch sein mögen, so muss man doch die typische Struktur beachten.

Eigentlich muss man sie von recht nach links lesen: Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ existieren, dann existiert auch $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$, und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Aus der Existenz von $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ kann man u.a. nicht schließen, dass die Summenformel gilt, denn die Folgen (a_n) und (b_n) brauchen gar nicht zu konvergieren, wenn die Summenfolge $(a_n + b_n)$ konvergiert.

Ein einfaches Beispiel ist

$$(a_n) = (1, -1, 1, -1, \dots) \text{ und}$$

$$(b_n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$$

Beide Folgen sind divergent, die Summenfolge $(a_n + b_n)$ ist die Konstante Folge $(0, 0, 0, \dots)$, also konvergent.

9 Konvergenzkriterien

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit Kriterien für die Konvergenz von Folgen, die *ohne Kenntnis des Grenzwertes* erlauben, auf die Konvergenz bzw. Divergenz einer Folge zu schließen. Wir beschäftigen uns zunächst mit *reellen Folgen*. Die entsprechenden Kriterien beruhen auf dem Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$. Zunächst erinnern wir an ein

9.1 Divergenzkriterium

Ist eine Folge (a_n) reeller oder komplexer Zahlen nicht beschränkt, so ist sie nicht konvergent. So ist also z.B. die Folge (n) der natürlichen Zahlen oder die Folge (f_n) der Fibonacci-Zahlen (vgl. §7.2(9)) nicht konvergent.

9.2 Definition (Monotonie)

Eine *reelle* Zahlenfolge (a_n) heißt

$$\left. \begin{array}{l} \text{monoton wachsend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton wachsend} \\ \text{streng monoton fallend} \end{array} \right\} \text{ falls für alle } n \text{ gilt } \left\{ \begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \\ a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1} \end{array} \right.$$

Für *monotone* Folgen gilt der folgende fundamentale Konvergenzsatz:

9.3 Monotonieprinzip

Eine *monotone* reelle Folge konvergiert genau dann, wenn sie beschränkt ist. Sie konvergiert gegen das Supremum ihrer Wertemenge, wenn sie nach oben beschränkt und gegen das Infimum ihrer Wertemenge, wenn sie nach unten beschränkt ist.

Beweis: Sei (a_k) die gegebene Folge und etwa (a_k) monoton wachsend und $M = \{a_k; k \in \mathbb{N}\}$ ihre Wertemenge, dann ist $M \neq \emptyset$.

Da (a_k) nach oben beschränkt ist, existiert $a = \sup M$ nach dem Vollständigkeitsaxiom. Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke von M mehr, es gibt daher ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a - \varepsilon < a_N$ gilt.

Wegen der Monotonie der (a_k) gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ $a_N \leq a_n$, also auch

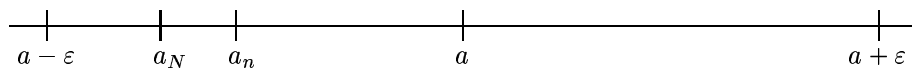
$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Daher gilt für jede ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$

$$a_n \in U_\varepsilon(a)$$

für alle $n \geq N$, d.h.

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$



Für monoton fallende, nach unten beschränkte Folgen, schließt man völlig analog oder verwendet das *Spiegelungsprinzip* (vgl. §1.2.2).

Wenn wir Beispiele betrachten, formulieren wir ein eng mit dem Monotonieprinzip verwandtes Prinzip, das *Intervallschachtelungsprinzip*:

9.4 Definition und Satz

Gegeben sei eine Folge von Intervallen $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:

- (a) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Eine solche Folge nennen wir eine *Intervallschachtelung*.

Dann existiert genau eine reelle Zahl x , die in alle Intervallen liegt:

$$x \in [a_n, b_n] \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

m.a.W.:

$$\bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n] = \{x\}.$$

Man sagt: Die Intervallschachtelung erfasst die Zahl x .

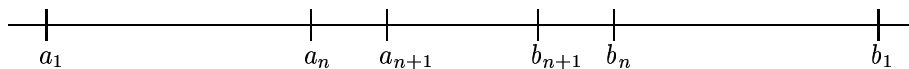
Ferner gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Der *Beweis* versteht sich fast von selbst. Aus der Voraussetzung

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

ergibt sich, dass die Folge (a_n) monoton wächst und die Folge (b_n) monoton fällt.



Andererseits sind beide Folgen (a_n) und (b_n) beschränkt, da alle Folgenglieder im Intervall $[a_1, b_1]$ liegen.

Also existieren nach dem *Monotonieprinzip*

$$a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ und } b := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Nach Voraussetzung ist die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n).$$

Andererseits ist nach den *Rechenregeln für konvergente Folgen*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b - a,$$

also $a = b$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n \leq \sup\{a_k; k \in \mathbb{N}\} = a = b = \sup\{b_k; k \in \mathbb{N}\} \leq b_n,$$

also ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a \in [a_n, b_n].$$

Ist $c \in \mathbb{R}$ eine weitere Zahl mit

$$a_n \leq c \leq b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

so folgt nach dem *Sandwich-Lemma*

$$a \leq c \leq a, \quad \text{also } c = a.$$

9.5 Beispiele und Bemerkungen zum Monotonie- und zum Intervallschachtelungsprinzip

(1) "Multiplikation statt Division"

Ist $a > 0$, so konvergiert die rekursive Folge (x_n) mit beliebigem Startwert $x_0 \in]0, \frac{1}{a}[$ und $x_{n+1} := 2x_n - ax_n^2$ für $n \geq 1$ monoton wachsend gegen $\frac{1}{a}$. Die Konvergenz ist sogar quadratisch.

Auf dieser Folge kommt man, wenn man die Gleichung ($a > 0$)

$$ax = 1 \quad (*)$$

zur Bestimmung von a^{-1} äquivalent umschreibt:

$$x = 2x - ax^2. \quad (**)$$

x ist die von Null verschiedene Lösung der Gleichung (**).

Setzt man $p(x) := 2x - ax^2 = x(2 - ax)$, so haben wir die *Fixpunktgleichung*

$$x = p(x)$$

zu lösen.

Durch diese Figur wird die rekursive Definition obiger Folge motiviert. Man wählt einen beliebigen Grenzwert $x_0 \in]0, \frac{1}{a}[$.

Mit Induktion zeigt man leicht, dass (x_n) (streng) monoton wächst und $x_n \leq \frac{1}{a}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(x_n) ist also nach dem Monotonieprinzip konvergent und der Grenzwert ist die positive Lösung der Gleichung (**), also $\frac{1}{a}$.

Aus der Beziehung

$$x_{n+1} - \frac{1}{a} = -a \left(x_n - \frac{1}{a} \right)^2$$

ist ersichtlich, dass die Folge (x_n) quadratisch gegen $\frac{1}{a}$ konvergiert.

Für $a = 2$, $x_0 = 0,25$ liefert ein primitiver Taschenrechner bereits

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0,375, & x_2 = 0,46875, & x_3 = 0,498046873, \\ x_4 = 0,499992371, & x_5 = 0,5, & x_6 = 0,5 \end{array}$$

also auch $x_n = 0,5$ für alle $n > 6$.

Zusatz: Man kann den Grenzwert x_0 sogar im größeren Intervall $]0, \frac{2}{a}[$ wählen, dann konvergiert die Folge (x_n) ab $n=1$ monoton wachsend gegen $\frac{1}{a}$.

- (2) Wir wissen, dass die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen (vgl. §2.3.5), was man auch in der Sprache der Folgen so ausdrücken kann:

Jede reelle Zahl ist der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen (vgl. §7.8(19)). Durch eine kleine Variation des Beweisprinzips von 2.3.5 erhält man zu einer beliebigen reellen Zahl x und beliebigem $n \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen p_n und q_n , so dass die folgende Ungleichungskette erfüllt ist

$$x - \frac{1}{n} < p_n < x - \frac{1}{n+1} < x < x + \frac{1}{n+1} < q_n < x + \frac{1}{n}.$$

Offensichtlich ist $p_n < x < q_n$, (x_n) monoton wachsend und (q_n) monoton fallend, außerdem ist

$$q_n - p_n < \frac{2}{n}, \quad \text{also ist} \\ ([p_n, q_n])_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Intervallschachtelung mit

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n.$$

- (3) *Die Eulersche Zahl e*

Wir betrachten die Folgen (E_n) und $(\tilde{E}_n)$ mit

$$E_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

und

$$\tilde{E}_n = E_n + \frac{1}{n \cdot n!}, \quad n \in \mathbb{N},$$

und behaupten, dass durch

$$([E_n, \tilde{E}_n])_{n \in \mathbb{N}}$$

eine Intervallschachtelung definiert wird. Die Folge (E_n) ist offensichtlich (streng) monoton wachsend:

$$E_{n+1} = E_n + \frac{1}{(n+1)!}, \quad \text{also } E_{n+1} > E_n.$$

Aus

$$E_{n+1} - E_n = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n \cdot n!} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!}$$

folgt

$$\tilde{E}_{n+1} = E_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} < E_n + \frac{1}{n \cdot n!} = \tilde{E}_n,$$

d.h. die Folge $(\tilde{E}_n)$ ist streng monoton fallend und es gelte die Ungleichung

$$2 = E_1 < 2,5 = E_2 < \dots < E_n < \tilde{E}_n < \dots < 2,75 = \tilde{E}_2 < 3 = \tilde{E}_1$$

Ferner ist

$$\tilde{E}_n - E_n = \frac{1}{n \cdot n!}$$

Nach dem Intervallschachtelungsprinzip gibt es also genau eine reelle Zahl -wir nennen sie nach dem Vorbild von L.Euler (1731) die *Eulersche Zahl* e - mit $e \in [E_n, \tilde{E}_n]$ für alle n .

e ist die *Basis für den natürlichen Logarithmus*.

Die Eulersche Zahl e lässt sich auch durch eine andere Intervallschachtelung erfassen. Dazu betrachten wir die beiden Folgen (e_n) und $(\tilde{e}_n)$ mit

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ und}$$

$$\tilde{e}_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

und behaupten, dass $([e_n, \tilde{e}_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls eine Intervallschachtelung definiert, die dann eine reelle Zahl e' erfasst.

Wir werden zeigen, dass $e' = e$ gilt.

Die Folge (e_n) taucht bei *Wachstums-* und *Zerfallsprozessen* (z.B. stetige Verzinsung) auf. Das Monotonieverhalten und die Beschränktheit der beiden Folgen ist nicht offensichtlich.

Wir betrachten zunächst

$$\tilde{e}_n = e_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > e_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Wenn wir wüssten, dass beide Folgen konvergent sind, folgte hieraus also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{e}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n.$$

Wir zeigen, dass (e_n) (streng) monoton wächst, $(\tilde{e}_n)$ (streng) monoton fällt.

Für $n \geq 2$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \frac{e_n}{e_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &> \left(1 - \frac{n}{n^2}\right) \cdot \frac{n}{n-1} \quad (\text{nach Bernoulli}) \\ &= \frac{n^2-n}{n^2} \cdot \frac{n}{n-1} = 1, \end{aligned}$$

also $e_n > e_{n-1}$ für alle $n \geq 2$ oder $e_{n+1} > e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
 \frac{\tilde{e}_{n-1}}{\tilde{e}_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} \\
 &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
 &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
 &= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} \\
 &> \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \quad (\text{nach Bernoulli}) \\
 &> \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n+1} = 1. \quad \left(\text{beachte } \frac{n}{n^2-1} > \frac{1}{n}\right)
 \end{aligned}$$

also ist $\tilde{e}_{n-1} > \tilde{e}_n$ für alle $n \geq 2$ oder $\tilde{e}_{n+1} < \tilde{e}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. die Folge $(\tilde{e}_n)$ fällt streng monoton.

Es gilt also insgesamt

$$2 = e_1 < 2,25 = e_2 < \dots < e_n < \tilde{e}_n < \dots < 3,375 = \tilde{e}_2 < 4 = \tilde{e}_1.$$

Ferner ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{e}_n - e_n = \frac{1}{n}e \leq \frac{1}{n}4,$$

also gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{e}_n - e_n) = 0,$$

die Voraussetzungen des Intervallschachtelungsprinzips sind also erfüllt. Es gibt also eine eindeutig bestimmte reelle Zahl e' mit

$$e' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Wir zeigen nun, dass $e = e'$ gelten muss.

Dazu zeigen wir zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$e_n \leq E_n$$

gilt.

Nach dem binomischen Satz ist nämlich

$$\begin{aligned}
 e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{k!} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \frac{1}{k!} \\
 &\leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = E_n.
 \end{aligned}$$

Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ folgt hieraus

$$e' = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E_n = e,$$

also $e' \leq e$.

Wir zeigen nun, dass auch $e' \geq e$, insgesamt also $e = e'$ gilt.

Dazu sei $m \in \mathbb{N}$ zunächst fest gewählt und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. Dann folgt mit einer völlig analogen Schlussweise

$$\begin{aligned} e_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \frac{1}{k!} \\ &\geq 1 + \sum_{k=1}^m \frac{n}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

und hieraus nach den Rechenregeln für konvergente Folgen (beachte m ist fest)

$$e' = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = E_m.$$

Weil diese Ungleichung für *alle* $m \in \mathbb{N}$ gilt, folgt nun wegen der Monotonie des Limes auch

$$e' \leq e.$$

□

Bemerkung:

Die Folge (E_n) konvergiert wesentlich schneller gegen e wie die Folge (e_n) .

Für die Intervalle $[\tilde{e}_n, e_n]$ und $[\tilde{E}_n, E_n]$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$[\tilde{E}_n, E_n] \subset [\tilde{e}_n, e_n]$$

und $\tilde{E}_n - E_n = \frac{1}{n \cdot n!}$, während

$$\tilde{e}_n - e_n = \frac{1}{n} e_n \leq \frac{4}{n}$$

gilt.

Aus

$$E_n \leq e_n \leq E_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

und der strengen Monotonie von E_n und $\tilde{E}_n$ erhält man sogar die Abschätzung

$$\boxed{0 < e - E - n < \frac{1}{n \cdot n!}, \quad n \in \mathbb{N}} \quad (*)$$

Die folgende Tabelle verdeutlicht den Sachverhalt.

n	e_n	E_n	$\tilde{E}_n$	$\tilde{e}_n$
1	2	2.7182818284590452353	3	4
2	2.250000000	2.5000000000000000000	2.7500000000000000000	3.375000000
3	2.370370370	2.6666666666666666666	2.7222222222222222222	3.160493827
4	2.441406250	2.7083333333333333333	2.7187500000000000000	3.051757813
5	2.488320000	2.7166666666666666666	2.7183333333333333333	2.985984000
6	2.521626372	2.7180555555555555555	2.7182870370370370370	2.941897434
7	2.546499697	2.7182539682539682539	2.7182823129251700680	2.910285368
8	2.565784514	2.7182787698412698412	2.7182818700396825396	2.886507578
9	2.581174792	2.7182815255731922398	2.7182818317656280619	2.867971991
10	2.593742460	2.7182818011463844797	2.7182818287037037037	2.853116706
11	2.604199012	2.7182818261984928651	2.7182818284759572638	2.840944377
12	2.613035290	2.7182818282861685639	2.7182818284601415388	2.830788231
13	2.620600888	2.7182818284467590023	2.7182818284591121129	2.822185572
14	2.627151556	2.7182818284582297479	2.7182818284590490868	2.814805239
15	2.632878718	2.7182818284589944642	2.7182818284590454453	2.808403966
16	2.637928497	2.7182818284590422590	2.7182818284590452462	2.802799028
17	2.642414375	2.7182818284590450705	2.7182818284590452358	2.797850515
18	2.646425821	2.7182818284590452267	2.7182818284590452353	2.793449478
19	2.650034327	2.7182818284590452349	2.7182818284590452353	2.789509818
20	2.653297705	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.785962590
21	2.656263214	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.782751938
22	2.658969859	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.779832125
23	2.661450119	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.777165341
24	2.663731258	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.774720060
25	2.665836331	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.772469785
26	2.667784967	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.770392081
27	2.669593978	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.768467829
28	2.671277853	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.766680634
29	2.672849144	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.765016356
30	2.674318776	2.7182818284590452353	2.7182818284590452353	2.763462735
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	2.718281828	2.718281828	2.718281828	2.718281828

Aus (*) ergibt sich ein einfacher Beweis für die *Irrationalität* von e .

9.6 Satz: Die Eulersche Zahl e ist irrational.

Wegen $2 < e < 3$ ist e sicher keine ganze Zahl. Wäre nun e rational, so müsste sich e in der Form $e = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$, schreiben lassen.

Die Formel (*) liefert für $n = q$

$$0 < e - E_q < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Multipliziert man diese Ungleichung mit $q!$, so folgt

$$0 < e \cdot q! - q!E_q < \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2} < 1$$

Dann ist $g := q!E_q \in \mathbb{Z}$ und $eq! = p(q-1)!$ ist ebenfalls eine ganze Zahl, also ist ihre Differenz $d := eq! - q$ eine ganze Zahl, das steht aber im Widerspruch zu $0 < d < 1$.

□

Die Eulersche Zahl e ist sogar *transzendent* (vgl. §10.5.17). Dies wurde zuerst von C.Hermite (1873) bewiesen.

Mit der Eulerschen Zahl e erhalten wir auch bessere Abschätzung für $n!$

9.7 Satz (Abschätzung für $n!$)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Beweis: Für $n = 1$ ist die Ungleichung offensichtlich. Ist $n \geq 2$ so multipliziert man die Ungleichungen $e_k \leq e \leq \tilde{e}_k$ für $k = 1, 2, \dots, n-1$ miteinander, wobei fest "Teleskopprodukte" entstehen, d.h. viele Faktoren kürzen sich raus.

$$e_1 \cdot e_2 \cdot e_3 \cdots e_{n-1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1 \left(\frac{3}{1}\right)^2 \cdots \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-2} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot (n-2)(n-1)} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

Analog erhält man

$$\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_{n-1} = \frac{n^n}{(n-1)!}$$

und damit

$$\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \leq e^{n-1} \leq \frac{n^n}{(n-1)!},$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Bemerkung: Die Abschätzung für $n!$ werden wir später nochmals stark verbessern (Stichwort: *Stirlingsche Formel*)

Weitere Beispiele:

Als weiteres Beispiel betrachten wir das mehrfach in der Vorlesung vorgestellte "Babylonische Wurzelziehen" von einem systematischen Standpunkt. Wir erhalten gleichzeitig einen neuen *Existenzbeweis für Quadratwurzeln* aus positiven reellen Zahlen.

Sei also $a > 0$ eine reelle Zahl, deren Quadratwurzel bestimmt werden soll. Wenn $x > 0$ Quadratwurzel von a sein soll, also der Gleichung $x^2 = a$ genügt, gilt $x = \frac{a}{x}$, andernfalls ist $x \neq \frac{a}{x}$. Dann ist das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ vielleicht ein besserer Näherungswert für die Quadratwurzel und durch Iteration erhält man tatsächlich eine Folge, die gegen die Wurzel aus a konvergiert.

9.8 Satz

Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ reelle Zahlen. Die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ sei rekursiv definiert durch $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$.

Dann gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und die Folge (x_n) konvergiert monoton fallend (ab $n \geq 1$) gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung

$$x^2 = a$$

Die Folge (y_n) mit $y_n = \frac{a}{x_n}$ konvergiert monoton wachsend ($n \geq 1$) gegen die mit $\sqrt{a}$ berechnete positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

$([y_n, x_n])_{n \geq 1}$ ist eine Intervallschachtelung mit

$$y_n \leq \sqrt{a} \leq x_n (n \in \mathbb{N}).$$

Beweis in mehreren Schritten

- (1) Für alle n gilt $x_n > 0$.

Induktion nach n :

Induktionsanfang: $n = 0$; $x_0 \geq a > 0$.

Induktionsschritt: Sei $x_n > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ schon gezeigt. Dann folgt auch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) > \frac{1}{2} (0 + 0) = 0$$

Also ist $y_n := \frac{a}{x_n}$ eine zulässige Bildung.

- (2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n^2 \geq a$

Es ist nämlich für $n > 1$

$$x_n^2 = \left(\frac{1}{2} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right) \right)^2 \geq x_{n-1} \frac{a}{x_{n-1}} = a$$

nach der AGM-Ungleichung.

- (3) (x_n) ist monoton fallend:

$$x_{n+1} \leq x_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist nämlich

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 - a) \geq 0$$

- (4) Mit $y_n = \frac{a}{x_n}$ gilt $y_n^2 \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn aus

$$\frac{1}{x_n^2} \leq \frac{1}{a}$$

folgt durch Multiplikation mit a^2 :

$$y_n^2 = \frac{a^2}{x_n^2} \leq \frac{1}{a} a^2 = a.$$

- (5) (y_n) ist monoton wachsend: $y_n \leq y_{n+1}$ für alle n , denn aus $x_{n+1} \leq x_n$ folgt $\frac{1}{x_n} \leq \frac{1}{x_{n+1}}$ und durch Multiplikation mit a

$$y_n = \frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{x_{n+1}} = y_{n+1}.$$

- (6) $y_n \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn anderfalls wäre $y_n > x_n > 0$ und damit $y_n^2 > x_n^2 \geq a$ mit Widerspruch zu (4).

- (7) Wegen (3) und $y_1 \leq x_n$ für alle n ist (x_n) nach dem Monotonieprinzip konvergent.

Falls $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ gilt, dann auch $x \geq y_1 > 0$.

Wegen $y_n \leq x_n \leq x_1$ und (5) ist (y_n) ebenfalls konvergent und für $y := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{x_n}$ gilt

$$y = \frac{a}{x}.$$

Aus $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ folgt nach den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{x_n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right)\end{aligned}$$

und wegen $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}$ genügt x der Gleichung

$$x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{a}{x} \right),$$

also der Gleichung $x^2 = a$.

Damit ist gezeigt, dass die Folge (x_n) (und auch die Folge (y_n)) gegen eine Lösung der Gleichung

$$x^2 = a$$

konvergiert.

Wegen $a \geq y_1 > 0$ ist es die positive Lösung der Gleichung.

Bezeichnung (wie früher): $x = \sqrt{a}$.

Damit haben wir einen weiteren Existenzbeweis für Wurzeln aus positiven reellen Zahlen und ein effektives Verfahren, solche Wurzeln mit *beliebiger Genauigkeit* zu berechnen. Wegen

$$y_n = \frac{a}{x_n} \leq \sqrt{a} \leq x_n$$

hat man bei jedem Iterationsschritt eine Fehlerabschätzung für die gesuchte Quadratwurzel.

- (8) Das $[y_n, x_n]$ eine Intervallschachtelung ist, sei als Aufgabe gestellt.

Die folgende Tabelle lässt erkennen, dass die Folge sehr schnell konvergiert, selbst bei exotischen Startwerten.

$$a = 2, x_0 = 1, \sqrt{2} = 1.414213562373095048801688724$$

n	x_n	$\frac{a}{x_n}$	$x_n - \sqrt{2}$
0	1	2.000000000000000000000000000000	0.414213
1	1.5	1.333333333333333333333333333333	0.085786
2	1.416666666666666666666666666666	1.41176470588235294117647058823	0.002453
3	1.4142156862745098039215686274	1.41421143847487001733102253032	$0.2 \cdot 10^{-5}$
4	1.4142135623746899106262955788	1.41421356237150018697708366811	$0.1 \cdot 10^{-11}$
5	1.4142135623730950488016896235	1.41421356237309504880168782491	$0.8 \cdot 10^{-24}$
6	1.4142135623730950488016887242	1.41421356237309504880168872420	$0.2 \cdot 10^{-48}$
7	1.4142135623730950488016887242	1.41421356237309504880168872420	$0.2 \cdot 10^{-97}$
8	1.4142135623730950488016887242	1.41421356237309504880168872420	0
9	1.4142135623730950488016887242	1.41421356237309504880168872420	0
10	1.4142135623730950488016887242	1.41421356237309504880168872420	0

$$a = 2, x_0 = 0,001$$

n	x_n	$\frac{a}{x_n}$	$x_n - \sqrt{2}$
0	0,001	2000.0000000000000000000000000000	-1,4132135
1	1000,0005	0,001999999900000004999997500000	998,590786
2	500,0012499995000002499998750	0,0039999900000028999915500246	498,587036
3	250,0026249947500146249576876	0,007999916001049986743167514	248,588411
4	125,0053124553755323058504275	0,015999320034610218185829691	123,591098
5	62,51065588770507126201812863	0,031994545115521186719774587	61,0964423
6	31,27132521641029622436895160	0,063956355739937022460324577	29,8571116
7	15,66764078607511662341463809	0,127651637365692872097721279	14,2534272
8	7,897646211720404747756179686	0,253240009286808086291973356	6,48343264
9	4,075443110503606417024076521	0,490744183091506356538952911	2,66122954
10	2,283093646797556386781514716	0,876004364869288030925567637	0,86888008
11	1,579549005833422208853541177	1,266184203601036084486256632	0,16533544
12	1,422866604717229146669898904	1,405613142770657989990048421	0,00865308
13	1,414239873743943568329973663	1,414187251491759128077180754	0,00002631
14	1,414213562617851348203577208	1,414213562128338749442159928	$2,3 \cdot 10^{-10}$
15	1,414213562373095048822868568	1,414213562373095048822868568	$2,1 \cdot 10^{-20}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Man spricht von *quadratischer Konvergenz*, weil

$$\begin{aligned}
 |x_{n+1} - \sqrt{a}| &= x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) - \sqrt{a} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(x_n - \sqrt{a})^2}{x_n} \\
 &\leq \frac{|x_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}} = C|x_n - \sqrt{a}|^2
 \end{aligned}$$

(mit $C := \frac{1}{2\sqrt{a}}$) gilt.

Hat man also z.B. $\sqrt{2}$ beim n -ten Iterationsschritt mit einem Fehler $< 10^{-n}$ approximiert, dann gilt beim nächsten Schritt

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{10^{-2n}}{2\sqrt{2}} < 10^{-2n}.$$

Da -wie mehrfach plausibel gemacht- das Babylonische Wurzelziehen ein Spezialfall des Newton-Verfahren ist -und dieses, wenn es konvergiert i.a. ziemlich blitzartig konvergiert- ist die quadratische Konvergenz nicht sehr überraschend.

Das Verfahren hat außerdem den Vorteil *selbstkorrigierend* zu sein:

Da *jede* positive Zahl als Startwert verwendet werden kann, können Rechenfehler, insbesondere Rundungsfehler, den Ablauf des Algorithmus nicht gänzlich verfälschen, sondern allerfalls verzögern. Wollen wir z.B. $\sqrt{2}$ auf 100 Nachkommastellen genau berechnen, bräuchten wir im obigen Beispiel die Rechnung nicht von Anfang an mit 100-stelliger Genauigkeit durchzuführen, sondern etwa mit einem Näherungswert mit 35 Nachkommastellen bestimmen und erhielten nach zwei weiteren Iterationsschritten das gewünschte Ergebnis.

Sind außerdem a und der Startwert x_0 *rational*, so sind alle x_n *rational*.

Alles in Allem: Es handelt sich hier um den *Idealfall* eines schnell konvergierenden und stabilen *numerischen Verfahrens*.

Leider sind die Verhältnisse bei anderen numerischen Verfahren nicht immer so ideal.

9.9 Existenz k -ter Wurzeln ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$)

Eine Verallgemeinerung auf k -te Wurzeln ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$) liegt nahe.

Sind $a > 0$ und $x_0 > 0$ beliebige reelle Zahlen. Definiert man die Folge $(x_n)_{n \geq 0}$ rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right),$$

dann konvergiert die Folge (x_n) gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung

$$x^k = a.$$

Wie man auf diese rekursive Folge kommt, wurde in der Vorlesung begründet.

Damit hat man einen weiteren *Existenzbeweis* für k -te Wurzeln.

Der Spezialfall $k = 2$ ist hierin enthalten.

Zum Beweis vergleiche man die Musterlösung zu Aufgabe 4 von Blatt 2.

9.10 Kreismessung nach Archimedes

Die Berechnung des Flächeninhalts der Einheitsscheibe $\bar{\mathbb{E}} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$ nach dem Vorbild von Archimedes sei auf Übungsblatt 7 Aufgabe 5 und die entsprechende Musterlösung verwiesen.

9.11 Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl

Als Vorbereitung für die *Theorie der Reihen* betrachten wir ein letztes Beispiel für eine Intervallschachtelung.

Ist $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, dann sei

$$\begin{aligned} Z &:= \{0, 1, \dots, 9\} \text{ und} \\ x_0 &:= [x] = \max\{k \in \mathbb{Z}; k \leq x\} \text{ und} \\ x_1 &:= \max\{k \in \mathbb{Z}; x_0 + \frac{k}{10} \leq x\} \\ &\vdots \\ x_n &:= \max\{k \in \mathbb{Z}; x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} \leq x\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ist x_n schon definiert, so sei

$$x_{n+1} := \max\{k \in \mathbb{Z}; x_0 + \frac{x_1}{10} + \dots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{k}{10^{n+1}} \leq x\}.$$

Man erhält zwei Folgen (a_n) und (b_n)

$$\begin{aligned} a_n &:= x_0 + \frac{x_1}{10} + \dots + \frac{x_n}{10^n} \text{ und} \\ b_n &:= a_n + \frac{1}{10^n} \end{aligned}$$

mit $a_n \leq x < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Offensichtlich ist (a_n) monoton wachsend und (b_n) monoton fallend. Wegen

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}$$

ist $([a_n, b_n])$ eine Intervallschachtelung mit

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Man schreibt auch

$$x = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{10^k} = x_0, x_1 x_2 x_3 x_4 \dots$$

Die so gewonnene Darstellung von x nennt man die *Dezimalbruchdarstellung* von x . Wir kommen hierauf im Abschnitt über Reihen ausführlich zurück.

Monotone und beschränkte Folgen haben also ein gutes Konvergenzverhalten.

Um unsere Sätze über monotone Folgen auf allgemeine Folgen anwenden zu können, zeigen wir einen bemerkenswerten Satz, dass nämlich *jede* reelle Zahlenfolge eine *monotone Teilfolge* besitzt. Betrachtet man z.B. die Folge

$$\begin{aligned} (a_n) &= \left(\frac{(-1)^n}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N} \text{ und die Teilfolgen} \\ (a_{2k}) &= (a_2, a_4, a_6, \dots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots \right) \\ (a_{2k-1}) &= (a_1, a_3, a_5, \dots) = \left(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \dots \right) \\ (a_{2^k}) &= (a_2, a_4, a_8, \dots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right) \end{aligned}$$

so sind diese alle monoton, was auf die ursprüngliche Folge nicht zutrifft. Mit Hilfe der folgenden Begriffsbildung lässt sich das folgende etwas überraschende Lemma 9.13 beweisen.

9.12 Definition

Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt *Gipfelindex* der reellen Zahlenfolge (a_n) , falls für alle $m > n$ gilt $a_n > a_m$.

9.13 Lemma

Jede reelle Zahlenfolge (a_n) besitzt eine monotone Teilfolge.

Beweis: Zwei Fälle sind denkbar:

(a) Es gibt eine Folge

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < n_{k+1} < \dots$$

von Gipfelindizes, dann ist

$$a_{n_1} > a_{n_2} > a_{n_3} > \dots > a_{n_k} > a_{n_{k+1}} > \dots,$$

also (a_{n_k}) eine (sogar streng) monoton fallende Teilfolge von (a_n) .

(b) Die Menge der Gipfelindizes ist endlich: Seien etwa

$$n'_1 < n'_2 < \dots < n'_r \quad (r \in \mathbb{N})$$

alle Gipfelindizes.

Man setze $n_1 := n'_r + 1$. Da n_1 kein Gipfelindex ist, gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Da auch n_2 kein Gipfelindex ist, gibt es $n_3 > n_2$ mit $a_{n_2} \leq a_{n_3}$ etc.

Man erhält eine monoton wachsende Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) .

□

Mit Hilfe des Lemmas ergibt sich nun ganz einfach das Auswahlprinzip von *Bolzano-Weierstraß*.

9.14 Theorem (Bolzano-Weierstraß)

(B.Bolzano(1781-1841), K.Weierstraß (1815-1897))

Jede beschränkte reelle Zahlenfolge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Beweis: Jede reelle Zahlenfolge besitzt nach dem Lemma eine monotone Teilfolge. Ist die gegebene Folge beschränkt, dann ist auch jede Teilfolge beschränkt, insbesondere also die nach dem Lemma existierende monotone Teilfolge. Diese ist dann nach dem Monotonieprinzip konvergent. $\square$

Bemerkung:

Ist $h \in \mathbb{R}$ bzw. $h \in \mathbb{C}$ der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge einer reellen bzw. komplexen Zahlenfolge (a_n) , dann nennt man h auch *Häufungswert* der Folge (a_n) .

Man kann den Satz von Bolzano-Weierstraß dann auch so aussprechen:

Satz: Jede *beschränkte* reelle oder komplexe Zahlenfolge besitzt einen Häufungswert.

Die Übertragung auf den komplexen Fall erhält man dabei sofort durch Anwendung des reellen Satzes auf Realteil und Imaginärteil der komplexen Folge.

Wir beweisen als nächstes eine bemerkenswerte *Verdichtungseigenschaft* konvergenter reeller oder komplexer Zahlenfolgen.

Sei dazu (a_n) eine konvergente (reelle oder komplexe) Zahlenfolge mit dem Grenzwert a ($a \in \mathbb{R}$ oder $a \in \mathbb{C}$).

Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ist dann auch $m \in \mathbb{N}$ und $m \geq N$, dann ist ebenso

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Deshalb folgt für alle $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a + a - a_n| \\ &= |a_m - a| + |a - a_n| \\ &= |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Etwas locker formuliert bedeutet das:

Bei einer konvergenten Folge (a_n) liegen die Folgenglieder mit hinreichend großem Index beliebig dicht beieinander. Zur Präzisierung führt man den folgenden Begriff ein.

9.15 Definition (Cauchy-Folge)

(A.L.Cauchy (1789-1857))

Eine reelle oder komplexe Zahlenfolge heißt *Cauchy-Folge* (oder *Fundamental-Folge*), wenn sie die folgende Bedingung erfüllt:

(CF): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gilt:

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Unsere obige Überlegung hat gezeigt:

Satz: Jede *konvergente* reelle oder komplexe Zahlenfolge ist eine Cauchy-Folge.

Von großer Bedeutung ist, dass hiervon auch die Umkehrung, also das folgende Theorem gilt:

9.16 Theorem (Cauchysches Konvergenzprinzip)

Eine reelle oder komplexe Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis: Da eine komplexe Zahlenfolge (z_n) offensichtlich genau dann eine Cauchy-Folge ist, wenn die Folgen $(\operatorname{Re} z_n)$ und $(\operatorname{Im} z_n)$ Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ sind, können wir uns auf reelle Zahlenfolgen beschränken und haben also nur noch zu zeigen:

Wenn (a_n) eine Cauchy-Folge reeller Zahlen ist, dann ist (a_n) konvergent.

Wir müssen also aus der Bedingung (CF) uns irgendwie einen Kandidaten für einen möglichen Grenzwert der Folge (a_n) verschaffen. Wir tun dies in drei Schritten:

1. Schritt: Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
2. Schritt: Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge (das ist die Aussage des Satzes von Bolzano-Weierstraß)
3. Schritt: Ist a der Grenzwert der konvergenten Teilfolge, dann konvergiert auch die Ausgangsfolge gegen a .

Zum 1. Schritt: Sei (a_n) die gegebene Cauchy-Folge. Dann erfüllt (a_n) also die Bedingung (CF): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq N$ gilt: $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Wählt man speziell $\varepsilon = 1$ und $n = N$, dann gilt $|a_m - a_N| < 1$ für alle $m \geq N$. Daher

$$|a_m| = |a_m - a_N + a_N| \leq |a_m - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N| \text{ für alle } m \geq N.$$

Fast alle a_m liegen also in $U_{1+|a_N|}(0)$.

Ist $M := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|\}$ und $R = \max\{M, 1 + |a_N|\}$, dann gilt offenbar $|a_n| \leq R$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bei dieser Schlussweise war es übrigens unwesentlich, ob (a_n) eine reelle oder komplexe Folge ist.

Zum 2. Schritt: Nach Bolzano-Weierstraß hat jede beschränkte (reelle oder komplexe) Zahlenfolge eine konvergente Teilfolge. Wir können uns -wie oben bemerkt- auf den reellen Fall beschränken, das ist aber unwesentlich.
Sei also $(b_k) = (a_{n_k})$ die konvergente Teilfolge von (a_n) und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} b_k$.

Zum 3. Schritt: $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dann müssen wir ausnutzen, dass (b_k) gegen a konvergiert und (a_n) die Bedingung (CF) erfüllt.
Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.
Wegen (CF) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m \geq N$ gilt

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Wegen $a = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$,
so dass für alle $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq k$ gilt

$$|b_k - a| = |a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ist nun $n \geq M := \max\{N, k\}$, so ist (beachte $n_M \geq M$)

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= |a_n - a_{n_M} + a_{n_M} - a| \\ &\leq |a_n - a_{n_M}| + |a_{n_M} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

also konvergiert (a_n) gegen a .

□

9.17 Beispiele zum Cauchy-Kriterium

Das Cauchy-Kriterium erlaubt es Aussagen über die Konvergenz bzw. Divergenz einer Folge zu machen, ohne dass man den Grenzwert kennt.

Wir benutzen es als Divergenzkriterium:

Gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass es für alle $N \in \mathbb{N}$ stets natürliche Zahlen $m, n \geq N$ gibt, für welche $|a_m - a_n| \geq \varepsilon_0$ gilt, dann ist (a_n) nicht konvergent, denn (CF) ist für ε_0 nicht erfüllt.

(1) Die Folge (H_n) mit

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ist nicht konvergent, denn wählt man $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{N}$ beliebig, $n = N$ und $m = 2N$, dann ist

$$H_m - H_n = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{2}.$$

Die Folge (H_n) ist also keine Cauchy-Folge, also nicht konvergent.

Dies hatten wir auch schon aus der Unbeschränktheit von (H_n) gefolgert:

Für $n \geq 2^k$ ist (vgl. §7.8(17))

$$H_n \geq H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2} > \frac{k}{2}.$$

(2) Bei der Folge (s_n) mit

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

berechnet man zunächst einige Glieder:

$$\begin{array}{llll}
s_1 & = & 1 & \\
s_2 & = & 1 - \frac{1}{2} & = 0,5 \\
s_3 & = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} & = 0,83 \\
s_4 & = & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} & = 0,583\dots \\
s_5 & = & \dots & = 0,783\dots \\
s_6 & = & \dots & = 0,616\dots \\
s_7 & = & \dots & = 0,07595\dots \\
s_8 & = & \dots & = 0,6345\dots \\
s_9 & = & \dots & = 0,7456\dots
\end{array}$$

Das legt die Vermutung nahe, dass die Teilfolge (s_{2k+1}) monoton fällt und die Teilfolge (s_k) monoton wächst und dass sie möglicherweise gegen den gleichen Grenzwert, der ungefähr bei 0,7 liegt, konvergieren.

Da wir aber keine Vermutung über den potentiellen Grenzwert haben, verwenden wir das Cauchy-Kriterium um die Konvergenz von (s_n) zu zeigen.

Wir können im Cauchy-Kriterium oBdA $m > n$, also $m = n + k$ mit $k \in \mathbb{N}$ voraussetzen.

Dann ist

$$\begin{aligned}
s_m - s_n = s_{n+k} - s_n &= \frac{(-1)^n}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} + \dots + \frac{(-1)^{n+k-1}}{n+k} \\
&= (-1)^n \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \mp \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k} \right)
\end{aligned}$$

Wir betrachten den Klammerausdruck:

$$\text{Sei } a := \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} \mp \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{n+k}$$

wegen $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0$ ergibt sich durch Zusammenfassen zweier aufeinander folgenden Summanden

$$a = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right) + \dots + \begin{cases} \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{n+k}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

dass $a > 0$ ist.

Lässt man in a den ersten Summanden unverändert und fasst dann je zwei aufeinander folgende Summanden zusammen, so ergibt sich

$$a = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) - \dots - \begin{cases} \frac{1}{n+k}, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wegen $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} > 0$ folgt nun $a < \frac{1}{n+1}$ und damit folgt

$$|s_{n+k} - s_n| = |a| < \frac{1}{n+1}.$$

Jetzt läuft der eigentliche Konvergenzbeweis routinemäßig:

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Für alle $n \geq N$ ist dann

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(s_n) ist also eine Cauchy-Folge, nach dem Cauchyschen Konvergenzkriterium also konvergent.

Wie wir später sehen werden ist der Grenzwert der natürliche Logarithmus von 2:

$$\ln 2 = 0,6931471805599\dots$$

- (3) Setzt man im Cauchy-Kriterium $m = n + 1$, so erhält man, dass die Folge $(|a_{n+1} - a_n|)$ eine Nullfolge sein muss. Hieraus folgt aber noch nicht die Konvergenz von (a_n) . Im Beispiel (1) ist

$$|H_{n+1} - H_n| = \frac{1}{n+1},$$

also ist $(H_{n+1} - H_n)$ eine Nullfolge, $H(n)$ ist aber divergent.

Wenn jedoch die Folge $|a_{n+1} - a_n|$ "schnell" gegen Null konvergiert, folgt auch die Konvergenz von (a_n) :

Für eine reelle oder komplexe Zahlenfolge (a_n) gelte folgende Bedingung:

(B): Es gibt ein $q \in]0, 1[$ und ein $C > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n,$$

dann ist (a_n) konvergent.

Man zeigt, dass (a_n) eine Cauchy-Folge ist:

Für $m > n \geq N$ gilt

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} (a_{k+1} - a_k) \right| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| \\ &\leq C \sum_{k=n}^{m-1} q^k = Cq^n \sum_{k=0}^{m-1-n} q^k \leq \frac{C}{1-q} q^n. \end{aligned}$$

Da (q^k) eine Nullfolge ist, gibt es zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $n \geq N$ mit

$$\frac{C}{1-q} q^n < \varepsilon, \text{ also mit}$$

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \text{ für alle } m > n \geq N.$$

9.18 Zur Bedeutung des Cauchy-Kriteriums

Seine Bedeutung liegt zunächst darin, dass es ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Folge darstellt, in welchem der hypothetische Grenzwert der Folge nicht vorkommt.

Wir haben das Cauchy-Kriterium aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, diesen wiederum aus dem Monotonie-Prinzip gefolgert. Das Monotonieprinzip war eine unmittelbare Konsequenz aus dem Vollständigkeitsaxiom (Supremumsaxiom). Lehrbuchautoren wie O.Forster verwenden das Cauchy-Kriterium (und das Archimedische Axiom) als Vollständigkeitsaxiom. Letztlich sind diese Axiome alle äquivalent. Dass das Cauchy-Kriterium besonders anschaulich ist, kann man wohl nicht behaupten. Dennoch ist es in gewisser Weise fundamental, wenn man allgemeinere Räume, etwa metrische Räume, betrachtet und dort den Begriff der Vollständigkeit definieren will. Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (X, d) heißt *konvergent*, wenn es ein $a \in X$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

In jeder ε -Umgebung $U_\varepsilon(a)$ liegen fast alle Folgenglieder, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ gilt:

$$d(x_n, a) < \varepsilon$$

Das bedeutet nichts anderes als dass die Folge $(d(x_n, a))$ der Abstände eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ ist.

Der Begriff der Cauchy-Folge lässt sich in jedem metrischen Raum prägen:

Eine Folge (a_n) von Elementen eines metrischen Raums (X, d) heißt *Cauchy-Folge*, wenn sie folgende Bedingung erfüllt:

(CF): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$, mit $m, n \geq N$ gilt:

$$d(a_m, a_n) < \varepsilon$$

Jede konvergente Folge in X ist Cauchy-Folge. Dies zeigt man wie in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(X, d) heißt *vollständiger metrischer Raum*, falls jede Cauchy-Folge in X einen Grenzwert in X hat.

Unsere Überlegungen haben gezeigt:

$\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind bezüglich der aus dem Betrag abgeleiteten Metrik vollständige metrische Räume.

Ist X ein *normierter Raum* (vgl. §5.8) und ist X bzgl. der aus der Norm abgeleiteten Metrik ein vollständiger metrischer Raum, dann heißt X ein *Banach-Raum*.

Ist die Norm aus einem *Skalarprodukt* auf den $\mathbb{K}$ -Vektorraum X abgeleitet und X vollständig bezüglich der aus der Norm abgeleiteten Metrik, dann heißt X ein *Hilbert-Raum*.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ sind Hilbert-Räume, speziell also auch Banach-Räume.

$\mathbb{Q}$ ist kein vollständiger metrischer Raum bezüglich der von $\mathbb{R}$ geerbten Metrik, denn es gibt jede Menge Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$, die nicht gegen Elemente aus $\mathbb{Q}$ konvergieren:

So gilt z.B. für die durch $x_0 := 1$ und $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ für $n \geq 1$ definierte Folge (x_n) , $x_n \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$: (x_n) konvergiert zwar in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$, aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Auch die Folgen (e_n) und (E_n) mit

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ bzw. } E_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

sind Cauchy-Folgen rationaler Zahlen, die aber in $\mathbb{Q}$ nicht konvergieren.

Bei einem konstruktiven Aufbau des Zahlensystems, ausgehend von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, den ganzen Zahlen, den rationalen Zahlen, kann man reelle Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen einführen.

Die rationalen Zahlenfolgen (e_n) und (E_n) ergeben dabei dieselbe reelle Zahl, nämlich die Eulersche Zahl e .

Zwei Cauchy-Folgen (a_n) und (b_n) rationaler Zahlen heißen dabei äquivalent, wenn $(a_n - b_n)$ eine (rationale) Nullfolge ist.

Auf der Menge der Folgen rationaler Zahlen wird hierdurch eine Äquivalenzrelation definiert. Auf der Menge der Äquivalenzklassen kann man dann eine Addition und Multiplikation so erklären, dass eine Körperstruktur entsteht. Algebraisch liegt dies daran, dass die Menge aller Nullfolgen von rationalen Zahlen ein *Ideal* ist, sogar ein *maximales* und der Restklassen-Ring R/m eines Ringes R nach einem maximalen Ideal m ist ein Körper (vgl. z.B. Fischer-Sacher: Algebra; Teubner Studienbücher, Satz 3.2.2)

Eine solche auf G.Cantor(1845-1918) zurückgehende Konstruktion von $\mathbb{R}$ findet man z.B. in W.Kaballo: Einführung in die Analysis 1; 3.Auflage, dort siehe §15 oder in Amann-Escher: Analysis 1, Seite 180ff.

9.19 Häufungswerte, $\lim$, $\overline{\lim}$, uneigentliche Konvergenz

Die konvergenten reellen oder komplexen Zahlenfolgen bilden eine außerordentlich wichtige Klasse in der Gesamtheit aller reellen bzw. komplexen Zahlenfolgen (sie bilden jeweils $\mathbb{K}$ -Vektorräume).

Dies zeigt sich insbesondere in den einfachen Rechenregeln, die wir für konvergente Folgen ableiten konnten.

Einfache Folgen, wie z.B. $((-1)^n)$, sind jedoch nicht konvergent. Die Folge $((-1)^n)$ besitzt jedoch die beiden konvergenten Teilfolgen $((-1)^{2k})$ und $((-1)^{2k-1})$, $k \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (vgl. §9.14) besitzt jede beschränkte reelle oder komplexe Zahlenfolge eine konvergente Teilfolge.

Besitzt eine reelle oder komplexe Zahlenfolge (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) und ist $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k}$ ihr Grenzwert, so hatten wir diesen in §9.14 auch einen *Häufungswert* der Folge (a_n) genannt. Der Satz von Bolzano-Weierstraß lässt sich also umformulieren in

Satz (Bolzano-Weierstraß):

Jede beschränkte reelle oder komplexe Zahlenfolge besitzt einen Häufungswert.

9.19.1 Beispiele

- (a) Die Folge $((-1)^n)$ hat die Häufungswerte 1 und -1 (und sonst keine weiteren, Beweis?)
- (b) Die Folge $((-1)^n \frac{n}{n+1})$ besitzt die Häufungswerte 1 und -1 und sonst keine weiteren.
- (c) Die nicht beschränkte Folge $(n(1 + (-1)^n))$ besitzt den Häufungswert Null.
- (d) Die Folge $(i^n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat die Häufungswerte $1, i, -1, -i$ und sonst keine weiteren.
- (e) Eine konvergente reelle oder komplexe Zahlenfolge (a_n) besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.
Das ist offensichtlich, denn ist $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, dann ist a Häufungswert von (a_n) , denn durch $n_k = k$ wird eine Teilfolge mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$ definiert.
Ist umgekehrt $h \in \mathbb{K}$ Häufungswert von (a_n) , gibt es also eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $h = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$. Aber jede Teilfolge von (a_n) konvergiert gegen a , also ist $h = a$.
Umgekehrt gilt:
- (f) Ist (a_n) beschränkt und besitzt (a_n) genau einen Häufungswert a , dann ist (a_n) konvergent und $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
Beweis als Übungsaufgabe.

Unter Verwendung der Begriffe der *endlichen* bzw. *unendlichen* Menge (vgl. §2.1.6) lässt sich der Begriff des Häufungswertes einer Zahlenfolge wie folgt charakterisieren.

9.19.2 Satz (Charakterisierung von Häufungswerten)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Für eine Folge (a_n) , $a_n \in \mathbb{K}$, und einen Punkt $a \in \mathbb{K}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $|a_n - a| < \varepsilon$.
Beachte: zu jedem (noch so großen) N gibt es noch größere Indizes n mit $|a_n - a| < \varepsilon$.
- (2) Für jedes $\varepsilon > 0$ ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \varepsilon\}$ unendlich.
- (3) Es gibt eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) , die gegen a konvergiert (d.h. a ist Häufungswert von (a_n)).

Beweis: Wir zeigen

$$(1) \implies (3) \implies (2) \implies (1)$$

und damit die Äquivalenz aller der Aussagen.

Es gelte (1). Zu $\varepsilon = 1$ und $N = 1$ gibt es dann eine natürliche Zahl n_1 mit $|a_{n_1} - a| < 1$. Nun setze man $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und $N := n_1 + 1$. Hierzu gibt es eine natürliche Zahl n_2 mit $n_2 > n_1$ und $|a_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$. Durch Rekursion erhält man eine Folge (n_k) natürlicher Zahlen mit

$$n_k < n_{k+1} \text{ und } |a_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Offensichtlich ist (a_{n_k}) eine Teilfolge von (a_n) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

a ist also Häufungswert von (a_n) .

$$(3) \implies (2)$$

Ist $(b_k) = (a_{n_k})$ irgendeine gegen a konvergente Teilfolge von (a_n) .

Fast alle (b_k) liegen dann in $U_\varepsilon(a)$ ($\varepsilon > 0$ sei vorgegeben), d.h. es gibt ein K , so dass für alle $k \geq K$ gilt

$$|b_k - a| = |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Das bedeutet, dass alle Indizes n_k mit $k \geq K$ in der Menge $\{m \in \mathbb{N}; |a_m - a| < \varepsilon\}$ liegen. Weil aber $n_k \geq k$ für alle k gilt, kann die Menge dieser n_k nicht noch nach oben beschränkt sein, insbesondere kann sie nicht endlich sein, diese Menge ist also unendlich.

$$(2) \implies (1)$$

Sind $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig vorgegeben, so muss es noch Indizes $n \in \mathbb{N}$ geben, für die $|a_n - a| < \varepsilon$ und n nicht $< N$ ist, denn sonst wäre die Menge $\{n \in \mathbb{N}; |a_n - a| < \varepsilon\}$ endlich.

Als nützliche *Übung* für den Umgang mit Häufungswerten zeige man:

Aufgabe: Ist $x \in \mathbb{R}$ eine beliebig vorgegebene Zahl und die Folge $(a_n(x))$ sei definiert durch

$$a_n(x) = nx - [nx] \quad (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0).$$

Ist x rational, dann hat die Folge unendlich viele Häufungswerte.

Ist jedoch x irrational (z.B. $x = \sqrt{2}$), so ist jede reelle Zahl $a \in [0, 1]$ Häufungswert der Folge $(a_n(x))$.

Ist nun (a_n) eine *beschränkte reelle* Zahlenfolge, so wollen wir zeigen, dass es Häufungswerte a^* und a_* von (a_n) gibt, so dass für *jeden* Häufungswert h von (a_n) gilt

$$a_* \leq h \leq a^*$$

a^* heißt der *limes superior* von (a_n) und a_* heißt der *limes inferior* von (a_n) .

Wir geben hierfür zwei Beweise, einen ausführlichen und für den zweiten lediglich eine Beweisskizze.

Ist $h \in \mathbb{R}$ ein Häufungswert der beschränkten Folge (a_n) und gilt etwa $\alpha \leq a_n \leq \beta$ für alle n , so gilt auch $\alpha \leq a_{n_k} \leq \beta$ für jede Teilfolge a_{n_k} von (a_n) und damit nach §8.2 auch

$$\alpha \leq h = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq \beta.$$

Die Menge H der Häufungswerte von (a_n) ist also ebenfalls nach oben (durch β) und nach unten (durch α) beschränkt. Also existieren $a_* = \inf H$ und $a^* = \sup H$.

Wir zeigen: $a_* \in H$ und $a^* \in H$, also gilt $a_* = \min H$ und $a^* = \max H$.

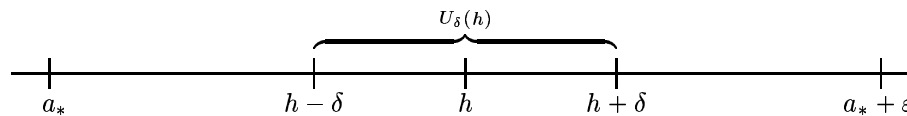
Wir beschränken uns auf den Nachweis von $a_* = \min H$.

Nach der ε -Charakterisierung von $\inf$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $h \in H$ mit

$$a_* \leq h < a_* + \varepsilon.$$

Ist nun $a_* = h$, dann ist $a_* = h = \min H \in H$. Ist aber $a_* < h$, dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$a_* < h - \delta < h + \delta < a_* + \varepsilon.$$



Da h Häufungswert von (a_n) ist, gibt es unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_\delta(h)$, wegen $U_\delta(h) \subset U_\varepsilon(a_*)$ liegen diese a_n auch in $U_\varepsilon(a_*)$, d.h. es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in U_\varepsilon(a_*)$, d.h. a_* ist Häufungswert von (a_n) .

Für a^* schließt man völlig analog. □

Wir haben also Folgendes bewiesen:

9.19.3 Satz (Existenz vom $\lim$ und $\overline{\lim}$)

Jede beschränkte reelle Zahlenfolge (a_n) besitzt einen größten Häufungswert (limes superior) und einen kleinsten Häufungswert (limes inferior).

Bezeichnungen: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n$ bzw.
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n$.

Einen zweiten Beweis über die Existenz von $\overline{\lim}$ und $\lim$ einer beschränkten reellen Zahlenfolge

$$(a_n), (a_n \in [\alpha, \beta], n \in \mathbb{N})$$

erhält man durch folgende Überlegung:

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Intervalle

$$K_n := [\inf\{a_k; k \geq n\}, \sup\{a_k; k \geq n\}].$$

Dann gilt offenbar

$$[\alpha, \beta] \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \dots$$

Die Folge (x_n) der linken Intervallenden

$$x_n = \inf\{a_k; k \geq n\}$$

ist monoton wachsend (warum?) und nach oben beschränkt (etwa durch β), die Folge (y_n) der rechten Intervallenden

$$y_n = \sup\{a_k; k \geq n\}$$

ist monoton fallend (warum?) und nach unten beschränkt (etwa durch α), also sind beide Folgen konvergent.

Sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Da eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge gegen das Supremum ihrer Wertemenge konvergiert, ist also

$$x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\} = \sup\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$$

und analog

$$y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}\} = \inf\{y_n; n \in \mathbb{N}\}.$$

Wegen $x_n \leq y_n$ für alle n ist auch

$$x \leq y.$$

9.19.4 Satz

Es gilt

$$x = a_* = \min H = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{und} \\ y = a^* = \max H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Wir zeigen $y = a^*$, indem wir $y \in H$ und $h \leq y$ für alle $y \in H$ nachweisen.

Wir verwenden die Charakterisierung von Häufungswerten aus Satz 19.9.2 und zeigen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ und $|a_n - y| < \varepsilon$. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, gibt es zunächst zu beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$ gilt

$$|y_m - y| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nach Definition vom y_m gibt es dann ein $n \geq m$, so dass

$$|a_n - y_m| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $n \geq N$ ist aber dann

$$|a_n - y| \leq |a_n - y_m| + |y_m - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

y ist also Häufungswert von (a_n) .

Ist andererseits h ein Häufungswert von (a_n) , d.h. $h \in H = H(a_n)$, dann gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) von (a_n) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = h$.

Nach der Definition ist aber $y_{n_k} \geq a_{n_k}$. Hieraus folgt

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = h.$$

Damit ist y der größte Häufungswert von (a_n) , also $y = a^* = \max H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n)$.

Für $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ schließt man völlig analog.

Bemerkung: Für *konvergente* reelle Folgen sind die Begriffe $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ eigentlich überflüssig, weil in diesem Fall der Grenzwert der einzige Häufungswert ist und $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ mit dem Grenzwert übereinstimmt. Für *divergente* reelle Zahlenfolgen messen $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ einen wichtigen Aspekt der Nichtkonvergenz.

Als Übung im Umgang mit $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$ zeige man:

Aufgabe: Eine Folge (a_n) reeller Zahlen ist genau dann konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

gilt.

Häufig nützlich sind die folgenden ε -Charakterisierungen vom $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$.

9.19.5 Satz (ε -Charakterisierung von $\overline{\lim}$ und $\lim$)

Ist (a_n) eine beschränkte reelle Zahlenfolge und sind $a_*, a^* \in \mathbb{R}$. Dann ist

- (a) $a^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \iff$ wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt
- (α) Für fast alle Indizes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n < a^* + \varepsilon$
 - (β) Es gibt unendlich viele Indizes $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m > a^* - \varepsilon$.
- (b) $a_* = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:
- (α) Für fast alle Indizes n ist $a_* - \varepsilon < a_n$.
 - (β) Es gibt unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ mit $a_m < a_* + \varepsilon$.

Beweis: Wir zeigen exemplarisch (a).

Sei dazu $A_n := \{a_k; k \geq n\}$ und $y_n = \sup A_n$, $n \in \mathbb{N}$. Sei $a^* = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

Da die Folge (y_n) monoton fällt, gilt $y_n \geq a^*$ für alle n .

Wegen $y_n = \sup A_n$, gibt es dann nach der ε -Charakterisierung von $\sup$ ein a_n mit

$$a_n > y_n - \varepsilon \geq a^* - \varepsilon.$$

Hieraus folgt (α).

Andererseits gibt es wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a^*$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $y_n < a^* + \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Hieraus folgt aber auch $a_n < a^* + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Das ist die Bedingung (β).

Seien jetzt umgekehrt die Bedingungen (α) und (β) erfüllt.

Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$a_n < a^* + \varepsilon.$$

Hieraus folgt für alle $n \geq N$

$$y_n \leq a^* + \varepsilon.$$

Andererseits folgt aus (β)

$$y_n > a^* - \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, also insgesamt

$$|y_n - a^*| \leq \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a^*.$$

□

9.19.6 Beispiele

- (a) Für die Folge $(a_n) = ((-1)^n (1 + \frac{1}{n}))$ gilt

$$y_n := \sup\{a_k; k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

also ist $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$.

Wegen

$$x_n := \inf\{a_k; k \geq n\} = \begin{cases} -(1 + \frac{1}{n}) & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ -(1 + \frac{1}{n+1}) & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

$$\text{gilt } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1.$$

- (b) Für die Folge $(a_n) = (n)$ der natürlichen Zahlen ist nicht nach oben beschränkt. Es ist jedoch sinnvoll, in diesem Fall

$$\sup\{a_k; k \geq n\} = \infty$$

zu setzen und auch

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

zu definieren.

Wegen $\inf\{a_k; k \geq n\} = n$, ist auch hier die Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

sinnvoll.

Allgemein setzt man für eine nicht nach oben (bzw. unten) beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Damit haben wir keine reellen Zahlen „ ∞ “ bzw. „ $-\infty$ “ eingeführt, sondern lediglich eine bequeme Sprechweise (façon de parler nach C.F.Gauß). Wir schreiben jedoch, dass für jede reelle Zahl x gelten soll

$$-\infty < x < \infty \text{ und } -\infty < \infty.$$

Statt „ ∞ “ findet man auch die Schreibweise „ $+\infty$ “.

Diese Betrachtungen hängen eng mit einer bestimmten *Sorte von Divergenz* reeller Zahlenfolgen zusammen.

9.19.7 Sprechweise

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) wächst über jede Grenze (oder ist bestimmt divergent gegen ∞), wenn es zu jedem $C > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$a_n > C$$

Die reelle Folge (a_n) fällt unter jede Grenze (divergiert bestimmt gegen $-\infty$), falls die Folge $(-a_n)$ über jede Grenze wächst.

Schreibweise: Wächst (bzw. fällt) (a_n) über(unter) jede Grenze, so schreibt man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ bzw. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Statt *bestimmt divergent* verwendet man auch den Ausdruck *uneigentlich konvergent*.

9.19.8 Beispiele und Bemerkungen

- (a) Die Folge $(a_n) = (n)$ der natürlichen Zahlen wächst über jede Grenze
- (b) Die Folge $(a_n) = (-3^n)$ fällt unter jede Grenze
- (c) Die Folge $(a_n) = ((-1)^n n)$ divergiert, sie divergiert aber weder bestimmt gegen ∞ noch gegen $-\infty$. Jedoch wächst die Folge $(|a_n|)$ über jede Grenze.

- (d) Eine Folge, die über jede Grenze wächst, kann nicht nach oben beschränkt sein. Die Umkehrung hiervon gilt i.a. nicht, wie Beispiel (c) zeigt.
- (e) ∞ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen, vielmehr ist ihre Bedeutung durch die Definition der bestimmten Divergenz genau festgelegt.

Auch bei der Übertragung der *Rechenregeln für konvergente reelle Folgen* auf uneigentlich konvergente Folgen ist Vorsicht geboten. Wenn man mit ∞ und $-\infty$ wie mit reellen Zahlen rechnen könnte, so ergeben sich leicht Widersprüche:

Ist etwa $a_n = n$, $b_n = 1$ und $c_n = a_n + 1 = n + 1$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty.$$

Ließen sich die Rechenregeln übertragen, so müßte gelten

$$\infty + 1 = \infty.$$

Nach den Körperaxiomen besitzt aber die Gleichung $a + x = a$ die eindeutige Lösung $x = 0$. Man erhält so den Widerspruch

$$1 = 0.$$

Auf der Menge

$$\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$$

läßt sich also keine Körperstruktur erklären.

Nützlich ist der folgende Zusammenhang zwischen der bestimmten Divergenz einer Folge und dem Begriff der Nullfolge:

9.19.9 Satz

- (a) Die reelle Folge (a_n) sei bestimmt divergent mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oder $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt $a_n \neq 0$ und für die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)_{n \geq N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

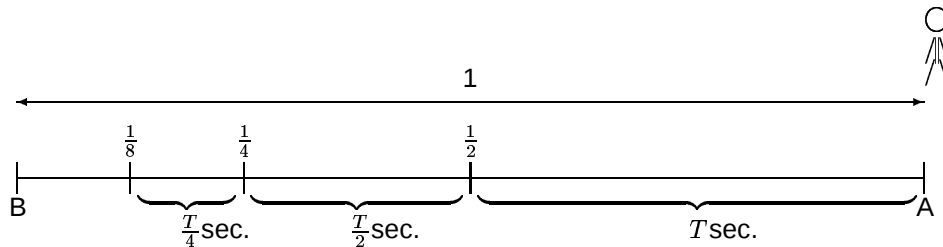
- (b) Ist umgekehrt (a_n) eine Nullfolge mit $a_n > 0$ für (fast) alle n (bzw. < 0 für (fast) alle n), dann divergiert die Folge $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ bestimmt gegen ∞ (bzw. $-\infty$).

Der Beweis dürfte der geneigten Leserin / dem geneigten Leser keine Schwierigkeiten bereiten.

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ ist z.B. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \infty$.

10 Reihen

Einführung: Wir betrachten einen Sprinter, der vom Punkt A zum Punkt B mit konstanter Geschwindigkeit läuft:



Wir nehmen an, dass die Länge der Strecke $\overline{AB}$ (gemessen in einer geeigneten Längeneinheit) 1 ist.

Braucht er für die erste Hälfte der Strecke T sec., dann braucht er erfahrungsgemäß für die Gesamtstrecke $2T$ sec.

Man kann das Problem aber auch so betrachten:

Braucht er für die halbe Strecke T sec., so braucht er für das nächste Viertel $\frac{T}{2}$ sec, für das nächste Achtel $\frac{T}{4}$ sec.,

⋮

für die k -te Teilstrecke der Länge $\frac{1}{2^k}$ braucht er $\frac{T}{2^{k-1}}$ sec.

Die Frage, wie groß die Summe all dieser Zeiten (Gesamtzeit) ist, scheint geklärt, nämlich $2T$. Der Versuch die Teilzeiten aufzuaddieren führt auf das Problem, die unendlich vielen Zeitspannen

$$T, \frac{T}{2}, \frac{T}{4}, \frac{T}{8}, \dots, \frac{T}{2^{k-1}}, \dots$$

aufzuaddieren.

Nun ist in jedem Körper, die Addition von endlich vielen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ erklärt und die Summe $s := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ist unabhängig von der Reihenfolge und möglichen Klammerungen.

Für „unendlich viele“ Zahlen haben wir eine solche Summe aber bis jetzt nicht erklärt.

Die obige Aufgabe lässt sich aber lösen, wenn wir sie so interpretieren, dass lediglich die Folge (t_n) der „Teilzeiten“ (Teilsummen)

$$t_1 := T, \quad t_2 := T + \frac{T}{2}, \quad t_3 := T + \frac{T}{2} + \frac{T}{4}, \quad \dots$$

also die Folge (t_n) mit $t_n = \sum_{k=1}^n \frac{T}{2^{k-1}}$ auf Konvergenz zu untersuchen ist. Tatsächlich gilt nach der *geometrischen Summenformel* (vgl. §2.4(1))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{T}{2^{k-1}} = T \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2T.$$

Der griechische Philosoph Zenon von Elea (495-435 v.Chr.) argumentierte wie folgt:

„Der Läufer erreicht nie das Ziel, weil unendlich viele solche Zeitspannen keine endliche Gesamtheit ergeben können.“ Ein ähnliches von Zenon betrachtetes Beispiel ist „Achilles und die Schildkröte“.

Der berühmte Held Achill veranstaltet einen Wettlauf mit einer (ziemlich schnellen) Schildkröte. Achill kann zehnmal schneller als die Schildkröte. Als fairer Sportsman gibt er der Schildkröte

einen Vorsprung von 10 Ellen (1 Elle = geeignete Längeneinheit). Die Schildkröte und Achill starten zur gleichen Zeit.

Hat Achill die ersten 10 Ellen durchheilt, so ist die Schildkröte um eine Elle vorangekommen. Hat Achill diese Elle zurückgelegt, beträgt der Vorsprung der Schildkröte immer noch $\frac{1}{10}$ Ellen. Bringt Achill diese Strecke hinter sich, beträgt der Vorsprung der Schildkröte noch $\frac{1}{100}$ Ellen etc.

Der Vorsprung der Schildkröte wird zwar immer kleiner, aber er wird nie Null. Deshalb, so argumentiert Zenon, kann Achill die Schildkröte „niemals“ einholen.

Die Aufklärung des Paradoxon ergibt sich, wenn man die doppelte Bedeutung der Wortes „niemals“ als „nicht in endlich vielen der (immer kleiner werdenden) Schritte“ bedeutet. Erst nach unendlich vielen Schritten wird Achill die Schildkröte erreichen. Der Treffpunkt ist der Grenzwert einer Reihe. Das Paradoxon entsteht, weil das Wort „niemals“ zugleich als „nicht in endlicher Zeit“ verstanden wird. Das ist jedoch ein Fehlschluss. Denn auch die für die einzelnen Wegabschnitte nötigen Zeitabschnitte werden kleiner und die Folge der Zeitabschnitte hat einen endlichen Grenzwert.

Aufgabe: Wenn Achill in einer Zeiteinheit 10 Ellen läuft, wann holt er dann die Schildkröte ein?

Folgen (s_n) , bei denen die s_n solche endliche Summen der Gestalt $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ sind, wobei (a_k) eine weitere (reelle oder komplexe) Zahlenfolge ist, sind uns schon mehrmals begegnet:

- (a) Bei der Frage der Erhöhung des Volkseinkommen bei einer Investition von K Euro:
Im Wesentlichen kamen wir auf die geometrische Folge (s_n) mit

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

- (b) Bei der Definition der Eulerschen Zahl e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n, \quad E_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

- (c) Allgemeiner bei der Definition der exp-Funktion:

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(z), \quad E_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$$

- (d) Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen

$$x = x_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{z_k}{10^k} \quad (\text{vgl. §9.11}).$$

Reihen, mit denen wir uns nun zu beschäftigen haben, sind Folgen spezieller Bauart. Man untersucht eine Folge (s_n) , in dem man sich anschaut, wie sie sich von Glied zu Glied ändert, betrachtet also die Differenzen:

$$\begin{array}{ll} a_0 = s_0 & \implies s_0 = a_0 \\ a_1 = s_1 - s_0 & \implies s_1 = a_0 + a_1 \\ a_2 = s_2 - s_1 & \implies s_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ a_3 = s_3 - s_2 & \implies s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots & \vdots \\ a_n = s_n - s_{n-1} & \implies s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n. \end{array}$$

Diese Vorüberlegungen werden uns zeigen, dass Reihen und Folgen im Prinzip äquivalente Begriffe sind:

Jede Folge lässt sich als Reihe auffassen und jede Reihe ist eine Folge spezieller Bauart. Wir

werden das noch präzisieren.

Reihen (insbesondere Potenzreihen und Fourier-Reihen) sind eines der wichtigsten Mittel zur Konstruktion und Darstellung von Funktionen. So werden wir z.B. alle nicht *elementaren* Funktionen (exp, cos, sin, etc.) über Reihen einführen.

10.1 Der Begriff der Reihe, erste Beispiele

10.1.1 Definition

Ist $(a_k)_{k \geq 0}$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen, dann heißt die Folge

$$(s_n) \text{ mit } s_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

die der Folge (a_k) zugeordnete Reihe.

Sie wird mit dem Symbol

$$\sum (a_k) \text{ oder } \sum a_k$$

bezeichnet.

(a_k) heißt das k -te Reihenglied (besser sollte man (a_k) die *Summenfolge* und a_k den k -ten Summanden nennen).

$s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ heißt die n -te *Partialsummen* der Reihe $\sum a_k$.

k heißt *Summationsindex*. Wie bei endlichen Summen kann er durch jeden anderen (nicht schon mit einer festen Bedeutung belegten) Buchstaben ersetzt werden.

Ist die Folge (s_n) der Partialsummen *konvergent* und der Grenzwert s von (s_n) heißt *Summe* oder *Wert* der Reihe:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Eine nicht konvergente Reihe heißt *divergent*.

10.1.2 Bemerkungen

(a) Man beachte, dass in der Literatur das Symbol

$$\sum a_k \quad (\text{gesprochen „Reihe } a_k\text{“})$$

meist mit zweierlei Bedeutung verwendet wird:

(a) $\sum (a_k)$ oder $\sum a_k$ (alleinstehend) bedeutet nichts anderes als die Folge der Partialsummen:

$$(s_n), \quad s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

(b) Die Gleichung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$ bedeutet, dass die Reihe $\sum a_k$, also die Folge der Partialsummen, konvergiert und den Grenzwert s hat.

Welche der beiden Bedeutungen gemeint ist, ist meist aus dem Zusammenhang ersichtlich.

Wir wollen zunächst versuchen, die beiden Bedeutungen auseinander zu halten, denn sie bedeuten ja völlig verschiedene Dinge:

- (a) einmal eine Folge (die Folge der Partialsummen) und
 (b) im Fall der Konvergenz dieser Folge, deren Grenzwert, also eine Zahl.
- (b) Auch Folgen allgemeineren Typs, etwa

$$(a_k)_{k \geq k_0}, \quad k_0 \in \mathbb{Z},$$

kann man eine Reihe zuordnen:

$$(s_n) \text{ mit } s_n = a_{k_0} + a_{k_0+1} + \dots + a_n.$$

Offensichtlich ist $s_n = \sum_{k=0}^n b_k$ mit $b_k := a_{k_0+k}$.

In vielen Fällen ist $k_0 = 0$ oder $k_0 = 1$

10.1.3 Beispiele

- (a) *Die geometrische Reihe:*

Für $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe $\sum (z^k)_{k \geq 0}$ genau dann konvergent, wenn $|z| < 1$ ist und dann gilt

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}}$$

Dass die Reihe $\sum (z^k)_{k \geq 0}$ für $|z| < 1$ konvergiert und die angegebene Summe hat ist klar wegen

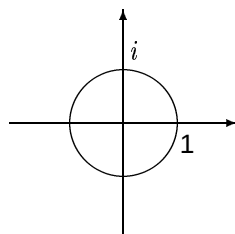
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \text{für } z \neq 1$$

und der Tatsache, dass (z^n) für $|z| < 1$ eine Nullfolge ist.
 Bemerkenswert ist, dass die Menge

$$M = \{z \in \mathbb{C} ; \sum (z^n) \text{ ist konvergent}\}$$

eine Kreisscheibe ist, nämlich die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$$



Wir kommen auf diese Phänomene im Zusammenhang mit *Potenzreihen* ausführlich zurück.

Für $|z| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent, denn dann ist (z^k) oder äquivalent $(|z|^k)$ keine Nullfolge, die Summenfolge (a_k) einer konvergenten Reihe muss aber eine Nullfolge sein:

(b) Eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe:

Ist $\sum (a_k)$ konvergent, so ist (a_k) eine Nullfolge oder äquivalent:

Ist (a_k) keine Nullfolge, so ist $\sum a_k$ nicht konvergent.

Denn ist $(s_n) = \left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$ konvergent und $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so folgt aus $a_n = s_n - s_{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s - s = 0$$

Dieses leicht nachprüfbare notwendige Kriterium für die Konvergenz einer Reihe ist aber leider nicht hinreichend, wie das folgende Beispiel zeigt.

(c) Die harmonische Reihe:

$$(H_n) \text{ mit } H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ist divergent.

Dies haben wir auf zwei verschiedene Weisen schon nachgewiesen:

Einmal, indem wir gezeigt haben, dass die Teilfolge H_{2^k} wegen $H_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}$ nicht beschränkt ist und weiter mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums (vgl. §9.16)

Die Teilsummen der harmonischen Reihe (H_n) wachsen also über jede Grenze, das Wachstum ist aber im „Schneckentempo“, wie die folgende Tabelle zeigt:

n	$(H_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$	$\ln n + \gamma$
10	2.9289682539682539682539682539682539682	2.8798007578955785446245035447667666
10 ²	5.1873775176396202608051176756582531579	5.1823858508896242286424949994511308
10 ³	7.4854708605503449126565182043339001765	7.4849709438836699126604864541354950
10 ⁴	9.7876060360443822641784779048516053348	9.7875560368777155966784779088198592
10 ⁵	12.090146129863427947363219363504219500	12.090141129871761280696469363504223
10 ⁶	14.392726722865723631381127493188587676	14.392726222865806964714460818188587
10 ⁷	16.695311365859851815399118939540451884	16.695311315859852648732452272872951
10 ⁸	18.997896413853898324417110394223982841	18.997896408853898332750443727557316
10 ⁹	21.300481502347944016685101848908346966	21.300481501847944016768435182241680
10 ¹⁰	23.603066594891989700785593303592711173	23.603066594841989700786426636926044
10 ¹¹	25.905651687841035384804409758277075381	25.905651687836035384804418091610408
10 ¹²	28.208236780830581068822409462961439588	28.208236780830081068822409546294772
10 ¹³	30.510821873824176752840401000145803796	30.510821873824126752840401000979137
10 ¹⁴	32.813406966818177436858392455655168004	32.813406966818172436858392455663501
10 ¹⁵	35.115992059812218620876383910347782211	35.115992059812218120876383910347865
10 ¹⁶	37.418577152806263854894375365032228919	37.418577152806263804894375365032229
10 ¹⁷	39.721162245800309493912366819716593951	39.721162245800309488912366819716593
10 ¹⁸	42.023747338794355173430358274400958167	42.023747338794355172930358274400958
10 ¹⁹	44.326332431788400856998349729085322375	44.326332431788400856948349729085322
10 ²⁰	46.628917524782446540971341183769686583	46.628917524782446540966341183769686

Mit Hilfe der Integralrechnung werden wir zeigen, dass H_n ungefähr wie $\log n$ wächst.

Die obige Zahl γ ist die Euler-Mascheronische-Konstante:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n \right) = 0,57721566490\dots$$

(d) Die Reihe $\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k(k+1)} \right)$ ist konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1$$

Hier gelingt es für die n -te Partialsumme einen expliziten Ausdruck anzugeben:

Wegen $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, ist nämlich

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

und damit

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1}$$

Der gleiche Trick funktioniert immer, wenn es gelingt, das Reihenglied a_k in der Form

$$a_k = x_k - x_{k-1} \text{ oder } a_k = x_k - x_{k+1}$$

darzustellen.

Eine solche Reihe nennt man *teleskopisch*, weil z.B. im Fall $a_k = x_k - x_{k+1}$ für die n -te Partialsumme gilt

$$s_n = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + (x_3 - x_4) + \dots + (x_n - x_{n+1}) = x_1 - x_{n+1}$$

(es bleiben nur x_1 und x_{n+1} übrig, die Glieder dazwischen heben sich weg).

- (e) Eine teleskopische Reihe $\sum a_k$ mit $a_k = x_k - x_{k-1}$ bzw. $a_k = x_k - x_{k+1}$ ist genau dann konvergent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ existiert und dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} - x_0 \text{ bzw.}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = x_0 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}.$$

Dazu ein weiteres Beispiel:

Wegen $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \text{ also} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- (f) Die Reihe $\sum (\frac{1}{k^2})_{k \geq 1}$ ist konvergent.

Betrachtet man nämlich die n -te Partialsumme $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, so ist (s_n) streng monoton wachsend.

Wenn wir zeigen können, dass (s_n) nach oben beschränkt ist, ist (s_n) also nach dem Monotonieprinzip konvergent.

Für $k \geq 2$ ist aber

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \text{ und damit}$$

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &\leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} < 3. \end{aligned}$$

Später werden wir sehen, dass für den Grenzwert es gilt:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Dieses Beispiel zeigt, dass es relativ einfach ist, die Konvergenz der Reihe zu zeigen, aber schwierig sein kann, die Summe der Reihe explizit anzugeben.

Dass Reihen und Folgen im Prinzip das Gleiche sind, wird nochmals festgehalten in folgenden Bemerkungen:

10.1.4 Bemerkungen

Sei $s(\mathbb{K}) = \text{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{K})$ der $\mathbb{K}$ -Vektorraum aller Folgen ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \sum : s(\mathbb{K}) &\rightarrow s(\mathbb{K}) \\ (a_k) &\mapsto (s_n) = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \end{aligned}$$

bijektiv.

Gilt nämlich für zwei Folgen (a_k) und (b_k)

$$\sum(a_k) = \sum(b_k),$$

so bedeutet das, dass für alle n die Partialsummen gleich sind

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \\ a_0 + a_1 &= b_0 + b_1 \\ a_0 + a_1 + a_2 &= b_0 + b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 + \dots + a_n &= b_0 + b_1 + \dots + b_n \end{aligned}$$

Hieraus folgt aber $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Surjektivität der Abbildung $\sum$ haben wir schon beim Teleskoptrick benutzt.

Ist $(s_0, s_1, s_2, \dots)$ irgendeine vorgegebene Folge, so definiert man

$$a_0 := s_0; \quad a_1 := s_1 - s_0; \quad \dots; \quad a_k := s_k - s_{k-1} \quad (k \geq 1),$$

dann ist $\sum(a_k) = (s_n)$, $\sum$ ist also surjektiv.

Weil Reihen nur eine ganz besondere Sorte von Folgen sind, gelten folgenden

10.1.5 Rechenregeln für Reihen

Sind (a_k) und (b_k) Folgen in $\mathbb{K}$ und sind die Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent, dann konvergiert für beliebige $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ auch die Reihe

$$\sum(\lambda a_k + \mu b_k)$$

und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Der Beweis folgt sofort durch Übergang zu den Partialsummen aus den Rechenregeln für konvergente Folgen. Man beachte jedoch, dass aus der Konvergenz von $\sum a_k$ und $\sum b_k$ *nicht* die Konvergenz von $\sum a_k b_k$ zu folgen braucht. Nimmt man z.B. $a_0 = 0$ und $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $k \geq 1$, dann ist $\sum a_k$ konvergent (wie wir gleich sehen werden), aber

$$\sum a_k^2 = \sum \frac{1}{k}$$

ist die harmonische Reihe, also divergent.

10.2 Konvergenzkriterien für Reihen

Wir wollen uns nun mit *Konvergenzkriterien für Reihen* beschäftigen, die es gestatten aus *Eigenschaften der Reihenglieder* a_k auf die Konvergenz von $\sum a_k$ zu schließen. Wir beginnen mit zwei einfachen Konvergenzkriterien für Reihen mit *reellen* Summanden:

10.2.1 Satz

Ist (a_k) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, dann ist die Reihe $\sum a_k$ genau dann konvergent, wenn die Folge ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

Beweis: Wegen der Voraussetzung $a_k \geq 0$ ist die Folge der Partialsummen (s_n) , $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, monoton wachsend, nach dem Monotonieprinzip also genau dann konvergent, wenn sie nach oben beschränkt ist. Dieser Prinzip haben wir in Beispiel (f) schon benutzt.

Ein weiteres Kriterium betrifft reelle Reihen, bei denen die Reihenglieder abwechselnde Vorzeichen haben, wie z.B. die Reihe $\sum \left(\frac{(-1)^k}{k+1} \right)_{k \geq 0}$

10.2.2 Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen (G.W.Leibniz, 1705)

Ist (a_k) eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen, dann ist die *alternierende Reihe*

$$\sum ((-1)^k a_k)_{k \geq 0}$$

konvergent.

Für die Partialsummen gilt

$$s_{2n+1} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \leq s_{2n} \quad \text{für alle } n,$$

insbesondere approximiert die Partialsumme

$$s_m = \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

den Reihenwert $s := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ bis auf einen Fehler, der höchstens so groß ist, wie der erste nicht berücksichtigte Summand (die Summanden sind nicht negativ!).

$$\left| s - \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k \right| \leq a_{m+1} \quad (*)$$

Beweis: Da die Folge (a_k) eine monoton fallende Nullfolge ist, ist $a_k \geq \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen, dass $([s_{2n+1}, s_{2n}])_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Intervallschachtelung ist, die s erfasst.

Es ist

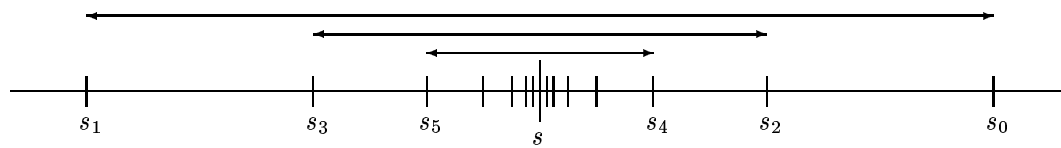
$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= s_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = s_{2n} - \underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} \leq s_{2n}, \\ s_{2n+3} &= s_{2n+1} + \underbrace{(a_{2n+2} - a_{2n+3})}_{\geq 0} \geq s_{2n+1} \\ s_{2n+2} &= s_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \leq s_{2n} \end{aligned}$$

und schließlich

$$s_{2n} - s_{2n+1} = a_{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

d.h. $([s_{2n+1}, s_{2n}])_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist tatsächlich eine Intervallschachtelung:

$$[s_1, s_0] \supset [s_3, s_2] \supset [s_5, s_4] \supset \dots$$



Wegen $s \in [s_{2n+1}, s_{2n}]$ für alle n und

$$|s_{m+1} - s_m| = a_{m+1}$$

folgt auch die Fehlerabschätzung $(*)$

$$\left| s - \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k \right| \leq a_{m+1}.$$

□

10.2.3 Beispiele zum Leibniz-Kriterium

Nach dem Leibniz-Kriterium sind die Reihen

$$\sum \left(\frac{(-1)^k}{k+1} \right)_{k \geq 0}, \quad \sum \left(\frac{(-1)^k}{2k+1} \right)_{k \geq 0} \quad \text{und} \quad \sum \left(\frac{(-1)^k}{k!} \right)_{k \geq 0}$$

konvergent.

Wie wir später zeigen werden gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots = \log 2, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} &= \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Die Konvergenz der ersten beiden Reihen gegen die angegebenen Grenzwerte ist nicht besser als die, die Abschätzung (*) aus dem Leibniz-Kriterium angibt. Zur numerischen Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ bzw. $\log 2$ sind die Reihen also nicht sonderlich geeignet.

Dagegen konvergiert die Reihe $\sum \frac{(-1)^k}{k!}$ sehr schnell gegen $\frac{1}{e}$ und kann zur numerischen Berechnung von $\frac{1}{e}$ verwendet werden.

Da eine Reihe $\sum (a_k)$ nichts anderes als die Folge (s_n) ihrer Partialsummen ist, überträgt sich das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Folgen unmittelbar auf Reihen:

10.2.4 Cauchy'sches Konvergenzkriterium für Reihen

Die Reihe $\sum a_k$ ($a_k \in \mathbb{K}$) konvergiert genau dann, wenn es zu jedem (nach so kleinen) $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass für alle $m > n \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Der Beweis ergibt sich sofort durch Anwendung des Cauchy-Kriteriums für Folgen auf die Partialsummenfolge (s_n) .

Es ist nämlich (für $m > n$)

$$s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^m a_k \quad (*)$$

Bemerkung: Hieraus ergibt sich nochmals, dass die Folge (a_k) der Summanden eine Nullfolge sein muss, wenn die Reihe $\sum a_k$ konvergiert.

Ferner ergibt sich, dass auch die Folge der Reihenreste (r_n)

$$r_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

für eine konvergente Reihe $\sum a_k$ ebenfalls eine Nullfolge ist, denn aus (*) erhält man für $m \rightarrow \infty$ (bei festem n)

$$s := \lim_{m \rightarrow \infty} s_m = s_n + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^m a_k = s_n + r_n$$

und da $(s - s_n)$ eine Nullfolge ist, muss auch (s_n) eine Nullfolge sein. Dies folgt übrigens auch sofort aus der Definition der Konvergenz einer Reihe.

Zu jeder Reihe $\sum a_k$ ($a_k \in \mathbb{K}$) kann man die Reihe $\sum |a_k|$ betrachten. Da $|a_k|$ stets eine nicht negative reelle Zahl ist, ist die „Absolutreihe“ $\sum |a_k|$ genau dann konvergent (vgl. §10.2.1), wenn

die Folge $(\sigma_n) = \left(\sum_{k=0}^n |a_k| \right)$ ihrer Partialsummen nach oben beschränkt ist.

In welchem Verhältnis stehen nun die Konvergenz von $\sum a_k$ und $\sum |a_k|$?
Bezeichnet man mit

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k \quad \text{bzw.} \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^n |a_k|$$

die entstehende Partialsummen und nehmen wir an, dass (σ_n) konvergiert, dann gibt es nach dem Cauchy-Kriterium zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n \geq N$ gilt

$$|\sigma_m - \sigma_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m |a_k| \right| = \sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon.$$

Nach der Dreiecksungleichung ist aber

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| < \varepsilon$$

für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n \geq N$, d.h. nach dem Cauchy-Kriterium ist auch die Reihe $\sum a_k$ konvergent.

Wir haben also gezeigt:

Aus der Konvergenz von $\sum |a_k|$ folgt die Konvergenz von $\sum a_k$.

Man führt an dieser Stelle die folgende Sprechweise ein:

10.2.5 Definition

Eine Reihe $\sum a_k$ ($a_k \in \mathbb{K}$) heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum |a_k|$ konvergiert. (Das ist in jedem Fall ($a_k \in \mathbb{R}$ oder $a_k \in \mathbb{C}$) eine Reihe mit nicht negativen reellen Summanden.)

Wir haben also gezeigt:

10.2.6 Satz

Eine absolut konvergente Reihe $\sum a_k$ ist konvergent (im gewöhnlichen Sinne), und es gilt die *Dreiecksungleichung für Reihen*

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

Beweis: Die zusätzliche Behauptung über die Dreiecksungleichung ergibt sich aus

$$|s_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$$

durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$.

10.2.7 Bemerkungen

- (a) Wie das einfache Beispiel der nach dem Leibniz-Kriterium konvergente alternierende Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

zeigt, gilt die Umkehrung vom Satz i.a. nicht, denn die „Absolutreihe“ ist die harmonische Reihe.

- (b) Für Reihen $\sum a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}_+$ stimmen die Begriffe *Konvergenz* und *absolute Konvergenz* überein.
- (c) Die *geometrische Reihe* $\sum (z^k)_{k=0}$ ist für $|z| < 1$ absolut konvergent. Sie ist ein Beispiel für eine *Potenzreihe* $\sum a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{K}$.
 Von solchen Reihen werden wir zeigen (vgl. ???):
 Wenn sie konvergieren, dann konvergieren sie sogar absolut (in geeigneten Kreisscheiben).
- (d) Die grundsätzliche Bedeutung des Begriffes *absolute Konvergenz* einer Reihe wird nun auch im Zusammenhang mit *Umordnungssätzen für Reihen* deutlich werden.
- (e) Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe nennt man auch *bedingt konvergent*. Die obige alternierende harmonische Reihe ist hierfür ein Beispiel.
- (f) Eine Folge (a_k) komplexer Zahlen heißt *quadratsummierbar*, wenn $\sum (|a_k|^2)$ konvergiert. In Übungsaufgabe 4 von Blatt 9 haben wir gezeigt, dass für quadratsummierbare Folgen (a_k) und (b_k) auch die Folgen $(a_k b_k)$ und $(a_k + b_k)$ quadratsummierbar sind. Hieraus folgt, dass die Menge $l^2(\mathbb{N}_0)$ der quadratsummierbaren Folgen eines $\mathbb{C}$ -Vektorraums ist, auf welchem durch

$$\langle (a_k), (b_k) \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k b_k$$

ein Skalarprodukt definiert wird, für welchen die C.S.U. gilt:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k b_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot |b_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2}$$

$l^2(\mathbb{C})$ heißt Hilbertscher Folgenraum. Er ist vollständig, d.h. ein Banach-Raum.

Ein weiteres einfache Konvergenzkriterium beinhaltet

10.2.8 Satz

Sind (a_k) und (b_k) Folgen in $\mathbb{K}$ und konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut und ist die Folge (b_k) beschränkt, dann konvergiert auch die Reihe $\sum a_k b_k$ absolut.

Beweis: Ist etwa $|b_k| \leq S$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, dann ist

$$\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \cdot S = S \cdot \sum_{k=0}^n |a_k| \leq S \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\sigma} = S \cdot \sigma = C,$$

somit ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^n |a_k b_k| \right)$ der Partialsummen von $(\sum |a_k b_k|)$ nach oben beschränkt und damit konvergent.

□

Sehr häufig beweist man die Konvergenz oder Divergenz einer vorgegebenen Reihe durch *Vergleich mit Reihen*, deren Konvergenz- bzw. Divergenzverhalten bekannt ist. Eine wichtige Vergleichsreihe ist die *geometrische Reihe* $\sum q^k$, $q \in \mathbb{C}$.

10.2.9 Theorem (Majoranten-Kriterium)

Es sei $\sum a_k$ eine Reihe mit $a_k \in \mathbb{K}$ und (b_k) eine Folge nicht negativer reeller Zahlen, für welche die Reihe $\sum b_k$ konvergiert und es gelte

$$|a_k| \leq b_k \text{ für (fast alle) } k \in \mathbb{N}_0,$$

dann ist auch die Reihe $\sum a_k$ konvergent (sogar absolut), und es gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Beweis: Nach Voraussetzung und nach der Dreiecksungleichung ist

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k| \leq \sum_{k=n+1}^m b_k,$$

woraus nach dem Cauchy-Kriterium alles folgt.

□

Bemerkung: Für die Konvergenzaussage in §10.2.9 genügt es natürlich $|a_k| \leq b_k$ für *fast alle* $k \in \mathbb{N}_0$ zu fordern.

Man nennt die Reihe $\sum b_k$ eine *konvergente Majorante* für die Reihe $\sum a_k$.

Umgekehrt kann man durch Vergleich mit einer bekannten divergenten Reihe gelegentlich auf die *Divergenz* einer vorgegebenen Reihe schließen: Ist etwa $0 \leq d_k \leq c_k$ für fast alle k und divergiert die Reihe $\sum d_k$, dann divergiert auch die Reihe $\sum c_k$.

Man nennt in diesem Fall die Reihe $\sum d_k$ eine *divergente Minorante* für die Reihe $\sum c_k$.

10.2.10 Beispiele

Vom Majorantenkriterium haben wir schon mehrfach Gebrauch gemacht.

- (a) Die Reihe $\sum \left(\frac{1}{k^p}\right)_{k \geq 1}$, $p \in \mathbb{N}$, ist konvergent für $p \geq 2$, denn für $p \geq 2$ ist $\frac{1}{k^p} \leq \frac{1}{k^2}$ und $\sum \left(\frac{1}{k^2}\right)$ ist konvergent. Für $p \leq 1$ ist $\sum \frac{1}{k^p}$ sicher divergent, da die harmonische Reihe $(H_n) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$ eine divergente Minorante ist.

Wie steht es mit der allgemeinen harmonischen Reihe $\sum \left(\frac{1}{k^s}\right)_{k \geq 1}$, $s \in \mathbb{Q}$?

Insbesondere: Was gilt für s mit $1 < s < 2$?

Die Antwort lautet (Verallgemeinerung von (a)):

- (b) $\sum \left(\frac{1}{k^s}\right)_{k \geq 1}$, $s \in \mathbb{Q}$, ist genau dann konvergent, wenn $s > 1$ gilt. Wählt man nämlich im Fall $s > 1$ zu $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $n \leq 2^m - 1$ gilt, so wird

$$\begin{aligned} s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} &\leq \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k^s} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2^{m-1})^s} + \dots + \frac{1}{(2^m-1)^s}\right) \\ &\leq 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \dots + \frac{2^{m-1}}{(2^{m-1})^s} \\ &= \frac{1 - 2^{(1-s)m}}{1 - 2^{1-s}} < \frac{1}{1 - 2^{1-s}} \end{aligned}$$

Die Folge (s_n) der Partialsummen ist also nach oben beschränkt und damit konvergent. Ist $s \leq 1$, so ergibt sich wegen $\frac{1}{k^s} \geq \frac{1}{k}$

$$s_n := 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = H_n$$

Die harmonische Reihe $(H_n) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right)$ ist also eine divergente Minorante.

Die sogar für komplexes s mit $\operatorname{Re}(s) > 1$ durch

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

definierte Funktion heißt *Riemannsche Zetafunktion*. Sie spielt für die *Verteilung der Primzahlen* eine *herausragende Rolle*.

Wie wir später zeigen werden, gilt etwa

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{4}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

(L. Euler, 1734).

- (c) Ein Trivialbeispiel für Divergenz:
(es ist im Beispiel (a) für $s = \frac{1}{2}$ enthalten)
Ist $d_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, und $c_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$, dann gilt $d_k \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und aus der Divergenz der harmonischen Reihe $\sum \frac{1}{k}$ folgt die Divergenz von $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$.

- (d) $\sum \left(\frac{k!}{k^k}\right)_{k \geq 1}$ ist konvergent, dann es ist für $k \geq 2$

$$\frac{k!}{k^k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}{k \cdot k \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{2}{k^2}$$

und mit $b_k = \frac{2}{k^2}$ ist $\sum b_k$ eine konvergente Majorante.

Häufig kann man die *geometrische Reihe* als konvergente Majorante wählen:

10.2.11 Satz (Quotientenkriterium: d'Alembert, 1768)

Ist $\sum a_k$ eine gegebene Reihe mit $a_k \in \mathbb{K}$. Es gelte $a_k \neq 0$ für fast alle k und es gebe eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ und $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ für fast alle $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist die Reihe $\sum a_k$ (sogar absolut) konvergent. Gilt jedoch $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ für fast alle k , so ist die Reihe $\sum a_k$ divergent.

Zusatz: (Limesform des Quotientenkriteriums):

Existiert $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ und gilt $\alpha < 1$, dann ist $\sum a_k$ (absolut) konvergent.

Beweis: Für alle $k \geq N$ gelte $a_k \neq 0$ und

$$|a_{k+1}| \leq q |a_k|.$$

Insbesondere ist $|a_{N+1}| \leq q |a_N|$.

Dann ist auch

$$|a_{k+2}| \leq q |a_{k+1}| \leq q^2 |a_k|$$

und allgemeiner für $m > N$

$$|a_n| = \left| \frac{a_m}{a_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{a_{m-1}}{a_{n-2}} \right| \cdots \left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| |a_N| \leq q |a_{n-1}| q |a_{n-2}| \cdots q |a_N| = q^{n-N} |a_N|.$$

Damit gilt für $m \geq N$

$$|a_m| \leq \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^m = C \cdot q^m \quad \text{mit } C := \frac{|a_N|}{q^N}$$

und damit ist die Reihe $C \cdot \sum (q^m)_{m \geq N}$ eine konvergente Majorante.

Gilt dagegen $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \geq 1$ für fast alle k , so kann (a_k) keine Nullfolge sein, $\sum (a_k)$ ist also divergent.

Zur Limesform:

Existiert $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ und ist $\alpha < 1$, so ist $\sum a_k$ (sogar absolut) konvergent.

Dies führt man sofort auf den ersten Teil zurück: Es ist $0 < \alpha < 1$ und definiert man $q := \frac{1+\alpha}{2}$, dann gilt

$$0 < \alpha < \frac{1+\alpha}{2} = q < 1$$

und für fast alle k gilt dann

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < q,$$

denn für fast alle k gilt $\frac{a_{k+1}}{a_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$, mit $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{2} > 0$.

Gilt jedoch $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$, so liefert die Limesform keine Aussage. Es kann dann sowohl Divergenz als auch Konvergenz vorliegen, wie wir gleich sehen werden.

□

10.2.12 Beispiele

(a) Für alle $z \in \mathbb{K}$ konvergiert die Reihe $\sum \left(\frac{z^k}{k!} \right)_{k \geq 0}$ absolut.

Für $z = 0$ ist das klar. Für $z \neq 0$ und $a_k = \frac{z^k}{k!}$ erhält man

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{z^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot z^k} \right| = \frac{|z|}{k+1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } k \geq 2|z| - 1$$

Wählt man daher eine natürliche Zahl N mit $N \geq 2|z| - 1$, so gilt für alle $k \geq N$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{|z|}{k+1} \leq q := \frac{1}{2},$$

die Voraussetzung des Quotientenkriteriums wird also erfüllt. Die „Teilreihen“

$$\sum \left(\frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)_{k \geq 0} \quad \text{bzw.} \quad \sum \left(\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)_{k \geq 0}$$

sind ebenfalls für alle $z \in \mathbb{K}$ absolut konvergent.

Durch diese Reihe werden *wichtige Funktionen* definiert:

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

die *komplexe Exponentialfunktion*, durch

$$\begin{aligned} \exp_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

die *reelle Exponentialfunktion*.

Offensichtlich gilt für $x \in \mathbb{R}$

$$\exp_{\mathbb{C}}(x) = \exp_{\mathbb{R}}(x), \quad \text{oder} \quad \exp_{\mathbb{C}}|_{\mathbb{R}} = \exp_{\mathbb{R}}.$$

Wir lassen also den Index $\mathbb{C}$ bzw. $\mathbb{R}$ in Zukunft weg.

Trotz der gleichen Definition und vieler gemeinsamen Eigenschaften (Stetigkeit, Differenzierbarkeit) unterscheiden sich die komplexe und reelle Exponentialfunktion wesentlich:

Die reelle Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend (und damit injektiv), die komplexe Exponentialfunktion besitzt die *rein imaginäre* - und damit im Reellen nicht sichtbare-Periode $2\pi i$, d.h. es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)}$$

Hierauf kommen wir ausführlich zurück: Durch $\sum \frac{z^{2k}}{(2k)!}$ und $\sum \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ werden *cosh* und *sinh*, sogar für komplexe, insbesondere also für reelle Argumente, definiert.

- (b) Die Reihe $\left(\frac{k!}{k^k} z^k \right)_{k \geq 1}$ ist absolut konvergent für $|z| < e$. Für $z = 0$ ist die Konvergenz klar. Sei also $z \neq 0$ und $a_k := \frac{k!}{k^k} z^k$, dann ist

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)! \cdot z^{k+1} \cdot k^k}{(k+1)^{k+1} \cdot k! \cdot z^k} = \frac{(k+1) \cdot k^k \cdot z}{(k+1)^{k+1}} = \frac{z}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}.$$

$\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$ existiert und es gilt $\alpha = \frac{|z|}{e}$, also ist die Reihe konvergent für alle $z \in \mathbb{K}$ mit $|z| < e$.

Komplizierter in der Anwendung ist das weitere hinreichende Kriterium für die absolute Konvergenz einer Reihe, das *Wurzelkriterium*:

10.2.13 Satz (Wurzelkriterium: Cauchy, 1821)

Gibt es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$, so dass für fast alle Glieder der Folge (a_k) gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q,$$

dann ist die Reihe $\sum a_k$ (sogar absolut) konvergent.
Gilt dagegen für fast alle k

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$$

oder gilt auch nur für unendlich viele k

$$\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1,$$

dann ist $\sum a_k$ divergent.

Zusatz (Limesform): Existiert $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und gilt $\alpha < 1$, dann ist $\sum a_k$ (sogar absolut) konvergent, im Fall $\alpha > 1$ ist $\sum a_k$ divergent, im Fall $\alpha = 1$ ist keine Entscheidung möglich.

Der **Beweis** folgt hier direkt aus dem Vergleich mit der geometrischen Reihe:

Gilt etwa für alle $k \geq N$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q, \text{ so folgt für alle } k \geq N$$

$$|a_k| \leq q^k.$$

Gilt jedoch für fast alle k , dass $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ ist, dann ist (a_k) keine Nullfolge.

Zur Limesform:

Existiert $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ und ist $\alpha < 1$, so ist für fast alle k

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q := \alpha + \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 + \alpha}{2} < 1$$

und man ist in den Voraussetzungen des ersten Teiles des Satzes.

Ist $\alpha > 1$, so ist (a_k) keine Nullfolge.

Im Fall $\alpha = 1$ kann Konvergenz oder Divergenz vorliegen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

□

10.2.14 Beispiele

(a) $\sum \left(\left(\frac{k}{2k+1} \right)^k \right)_{k \geq 1}$ ist konvergent, denn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\sum \left(\frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k} \right)_{k \geq 1}$ ist divergent, denn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k = \frac{1}{2} e > 1.$$

(c) Für alle $x \geq 0$ ist $\sum \left(\frac{x^k}{k^k} \right)_{k \geq 1}$ konvergent, denn es ist

$$\sqrt[k]{\frac{x^k}{k^k}} = \frac{x}{k} \text{ und } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x}{k} = 0,$$

also sicher $\frac{x}{k} \leq \frac{1}{2}$ für fast alle k .

- (d) Für die Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ und $\sum \frac{1}{k}$ liefert sowohl das Quotientenkriterium als auch das Wurzelkriterium, dass die Quotienten

$$\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} < 1$$

kleiner 1 sind, der Limes ist aber jeweils 1, es gibt aber keinen *echten Bruch* q ($0 < q < 1$) mit $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$ für fast alle k .

Die erste Reihe ist konvergent, die zweite ist divergent.

- (e) Obwohl das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium beide auf die Konvergenz der geometrischen Reihe beruhen, liefert das Wurzelkriterium in manchen Fällen noch eine Entscheidung, wenn das Quotientenkriterium versagt:

Setzt man $a_k = (\frac{1}{2})^{k+(-1)^k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und betrachte die Reihe

$$\sum a_k = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\text{so ist } \frac{a_{k+1}}{a_k} = \begin{cases} 2, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{8}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases}$$

das Quotientenkriterium ist also nicht anwendbar. Beachtet man jedoch

$$a_k = \frac{1}{2^{k+(-1)^k}} \leq 2 \left(\frac{1}{2} \right)^k \quad \text{für } k \geq 0,$$

so sieht man, dass das Wurzelkriterium anwendbar ist.

Wir beschließen die Reihe der Konvergenzkriterien mit zwei nützlichen Kriterien, die nach Abel (N.H. Abel, 1801-1829) und Dirichlet (P.G.L. Dirichlet, 1805-1859) benannt sind und auf dem Prinzip der *Abelschen partiellen Summation* beruhen.

10.2.15 Satz (Abelsche partielle Summation: N.H. Abel, 1826)

Seien (a_k) und (b_k) zwei Folgen in $\mathbb{K}$.

Setzt man $A_m := \sum_{k=0}^m a_k$, $m \in \mathbb{N}_0$, so ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (mit $A_{-1} := 0$)

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n$$

Beweis: Mit der Fortsetzung $A_{-1} = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=0}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^n A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=0}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n. \end{aligned}$$

□

Abelsche partielle Summation kann man häufig dann anwenden, wenn das allgemeine Reihenglied c_k die Gestalt $c_k = a_k b_k$ mit geeigneten Zahlen a_k bzw. b_k hat.

10.2.16 Satz (Abelsches Konvergenzkriterium)

Ist die Reihe $\sum a_k$ konvergent, $a_k \in \mathbb{C}$ und ist (b_k) eine monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen, dann ist auch die Reihe $\sum a_k b_k$ konvergent.

Beweis: Nach §10.2.15 ist

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

Da die Folge $(A_n) = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)$ der Partialsummen von $\sum a_k$ konvergiert und $\sum (b_k - b_{k+1})$ wegen der Monotonie der Folge (b_k) sogar absolut konvergiert, konvergiert nach §10.2.8 auch die Reihe

$$\sum A_k (b_k - b_{k+1}).$$

Wegen der Konvergenz der Folge $(A_n b_n)$ ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^n a_k b_k \right)$ dann ebenfalls konvergent.

□

10.2.17 Satz (Konvergenzkriterium von Dirichlet)

Ist (a_k) eine Folge komplexer Zahlen für welche die Folge $(A_n) = \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)$ der Partialsummen beschränkt ist und ist (b_k) eine monotone Nullfolge reeller Zahlen, dann ist die Reihe $\sum a_k b_k$ konvergent.

Beweis: Nach der Formel für die abelsche partielle Summation ist für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n a_k b_k = \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

Die Folge $(A_n b_n)$ konvergiert gegen Null, und die Reihe $\sum A_k (b_k - b_{k+1})$ konvergiert (wieder nach §10.2.8). Daher ist $\sum a_k b_k$ konvergent.

□

Beispiel:

Mit Hilfe des Dirichlet-Kriteriums erhält man einen weiteren Beweis für das Leibnizkriterium (vgl. §10.2.2)

Ist $a_k = (-1)^k$, dann bildet $\sum a_k = \sum (-1)^k$ beschränkte Partialsummen. Ist dann (b_k) eine monotone Nullfolge, so ist daher $\sum (-1)^k b_k$ konvergent. (Beachte: Die Rolle der a_k in §10.2.2 übernehmen jetzt die b_k).

Hauptanwendung des Dirichlet-Kriterium ist eine Anwendung auf sog. Dirichlet-Reihe; das sind Reihen vom Typ

$$\sum \frac{a_k}{k^s}, \quad a_k \in \mathbb{C}, \quad s \in \mathbb{C},$$

z.B. ist $\sum \frac{1}{k^s}$, $s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(s) > 1$, (hier ist $a_k = 1$ für alle k) eine berühmte Dirichlet-Reihe. Durch sie wird die *Riemannsche Zetafunktion* (für $\operatorname{Re}(s) > 1$) definiert.

10.2.18 Bemerkung

Eine wichtige Technik zum Untersuchen der Konvergenz bzw. Divergenz einer Reihe ist der Vergleich mit Integralen.

So kann man etwa die Partialsumme

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s} \text{ der Reihe } \sum \left(\frac{1}{k^s} \right)$$

mit dem Integral

$$\int_1^n \frac{1}{x^s} dx$$

vergleichen. Wir kommen hierauf später (im Zusammenhang mit der Integralrechnung) zurück.

Es gibt zahlreiche weitere hinreichende Konvergenzkriterien für Reihen, wie z.B. das *Verdichtungskriterium* (vgl. Übungsblatt 10 Aufgabe 67). Wenn man gar nicht mehr weiterkommt, konsultiere man das 1921 in erster Auflage und 1996 in 6. Auflage erschienene meisterhafte Werk von *Konrad Knopp*: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer-Verlag, HD.

10.3 Exkurs: Die g-al Darstellung reeller Zahlen

In diesem Exkurs beschäftigen wir uns mit der Darstellung reeller Zahlen z.B. als *Dezimalzahlen*. Die Grundzahl 10 ist aber mathematisch nicht ausgezeichnet, wir wählen daher eine beliebige natürliche Zahl $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, als Grundzahl. Bei der Darstellung reeller Zahlen bzw. ihrer rationalen Approximationen im Computer sind die Grundzahlen $g = 2$, $g = 8$ bzw. $g = 16$ von Bedeutung.

Für die *Darstellung reeller Zahlen im Computer* vergleiche man die Ausführungen von O.Forster in Analysis 1, (6.Aufl., S.49-51).

Zunächst einige Bemerkungen über natürliche Zahlen und ihre Darstellungen in verschiedenen Positionssystemen (Stellenwertsystemen).

Bei der Beschäftigung mit Zahlen müsste man eigentlich unterscheiden zwischen dem „Zahlwort“, z.B. „Neun“ und dem zugehörigen „Zahlzeichen“, z.B. 9 oder IX (im römischen Zahlensystem). $\sqrt{2}$ ist die Bezeichnung für die eindeutig bestimmte positive reelle Zahl x , für die $x^2 = 2$ gilt.

Im täglichen Leben verwendet man das Dezimalsystem, ein Stellenwertsystem mit der Grundzahl $g = 10$. Man kommt dabei mit 10 Zahlzeichen (Ziffern) aus:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Die Dezimalzahl 444 ist eine Abkürzung für

$$4 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Die Ziffer 4 hat also im Zahlzeichen 444 einen unterschiedlichen Stellenwert.

Wie aus der 6.Klasse (Lehrplan Ba-Wü) bekannt, kann man natürliche Zahlen z.B. auch mit Hilfe von Zweierpotenzen schreiben (Grundzahl $g = 2$). So ist z.B.

$$25 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (11001)_2.$$

Es gilt aber auch etwa

$$25 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = (221)_3.$$

Zum Verdeutlichen um welche Grundzahl es sich bei der Darstellung handelt, schreibt man die Grundzahl als Index an die Ziffernfolge.

Bei der Grundzahl $g = 2$ braucht man nur die Ziffern 0 und 1 (häufig wird 0 und L verwendet). Ist die Grundzahl $g \leq 10$, so benötigt man nur die Ziffern $0, 1, \dots, g - 1$. Ist die Grundzahl g jedoch > 10 , so müssen, um Zweideutigkeit zu vermeiden, neue Ziffern eingeführt werden. Für die Grundzahl $g = 12$ (Duodezimalsystem) verwendet man z.B. für die Dezimalzahl 10 die Bezeichnung A und für die Dezimalzahl 11 die Bezeichnung B. Dann ist z.B.

$$275 = 1 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12 + 11 \cdot 12^0 = (1AB)_{12}.$$

Würde man für 10 und 11 im Dezimalsystem keine neuen Ziffern einführen so könnte das Zahlwort $(101)_{12}$

$$\text{entweder } 1 \cdot 12^2 + 0 \cdot 12^1 + 1 \cdot 12^0 = 145$$

$$\text{oder } 10 \cdot 12^1 + 1 \cdot 12^0 = 121$$

bedeuten.

Die Grundzahl 10 ist höchstens aufgrund historischer, kultureller oder praktischer Gründe ausgezeichnet (jeder Mensch hat nun mal 10 Finger, die man in allen Kulturen und schon immer zum Zählen zu Hilfe genommen hat). Von mathematischem Gesichtspunkt ist die Grundzahl $g = 10$ aber nicht die beste und zweckmäßigste.

Mit vollständiger Induktion lässt sich leicht folgender Satz beweisen:

10.3.1 Satz (g-al-Darstellung natürlicher Zahlen)

Jedes $a \in \mathbb{N}$ lässt sich bei gegebenem $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, auf genau eine Weise in der Form

$$a = x_n g^n + x_{n-1} g^{n-1} + \dots + x_1 g + x_0 g^0$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, $x_n > 0$ und $x_j \in \{0, 1, \dots, g - 1\}$ für $0 \leq j \leq n$ darstellen.

Kurzschreibweise: $a = (x_n x_{n-1} \dots x_0)_g$

10.3.2 Beispiele

$$(a) \quad 24 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0 = (220)_3$$

$$(b) \quad 36 = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0 = (121)_5$$

$$(c) \quad 45054 = (AFFE)_{16}$$

Wenn man im Hexadezimalsystem ($g = 16$) für die Dezimalzahlen

10 11 12 13 14 15 die Bezeichnungen

A B C D E F

verwendet.

Steht an den Ziffernfolge kein Index, so ist in der Regel das Zahlwort mit Hilfe der Basis $g = 10$ geschrieben.

10.3.3 Bemerkung

g -al-Ziffern erhält man einfach durch fortgesetzte Division mit Rest durch die Grundzahl g :

$$24 = 2 \cdot 12 + 0$$

$$12 = 2 \cdot 6 + 0$$

$$6 = 2 \cdot 3 + 0$$

$$3 = 2 \cdot 1 + 1$$

$$1 = 2 \cdot 0 + 1$$

und damit

$$24 = (11000)_2.$$

Man beachte die umgekehrten Reihenfolgen in der Ziffernfolge.

$$\begin{aligned} 45054 &= 16 \cdot 2815 + 14 \\ 2815 &= 16 \cdot 175 + 15 \\ 175 &= 16 \cdot 10 + 15 \\ 10 &= 16 \cdot 0 + 10, \text{ also} \\ (45054) &= (AFFE)_{16}. \end{aligned}$$

Die Darstellung natürlicher Zahlen mit einer beliebigen Grundzahl $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, wollen wir nun auf beliebige reelle Zahlen verallgemeinern.

Dabei werden wir unsere Kenntnisse über *Reihen* entscheidend benutzen. Die auftretende konvergente Majorante ist dabei die geometrische Reihe. Bekanntlich ist

$$0,4999\dots = 0,4\bar{9}$$

eine Abkürzung für die Reihe

$$\begin{aligned} \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \dots &= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{9}{10^2} \cdot \frac{10}{9} \\ &= \frac{4}{10} + \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Durch die Reihe wird also die rationale Zahl $\frac{1}{2}$ dargestellt. Andererseits ist aber auch

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,5 = 0,5000\dots$$

Man hat also für die rationale Zahl $\frac{1}{2}$ zwei Darstellungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= 0,5 = 0,500\dots \\ &= 0,4999\dots = 0,4\bar{9} \end{aligned}$$

Um Eindeutigkeit zu erreichen, werden wir uns im Folgenden für die Darstellung entscheiden (Grundzahl $g = 10$), in der „Neunerperioden“ ausgeschlossen sind (analog für andere Grundzahlen).

Ist nun x eine beliebige reelle Zahl ≥ 0 , dann gilt

$$x = [x] + r, \text{ wobei } 0 \leq r < 1 \text{ und } [x] \in \mathbb{N}_0$$

gilt.

Für den „Rest“ r geben wir im Folgenden eine Intervallschachtelung an, die r erfasst.

10.3.4 Theorem (g-al-Darstellung)

Es sei $r \in \mathbb{R}$ und $0 \leq r < 1$, und $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$, dann gilt

(a) Es gibt genau eine Folge (z_j) von „Ziffern“

$$z_j \in Z_g := \{0, 1, \dots, g-1\},$$

so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=1}^n \frac{z_j}{g^j} \leq r < \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{g^j} + \frac{1}{g^n} \quad (*)$$

Insbesondere ist

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{g^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{g^j}.$$

(b) Für jede Folge (z_j) mit der Eigenschaft $(*)$ gilt *nicht* für fast alle $j \in \mathbb{N}$

$$z_j = g-1.$$

(c) Für jede Folge (z_j) mit $z_j \in Z_g$ für alle j und für die nicht $z_j = g-1$ für fast alle j gilt, gibt es genau eine reelle Zahl r mit $(*)$ und $0 \leq r < 1$.

Vor dem Beweis überlegen wir uns, wie man im Fall der Grundzahl $g = 10$ die Ziffern der Zahl

$$r := 0,1234567\dots$$

durch r ausdrücken kann.

Es ist $10r = 1,23\dots$, also $[10r] = 1$.

Es ist $100r = 12,3\dots$, also $[100r] = 12$ und damit $[100r] - 10[10r] = 2$,

Es ist $1000r = 123,4\dots$, also $[1000r] = 123$ und damit $[1000r] - 10[100r] = 3$,

entsprechend ist $4 = [10^4 r] - 10[10^3 r]$, etc.

Beweis des Satzes:

(a) Der folgende Algorithmus (g-al-Algorithmus) ist eine Verallgemeinerung der Division mit Rest. Wir definieren

$$z_0 := 0, r_0 := r \text{ und } z_j := [r_{j-1}g], r_j := r_{j-1}g - z_j$$

für $j \geq 1$ und für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{g^j} \text{ und } b_n := a_n + \frac{1}{g^n}.$$

Mittel Induktion folgt dann

$$(**) \quad z_n = [g^n r] - g[g^{n-1}r] \text{ und}$$

$$(***) \quad [g^n r] = g^n a_n \text{ für jedes } n \in \mathbb{N} \text{ und damit}$$

$$g^n a_n = [g^n r] \leq g^n r < [g^n r] + 1 = g^n a_n + 1 = g^n b_n$$

und damit für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq r < b_n.$$

Das ist die Behauptung $(*)$ von (a).

Man beachte dabei, dass für jedes reelle y nach Definition der Gauß-Klammer gilt

$$[y] \leq y < [y] + 1.$$

Zur Eindeutigkeit der Folge (z_n) :

Ist (z_n) eine Folge, für die $(*)$ gilt, so folgt mittels $(***)$

$$z_n = g^n(a_n - a_{n-1}) = g^n a_n - g(g^{n-1} a_{n-1}) = [g^n r] - g[g^{n-1} r],$$

z_n ist also gleich der durch $(**)$ eindeutig bestimmten Zahl.

Zu zeigen bleibt: $z_n \in Z_g$.

Für $n = 1$ gilt

$$0 \leq [gr] = z_1 < gr < g, \text{ also } 0 \leq z_1 < g.$$

Für $n > 1$ benutzen wir $r < b_{n-1}$ und erhalten mit $(**)$ und $(***)$

$$0 \leq [g^n r] < g^n r = g(g^{n-1} r) < g(g^{n-1} b_{n-1}) = g(g^{n-1} a_{n-1} + 1) = g[g^{n-1} r] + g.$$

Hieraus folgt aber

$$0 \leq [g^n r] - g[g^{n-1} r] < g, \text{ also}$$

$$0 \leq z_n < g \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

Als Differenz ganzer Zahlen ist z_n eine ganze Zahl und wegen $0 \leq z_n < g$ gilt daher

$$z_n \in Z_g.$$

(b) ist eine unmittelbare Folgerung aus $(*)$. Gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ gilt

$z_n = g - 1$, dann gilt für $n > N$ $b_n = b_N$, also $a_n \leq x < b_N$.

Wählt man n so groß, dass $n > N$ und $\frac{1}{g^n} < b_N - r$ gilt, so folgt

$$r < b_N - \frac{1}{g^n} = b_n - \frac{1}{g^n} = a_n,$$

also erhalten wir den Widerspruch $r < a_n$.

(c) Ist (z_j) eine Folge mit $z_j \in Z_g$ und gilt nicht für fast alle j $z_j = g - 1$, dann gilt für

$$a_n := \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{g^j} \text{ und } b_n := a_n + \frac{1}{g^n}$$

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{a_j}{g^j} + \frac{1}{g^{n+1}} = \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{g^j} + \frac{(a_{n+1} + 1)}{g^{n+1}} \\ &\leq \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{g^j} + g \cdot \frac{1}{g^{n+1}} = b_n. \end{aligned}$$

Also gilt

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

und wegen $b_n - a_n = \frac{1}{g^n}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

$([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Intervallschachtelung, die genau eine reelle Zahl r erfasst:

$a_n \leq r \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$a_1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq r \leq b_{n+1} \leq b_n \leq b_1.$$

Es gilt $0 \leq \frac{z_1}{g} = a_1$ und $b_1 = \frac{z_1}{g} + \frac{1}{g} \leq 1$. Da nicht $z_n = g - 1$ für fast alle n gilt, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $z_{n+1} < g$. Damit gilt sogar $b_{n+1} < b_n$ und daraus folgt

$$0 \leq r < 1.$$

□

10.3.5 Bemerkungen

1. Die Darstellung $r = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z_j}{g^j}$ heißt *g-al-Darstellung* von r .

Ist $z_n = 0$ für alle $n > n_0$ und $z_{n_0} \neq 0$, dann nennt man r auch eine endliche, n_0 -stellige g-al-Zahl, andernfalls heißt r eine unendliche g-al-Zahl. Im ersten Fall sagt man auch, dass r eine (mit Null) *abbrechende* g-al-Darstellung besitzt, im zweiten Fall spricht man auch von einer nicht abbrechenden Darstellung.

Gibt es $l \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}$, so dass $z_{j+p} = z_j$ für alle $j \geq l$ gilt, dann nennt man die g-al-Darstellung *periodisch*.

2. Ist $r = \frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}$, $a < b$, eine rationale Zahl, so gehören die Reste r_j zu den b verschiedenen Brüchen $\frac{0}{b}, \frac{1}{b}, \dots, \frac{b-1}{b}$ und müssen sich also wiederholen. Wiederholen sich aber die Reste, dann wiederholen sich auch die Ziffern, also ist die g-al-Entwicklung einer rationalen Zahl *periodisch*.

Als Übungsaufgabe überlege man sich, dass umgekehrt jede Zahl $r \in [0, 1[$ mit einer periodischen g-al-Entwicklung rational ist.

3. Ist $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ und $x = [x] + r$ mit $0 \leq r < 1$ und $r = 0, z_1 z_2 z_3 \dots = \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots$ die g-al-Darstellung von r und

$$[x] = x_n g^n + x_{n-1} g^{n-1} + \dots + x_0 = (x_n x_{n-1} \dots x_0)_g,$$

so erhält man für x die g-al-Darstellung

$$x = x_n g^n + x_{n-1} g^{n-1} + \dots + x_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots$$

$$x = (x_n x_{n-1} \dots x_0, z_1 z_2 z_3 \dots)_g.$$

Ist $x < 0$, so entwickle man $y := -x$.

Jede reelle Zahl besitzt also eine (eindeutige) g-al-Darstellung und umgekehrt stellt ($n \in \mathbb{N}_0$, $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 2$)

$$x_n g^n + \dots + x_0 + \frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \frac{z_3}{g^3} + \dots$$

mit $x_j, z_j \in \mathbb{Z}_g$, wobei *nicht* $z_n = g - 1$ für fast alle n gilt, eine (eindeutig bestimmte) reelle Zahl dar.

Man hätte daher von vornherein die Menge der reellen Zahlen etwa als die *Menge aller Dezimalzahlen* definieren können. Dabei muss man allerdings mit dem Reihensbegriff vertraut sein. Dabei stößt man aber gleich auf Probleme: Ist z.B.

$$x := 3,14159265358\dots$$

$$y := 2,71828182845\dots$$

Was ist dann $x + y$ oder gar $x \cdot y$?

Genauer: Wie erhält man die g-al Ziffern von $x + y$ bzw $x \cdot y$ aus denen von x und y ?

Was mit dem Satz über die g-al-Entwicklung einer reellen Zahl neu bewiesen wurde, ist die Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ *dicht in* $\mathbb{R}$ ist, d.h. jede reelle Zahl ist Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen, denn die a_n aus Satz ??? sind alle rational und es gilt

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Jede reelle Zahl lässt sich also mit beliebiger Genauigkeit durch rationale Zahlen approximieren. Es gibt jedoch auch andere (bessere) Approximationen reeller Zahlen durch rationale Zahlen, nämlich durch sog. *Kettenbrüche*.

Diese Approximationen beruhen auf der *Kettenbruchentwicklung* einer reellen Zahl, das ist ein Algorithmus, der den gewöhnlichen euklidischen Algorithmus verallgemeinert und im Prinzip

schon im ??? Elementen dargestellt wird.

Es sind z.B. $\frac{22}{7}$ oder $\frac{333}{106}$ oder $\frac{355}{113}$ (Näherungs-)Kettenbrüche für die Kreiszahl π .

Für Einzelheiten vergleiche man etwa

P.Bundschuh: Einführung in die Zahlentheorie
Springer-Verlag, 4. Auflage 1998
Kap.V, §3.

10.3.6 Beispiele

- (1) $g = 10$; $r = \frac{1}{7}$.

Der g-al-Algorithmus liefert

$$\begin{aligned} z_0 &= 0; & r_0 &= r = \frac{1}{7} \\ z_1 &= [10r_0] = \left[\frac{10}{7}\right] = 1; & r_1 &= 10r_0 - z_1 = \frac{10}{7} - \frac{7}{7} = \frac{3}{7} \\ z_2 &= [10r_1] = \left[\frac{30}{7}\right] = 4; & r_2 &= 10r_1 - z_2 = \frac{30}{7} - \frac{28}{7} = \frac{2}{7} \\ z_3 &= [10r_2] = \left[\frac{20}{7}\right] = 2; & r_3 &= 10r_2 - z_3 = \frac{20}{7} - \frac{14}{7} = \frac{6}{7} \\ z_4 &= [10r_3] = \left[\frac{60}{7}\right] = 8; & r_4 &= 10r_3 - z_4 = \frac{60}{7} - \frac{56}{7} = \frac{4}{7} \\ z_5 &= [10r_4] = \left[\frac{40}{7}\right] = 5; & r_5 &= 10r_4 - z_5 = \frac{40}{7} - \frac{35}{7} = \frac{5}{7} \\ z_6 &= [10r_5] = \left[\frac{50}{7}\right] = 7; & r_6 &= 10r_5 - z_6 = \frac{50}{7} - \frac{49}{7} = \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Damit ist $r_6 = r_0$ und

$$\begin{aligned} z_7 &= z_1 = 1 \\ z_8 &= z_2 = 4 \\ z_9 &= z_3 = 2 \\ z_{10} &= z_4 = 8 \\ z_{11} &= z_5 = 5 \\ z_{12} &= z_6 = 7 \end{aligned}$$

etc, also $\frac{1}{7} = 0,142857142857\dots = 0,\overline{142857}$.

Die Überstreichung bedeutet, dass sich der Zifferblock 142857 periodisch wiederholt.

Die *Periodenlänge* beträgt hier 6.

Mit elementarer Zahlentheorie (vergleiche etwa das oben zitierte Buch von P.Bundschuh) kann man das theoretisch untermauern.

- (2) Ist $g = 2$ und etwa $r = 0.010101\dots = 0,\overline{01}$, so ist die rechte Seite eine Abkürzung für die Reihe

$$\begin{aligned} \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{0}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \\ &= \frac{1}{2^2} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Die periodische Dual-Zahl $0,\overline{01}$ stellt also die rationale Zahl $r = \frac{1}{3}$ dar.

- (3) Ob eine rationale Zahl eine abbrechende oder einer nicht abbrechende g-al-Darstellung hat, hängt i.a. von der Grundzahl g ab:

So besitzt z.B. die rationale Zahl $x = \frac{5}{9}$ (im Dezimalsystem) im System mit der Grundzahl $g = 3$ die abbrechende Entwicklung (Periode Null)

$$x = 0,12 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2},$$

während im Dezimalsystem ($g = 10$) bekanntlich

$$x = 0,555\dots = 0,\bar{5}$$

gilt.

Rationale Zahlen sind -wie wir bereit festgestellt haben- aber für *jede* Grundzahl $g \geq 2$ stets durch periodische Entwicklungen gekennzeichnet (abbrechende Entwicklung bedeutet: Periode Null).

10.3.7 Aufgabe

Begründen Sie folgende Regeln für die Umwandlung eines periodischen Dezimalbruchs in eine rationale Zahl, aus ??? Handbuch ??? (Falkenverlag, 1997).

1.Fall: Die Periode umfasst alle Ziffern nach dem Komma.

Man schreibt alle Ziffern nach dem Komma in den Zähler. In den Nenner schreibt man so viele Neunen, wie die Periode Ziffern umfasst.

Beispiele:

$$(1) x = 0, \overline{142857} = \frac{142857}{999999} = \frac{47619}{333333} = \frac{5291}{37037} = \frac{402}{2849} = \frac{1}{7}.$$

$$(2) x = 0, \overline{425871} = \frac{425871}{999999} = \frac{3}{7}.$$

Diese Beispiele lassen vermuten, dass die Periodenlänge (hier 6) nur vom Nenner, nicht aber vom Zähler abhängt. Tatsächlich haben

$$\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7} \text{ und } \frac{6}{7}$$

alle die Periodenlänge 6 und man erhält die Entwicklung von $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ aus der von $\frac{1}{7} = 0, \overline{142857}$ durch zyklische Vertauschung der Ziffernfolge, etwa

$$\frac{3}{7} = 0, \overline{428571}$$

$$\frac{2}{7} = 0, \overline{285714}$$

$$\frac{6}{7} = 0, \overline{857142}$$

$$\frac{4}{7} = 0, \overline{571428}$$

$$\frac{5}{7} = 0, \overline{714285}$$

Können Sie das begründen?

2.Fall: Zwischen dem Komma und der Periode stehen n Nullen.

Man geht vor, wie im ersten Fall, hängt aber im Nenner an die Neuner n Nullen an.

Beispiel: $x = 0, 000\overline{56} = \frac{56}{99000} = \frac{7}{12375}.$

3.Fall: Zwischen dem Komma und der Periode stehen Ziffern, die nicht alle Null sind.

In diesem Fall zerlegt man die Dezimalzahl in eine Summe aus einer endlichen Dezimalzahl und einer dem 2.Fall entsprechenden periodischen Dezimalzahl und addiert die beiden sich hieraus ergebenden Brüche.

Beispiel: $x = 0, 123\overline{56} = 0, 123 + 0, 000\overline{56} = \frac{123}{1000} + \frac{56}{99000} = \frac{12233}{99900}.$

10.4 Umordnungssätze für Reihen, Reihenprodukte

Die Hauptregeln für das Rechnen mit *endlichen Summen* sind

- das Assoziativgesetz
- das Distributivgesetz
- das Kommutativgesetz.

Wie übertragen sich diese Regeln auf das Rechnen mit (unendlichen) Reihen?

Zunächst gilt (wie immer sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

10.4.1 Satz

Ist $\sum (a_k)$, $a_k \in \mathbb{K}$, eine konvergente Reihe und fasst man ihre Summanden durch Klammern zu neuen Summanden zusammen, d.h. setzt man für $0 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_\nu < \dots$

$$A_1 := a_0 + \dots + a_{k_1}, \quad A_2 := a_{k_1+1} + \dots + a_{k_2}, \quad \dots$$

dann ist auch die Reihe $\sum (A_\nu)_{\nu \geq 1}$ konvergent, und es gilt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

Zusatz: Schon vorhandene Klammern in einer konvergenten Reihe darf man jedoch dann und nur dann weglassen, wenn die so entstehende (unbeklammerte) Reihe wieder konvergiert.

Beweis: $(S_m) := \left(\sum_{\nu=1}^m A_\nu \right)$ ist eine Teilfolge von $(s_n) := \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)$.

Lässt man jedoch in der konvergenten Reihe

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots (=0)$$

die Klammern weg, erhält man die divergente Reihe

$$1-1+1-1+1-1+1-1+\dots$$

□

Wir wissen (vgl. §7.8(18)):

Ist $(a_k)_{k \geq 0}$ eine reelle oder komplexe Zahlenfolge und $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ eine Abbildung, bei der jede natürliche Zahl genau einmal als Bild auftritt (Permutation, Bijektion), dann heißt die Folge

$$(b_k) = (a_{\varphi(k)})$$

eine *Umordnung* von (a_k) und ist (a_k) konvergent mit dem Grenzwert a , dann ist auch (b_k) konvergent mit dem selben Grenzwert:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{\varphi(k)} = a.$$

Wir werden im Folgenden sehen, dass sich eine Permutation $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ sehr wohl auf das Konvergenzverhalten und den Wert (Summe) einer Reihe auswirken kann. Dazu betrachten wir zunächst das folgende *Beispiel*:

Wir wissen, dass die alternierende harmonische Reihe

$$\sum \left(\frac{(-1)^k}{k+1} \right)_{k \geq 0} = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots \right)$$

nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert und dass für ihre Summe S gilt

$$\frac{1}{2} < S < \frac{5}{6}.$$

Betrachtet man die Abbildung (Permutation)

$$\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(3k) = 4k \\ \varphi(3k+1) = 4k+2 \\ \varphi(3k+2) = 2k+1 \end{array} \right\} \text{ und setzt } b_k := a_{\varphi(k)},$$

dann nennen wir die Reihe

$$\sum (b_k) = \sum (a_{\varphi(k)})$$

eine *Umordnung* der Reihe $\sum (a_k)$. Es ist also in suggestiver Schreibweise

$$\begin{aligned} \sum b_k &= a_0 + a_2 + a_1 + \\ &\quad a_4 + a_6 + a_3 + \\ &\quad \vdots \\ &\quad a_{4k} + a_{4k+2} + a_{2k+1} + \\ &\quad \vdots \\ &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{4k+3} - \frac{1}{2k+2} + \dots \end{aligned}$$

Diese Reihe ist also eine Umordnung der ursprünglichen, sie ist wieder konvergent (Beweis?) und für ihre Summe $\tilde{S}$ gilt

$$\tilde{S} = \frac{3}{2}S.$$

Man vergleiche hierzu die Musterlösung von Aufgabe 68.

Die umgeordnete Reihe ist zwar wieder konvergent, aber die Summe hat sich geändert.

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass genau die *absolut konvergenten Reihen* diejenigen Reihen sind, deren Konvergenzverhalten sich bei einer Umordnung nicht ändert (genauer: *jede* Umordnung ist ebenfalls konvergent und hat dieselbe Summe wie die Ausgangsreihe).

10.4.2 Definition

Ist $\sum (a_k)$, $a_k \in \mathbb{K}$, eine Reihe und $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ bijektiv (Permutation, Bijektion), dann heißt die Reihe

$$\sum (a_{\varphi(k)})$$

eine *Umordnung der Reihe* $\sum (a_k)$.

10.4.3 Satz (Kleiner Umordnungssatz)

Ist $\sum (a_k)$ absolut konvergent, $a_k \in \mathbb{K}$, dann ist auch jede Umordnung $\sum (a_{\varphi(k)})$ (absolut) konvergent, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Kurz: Absolut konvergente Reihen darf man beliebig umordnen ohne dass sich das Konvergenzverhalten oder die Summe ändern.

Beweis: Wir zeigen zunächst die absolute Konvergenz (und damit insbesondere die Konvergenz) einer beliebigen Umordnung $\sum a_{\varphi(k)}$ von $\sum a_k$.

Wir benutzen das Kriterium 10.4.1.

Nach Voraussetzung gibt es ein $C > 0$, so dass

$$\sigma_n := \sum_{k=0}^n |a_k| \leq C \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ gilt.}$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$|a_{\varphi(1)}| + |a_{\varphi(2)}| + \dots + |a_{\varphi(n)}| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, denn diese Summe wird ja nach oben abgeschätzt durch

$$\sigma_N := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_N| \quad \text{mit } N := \max\{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$$

Wir wissen also, dass auch jede Umordnung wieder konvergiert (sogar absolut).

Ist nun $s := \sum_{k=0}^{\infty} a_k$, dann haben wir noch

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)}$$

zu zeigen.

Dazu sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wegen der absoluten Konvergenz von $\sum (a_k)$, d.h. wegen der Konvergenz von $\sum (|a_k|)$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=0}^n |a_k| \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

d.h. insbesondere gilt

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und auch}$$

$$\left| s - \sum_{k=0}^N a_k \right| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wir wählen nun eine natürliche Zahl M so groß, dass die Zahlen $0, 1, \dots, N$ unter den Zahlen $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(M)$ vorkommen (φ ist bijektiv!), also

$$\{0, 1, \dots, N\} \subset \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(M)\}.$$

Dann ist für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=0}^m a_{\varphi(k)} - s \right| = \left| \sum_{k=0}^m a_{\varphi(k)} - \sum_{k=0}^N a_k + \sum_{k=0}^N a_k - s \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| + \left| \sum_{k=0}^N a_k - s \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Wir haben also gesehen:

Eine absolut konvergente Reihe $\sum a_k$ ist gegenüber einer Umordnung ihrer Summanden unempfindlich. Ganz anders ist die Situation, wenn $\sum a_k$ zwar konvergiert, aber $\sum |a_k|$ nicht konvergiert. Eine solche Reihe nennt man gelegentlich auch *bedingt konvergent*.

Wir führen zunächst folgende Bezeichnungen ein:

Für $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, sei

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k & , \text{ falls } a_k \geq 0 \\ 0 & , \text{ falls } a_k < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad a_k^- = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } a_k \geq 0 \\ -a_k & , \text{ falls } a_k < 0 \end{cases},$$

dann gilt offenbar ($k \in \mathbb{N}_0$)

$$a_k = a_k^+ - a_k^- \quad (*)$$

und

$$|a_k| = a_k^+ + a_k^- \quad (**)$$

Bemerkungen:

- (a) Eine Reihe $\sum a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$, ist genau dann absolut konvergent, wenn $\sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$ konvergieren.
- (b) Ist $\sum a_k$ konvergent ($a_k \in \mathbb{R}$), aber nicht absolut konvergent (also nur bedingt konvergent), dann sind $\sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$ beide divergent.

Beweis: (a) folgt sofort aus (**), da nur nicht negative Summanden auftreten.

- (b) Wäre eine der Reihen $\sum a_k^+$; $\sum a_k^-$ konvergent, dann folgt aus $a_k^+ = a_k + a_k^-$ bzw. $a_k^- = a_k^+ - a_k$, dass auch die andere konvergiert. Wegen $|a_k| = a_k^+ + a_k^-$, wäre dann auch $\sum |a_k|$ konvergent im Widerspruch zur Voraussetzung.

Der folgende erstaunliche Satz geht auf P.G.L.Dirichlet (1837) zurück.

10.4.4 Satz

Ist $\sum a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, eine bedingt konvergente Reihe, dann gibt es eine Umordnung $\sum a_{\varphi(k)}$, die divergiert.

Beweis:

- (a) Sei zunächst $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$.
Dann sind die Reihen $\sum a_k^+$ und $\sum a_k^-$ beide divergent und da $a_k^+ \geq 0$ und $a_k^- \geq 0$ gilt, sind ihre Teilsummen insbesondere nach oben nicht beschränkt.
Zur Vereinfachung setzen wir $p_k := a_k^+$ und $q_k := a_k^-$. Nun bestimmt man induktiv (rekursiv) eine Folge $(\varphi(k))$ natürlicher Zahlen mit $\varphi(k) < \varphi(k+1)$, so dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$p_0 + p_1 + \dots + p_{\varphi(k)} > k + q_0 + q_1 + \dots + q_k$$

und betrachtet die Reihe

$$(*) \quad p_0 + p_1 + \dots + p_{\varphi(0)} - q_0 + p_{\varphi(0)+1} + \dots + p_{\varphi(1)} - q_1 + p_{\varphi(1)+1} + \dots,$$

dann ist diese eine Umordnung der ursprünglichen Reihe, die offensichtlich divergiert, da ihre Partialsummen nicht beschränkt sind, denn die Partialsumme der Reihe (*), deren letzter Summand q_k ist.

- (b) Sei jetzt $a_k \in \mathbb{C}$. Wegen

$$|a_k| \leq |\operatorname{Re} a_k| + |\operatorname{Im} a_k|$$

können $\sum |\operatorname{Re} a_k|$ und $\sum |\operatorname{Im} a_k|$ nicht beide konvergieren.

Ist etwa $\sum |\operatorname{Re} a_k|$ divergent, dann gibt es wegen der Konvergenz von $\sum \operatorname{Re} a_k$ nach (a) eine Umordnung $\sum \operatorname{Re} a_{\varphi(k)}$, die divergiert.

Unabhängig vom Konvergenzverhalten von $\sum \operatorname{Im} a_{\varphi(k)}$, ist dann $\sum a_{\varphi(k)}$ divergent.

□

Beispiel:

Wir erläutern den Satz am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Hier ist also

$$(p_0, p_1, p_2, \dots) = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\right)$$

$$(q_0, q_1, q_2, \dots) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots\right)$$

Hier nimmt man zunächst so viele positive Glieder in ihrer natürlichen Anordnung

$$p_k = \frac{1}{2k-1}, \quad k \in \mathbb{N}_0$$

so, dass ihre Summe die Zahl 1 zum ersten Mal überschreitet, danach subtrahiert man so viele Glieder

$$q_k = \frac{1}{2k}$$

(d.h. man addiert Glieder $-\frac{1}{2k}$), bis die Summe dieser Glieder und der bislang aufgelisteten Glieder, die 1 zum ersten Mal unterschreiten. Im nächsten Schritt nimmt man von der nächsten positiven Glieder so viele, dass 2 überschritten wird, dann wieder negative bis die 2 zum ersten Mal unterschritten wird. Entsprechend geht man für jede der Zahlen 3, 4, 5, ... vor. Die ersten Schritte lassen sich folgendermaßen darstellen

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{41} - \frac{1}{4} + \frac{1}{43} + \frac{1}{45} + \dots}_{>1}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{<1}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{>2}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{<2}$$

Berechnet man mit s_n die Partialsummen dieser Reihe und ist $C > 0$ beliebig vorgegeben, so wählt man zunächst eine natürliche Zahl $m > C$ und ist dann s_N diejenige Partialsumme, welche die natürliche Zahl $m + 1$ zum ersten Mal überschreitet, so gilt nach Konstruktion (insbesondere $|\frac{1}{2k}| < 1, k \in \mathbb{N}$)

$$s_n \geq m > C$$

für alle $n \geq N$. Die Folge (s_n) ist also nicht beschränkt und damit nicht konvergent. Man beachte, dass die negative Summanden

$$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, \dots$$

der Ausgangsreihe zwar alle auftauchen, aber „immer später“.

Nennt man eine konvergente Reihe $\sum a_k, a_k \in \mathbb{K}$, *unbedingt konvergent*, wenn auch *jede Umordnung* konvergiert und zwar mit derselben Summe wie die Ausgangsreihe, so kann man jetzt sagen:

10.4.5 Satz (Dirichlet, 1837)

Eine Reihe $\sum a_k, a_k \in \mathbb{K}$, ist genau dann absolut konvergent, wenn sie unbedingt konvergent ist.

Beweis: „ $\Rightarrow$ “

Nach dem kleinen Umordnungssatz konvergiert für eine absolut konvergente Reihe jede Umordnung mit derselben Summe wie die Ausgangsreihe. Eine absolut konvergente Reihe ist also unbedingt konvergent.

„ $\Leftarrow$ “

Sei also umgekehrt $\sum |a_k|$ nicht konvergent, s.h. wäre $\sum a_k$ nicht absolut konvergent, dann gibt es nach Satz 10.4.4 eine Umordnung, die divergiert, das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass *jede* Umordnung konvergiert.

□

Übungsaufgabe:

Man zeige: Eine Reihe $\sum a_k$ ist bereits dann unbedingt konvergent, wenn jede ihre Umordnungen konvergiert (über die Summen dieser Umordnungen braucht man nichts vorauszusetzen).

Für *reelle* Reihen $\sum a_k$, $a_k \in \mathbb{R}$, die nun bedingt konvergieren, hat B.Riemann in seiner berühmten Göttinger Habilitationsschrift (1854, veröffentlicht erst 1866/68) bewiesen, dass man sogar durch geeignete Umordnung der Summanden eine mit einer *beliebigen Summe* s konvergente Reihe erhalten kann.

10.4.6 Satz (Riemannscher Umordnungssatz)

Ist $\sum a_k$ eine bedingt konvergente reelle Reihe (d.h. $a_k \in \mathbb{R}$) und ist $s \in \mathbb{R}$ beliebig, dann gibt es eine Umordnung $\sum a_{\varphi(k)}$ mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\varphi(k)} = s$$

Der Beweis ist eine Modifikation des Beweises des Satzes von Dirichlet. Einen Beweis findet man z.B. in *Mangoldt/Knopp: „Einführung in die höhere Mathematik“, Band 2, 80, S.227* (siehe Literaturverzeichnis). Weitere Verallgemeinerungen findet man in „Reihen-Knopp“.

Für eine konvergente Reihe $\sum a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$, die nun bedingt konvergiert, gibt es die Möglichkeit, dass

$\sum \operatorname{Re}(a_k)$ konvergiert und $\sum \operatorname{Im}(a_k)$ bedingt konvergiert oder, dass

$\sum \operatorname{Re}(a_k)$ bedingt konvergiert und $\sum \operatorname{Im}(a_k)$ konvergiert oder, dass

$\sum \operatorname{Re}(a_k)$ und $\sum \operatorname{Im}(a_k)$ bedingt konvergieren.

In den ersten beiden Fällen erhält man als mögliche Summen der Umordnungen jeweils eine Gerade vom Typ

$$s + \mathbb{R}i := \{s + ri; r \in \mathbb{R}\}; \text{ bzw. } \mathbb{R} + ti := \{r + ti; r \in \mathbb{R}\} \quad s, t \in \mathbb{R},$$

oder ganz $\mathbb{C}$ (im dritten Fall).

Aufgabe:

Geben Sie eine (bedingt konvergent) Reihe $\sum a_k$, $a_k \in \mathbb{C}$ an, so dass für die Menge S der möglichen Summen der jeweiligen Umordnung gilt

$$S = \mathbb{R} + i.$$

Wir wollen uns noch abschließend mit der *Multiplikation von Reihen* beschäftigen.

Hat man zwei endliche Summen etwa

$$s_n := a_0 + a_1 + \dots + a_n; \quad a_j \in \mathbb{K}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$t_m := b_0 + b_1 + \dots + b_m, \quad b_j \in \mathbb{K}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

zu multiplizieren, so hat man jeden Summanden der ersten Summe mit jedem Summanden der zweiten Summe zu multiplizieren und die entsprechenden Produkte aufzuaddieren:

$$\begin{aligned} s_n \cdot t_m &= a_0 t_m + a_1 t_m + \dots + a_n t_m = a_0 b_0 + a_0 b_1 + \dots + a_0 b_m \\ &\quad + a_1 b_0 + a_1 b_1 + \dots + a_1 b_m \\ &\quad + \quad \quad \quad \vdots \\ &\quad + a_n b_0 + a_n b_1 + \dots + a_n b_m \end{aligned}$$

Für das Resultat schreibt man ja auch

$$S := s_n t_m = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} a_k b_j$$

Hier ist ein allgemeines Kommutativ- und Distributivgesetz enthalten:
Ob man etwa in der $n \times m$ -Matrix

$$(*) \quad \begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & \cdots & a_0 b_m \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_0 & a_n b_1 & \cdots & a_n b_m \end{pmatrix}$$

zuerst die in den Zeilen stehenden Elemente aufsummiert, also

$$\begin{aligned} Z_0 &= a_0 b_0 + a_0 b_1 + \cdots + a_0 b_m \\ Z_1 &= a_1 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_1 b_m \\ &\vdots \\ Z_n &= a_n b_0 + a_n b_1 + \cdots + a_n b_m \end{aligned}$$

bildet, oder ab man die in den Spalten stehende Elemente aufsummiert, also

$$\begin{aligned} S_0 &= a_0 b_0 + a_1 b_0 + \cdots + a_n b_0 \\ S_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_1 + \cdots + a_n b_1 \\ &\vdots \\ S_n &= a_0 b_m + a_1 b_m + \cdots + a_n b_m \end{aligned}$$

bildet, so ist jeweils

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k = \sum_{j=0}^{\infty} S_j.$$

Etwas allgemeiner gilt:

Ordnet man alle möglichen Produkte $a_k b_j$ in *beliebiger Weise* zu einer endlichen Folge $p_0, \dots, p_s$ an, dann gilt

$$S = p_0 + p_1 + \dots + p_s.$$

Es liegt nun nahe das Verfahren auf die Multiplikation zweier konvergenter Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_k$ zu übertragen.

Man bildet alle möglichen Produkte

$$a_k b_l, \quad k \in \mathbb{N}_0, l \in \mathbb{N}_0$$

und ordnet sie etwa in dem (doppelt unendlichen) Schema ($\infty \times \infty$ -Matrix)

$$(**) \quad \begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & \cdots \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

an und schreibt die Produkte in $(**)$ als einfache Folge

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \dots,$$

d.h. in der Folge (p_n) kommt jedes Produkt $a_k b_l$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ genau einmal vor (wegen die Abzählbarkeit von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ geht das immer, siehe §10.5).

Dann ist aber die Frage: Gilt dann immer

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$$

(vorausgesetzt, $\sum p_n$ ist überhaupt konvergent)?

Zunächst eine Sprechweise:

Sind $\sum a_k$ und $\sum b_l$ zwei (konvergente) Reihen, $a_k, b_l \in \mathbb{K}$ und ist (p_n) eine Anordnung der möglichen Produkte $a_k b_l$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ als Folge, dann heißt die Reihe $\sum (p_n)_{n \geq 0}$ eine *Produktreihe* von $\sum a_k$ und $\sum b_l$.

Für spätere Anwendungen (Potenzreihen) erweist sich folgende Anordnung der Produkte $a_k b_l$ nach „Schrägzeilen“ (Diagonalen).

$$\begin{pmatrix} a_0 b_0 & a_0 b_1 & a_0 b_2 & a_0 b_3 & \cdots & a_0 b_n & \cdots \\ & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \cdots & \swarrow & \\ a_1 b_0 & a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & & & \\ & \swarrow & \swarrow & & & & \\ a_2 b_0 & a_2 b_1 & \cdots & & & & \\ & \swarrow & & & & & \\ a_3 b_0 & \cdots & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ \vdots & \swarrow & & & & & \\ a_n b_0 & \cdots & & & & & \\ \vdots & & & & & & \end{pmatrix}$$

also besonders zweckmäßig.

Hier ist also

$$p_0 = a_0 b_0, p_1 = a_0 b_1, p_2 = a_0 b_2, p_3 = a_1 b_1, p_4 = a_2 b_0, p_5 = a_0 b_3, \dots$$

Wir setzen nun

$$c_0 := p_0 = a_0 b_0$$

und bezeichnen die Summe der durch Pfeile auf der „n-ten Diagonale“ miteinander verbundenen Produkte mit c_n , also für $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 b_0 \\ c_1 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ c_2 &= a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 \\ \vdots &\quad \vdots \\ c_n &= a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 \end{aligned}$$

Ein „Summenblock“ c_n besteht also genau aus den Produkten $a_k b_l$, für welche $k + l = n$ gilt, die also die gleiche Indexsumme haben.

Die so gebildete Reihe $\sum c_n$ hat genau alle Produkte $a_k b_l$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ als Summanden, denn sie entsteht ja aus $\sum p_n$, indem man Summanden mit gleicher Indexsumme zusammenfasst.

Die so gebildete Produktreihe $\sum c_n$ mit $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$ aus $\sum a_k$ und $\sum b_l$ hat einen eigenen

Namen, man nennt sie das *Cauchy-Produkt*.

Cauchy (1821) hat schon folgendes Beispiel angegeben:

Nimmt man

$$a_k = b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

dann sind $\sum a_k$ und $\sum b_k$ beide bedingt konvergent, aber es ist

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1}} \right)$$

Ersetzt man in der Klammer jeden Radikanden durch größten von ihnen, also $n+1$, so ergibt sich

$$|c_n| \geq \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} = 1.$$

Daher kann die Cauchy-Produkt-Reihe

$$\sum c_n$$

von $\sum a_k$ und $\sum b_l$ nicht konvergieren. Wenn jedoch die Ausgangsreihe $\sum a_k$ und $\sum b_l$ beide *absolut* konvergieren, dann konvergiert jede Produktreihe $\sum p_n$ auch absolut, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} p_n.$$

Insbesondere gilt auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Dies ist der Inhalt des folgenden Satzes.

10.4.7 Satz (Produktreihensatz)

Sind die beiden Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_l$, $a_k, b_l \in \mathbb{K}$, absolut konvergent, dann ist auch *jede* Produktreihe $\sum p_n$ absolut konvergent, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$$

Insbesondere ist die Cauchy-Produktreihe $\sum c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$$

absolut konvergent, und es gilt

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l}$$

Beweis: Sei $\sum p_n$ irgendeine Produktreihe von $\sum a_k$ und $\sum b_l$ und

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^m p_n$$

eine Partialsumme.

Ist dann q der größte Index der Zahlen a_k und b_l aus denen die Partialsumme σ_m gebildet werde, so ist

$$\begin{aligned} |\sigma_m| &\leq \sum_{n=0}^m |p_n| \leq |a_0 b_0| + \dots + |a_0 b_q| \\ &\quad + |a_1 b_0| + \dots + |a_1 b_q| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + |a_q b_0| + \dots + |a_q b_q| \\ &= \sum_{k=0}^q |a_k| \cdot \sum_{l=0}^q |b_l|. \end{aligned}$$

Wegen der vorausgesetzten Konvergenz von $\sum |a_k|$ und $\sum |b_l|$ folgt nach dem Beschränktheitskriterium, die absolute Konvergenz von $\sum p_n$, denn für alle m gilt

$$\sum_{n=0}^m |p_n| \leq \sum_{k=0}^m |a_k| \cdot \sum_{l=0}^m |b_l|.$$

Nach dem kleinen Umordnungssatz haben dann *alle* Produktreihen die Summe

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} p_n.$$

Um s zu ermitteln bilden wir eine spezielle Produktreihe $\sum q_n$, indem wir die Produkte gemäß dem folgenden quadratischen Schema anordnen und zusammenfassen:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 b_0 & & a_0 b_1 & & a_0 b_2 & & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \dots \\ a_1 b_0 & \leftarrow & a_1 b_1 & & a_1 b_2 & & \dots \\ & & & & \downarrow & & \dots \\ a_2 b_0 & \leftarrow & a_2 b_1 & \leftarrow & a_2 b_2 & & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \dots \end{array}$$

Dann konvergiert die Partialsumme

$$q_0 + q_1 + \dots + q_{(m+1)^2-1} = (a_0 a_1 + \dots + a_m)(b_0 + b_1 + \dots + b_m)$$

einerseits gegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l,$$

nach dem oben Bewiesenen aber ebenfalls gegen s , so dass in der Tat gilt

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l.$$

Speziell gilt für die Cauchy-Produkt-Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$$

(dabei ist $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$)

□

10.4.8 Beispiele und Bemerkungen

- (1) Die Cauchy-Produkt-Reihe $\sum c_n$ konvergiert bereit dann schon gegen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_l$ (allerdings i.A. nur bedingt), wenn nur *eine* der beiden Reihen $\sum a_k$ oder $\sum b_l$ absolut und die andere nur bedingt konvergiert. (Satz von F.Mertens(1875), siehe Reihen-Knopp S.330/331)

- (2) Ist das Cauchy-Produkt $\sum c_n$ der beiden konvergenten Reihen $\sum a_k$ und $\sum b_l$ selber konvergent, so gilt auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b_k$$

(Satz von Abel, 1826)

Hierfür werden wir später mit Hilfe des *Abelschen Grenzwertsatzes* einen einfachen und durchsichtigen Beweis geben.

- (3) Wir wissen, dass die geometrische Reihe $\sum z^k$ für $z \in \mathbb{C}$ genau für $|z| < 1$ konvergiert, und dass dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Bildet man das Cauchy-Produkt der Reihe mit sich selbst, so erhält man

$$\boxed{\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdots \sum_{l=0}^{\infty} z^l = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1}$$

und etwas allgemeiner für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $z \in \mathbb{C}$, mit $|z| < 1$

$$\boxed{\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} z^n}$$

- (4) Funktionalgleichung von exp

Wir wissen, dass die Exponentialreihe $\sum \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergiert. Nach Definition ist für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Ist nun $w \in \mathbb{C}$ und

$$\exp(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!}$$

dann ist das n -Glieder ihres Cauchy-Produktes

$$\begin{aligned} c_n &:= \frac{z^0 w^n}{0!n!} + \frac{z^1 w^{n-1}}{1!(n-1)!} + \dots + \frac{z^n w^0}{n!0!} \\ &= \frac{1}{n!} \left\{ \binom{n}{0} w^n + \binom{n}{1} z w^{n-1} + \dots + \binom{n}{n} z^n \right\} \\ &= \frac{(z+w)^n}{n!} \quad (\text{nach der Binomischen Formel}). \end{aligned}$$

Also gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!},$$

oder

$$\boxed{\exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z+w), \quad z, w \in \mathbb{C}}$$

Das ist die *Funktionalgleichung* (Additionstheorem) der exp-Funktion. Sie gilt für komplexe wie für reelle Argumente. Sie hat wichtige Konsequenzen, z.B. folgt aus ihr, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z) \neq 0 \text{ und } (\exp(z))^{-1} = \exp(-z).$$

Wir werden uns mit der exp-Funktion, insbesondere der mit reellen Argumenten, demnächst ausführlich beschäftigen.

10.5 Abbildungen, Abzählbarkeit

In allen Teildisziplinen der Mathematik und ihren Anwendungen, sogar im täglichen Leben, ist der Begriff der *Abbildung* oder *Funktion* von zentraler Bedeutung. Wir haben ihn schon mehrfach -mehr oder weniger explizit- verwendet und gehen davon aus, dass er der geeigneten Leserin / dem geeigneten Leser hier nicht zum ersten Mal begegnet.

Wir stellen die wichtigen Grundtatsachen zusammen. Der Abbildungsbegriff hat im Laufe seiner historischen Entwicklung (Fermat, Descartes, Leibniz, Euler, Dirichlet) viele Abänderungen erfahren, eine exakte Definition führt ihn auf Grundbegriffe der Mengenlehre zurück.

Wir wollen den Abbildungsbegriff im Sinne der folgenden Arbeitsdefinition verwenden:

10.5.1 Arbeitsdefinition

Seien X und Y beliebige Mengen. Eine Abbildung (oder Funktion) f von X nach Y (oder in Y) ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ zuordnet.

Schreibweise: $f : X \rightarrow Y$

Sprechweise: f ist Abbildung von X nach Y

Das dem Element $x \in X$ in eindeutiger Weise durch f zugeordnete Element y wird auch mit $f(x)$ bezeichnet, $f(x)$ heißt auch das *Bild* von x unter f oder der Wert von f an der Stelle x .

Um Verwechslungen zu vermeiden, wird die Zuordnung von x zu $f(x)$ mit einem gesonderten Pfeil bezeichnet:

$$x \mapsto f(x).$$

Die Menge X heißt der *Definitionsbereich* (Definitionsmenge) von f , die Menge Y der *Zielbereich* (Zielmenge) von f und $W_f := \{y \in Y \mid \text{es gibt ein } x \in X \text{ mit } y = f(x)\}$ der (exakte) Wertebereich von f oder die Bildmenge von f oder kurz das *Bild* von f , andere Bezeichnung: $f(X)$.

Das Element $x \in X$ nennt man auch *Argument* von f .

Man beachte, dass die Fälle $X = \emptyset$ oder $Y = \emptyset$ nicht ausgeschlossen sind. Ist $X = \emptyset$, dann gibt es genau eine Abbildung von X nach Y , nämlich die leere Abbildung $\emptyset : \emptyset \rightarrow Y$.

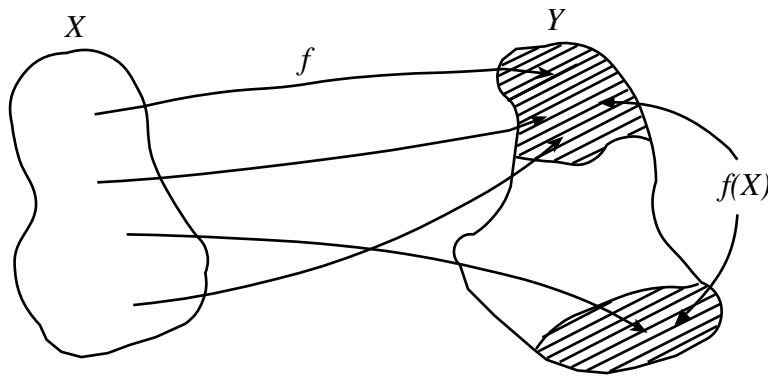
Ist aber $Y = \emptyset$ und $X \neq \emptyset$, dann kann es offensichtlich überhaupt keine Abbildung von X nach Y geben.

Für die Menge aller Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ verwendet man häufig die Bezeichnung $\text{Abb}(X, Y)$.

Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, so heißt

$$G(f) := \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}$$

der *Graph* von f . Insbesondere Im Fall $X \subset \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$ veranschaulicht man sich Funktionen (Abbildungen) $f : X \rightarrow Y$ mit Hilfe des Graphen. Beispiele hierzu haben wir schon genügend kennengelernt. Auch im Fall $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$ kann man sich eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ häufig durch ihren Graphen veranschaulichen.



Was schreibt man hin, wenn man eine Abbildung anzugeben hat?

Dazu einige Formulierungen zur Auswahl (frei nach Jänisch: Lineare Algebra):

Als Beispiele betrachten wir die Abbildung f von $X = \mathbb{Z}$ nach $Y = \mathbb{N}_0$, die jeder ganzen Zahl x ihr Quadrat x^2 zuordnet. Dann kann man schreiben:

Sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$ die durch $f(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ gegebene Abbildung oder kürzer:

Sei

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ die durch} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

gegebene Abbildung oder noch kürzer:

Betrachte

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

Manchmal ist es gar nicht nötig, der Abbildung einen eigenen Namen zu geben, in unserem Beispiel könnte man einfach

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

schreiben, was sicherlich praktisch und suggestiv ist.

Die Aufgabe von Definitionsbereich, hier $X = \mathbb{Z}$ und Zielbereich, hier $Y = \mathbb{N}_0$, kann man sich aber nicht ersparen, und es ist auch nicht zulässig, unsere Abbildung einfach x^2 zu nennen. x^2 ist der Wert unserer Abbildung an der Stelle x oder das Bild von x unter der gegebenen Abbildung, aber nicht die Abbildung selber. Sprechweisen, wie „die Funktion x^2 “ sind in der Literatur jedoch üblich, aber nicht gut.

Für den Begriff „Abbildung“ verwendet man als Synonym häufig auch die Bezeichnung „Operator“, „Transformation“ oder „Funktion“, insbesondere wenn $Y = \mathbb{R}$ oder $Y = \mathbb{C}$ gilt. Man spricht dann auch von einer „reell-“ bzw. „komplexwertigen“ Funktion.

Der Begriff „Abbildung“ stammt eigentlich aus der Geometrie, wo man spezielle Abbildungen wie *Projektionen*, *Drehungen* oder *Translationen* betrachtet.

10.5.2 Einfache Beispiele und Bemerkungen:

- (1) Wir haben §10.5.1 „Arbeitsdefinition“ genannt, weil die „Vorschrift“ und „Zuordnung“ undefiniert sind. Glaubt man an die Mengenlehre und ihre Axiome, so kann man den Begriff „Abbildung“ exakt definieren:

Seien X und Y beliebige Mengen. Eine Teilmenge $f \subset X \times Y$ heißt *Abbildung* von X nach Y , wenn es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in f$ gibt. Dieses y wird mit $f(x)$ bezeichnet und man schreibt wieder: $f : X \rightarrow Y$. Bei dieser Definition wird also eine Funktion mit ihrem Graphen identifiziert.

- (2) Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ werden häufig dadurch definiert, dass man ein „Verfahren“ (Rechen-Ausdruck, Algorithmus) angibt, mit dessen Hilfe man $f(x)$ für jedes $x \in X$ aus x berechnen kann (vgl. etwa $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0, x \mapsto x^2$).
- (3) Die Abbildung (Funktion) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

ist eine andere Schreibweise für die „Betragfunktion“

$$\begin{aligned} | \cdot | : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

- (4) Die Abbildung

$$\begin{aligned} id_X : X &\rightarrow X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

heißt *Identität* auf X (oder identische Abbildung auf X)

- (5) Sind X und Y nicht leer und ist $b \in Y$ fest gewählt, dann ist

$$\begin{aligned} X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto b \end{aligned}$$

eine *konstante Abbildung* (mit dem Wert b).

- (6) Ist X eine *endliche* Menge (vgl. §2.1.6), dann kann man eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ dadurch definieren, dass man für jedes $x \in X$ das Bild $f(x) \in Y$ explizit mit einer Wertetafel angibt: $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$, etwa

$$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$$

oder

$$\begin{array}{ccc} X = \{1, 2, 3\} & x : & 1 & 2 & 3 \\ & & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Y = \{1, 2\} & f(x) : & 2 & 1 & 2 \end{array}$$

oder kurz:

$$\frac{x : \quad | \quad 1 \quad 2 \quad 3}{f(x) : \quad | \quad 2 \quad 1 \quad 2}$$

- (7) Abbildungen spielen auch bei Anwendungen der Mathematik eine zentrale Rolle:

- (a) Der Weg s , den ein Körper beim freien Fall zurücklegt, hängt von der Fallzeit t ab:

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2$$

(g = Erdbeschleunigung)

- (b) Die Schwingungsdauer T eines mathematischen Pendels wird bei kleinen Auslenkungen von der Pendellänge l bestimmt:

$$T(l) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

(c) das Volumen V eines idealen Gases hängt vom Druck p und der Temperatur T ab:

$$V = V(p, T) = c \frac{T}{p}$$

(c eine Konstante).

(d) Die Anziehungskraft F zweier Massen m und M hängt von m und M und ihrem Abstand r ab.

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2}$$

(γ Gravitationskonstante).

Die Beispiele -auch aus anderen Naturwissenschaften- ließen sich beliebig fortsetzen.

Definitionsbereiche für die genannten Abbildungen (Funktionen) findet man in Physikbüchern selten oder gar nicht.

Sie sollten dann immer davon ausgehen, dass die Autorin / der Autor einen der folgenden Standpunkte einnimmt.

- (a) Der Definitionsbereich ergibt sich aus dem Zusammenhang, oder
- (b) die Abbildung(Funktion) ist überall dort definiert, wo an der angegebene Funktionsausdruck(Funktionsterm) $f(x)$ sinnvoll gelesen werden kann, z.B.

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ auf } \mathbb{R} - \{0\}.$$

(c) Der Definitionsbereich spielt für das, was über die Abbildung f zu sagen ist, keine Rolle.

Halten wir deshalb nochmals fest:

Zur Definition einer Funktion(Abbildung) gehören ein Definitionsbereich, ein Zielbereich und eine wie auch immer gegebene Zuordnungsvorschrift.

(8) Gleichheit bei Abbildungen:

Zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : A \rightarrow B$ heißen gleich -in Zeichen $f = g$ - wenn $X = A$, $Y = B$ und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Es sind z.B. die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \quad \quad \quad x \mapsto x^2$$

im Sinne unserer Definition verschieden, obwohl sie durch die gleiche Abbildungsvorschrift gegeben sind.

Sie haben auch unterschiedliche Eigenschaften, wie wir gleich sehen werden.

Ob zwei Abbildungen gleich sind, ist manchmal nicht einfach zu entscheiden:

Sei z.B.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x - 2$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(x+1+\sqrt{x})(x+1-\sqrt{x}),$$

dann sind Definitions- und Zielbereich von vornherein gleich, und es gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wie man durch Multiplizieren der rechten Seite im Funktionsausdruck für g sofort sieht. Komplizierter ist es im folgenden Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

Aufgrund des *Additionstheorems* für $\sin$ gilt aber $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $f = g$. Um die Notation jedoch nicht unnötig zu komplizieren, unterscheidet man aber häufig nicht zwischen der Abbildung

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \text{ und der Abbildung} \\ g : X &\rightarrow f(X), \text{ die durch} \\ g(x) &:= f(x) \text{ für } x \in X \text{ definiert ist.} \end{aligned}$$

Das hat gute Gründe, wie wir im Zusammenhang mit der Umkehrabbildung sehen werden.

(9) **Einschränkung einer Abbildung**

Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $X_0 \subset X$ eine Teilmenge, so heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} f_0 : X_0 &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f_0(x) := f(x) \end{aligned}$$

die *Einschränkung von f auf X_0* und f eine Fortsetzung von f_0 . Häufig wird auch hier nicht zwischen f und f_0 unterschieden.

10.5.3 Definition (injektiv, surjektiv, bijektiv)

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

- (a) *injektiv*, falls verschiedene Punkte aus X stets verschiedene Bilder in Y haben:
Für alle $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ gilt $f(x) \neq f(x')$;
- (b) *surjektiv*, falls $f(X) = Y$ gilt, falls es also zu jedem $y \in Y$ (mindestens) ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.
Eine surjektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ nennt man auch eine Abbildung von X auf Y (im Unterschied zum allgemeinen Fall (Abbildung nach oder in Y));
- (c) *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist. f nennt man in diesem Fall auch eine Bijektion.
Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ist weder injektiv, noch surjektiv, also bestimmt nicht bijektiv. Betrachtet man jedoch die Abbildung

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

dann ist $\tilde{f}$ injektiv und surjektiv, also bijektiv. Man beachte, dass f und $\tilde{f}$ durch die gleiche Zuordnungsvorschrift definiert sind.

Aus gegebenen Abbildungen kann man neue Abbildungen konstruieren:

Sei z.B. $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen und $f(X) = Y$. Dann kann man auf das Bild $f(x)$ jedes Element $x \in X$ der Abbildung g anwenden und erhält ein Element $g(f(x)) \in Z$. Durch diese Hintereinanderausführung (erst f , dann g) haben wir eine Abbildung von X nach Z konstruiert:

$$\begin{aligned} X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diese Abbildung mit $g \circ f$ und nennen sie die *Komposition* von f mit g .

Sprechweise: „ g nach f “.

$g \circ f$ kann man auch dann bilden, wenn nur $f(X) \subset Y$ gilt.

Man hat dann eigentlich g durch $g_0 = g|_{f(X)}$ zu ersetzen, aber da g_0 und g auf der Teilmenge dieselben Werte haben, erhält man

$$g_0(f(x)) = g(f(x)).$$

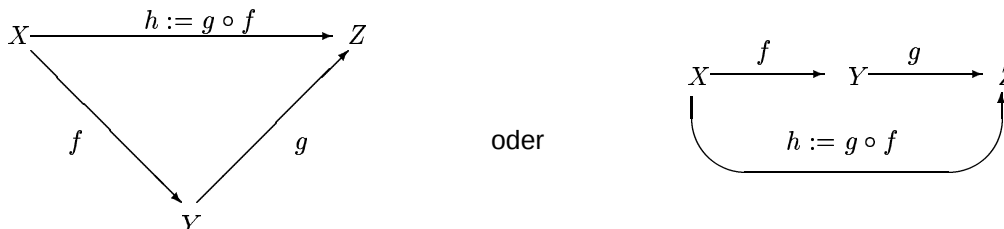
10.5.4 Definition

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen.

Die Abbildung $h : X \rightarrow Z$, die für $x \in X$ durch $h(x) = g(f(x))$ definiert ist, heißt die *Komposition* (Zusammensetzung von f mit g) und schreibt

$$h = g \circ f \text{ (gelesen } g \text{ nach } f\text{)}.$$

Veranschaulichung im Diagramm:



Beachte: Wenn $g \circ f$ definiert ist, braucht $f \circ g$ nicht definiert zu sein und selbst wenn die Bildung $f \circ g$ möglich ist, gilt i.a. $f \circ g \neq g \circ f$.

Man darf $g \circ f$ auch nicht mit dem Produkt $g \cdot f$ verwechseln, das im Fall reellwertiger Funktionen f und g durch $(g \cdot f)(x) = g(x)f(x)$ definiert ist.

So ist im Fall $X = Y = Z$ und $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin x$ etwa $h(x) = g(f(x)) = \sin(x^2)$, aber das Produkt ist $g(x) \cdot f(x) = \sin(x) \cdot (x^2)$.

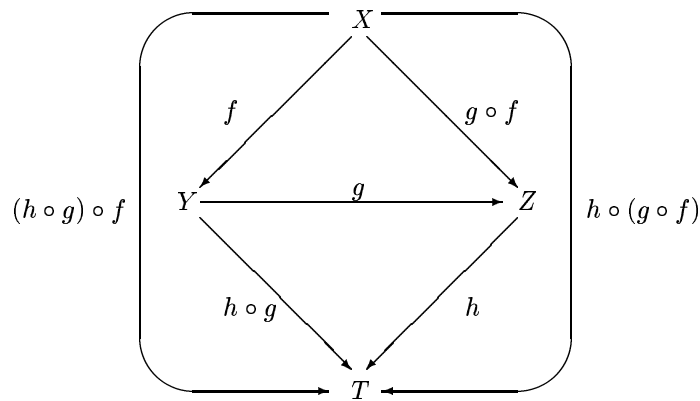
Hat man drei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ und $h : Z \rightarrow T$, dann kann man die Zusammensetzung

$$g \circ f : X \rightarrow Z, \quad h \circ g : Z \rightarrow T,$$

$$h \circ (g \circ f) : X \rightarrow T \quad \text{und} \quad (h \circ g) \circ f : X \rightarrow T$$

bilden. Die Frage ist: Gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$?

Diagramm:



Man rechnet für $x \in X$

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) \text{ und} \\ ((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).\end{aligned}$$

Es ist also in der Tat

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Man sagt: Die Zusammensetzung von Abbildungen ist assoziativ und lässt die Klammerung weg, schreibt also einfach $h \circ g \circ f$.

Insbesondere kann man eine Abbildung $f : X \rightarrow X$ mehrfach mit sich selbst zusammensetzen, also

$$\underbrace{f \circ f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ mal}} =: f^{[n]}, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ bilden.}$$

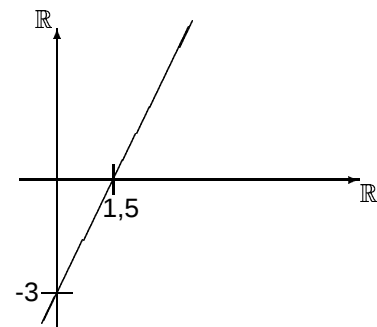
bilden.

Im Fall $X = \mathbb{R}$ darf man $f^{[n]}(x)$ nicht mit der Potenz $f^n(x) = \underbrace{f(x) \cdot \dots \cdot f(x)}_{n \text{ mal}}$ ($n \in \mathbb{N}$) verwechseln.

Um den folgenden Begriff zu motivieren betrachten wir das folgende einfache

Beispiel: Die (linear-affine) Funktion

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x - 3\end{aligned}$$



ist injektiv, wie man sofort nachrechnet. Sie ist auch surjektiv. Dann ist $y \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben, dann gibt es immer ein (sogar eindeutig bestimmtes) $x \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = y.$$

Wir können dieses x aus der Gleichung

$$2x - 3 = y$$

einfach ausrechnen und erhalten

$$x = \frac{y+3}{2}.$$

Für dieses x gilt tatsächlich

$$f(x) = 2x - 3 = 2 \cdot \frac{x+3}{2} - 3 = y.$$

Die Funktion

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{y+3}{2} \end{aligned}$$

ist wieder bijektiv und hat die Eigenschaft

$$g \circ f = id_{\mathbb{R}} \text{ und } f \circ g = id_{\mathbb{R}}.$$

g und f sind Umkehrfunktionen (Umkehrabbildungen) voneinander im Sinne der folgenden allgemeinen Definition.

10.5.5 Definition (Umkehrabbildung)

Seien X und Y nicht leere Mengen und $f: X \rightarrow Y$ eine *bijektive* Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit

$$g \circ f = id_X \text{ und } f \circ g = id_Y.$$

g ist wieder bijektiv und heißt die *Umkehrabbildung* von f . Sie wird häufig mit f^{-1} (nicht ganz ungefährlich!) oder auch mit $f^\#$ bezeichnet.

Beweis: (1) Zu jedem $y \in Y$ gibt es wegen der Bijektivität von f genau eine $x \in X$ mit $f(x) = y$. Ordnet man jedem $y \in Y$ diese x mit $f(x) = y$ zu, so erhält man eine Abbildung $g: Y \rightarrow X$ mit

$$\begin{aligned} y = f(g(y)) &= f \circ g(y) \quad \text{für alle } y \in Y \text{ und} \\ x = g(f(x)) &= g \circ f(x) \quad \text{für alle } x \in X, \text{ also} \\ f \circ g &= id_Y \text{ und } g \circ f = id_X. \end{aligned}$$

Wegen der ersten Gleichung ist g injektiv, dann ist $g(y) = g(y')$, $y, y' \in Y$, so folgt

$$y = f(g(y)) = f(g(y')) = y'.$$

Wegen der zweiten Gleichung ist g surjektiv. Dann ist $x \in X$ ein beliebig vorgegebenes Element, dann gilt für das Element $y := f(x) \in Y$

$$g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x.$$

(2) Zur Eindeutigkeit:

Sei auch $g^*: Y \rightarrow X$ eine Abbildung mit

$$g^* \circ f = id_X \text{ und } f \circ g^* = id_Y.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} g^* &= g^* \circ id_Y = g^* \circ (f \circ g) \\ &= (g^* \circ f) \circ g \\ &= id_X \circ g = g. \end{aligned}$$

□

Als Übungsaufgabe zeige man:

10.5.6 Übungsaufgabe

- (a) Seien X und Y nicht leere Mengen und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, für die gilt:
Es gibt eine Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = id_X$ und $f \circ g = id_Y$, dann ist f bijektiv und es gilt $g = f^\#$.
- (b) Ist $f : X \rightarrow Y$ bijektiv und $f^\# : Y \rightarrow X$ die Umkehrabbildung, dann ist $f^\#$ wieder bijektiv und $(f^\#)^\# = f$.

Wir werden nun den Begriff der *bijektiven Abbildung* benutzen, um Mengen der *Größe* nach zu vergleichen. Eine grobe Einteilung der Mengen ist eine Einteilung in

- *endliche Mengen*
- *unendliche Mengen*.

Dabei werden wir sehen, dass es bei den unendlichen Mengen auch noch Abstufungen in der Größenordnung gibt. Es gibt z.B. abzählbar-unendliche Mengen (typisches Beispiel ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen) und überabzählbare Mengen, typisches Beispiel ist die Menge $\mathbb{R}$ aller reellen Zahlen.

Ohne zu zählen, ja ohne überhaupt zählen zu können, kann man feststellen, ob in einer Straßenbahn ebenso viele Sitzplätze wie Fahrgäste vorhanden sind:

Das ist genau dann der Fall, wenn jeder Sitzplatz, mit einem Fahrgast besetzt ist und kein Fahrgast steht, Etwas vornehmer ausgedrückt: Wenn es eine bijektive Abbildung der Menge S aller Sitzplätze auf die Menge F aller Fahrgäste gibt. Analog kann man (ohne zu zählen) feststellen, ob es mehr (oder weniger) Sitzplätze als Fahrgäste gibt.

Aufgabe: Denken Sie sich in die Prähistorie zurückgesetzt (Jäger und Sammler!). Sie sitzen vor ihrer Höhle und haben zwei Nusshaufen vor sich und sollen feststellen, welche Nusshaufen mehr Nüsse enthält. Wie würden Sie das (ohne zu zählen) machen?

10.5.7 Definition (Gleichmächtigkeit, G.Cantor, 1878)

Zwei Mengen X und Y heißen *gleichmächtig* (Symbol: $X \sim Y$), wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt.

Statt der Sprechweise: X und Y sind gleichmächtig (haben dieselbe Mächtigkeit) und der symbolischen Schreibweise $X \sim Y$, sagt man auch: X und Y haben die gleiche *Kardinalzahl*:

Schreibweise: $\#X = \#Y$.

10.5.8 Satz (Eigenschaften von „ $\sim$ “)

Seien X, Y, Z Mengen. Dann gilt

- | | |
|---|-----------------|
| (a) $X \sim X$ | (Reflexivität) |
| (b) $X \sim Y \implies Y \sim X$ | (Symmetrie) |
| (c) $X \sim Y$ und $Y \sim Z \implies X \sim Z$ | (Transitivität) |

In einem festen System von Mengen ist also „ $\sim$ “ eine Äquivalenzrelation und äquivalente Mengen haben gleiche Mächtigkeit (Kardinalzahl).

Der **Beweis** ist offensichtlich, da $f = id_X$ bijektiv ist (a) und mit f auch die Umkehrabbildung $g = f^\#$

bijektiv ist (b).

Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ bijektiv, dann ist auch die Zusammensetzung

$$g \circ f : X \rightarrow Z$$

bijektiv, also gilt auch (c). □

10.5.9 Definition

Eine Menge X heißt

(a) *endlich*, falls $X \neq \emptyset$ oder falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\mathbb{A}_n \sim X$.

Dabei ist $\mathbb{A}_n := \{1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$

(b) *unendlich*, falls sie nicht endlich ist.

Wir haben schon früher (vgl. §2.1.6) betont, dass wir die Mengen $\mathbb{A}_n := \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, als Prototypen von endlichen Mengen mit n Elementen betrachten. Hier ist $\#\mathbb{A}_n = n$, und es sei $\mathbb{A}_0 := \emptyset$ und $\#\mathbb{A}_0 := 0$. Ist X endlich, dann ist die Kardinalzahl (Mächtigkeit) $\#X$ eindeutig definiert, denn es gilt

10.5.10 Bemerkung

Gibt es eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{A}_n \rightarrow X$ und eine bijektive Abbildung $g : \mathbb{A}_m \rightarrow X$, dann ist $n = m$ ($n, m \in \mathbb{N}$).

Zum **Beweis** hat man lediglich zu zeigen:

Ist $\varphi : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_m$ bijektiv, dann ist $n = m$.

Hier bietet sich ein Induktionsbeweis, etwa nach n an. Sei also für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ $A(n)$ die Eigenschaft: Für $n \in \mathbb{N}$ und beliebiges $m \in \mathbb{N}$ gilt: Gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_m$, dann ist $n = m$.

A(1): Ist $n = 1$, dann ist notwendig auch $m = 1$. Für den Induktionsschritt unterscheiden wir zwei Fälle:

1.Fall: Es ist $\varphi(n+1) = m$. Dann können wir eine Abbildung

$$g : \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_{m-1}$$

dadurch definieren, dass wir

$$g(k) := f(k)$$

für alle $k \leq n$ setzen, denn für kein $k \leq n$ kann $f(k)$ mit m übereinstimmen, da f bijektiv ist. g ist dann auch bijektiv und nach der Induktionsvoraussetzung ist $n = m - 1$, also auch $n + 1 = m$

2.Fall: $\varphi(n+1) < m$.

Dann gibt es ein $k < n+1$ mit $\varphi(k) = m$.

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, \dots, k, \dots, n+1\} \\ \tau: \quad \downarrow \downarrow & \searrow \times \\ \{1, 2, \dots, k, \dots, n+1\} \end{array}$$

Betrachte die Abbildung $\tau : \mathbb{A}_{n+1} \rightarrow \mathbb{A}_{n+1}$ mit $\tau(k) = n+1$, $\tau(n+1) = k$ und $\tau(j) = j$ für $j \leq n, j \neq k$.

τ vertauscht also die Zahlen $n+1$ und k und lässt alle übrigen Zahlen fest (Transposition). τ ist bijektiv ($\tau \circ \tau = id_{\mathbb{A}_{n+1}}$) und damit ist auch

$$g := \varphi \circ \tau : \mathbb{A}_{n+1} \rightarrow \mathbb{A}_m$$

bijektiv und es gilt

$$g(n+1) = \varphi(\tau(n+1)) = \varphi(k) = m.$$

Nach dem ersten Fall folgt $n+1 = m$.

□

Als **Übung** zeigen man:

- (a) Ist Y Teilmenge der endlichen Menge X , dann ist Y ebenfalls endlich und $\#Y \leq \#X$.
- (b) Sind X und Y disjunkte endlichen Mengen, d.h. es gilt $X \cap Y = \emptyset$, dann ist auch $X \cup Y$ endlich (das gilt auch ohne die Disjunktheit), und es ist

$$\#(X \cup Y) = \#X + \#Y.$$

- (c) Sind X und Y endliche Mengen, dann ist auch das kartesische Produkt $X \times Y$ endlich, und es gilt

$$\#(X \times Y) = \#X \cdot \#Y.$$

Offensichtlich ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen eine unendliche Menge. Denn wäre $\mathbb{N}$ endlich, so gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbb{A}_n \sim \mathbb{N}.$$

Wegen $\mathbb{A}_{n+1} \subset \mathbb{N}$ müsste dann $n+1 \leq n$ sein.

Offensichtlich ist dann auch

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

eine unendliche Menge und die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned}$$

ist bijektiv, also ist im Sinne unserer Definition $\#\mathbb{N}_0 = \#\mathbb{N}$.

Noch erstaunlicher ist, dass im Sinne der Kardinalzahlen nicht *mehr* natürliche Zahlen als gerade natürliche Zahlen gibt, denn die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}_0 &\rightarrow 2\mathbb{N}_0 && \text{ist bijektiv} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned}$$

also ist wieder $\#\mathbb{N}_0 = \#(2\mathbb{N}_0)$.

Im Bereich der unendlichen Mengen kann also -im Gegensatz zu endlichen Mengen- Teil aus einer Menge zu einer echten Teilmenge äquivalent sein.

10.5.11 Definition (Abzählbarkeit)

Eine Menge X heißt

- (a) *abzählbar unendlich*, wenn $\mathbb{N} \sim X$ gilt,
- (b) *abzählbar*, falls X endlich oder abzählbar unendlich ist,
- (c) *überabzählbar*, falls X nicht abzählbar ist.

Man beachte, dass die Terminologie in der Literatur nicht einheitlich ist.

Eine Menge X , die endlich oder abzählbar unendlich ist, nennt man häufig auch eine „höchstens abzählbare“ Menge. Manche Autoren verwenden den Begriff „abzählbar“ auch im Sinne von „abzählbar unendlich“.

10.5.12 Beispiele und Bemerkungen

(1) Wir wissen schon:

$$\mathbb{N}_0 \sim \mathbb{N} \quad \text{oder} \quad \#\mathbb{N}_0 = \#\mathbb{N}$$

- (2) Erstaunlicherweise gibt es aber auch „nicht mehr“ ganze Zahlen als natürliche Zahlen. Dass eine Menge (abzählbar) unendlich ist, behandelt nicht anderes, als dass man ihre Elemente als Folge schreiben kann und die Folgenglieder paarweise verschieden sind. Die folgende Tabelle liefert eine *Nummerierung* der ganzen Zahlen durch die natürliche Zahlen

$\mathbb{N}_0$	0	1	2	3	4	...	$2k-1$	$2k$	...
$\mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	...	k	$-k$	...

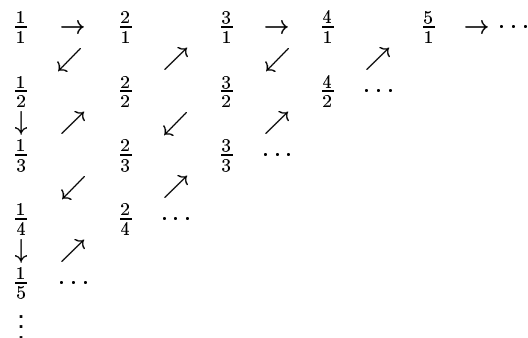
Etwas formaler: Die Abbildung $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ mit

$$f(n) := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0 \\ k, & \text{falls } n = 2k - 1 \\ -k, & \text{falls } n = 2k \end{cases}$$

für $k \in \mathbb{N}$ ist bijektiv.

- (3) Auch die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationaler Zahlen ist abzählbar (unendlich), also gilt auch $\#\mathbb{Q} = \#\mathbb{N}$. Es gibt also nicht „mehr“ (im Sinne der Kardinalzahlen) rationaler Zahlen als natürlicher Zahlen.

Zum **Beweis** ordnet man zunächst die *positiven* rationalen Zahlen im folgenden Schema an:



und nummeriert sie in Richtung der angegebenen Pfeilen, wobei man die ungekürzten Brüche (wie z.B. $\frac{1}{2}$ oder $\frac{2}{4}$ oder $\frac{4}{2}$ oder $\frac{3}{3}$ etc.) überspringt, um „Mehrfachaufzählungen“ zu vermeiden.

In der Weise erhält man eine Abzählung von $\mathbb{Q}_+^\bullet$. $\mathbb{Q}_+^\bullet$ erscheint als

$$\mathbb{Q}_+^\bullet = (r_1, r_2, r_3, \dots) = \left(1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$$

Dann ist aber

$$(0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, \dots)$$

eine Anordnung von $\mathbb{Q}$ als Folge, damit ist $\mathbb{Q}$ abzählbar (unendlich).

- (4) *Verallgemeinerung:*

Die Vereinigung höchstens abzählbar vieler höchstens abzählbaren Mengen ist wieder höchstens abzählbar.

Beweis: Man muss den Beweis von (3) ein klein wenig modifizieren, da wir zugelassen haben, dass die beteiligten Mengen auch endlich sein können.

- (5) $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ist abzählbar (unendlich). Dies hatten wir im Zusammenhang mit Produktreihen benutzt, das halb geben wir hier einen Beweis:
Man benutzt (ähnlich wie bei (4)) das erste (oder Cauchy'sche) Diagonalverfahren zur Abzählung der Paare $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ in dem doppelt unendlichen Schema

$$\begin{array}{ccccccc}
 (0, 0) & (0, 1) & (0, 2) & (0, 3) & \cdots & (0, n) & \cdots \\
 \swarrow & \swarrow & \swarrow & \cdots & \swarrow & & \\
 (1, 0) & (1, 1) & (1, 2) & \cdots & & & \\
 \swarrow & \swarrow & & & & & \\
 (2, 0) & (2, 1) & \cdots & & & & \\
 \swarrow & & & & & & \\
 (3, 0) & \cdots & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 \vdots & & & & & & \\
 \vdots & \swarrow & & & & & \\
 (n, 0) & \cdots & & & & & \\
 \vdots & & & & & &
 \end{array}$$

$$0 \mapsto (0, 0), 1 \mapsto (0, 1), 2 \mapsto (1, 0), 3 \mapsto (0, 2), 4 \mapsto (1, 1), 5 \mapsto (2, 0), 6 \mapsto (0, 3), \dots$$

einfacher ist es ein bijektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0,$$

die so genannte „Cantor'sche Paarungsfunktion“ anzugeben. Diese ist definiert durch

$$\varphi(m, n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m,$$

also z.B. $\varphi(3, 2) = \frac{30}{2} + 3 = 18$.

Weisen Sie als Übungsaufgabe nach, dass die Abbildung φ bijektiv ist.

Eine andere Bijektion ist

$$\begin{aligned}
 \psi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 &\rightarrow \mathbb{N}_0 \\
 (m, n) &\mapsto 2^m(2n+1) - 1,
 \end{aligned}$$

dabei gibt m an, wie oft $\psi(m, n)+1$ den Faktor 2 enthält und $2n+1$ ist der ungerade Restfaktor.

(6) **Bemerkung:**

Zur Abkürzung wird für $\#\mathbb{N}_0$ der hebräische Buchstabe $\aleph_0$ (Aleph Null) verwendet. Die merkwürdige und befremdliche Arithmetik im Bereich der Kardinalzahlen, die z.B. in

$$\begin{aligned}
 \aleph_0 + 1 &= \aleph_0 && \text{oder auch} \\
 \aleph_0 + 1000 &= \aleph_0 && \text{oder auch} \\
 \aleph_0 + \aleph_0 &= \aleph_0
 \end{aligned}$$

zum Ausdruck kommt, wurde in der Vorlesung im Rahmen der „mathematischen Folklore“ am Beispiel von *Hilberts Hotel* illustriert (Es kommt 1 weiterer Gast, es kommen nochmals 1000 Gäste, es kommen nochmals abzählbar unendlich viele Gäste, es kommen abzählbar viele Busse mit jeweils abzählbar vielen Gästen) erläutert.

Wenn also abzählbar unendliche Vereinigung von abzählbar unendlichen Mengen wieder abzählbar sind, ist dann überhaupt zu erwarten, dass es überabzählbare Mengen gibt? Ihre Existenz zeigt der folgende Satz.

10.5.13 Satz

Ist $A := \{0, 1\}$ und $F := \text{Abb}(\mathbb{N}_0, A)$ die Menge aller 0-1-Folgen, dann ist F überabzählbar.

Beweis F besteht aus Folgen, als deren Glieder nur die Elemente 0 oder 1 auftreten, z.B. ist

$$(1, 0, 0, 0, \dots) \in F \text{ oder } (0, 1, 0, 0, \dots) \in F \text{ oder } (1, 1, 0, 0, 0, \dots) \in F.$$

Wäre F nun abzählbar, dann müsste sich F als Folge (von Folgen) schreiben lassen, etwa

$$F = (f_0, f_1, f_2, \dots),$$

wobei jedes f_j eine 0-1-Folge ist, etwa

$$\begin{aligned} f_0 &= (f_{00}, f_{01}, f_{02}, \dots) && \text{mit } f_{0j} \in \{0, 1\} \\ f_1 &= (f_{10}, f_{11}, f_{12}, \dots) && \text{mit } f_{1j} \in \{0, 1\} \\ f_2 &= (f_{20}, f_{21}, f_{22}, \dots) && \text{mit } f_{2j} \in \{0, 1\} \\ &\vdots \\ f_n &= (f_{n0}, f_{n1}, f_{n2}, \dots) && \text{mit } f_{nj} \in \{0, 1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

($j \in \mathbb{N}_0$).

Wir konstruieren nun ein Element $g \in F$, d.h. eine 0-1-Folge, die in obiger Auflistung *nicht* vorkommt. Wir setzen nämlich für $n \in \mathbb{N}_0$.

$$g_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } f_{nn} = 0 \\ 0, & \text{falls } f_{nn} = 1, \end{cases}$$

und betrachten $g = (g_0, g_1, \dots, g_n, \dots)$, dann ist offensichtlich $g \in F$, aber g kommt in obiger Aufzählung nicht vor (weil $g_n \neq f_{nn}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt).

Dieser Widerspruch zeigt, dass F in der Tat überabzählbar ist.

□

Einer Folge $f = (f_0, f_1, \dots) \in F$ kann man den Dezimalbruch

$$x_f := \frac{f_1}{10^1} + \frac{f_2}{10^2} + \dots + \frac{f_n}{10^n} + \dots \in [0, 1[$$

zuordnen.

Da die Dezimalbruchdarstellung einer reellen Zahl $r \in [0, 1[$ eindeutig ist, ist diese Abbildung injektiv. Daher ist das Bild $\varphi(F) \subset [0, 1[$ eine überabzählbare Teilmenge, also ist $[0, 1[$ selber überabzählbar.

Offensichtlich ist dann auch $]0, 1[$ überabzählbar und da durch

$$\begin{aligned} \varphi :]0, 1[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto ??? \end{aligned}$$

eine bijektive Abbildung definiert wird, haben wir:

10.5.14 Satz

Das Intervall $]0, 1[$ und die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind überabzählbar.

10.5.15 Aufgaben

(a) Zu je zwei offenen Intervallen

$$\begin{array}{ll}]a, b[& (a, b \in \mathbb{R}, a < b) \text{ und} \\]c, d[& (c, d \in \mathbb{R}, c < d) \end{array}$$

gebe man eine Bijektion

$$f :]a, b[\rightarrow]c, d[$$

an. Kann man die Bijektion auf die abgeschlossene Intervalle festsetzen?

(b) Man zeige: Alle echten Intervalle (d.h. Intervalle, die mindestens 2 Punkte enthalten) sind überabzählbar und haben die gleiche Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$.**10.5.16 Folgerung**Die Menge $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist überabzählbar.**Beweis:** Denn wenn $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ abzählbar wäre, dann wäre auch

$$(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

abzählbar.

10.5.17 Definition(algebraische Zahl)Eine komplexe Zahl α heißt *algebraisch*, wenn es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und Zahlen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, so dass

$$a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

gilt.

M.a.h. α ist genau dann algebraisch, wenn es ein Polynom $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P \neq 0$ gibt mit $P(\alpha) = 0$.

$$\mathbb{A} := \{\alpha \in \mathbb{C}; \alpha \text{ algebraisch}\}$$

ist ein Körper (Unterkörper von $\mathbb{C}$). (Der Beweis ist nicht ganz elementar!) und heißt Körper der *algebraischen Zahlen*.Eine komplexe Zahl, die nicht algebraisch ist, heißt *transzendent*.**10.5.18 Aufgabe**Man erhält die selbe Menge $\mathbb{A}$, wenn man Polynome $Q \in \mathbb{Q}[X]$, $Q \neq 0$, zur Definition verwendet.

10.5.19 Beispiele

- (a) Die imaginäre Einheit
- i
- ist algebraisch, da für
- $P = X^2 + 1 \in \mathbb{Z}[X]$
- gilt

$$P(i) = i^2 + 1 = (-1) + 1 = 0.$$

- (b) Die achte Einheitswurzel

$$\zeta_8 := \exp\left(\frac{2\pi i}{8}\right)$$

ist algebraisch, da für $P = x^8 - 1$ gilt $P(\zeta_8) = 0$.

- (c) Jede rationale Zahl ist algebraisch, dann ist
- $r \in \mathbb{Q}$
- , dann ist
- r
- Nullstelle des Polynoms
- $P = x - r$
- .

- (d) Die nicht rationale Zahl (Goldener Schnitt!)

$$g := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618033988 \dots$$

ist algebraisch, denn sie ist Nullstelle des Polynoms

$$P = X^2 - X - 1 \quad (\text{nachprüfen!})$$

- (e)
- $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$
- ist algebraisch, denn
- α
- ist eine Nullstelle des Polynoms

$$P = X^4 - 10X^2 + 1 \quad (\text{nachrechnen!})$$

Gibt es überhaupt komplexe Zahlen die nicht algebraisch sind, d.h. gibt es transzendente Zahlen? Ohne dass man jemals eine transzendente Zahl gesehen hat, ergibt sich ihre Existenz am

10.5.20 Satz

Die Menge $\mathbb{A}$ aller algebraischen Zahlen ist abzählbar(unendlich)

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$A_n := \{ \alpha \in \mathbb{A}; \alpha \text{ ist Nullstelle eines nicht-trivialen Polynoms } P \in \mathbb{Z}[X] \text{ vom Grad } \leq n, \\ \text{für dessen Koeffizienten gilt } |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0| \leq n. \}$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen. A_n ist daher abzählbar, sogar endlich. Offensichtlich gilt

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A_n.$$

Als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist $\mathbb{A}$ daher abzählbar.

□

Der folgende Satz zeigt, dass die „Masse“ der komplexen Zahlen transzendent ist.

Satz: Die Menge

$$\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C}; z \text{ transzendent} \}$$

ist überabzählbar.

und ist Y die Potenzmenge von X , also die Menge aller Teilmengen, dann hat Y 2^n Elemente, die Elementenanzahl wächst also exponentiell.

G.Cantor hat nun gezeigt, dass für jede Menge X die Potenzmenge $P(X) := \{A, A \subset X\}$ eine echt größere Mächtigkeit als X hat.

10.5.23 Satz (von Cantor über die Mächtigkeit der Potenzmenge)

Ist X eine beliebige Menge. $P(X) = \{A, A \subset X\}$ ihre Potenzmenge, dann gilt

$$\#X < \#P(X).$$

Beweis: OBdA können wir $X \neq \emptyset$ voraussetzen. Wir betrachten die Menge F der auf X definierten Funktionen, die nur die Werte 0 und 1 annehmen.

Ordnet man jedem $x \in M$ die Funktion

$$f_x : M \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit}$$

$$f_x(y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } y = x \\ 0, & \text{falls } y \neq x \end{cases}$$

zu, dann ist $X \sim \{f_x, x \in X\} \subset F$. X ist jedoch nicht zur ganzen Menge F äquivalent. Denn sonst gäbe es eine bijektive Abbildung $x \mapsto f^{(x)}$ von X auf F . Die Funktion

$$f : X \rightarrow \{0, 1\} \text{ mit}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } f^{(x)}(x) = 0 \\ 0, & \text{falls } f^{(x)}(x) = 1 \end{cases}$$

gehört zu F , stimmt aber mit keinem $f^{(x)}$ überein.

X und F sind also nicht gleich mächtig und F hat eine größere Mächtigkeit als X . Definiert man nun als *charakteristische Funktion* einer Teilmenge $A \subset X$ die Funktion

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A, \end{cases}$$

dann liefert offenbar die Abbildung $A \mapsto \chi_A$ eine Bijektion von

$$P(X) \rightarrow \{\chi_A; A \subset X\} = F.$$

□

Bemerkung: Die Konstruktion kann man natürlich wiederholen und etwa $P(P(X))$ bilden etc. Sie zeigt, dass im Bereich der unendlichen Mengen noch unendlich viele Abstufungen in der Mächtigkeit dieser Mengen gibt.

D.Hilbert hat 1900 auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Paris die Frage gestellt:

Um wieviel größer als $\mathbb{N}$ ist $\mathbb{R}$?

Die sogenannte *Kontinuumshypothese (CH)* besagt, dass die Kluft zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ minimal ist. Sie besagt nämlich:

Kontinuumshypothese (CH; G.Cantor, 1878)

Es gibt keine Menge X mit

$$\#\mathbb{N} < \#X < \#\mathbb{R}.$$

Man kann die Cantorsche Kontinuumshypothese auch so ausdrücken:

Jede Teilmenge $M \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Die Antwort auf die Frage, ob (CH) richtig oder falsch ist, ist beunruhigend, denn es gilt

Fundamentalsatz der Mengenlehre:

Die Kontinuumshypothese ist weder beweisbar noch widerlegbar (Im Rahmen des der Mengenlehre üblicherweise zu Grunde gelegten Axiomensystems.)

Der Beweis beruht auf zwei Säulen:

Bereits 1938 hat Kurt Gödel gezeigt, dass $\neg(CH)$ nicht beweisbar ist, d.h. CH ist nicht widerlegbar, und 1963 hat Paul Cohen gezeigt, dass CH selber nicht beweisbar ist.