

Gerd Fischer

Lineare Algebra

Gerd Fischer

Lineare Algebra

Eine Einführung für Studienanfänger

17., aktualisierte Auflage

STUDIUM



Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Gerd Fischer
Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Boltzmannstr. 3
85748 Garching

gfisher@ma.tum.de

Der bisherige Titel der Reihe „Grundkurs Mathematik“ lautete „vieweg studium – Grundkurs Mathematik“.

- | | | |
|-----------------|------------------|------------------|
| 1. Auflage 1975 | 9. Auflage 1986 | 17. Auflage 2010 |
| 2. Auflage 1975 | 10. Auflage 1995 | |
| 3. Auflage 1976 | 11. Auflage 1997 | |
| 4. Auflage 1978 | 12. Auflage 2000 | |
| 5. Auflage 1979 | 13. Auflage 2002 | |
| 6. Auflage 1980 | 14. Auflage 2003 | |
| 7. Auflage 1981 | 15. Auflage 2005 | |
| 8. Auflage 1984 | 16. Auflage 2008 | |

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2010

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Těšínská Tiskárna, a. s., Tschechien
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Czech Republic

ISBN 978-3-8348-0996-4

*We must not accept the old blasphemous nonsense
that the ultimate justification of mathematical science
is the „glory of the human mind“.
Abstraction and generalization
are not more vital for mathematics
than individuality of phenomena
and, before all,
not more than inductive intuition.
Only the interplay of these forces and their synthesis
can keep mathematics alive
and prevent its drying out into a dead skeleton.*

RICHARD COURANT

Vorwort zur 10. Auflage

Die erste im Jahr 1975 veröffentlichte Auflage dieses Buches war entstanden aus meiner Vorlesung im Wintersemester 1972/73 an der Universität Regensburg und einer von Richard Schimpl angefertigten Ausarbeitung, die als Band 1 der Reihe „Der Regensburger Trichter“ erschienen war. Es freut mich, daß das Buch in den vergangenen 20 Jahren so viel Anklang gefunden hat.

Im Jahr 1994/95 hatte ich an der Universität Düsseldorf wieder einmal Gelegenheit, eine Anfängervorlesung über „Lineare Algebra“ zu halten. Dabei fand ich in dem alten Buch zahllose Dinge, die man wohl besser erklären kann. Dazu kam die Versuchung, die Möglichkeiten von $\text{\LaTeX}$ zu nutzen, was schließlich dazu geführt hat, daß ich fast das ganze Buch neu aufgeschrieben habe.

Geblichen ist die Überzeugung, daß am Anfang jeder Theorie Probleme stehen müssen, und daß die entwickelten Methoden danach zu bewerten sind, was sie zur Lösung der Probleme beigetragen haben. Dies deutlich zu machen, ist in der linearen Algebra eine vordringliche Aufgabe, weil hier die axiomatische Methode sehr ausgeprägt ist. Mit Hilfe eines wohlorganisierten Instrumentariums von Begriffen können Beweise kurz und klar durchgeführt werden, Rechnungen können weitgehend vermieden werden und erhalten – wo sie notwendig sind – eine Interpretation von einem abstrakteren Standpunkt aus.

Es hat lange gedauert, bis sich die lineare Algebra von einem Hilfsmittel der sogenannten „analytischen Geometrie“ (das ist die Lehre von den linearen und

quadratischen geometrischen Gebilden) zu einer selbständigen Disziplin entwickelt hat. Die größten Veränderungen gab es zu Anfang dieses Jahrhunderts, als die axiomatische Methode durch den Einfluß von D. HILBERT und speziell in der Algebra durch EMMY NOETHER ausgebaut wurde. Das zeigt ganz deutlich ein Blick in Lehrbücher aus dieser Zeit, etwa die „klassische“ Darstellung von KOWALEWSKI [Kow 2]* aus dem Jahr 1910 und die 1931 erschienene „moderne“ Version von SCHREIER-SPERNER [S-S]. Dieser Wandel ist vergleichbar mit dem Übergang vom Jugendstil zum Bauhaus. Inzwischen ist die lineare Algebra durchdrungen von einer Ökonomie der Gedanken sowie einer Ästhetik in der Darstellung, und sie ist unentbehrliches Hilfsmittel in vielen anderen Gebieten geworden, etwa der Analysis und der angewandten Mathematik.

Dieser eindrucksvolle Fortschritt ist nicht frei von Gefahren. Die Axiomatik beginnt mit den allgemeinsten Situationen und schreitet fort in Richtung zu spezielleren Sachverhalten. Dieser Weg wurde mit letzter Konsequenz in den Werken von N. BOURBAKI [Bo], [C] beschritten. Er läuft der historischen Entwicklung – die einem „natürlichen Wachstum“ der Mathematik entspricht – jedoch meist entgegen. So wurden etwa *Determinanten* schon von LEIBNIZ um 1690 benutzt, CAYLEY begann 1850 *Matrizen* als eigenständige Objekte anzusehen, der allgemeine Begriff des *Körpers* ist erstmals in dem 1895 bei Vieweg erschienenen „Lehrbuch der Algebra“ von H. WEBER [We] zu finden. Abstrakte Begriffe und ihre Axiome entstehen aus der Entdeckung von Gemeinsamkeiten, sie setzen lange Erfahrung im naiven Umgang und kreative Auseinandersetzung mit den Gegenständen der Mathematik voraus. Eine Darstellung, die mit den Axiomen beginnt, könnte den verhängnisvollen Eindruck erwecken, als seien die aufgestellten Regeln zufällig oder willkürlich. Einer solchen Gefahr entgegenzuwirken, ist das stete Bestreben dieses Buches. Die neue Auflage soll helfen, die abstrakten Begriffe noch mehr zu motivieren und die Beziehungen der linearen Algebra zu ihren Anwendungen deutlicher zu machen.

Viele theoretische Überlegungen der linearen Algebra dienen der Rechtfertigung oder der Entwicklung von Rechenverfahren, mit deren Hilfe man schließlich gegebene Probleme durch eine Iteration lösen kann. Dies wird hier in vielen Fällen bis zur Berechnung konkreter Beispiele vorgeführt. In der Praxis läßt man besser einen Computer rechnen, aber die Schwelle zur Beschreibung von Programmen dafür wurde in diesem Buch mit Vorsatz nicht überschritten. Für einen Anfänger erscheint es mir viel wichtiger, zunächst einmal ohne Ablenkung durch Probleme der Programmierung die Struktur des Lösungsweges zu verstehen und mit einfachsten, im Kopf berechenbaren Beispielen die unmittel-

*Eckige Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis

bare gute Erfahrung zu machen, daß ein Algorithmus funktioniert. Danach kann man getrost die Ausführung der Rechnungen einem fertigen Programmpaket wie Maple oder Mathematica überlassen. Etwa im Rahmen der numerischen Mathematik hat man Gelegenheit, die Rechenverfahren genauer zu studieren und dazu weitere Hilfsmittel der linearen Algebra kennen zu lernen (vgl. etwa [Str]).

Dieses Buch ist entstanden aus Vorlesungen für Studienanfänger in den Fächern Mathematik, Physik und Informatik; an Vorkenntnissen ist nur das sogenannte „Schulwissen“ (etwa im Umfang von [Sch]) nötig. Es enthält insgesamt genügend viel Material für zwei Semester, dabei gibt es zahlreiche Möglichkeiten für Auswahl und Reihenfolge. Der Text ist meist nach den Regeln der Logik angeordnet, in einer Vorlesung kann es gute Gründe geben, davon abzuweichen. Einige Abschnitte sind durch einen Stern * markiert, als Anregung, sie beim ersten Durchgang zu überspringen und später (etwa im zweiten Semester) darauf zurückzukommen. Die Anwendungen der linearen Algebra auf affine und projektive Geometrie sowie die lineare Optimierung sind in einem eigenen Band [Fi] enthalten, auch damit kann man den vorliegenden Text nach Belieben mischen.

Um Mathematik zu verstehen, genügt es nicht, ein Buch zu lesen oder eine Vorlesung zu hören, man muß selbst an Problemen arbeiten. Als Anregung dazu dienen die zahlreichen Aufgaben. Die dort eingestreuten Sterne sind nicht als Warnung, sondern als besonderer Ansporn zu verstehen.

Der durch diese Neuauflage abgelöste Text war durch zahllose Hinweise von Lesern fast restlos von Druckfehlern befreit worden. Nun gibt es sicher wieder reichlich Nachschub, ich möchte auch die neuen Leser ermuntern, mir „Ansichtskarten“ zu schreiben.

Mein Dank gilt all denen, die bei der Neubearbeitung beteiligt waren: In erster Linie Hannes Stoppel, durch dessen Begeisterung, Bücher zu $\text{\LaTeX}$ -en, ich in dieses Projekt geschlittert bin, Martin Gräf, der mit viel Sorgfalt die Übungsaufgaben zusammengestellt hat, Carsten Töller, dem einfallsreichen Meister der Bilder und dem Verlag für seine stetige Unterstützung.

Düsseldorf, im September 1995

Gerd Fischer

Vorwort zur 17. Auflage

Seit der 10. Auflage hat es nur wenige größere Änderungen gegeben. Sie betreffen Ergänzungen zu Quotientenräumen, Tensorprodukten und äußeren Produkten. Diese grundlegenden abstrakten Begriffe bereiten erfahrungsgemäß Studienanfängern einige Schwierigkeiten; man sollte ihnen jedoch nicht zu lange ausweichen, denn sie treten später als unentbehrliches Hilfsmittel an vielen Stellen wieder auf. Zudem sind sie im hier behandelten Fall von Vektorräumen mit Hilfe von Basen noch recht konkret zu beschreiben.

Birgit Griesse und Hannes Stoppel haben die Aufgaben teilweise überarbeitet und ein eigenes Buch mit Lösungen veröffentlicht. Das sollte die Leser nicht davon abhalten, zunächst selbst daran zu arbeiten.

Neu in dieser Auflage ist eine Einführung zum Thema *Warum Lineare Algebra?* Sie ist die überarbeitete Fassung einer einführenden Vorlesungs-Doppelstunde, die GÜNTER M. ZIEGLER im April 2006 an der TU Berlin gehalten hat. Zum genaueren Verständnis der darin ausgeführten Beispiele sind Kenntnisse über die einfachsten Begriffe und Techniken der Linearen Algebra nützlich. Wer damit noch gar nicht vertraut ist, kann Einzelheiten im Laufe seines Studiums der Linearen Algebra nachlesen.

Zu vielen Themen der Linearen Algebra findet man interaktive Visualisierungen unter

www.mathe-vital.de

Diese wurden von JÜRGEN RICHTER-GEBERT an der TU München im Rahmen des Projektes *mathe-vital* mit dem Programm *Cinderella* erstellt

Mein Dank gilt den zahlreichen Lesern, die mich auf Unklarheiten und Fehler hingewiesen haben, ganz besonders Kollegen und Studierenden aus Berlin, München und Regensburg. Ich habe versucht, die nötigen Verbesserungen einzuarbeiten. Es wird nun schwer sein, noch etwas zu finden; wer dennoch Erfolg gehabt hat, wird gebeten, mir das mitzuteilen.

München, im Juni 2009

Gerd Fischer

Warum Lineare Algebra?

(von Gerd Fischer und Günter M. Ziegler)

Was ist Lineare Algebra?

Die Lineare Algebra gehört neben der reellen Analysis zum Curriculum für Studierende der Mathematik und anderer Fächer, die mathematische Methoden intensiv benutzen. Das liegt daran, dass sie zu den Grundpfeilern der Mathematik zählt, auf denen alles andere aufbaut. Zu den darüberliegenden Gebäudeteilen der Mathematik gehören beispielsweise Algebra, Differentialgleichungen, Numerik, Differentialgeometrie, Funktionalanalysis usw. Die Beziehungen und Verwindungen zwischen all diesen Gebieten sind vielfältig und schwer schematisch zu skizzieren. Aber Konsens besteht, dass Lineare Algebra zur unverzichtbaren Basis gehört. Sie ist entstanden aus der Aufgabe, lineare Gleichungssysteme zu lösen und solche Aufgaben treten in allen Gebieten der Mathematik und ihren Anwendungen immer wieder auf. Wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, hat es lange gedauert, bis die Lineare Algebra als eigenständiges Gebiet in die Lehrpläne aufgenommen wurde. Lange Zeit wurde sie vorwiegend als technisches Hilfsmittel der Geometrie angesehen, zur Beschreibung von linearen Gebilden wie Geraden und Ebenen, sowie Kegelschnitten. Eine der ersten zusammenfassenden aber wenig beachteten Darstellungen war die 1844 in Leipzig erschienene „*Ausdehnungslehre*“ von H. GRASSMANN. Erst in der Göttinger Schule wurden die abstrakten Hintergründe konsequent herausgearbeitet, und Vektorräume als die wesentlichen Objekte der Untersuchung eingeführt. Neben dem Buch von SCHREIER und SPERNER [S-S] ist hierzu auch die 1931 erstmals erschienene „*Moderne Algebra*“ von B. L. VAN DER WAERDEN hervorzuheben. Bis in die 50er Jahre des vorigen Jahrhunderts hatten die entsprechenden Anfängervorlesungen meist noch den Titel „*Analytische Geometrie*“, erst danach wurde die Geometrie als eine von mehreren möglichen Anwendungen in den Hintergrund gedrängt. Sorgfältige historische Hinweise zu dieser langen Entwicklung findet man bei BRIESKORN [B].

Seither wird in der Ausbildung in Linearer Algebra neben der Beschäftigung mit linearen Gleichungssystemen auch der Umgang mit abstrakten mathematischen Strukturen, wie Gruppen, Ringen, Körpern, Vektorräumen usw. geübt. Dabei muss man zunächst die mathematische Sprache lernen, d.h. präzise Formulierungen finden, mit denen Strukturen definiert sind, sowie korrekte Behauptungen darüber aufstellen, und stichhaltige Begründungen dafür erarbeiten. Die Anschauung kann dabei helfen, Beweise zu finden; aber dann beginnt die Knochenarbeit, sie präzise aufzuschreiben. Das ist erfahrungsgemäß die größte Hürde für Studienanfänger.

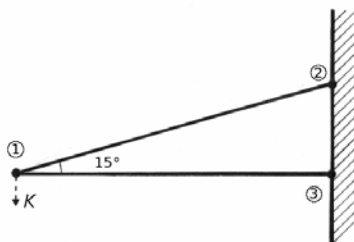
Anwendungen der Linearen Algebra

Man sollte sich nicht der Illusion hingeben, dass ein einzelnes mathematisches Teilgebiet, wie die Lineare Algebra, die Hilfsmittel zur Lösung großer praktischer Probleme liefern könnte. Wenn Mathematik in die Praxis geht, dann gehen da immer verschiedene mathematische Teilgebiete gemeinsam. Aber trotzdem: Es gibt sehr markante Beispiele für Anwendungen der Linearen Algebra - ein paar wollen wir im Folgenden beschreiben.

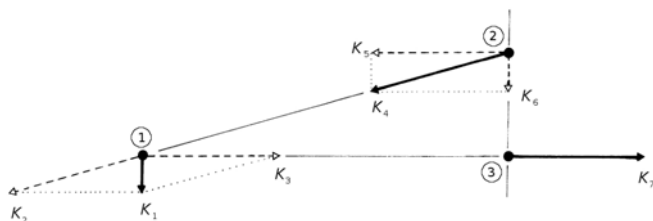
1 Statik von Gerüsten. Das Problem, Bauwerke und andere Konstruktionen auszuführen, die stabil sind, ist alt und bei weitem nicht trivial. Betrachten wir etwa ein **Gerüst**, d.h. ein Gebilde, das aus Streben und Knoten besteht (in der Baustatik spricht man von einem **Fachwerk**). Soll es stabil gebaut werden, so muss man wissen, welche Kräfte auf die Bauteile wirken. Grundlegende Untersuchungen dazu hat u.a. J. C. MAXWELL (1831 - 1879) geleistet, den man vor allem wegen seiner Beiträge zur Elektrodynamik kennt; dann aber auch C. CULMANN, von dem 1866 das Buch „*Die Graphische Statik*“ erschien. Die Methode benutzt Lineare Algebra, sein Schüler M. KOEHLIN hat als Ingenieur die Statik des Eiffel-Turms gerechnet, der seit der Weltausstellung 1889 noch heute steht.

Wir wollen die Methode in ihrer graphischen und ihrer rechnerischen Form an einem ganz einfachen, aber doch charakteristischen Beispiel illustrieren.

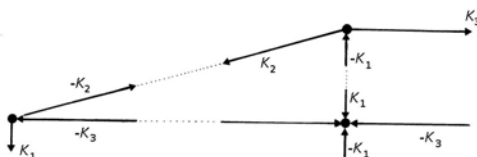
Zur Vereinfachung betrachten wir ein ebenes Problem, nämlich die Aufhängung eines Gewichtes (etwa einer Lampe) an einer Mauer mit Hilfe eines Gestänges in Form eines rechtwinkligen Dreiecks. Die Stangen und ihre Befestigungen müssen so ausgelegt sein, dass sie den entstehenden Zug- und Druckkräften standhalten. Zunächst wirkt im Punkt ① eine Kraft K senkrecht nach unten, sie soll groß sein im Vergleich zum Gewicht der Stangen.



Kräfte addieren sich wie Vektoren, im Punkt ① ist $K = K_1$ Summe von K_2 und K_3 ; K_2 verursacht einen Zug in Richtung ②, K_3 einen Druck in Richtung ③. Graphisch kann man K_2 und K_3 durch eine Parallelogrammkonstruktion ermitteln.



Im Punkt ② zerfällt die Zugkraft $K_4 = K_2$ in $K_5 = -K_3$ und $K_6 = K_1$, im Punkt ③ ist die Druckkraft $K_7 = K_3$. Der gesamte Fluss von Kräften und Gegenkräften sieht dann so aus:



Gleichgewicht bedeutet, dass in jedem Befestigungspunkt die Summe aller angreifenden Kräfte verschwindet; rechnerisch ergibt sich daraus ein System von linearen Gleichungen. Dazu beschreibt man jede der beteiligten Kräfte K_i als Vektor

$$K_i = (x_i, y_i, z_i)$$

mit reellen Komponenten x_i, y_i, z_i . Im obigen ebenen Beispiel sind die $z_i = 0$, das Gleichgewicht im Punkt ① ergibt folgende Bedingungen: K_1 ist vorgegeben, etwa $K_1 = (0, -1)$, das bedeutet

$$x_1 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 = -1.$$

Aus der Geometrie des Dreiecks und $\tan(15^\circ) \approx 0.268$ folgt

$$0.268x_3 + y_2 = 0 \quad \text{und} \quad y_3 = 0$$

Schließlich ergibt die Gleichgewichtsbedingung $K_1 - K_2 - K_3 = 0$, dass

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0 \quad \text{und} \quad y_1 - y_2 - y_3 = 0.$$

Das sind 6 lineare Gleichungen für die 6 Komponenten der drei Kräfte, die Lösung ist

$$K_1 = (0, -1), K_2 = (-3.732, -1), K_3 = (3.732, 0).$$

Daraus ergeben sich einfach die Kräfte in den Punkten ② und ③. Wie man sieht, ist die Zugkraft auf die Befestigung im Punkt ② fast viermal so groß wie das angehängte Gewicht.

In komplizierteren Fällen sind die Gleichungssysteme zu den einzelnen Punkten stärker gekoppelt, man kann sie dann nur gemeinsam lösen. Hat man n Punkte und in jedem Punkt drei räumliche Kräfte, so ergibt das insgesamt $9n$ zu bestimmende Koordinaten. Wie groß n sein kann, sieht man nicht nur am Eiffel-Turm, sondern schon an jedem Baukran.

Neben den statischen Kräften gibt es aber auch dynamische Effekte, da durch elastische Verformungen Schwingungen ausgelöst werden können. So wird berichtet, dass im Jahr 1850 eine Brücke über den Fluss Maine bei Angers einstürzte, während Soldaten im Gleichschritt darüber marschierten. Seither ist dem Militär verboten, Brücken auf diese Art zu überqueren.

Ein aktuelleres Beispiel ist die von SIR NORMAN FOSTER und Partnern entworfene *Millenium Bridge* über die Themse in London, eine Fußgängerbrücke, die St. Paul's Cathedral mit der Tate Modern Gallery verbindet. Sie ist konzipiert als „blade of light“, die Tragseile zwischen den 144 m entfernten Pylonen haben einen Durchhang von nur 2.3 m; das Ingenieurbüro ARUP berechnete die diffizile Statik. Nach der Einweihung durch Königin ELISABETH II wurde die Brücke am 10. Juni 2000 eröffnet - am 12. Juni 2000 musste sie wieder geschlossen werden, da sie bedrohlich zu wackeln anfang; seither heißt sie „the wobbly bridge“.



Nach vielen Experimenten und Rechnungen von ARUP wurde die Ursache gefunden: Die Statik war in Ordnung, aber es entstanden seitliche Schwingungen, die durch die Reaktionen der Fußgänger noch verstärkt wurden: Durch Resonanz schaukelten sich die Schwingungen gefährlich auf. Einzelheiten dazu findet man unter [ARUP]. Der Umbau und Einbau von Schwingungsdämpfern kostete 5 Millionen Pfund. Im Februar 2002 wurde das Ergebnis mit bis zu 20 000 Freiwilligen getestet und für gut befunden. Seither ist die Brücke wieder geöffnet.



Was hat das mit Linearer Algebra zu tun? Schwingungen und ihre Dämpfung hängen mit Matrizen und ihren Eigenwerten zusammen.

2 Linearisierung. In der Praxis gibt es kaum eine strikt lineare Beziehung zwischen zwei Größen; selbst für Preise wird bei Abnahme größerer Mengen ein Nachlass gewährt. Aber die Tangente an eine Funktion gibt in einem begrenzten Bereich wenigstens eine brauchbare Näherung. Dieses Prinzip der Analysis heißt *lineare Approximation*, hier helfen die Methoden der Linearen Algebra. Man kann es ausbauen und eine gegebene oder gesuchte differenzierbare Funktion in ihrem gesamten Definitionsbereich durch eine *stückweise lineare* Funktion approximieren, etwa bei der Lösung von Differentialgleichungen durch *Diskretisierung* und *stückweise Linearisierung*.

Als einfaches Beispiel sei die Berechnung einer Wärmeverteilung in der Ebene angegeben. Bezeichnet $f(x,y)$ die Temperatur im Punkt (x,y) , so erfüllt die Funktion f bei Temperaturgleichgewicht die partielle Differentialgleichung zweiten Grades

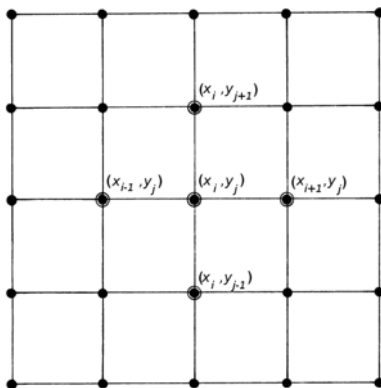
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y) = 0,$$

man nennt sie *Laplace-Gleichung*, die Lösungen heißen *harmonisch*. Wir nehmen an, dass die Temperaturverteilung am Rand eines Quadrats vorgegeben ist und unverändert bleibt. Eine übliche Grundlage für die approximative numerische Berechnung der Lösung f ist eine Diskretisierung: Man überzieht den quadratischen Bereich mit einem genügend feinen quadratischen Gitter von Messpunkten (x_i, y_j) . Ersetzt man in der Laplace-Gleichung Differentialquotienten durch Differenzenquotienten und schafft man die Nenner weg, so ergibt sich an der Stelle (x_i, y_j) die Bedingung

$$\begin{aligned} & (f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j)) - (f(x_i, y_j) - f(x_{i-1}, y_j)) \\ & + (f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)) - (f(x_i, y_j) - f(x_i, y_{j-1})) = 0, \end{aligned}$$

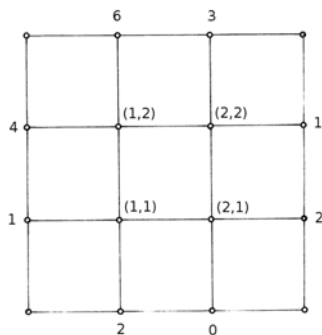
das ist gleichbedeutend mit

$$f(x_i, y_j) = \frac{1}{4}(f(x_{i+1}, y_j) + f(x_{i-1}, y_j) + f(x_i, y_{j+1}) + f(x_i, y_{j-1})). \quad (*)$$



Physikalisch bedeutet diese Bedingung, dass die Temperatur an jeder Stelle (x_i, y_j) im Inneren gleich dem Mittelwert der Temperaturen an den vier nächstgelegenen Gitterpunkten ist. Insgesamt erhält man mit Hilfe von $(*)$ für die Temperaturen $f(x_i, y_j)$ so viele lineare Gleichungen, wie man Gitterpunkte hat; dieses Gleichungssystem ist zu lösen.

Als Beispiel wählen wir ein relativ grobmaschiges Gitter, mit folgenden Werten von f auf den relevanten Gitterpunkten am Rand:



Für die vier gesuchten Werte

$$f_{ij} := f(x_i, y_j) \quad \text{mit} \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

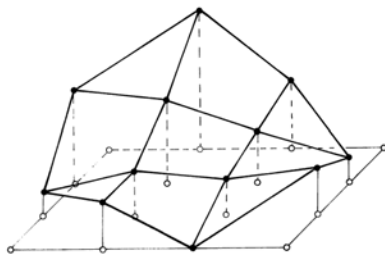
erhält man daraus die linearen Gleichungen

$$\begin{array}{rrrrrcl} 4f_{11} & - & f_{12} & - & f_{21} & & = & 3 \\ -f_{11} & + & 4f_{12} & & & - & f_{22} & = & 10 \\ -f_{11} & & & + & 4f_{21} & - & f_{22} & = & 2 \\ & - & f_{12} & - & f_{21} & + & 4f_{22} & = & 4 \end{array}$$

mit den Lösungen

$$f_{11} = \frac{49}{24} \approx 2.042, \quad f_{12} = \frac{43}{12} \approx 3.583, \quad f_{21} = \frac{19}{12} \approx 1.583, \quad f_{22} = \frac{55}{24} \approx 2.292.$$

Das entstehende stückweise lineare „harmonische“ Funktionsgebirge sieht so aus:



3 Der Page Rank bei Google. Ein aktuelleres Beispiel für eine Anwendung der Linearen Algebra ist die Internet-Suchmaschine Google, die in ihrer ursprünglichen Form in den 90er Jahren von den beiden Studenten S. BRIN und L. PAGE entwickelt und 2001 patentiert wurde. Wichtiger Bestandteil ist eine Methode für die Anordnung der Suchergebnisse im Browser, Grundlage dafür ist der „PageRank“ $p(S)$ für jede Web-Site S . Er ist ein Maß dafür, wie stark die Seite mit anderen vernetzt ist, sagt allerdings nichts über die Qualität des Inhalts der Seite aus. Die Definition des PageRank kann wie folgt motiviert werden.

Man stellt sich einen Surfer vor, der einen Weg auf den vorhandenen Seiten $S_1, \dots, S_N$ des Internets zurücklegt. Er beginnt auf einer zufällig ausgewählten Seite und folgt in der Regel einem der angegebenen Links. Da er aber entnütigt werden kann (etwa weil die Links nicht mehr weiterhelfen), darf er gelegentlich auch einmal auf eine beliebige andere Seite springen. Um das zu präzisieren wird zunächst ein **Damping Faktor** d mit $0 \leq d \leq 1$ festgesetzt (meist wird $d = 0.85$ gewählt). Er hat folgenden Einfluss: Auf irgendeiner Seite angekommen folgt der Surfer mit der Wahrscheinlichkeit d einem zufällig ausgewählten Link, mit der Wahrscheinlichkeit $1 - d$ springt er vom Zufall gesteuert auf eine beliebige andere Seite des Netzes. Der **PageRank** $p(S)$ ist nun erklärt als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Surfer auf einem sehr langen Weg zu einem zufällig gewählten Zeitpunkt auf der Seite S befindet. Da N sehr groß ist, wird $p(S)$ eine sehr kleine Zahl sein, auf jeden Fall gilt

$$0 \leq p(S) \leq 1.$$

Nach den elementaren Regeln für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist

$$p(S_1) + \dots + p(S_N) = 1.$$

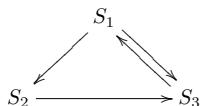
Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ergibt nun eine Beziehung zwischen den verschiedenen PageRanks. Dazu betrachtet man für eine Seite S alle Seiten, die einen Link auf S enthalten, wir bezeichnen sie mit $T_1, \dots, T_n$, wobei $0 \leq n \leq N - 1$. Bezeichnet c_i die Anzahl der Links, die von T_i ausgehen, so gilt

$$p(S) = d \cdot \left(\frac{p(T_1)}{c_1} + \dots + \frac{p(T_n)}{c_n} \right) + \frac{1 - d}{N}.$$

Damit könnte man $p(S)$ nur ausrechnen, wenn die Werte $p(T_i)$ schon bekannt wären. Aber immerhin erhält man auf diese Weise ein System von N linearen Gleichungen für die N gesuchten Zahlen $p(S_1), \dots, p(S_N)$.

Nach der Theorie kann man ein solches Gleichungssystem lösen, aber in der Praxis benötigt man bei großem N sehr gute und schnelle numerische Verfahren. In der Gründerzeit des Internets rechnete man noch mit etwa 20 Millionen Seiten, inzwischen ist die Gesamtzahl N unüberschaubar geworden. Daher kann der PageRank nur noch für ausgewählte Seiten berechnet werden. Mehr dazu findet man bei [LM].

Um das Prinzip erläutern zu können, geben wir ein ganz einfaches Beispiel mit $N = 3$, das schematisch so aussieht:



Wie man daran erkennt, ist

$$c_1 = 2 \quad \text{und} \quad c_2 = c_3 = 1 .$$

Also lauten die drei Gleichungen für $p_i = p(S_i)$ mit $b := \frac{1}{3}(1 - d)$:

$$\begin{aligned} p_1 & - dp_3 &= b \\ -\frac{d}{2}p_1 + p_2 & &= b \\ -\frac{d}{2}p_1 - dp_2 + p_3 & &= b \end{aligned}$$

Für $d = 0.85$ erhält man die Lösungen

$$p_1 \approx 0.388 , \quad p_2 \approx 0.215 , \quad p_3 \approx 0.397 .$$

Da S_2 weniger verlinkt ist, als S_1 und S_3 ist p_2 nur etwa halb so groß wie p_1 und p_3 . Bei kleinerem d haben die Links weniger Einfluss. Etwa für $d = 0.1$ wird

$$p_1 \approx 0.335 , p_2 \approx 0.317 , p_3 \approx 0.348 ,$$

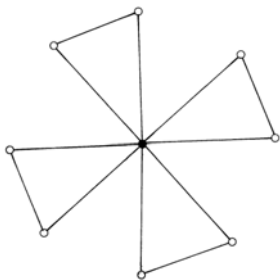
da sind die PageRanks schon beinahe gleichverteilt.

Eine Variante des Gleichungssystems erhält man mit Hilfe der **Linking Matrix** A . Bezeichnet c_i für $1 \leq i \leq N$ die Anzahl der Links, die von der Seite S_i ausgehen, so hat A für $1 \leq i, j \leq N$ die Einträge

$$a_{ij} := \begin{cases} \frac{d}{c_i} , & \text{falls } i \neq j \text{ und } S_i \text{ einen Link auf } S_j \text{ enthält;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Extremfall $d = 1$ ist dann $(p(S_1), \dots, p(S_N))$ ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 1. Zur Lösung solcher Probleme gibt es auch schnelle numerische Verfahren.

4 Der Satz vom Politiker. Eine ganz andersartige Fragestellung betrifft **Graphen**, das sind Konfigurationen, die aus Punkten und Verbindungsgeraden (oder **Ecken** und **Kanten**) bestehen. Ein Beispiel ist der **Windmühlengraph**.



Er hat eine zentrale Ecke und eine gerade Zahl von Ecken am Rand, kann also für jede ungerade Zahl von Ecken konstruiert werden. Interpretiert man die Punkte als Personen und die Kanten als gegenseitige Freundschaften, so stehen am Rand befreundete Paare, und jeder ist mit der Person in der Mitte befreundet. Eine solche Person, die mit jedem befreundet ist, wird als **Politiker** bezeichnet, seine „Freundschaften“ sind berufsspezifisch. In dieser Interpretation hat der Windmühlengraph dann folgende Eigenschaft:

*Je zwei beliebige Personen haben immer
genau einen gemeinsamen Freund* (*)

Der **Satz vom Politiker** sagt nun aus, dass Bedingung (*) für n Personen nur dann erfüllt sein kann, wenn n ungerade ist und es einen Politiker gibt. Außerdem muss der entsprechende Graph ein Windmühlengraph sein.

Für diesen Satz gibt es elementare Beweise. Aber der klarste und überzeugendste wurde von P. ERDÖS, A. RENYI und V. SÓS mit Hilfe von Linearer Algebra, genauer Eigenwerten symmetrischer Matrizen gegeben; das findet man bei [A-Z, Kap. 34]. Der Schlüssel dazu ist die **Adjazenzmatrix** A des Graphen: Sind die Personen mit $1, \dots, n$ nummeriert, so sind die Einträge von A gegeben durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn } i \neq j \text{ und } i \text{ mit } j \text{ befreundet,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fazit

Unsere kleine Liste von Beispielen für Fragen, hinter denen Lineare Algebra steckt, könnte man beliebig erweitern. Etwa in [A-B] kann man nachlesen, was in einer CD versteckt ist, in [A-Z, Kap. 15] findet man Ergebnisse zur berühmten **Borsuk-Vermutung** über die Zerlegung von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ mit beschränktem Durchmesser. Viele weitere Anwendungen findet man bei G. STRANG [St₁] und [St₂].

Um eine mathematische Theorie sachgemäß anwenden zu können, muss man sie zunächst sorgfältig studieren und genügend verstehen; das gilt auch für die Lineare Algebra. Daneben kann die Mathematik durch ihren klaren Aufbau und die Schönheit ihrer Strukturen begeistern; das zeigt sich zu Beginn des Studiums besonders in der Linearen Algebra, für die der Leser nun hoffentlich nachhaltig motiviert ist.

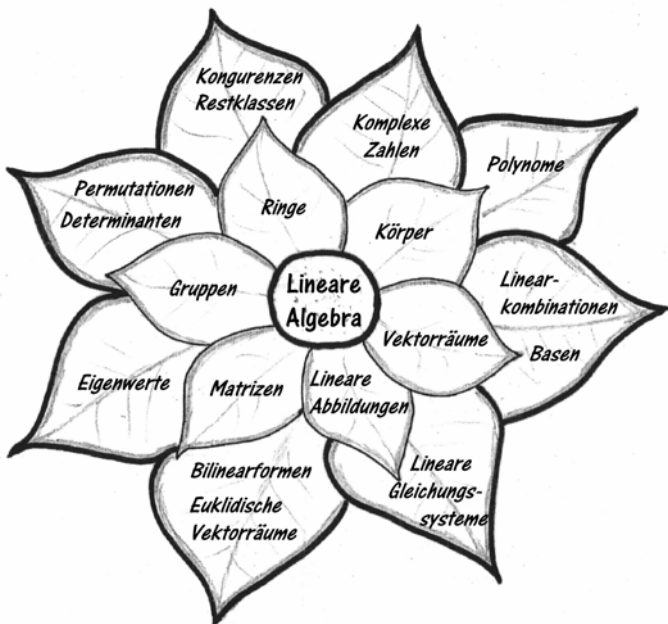
Literatur zur Einführung

- [A-B] Aigner, M. und E. Behrends (Hrsg.): *Alles Mathematik*. Vieweg 2008³
- [A-Z] Aigner, M. und G. M. Ziegler: *Das BUCH der Beweise*. Springer 2004²
- [ARUP] www.arup.com/MilleniumBridge/
- [B] Brieskorn, E.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie (mit historischen Anmerkungen von E. Scholz)*. Vieweg 1983
- [LM] Langville, A. N. and C. D. Meyer: *Google's PageRank and Beyond, The Science of Search Engine Rankings*. Princeton 2006
- [S-S] Schreier, O. und E. Sperner: *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra*. Teubner 1931
- [St₁] Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications*. WB Saunders 2005⁴
- [St₂] Strang, G.: *Linear Algebra: A Happy Chance to Apply Mathematics*. Proc. Int. Congress on Math. Education (ICME - 10). Denmark 2004

Inhaltsverzeichnis

0	Lineare Gleichungssysteme	1
0.1	Der reelle n -dimensionale Raum	1
0.2	Geraden in der Ebene	4
0.3	Ebenen und Geraden im Standardraum $\mathbb{R}^3$	11
0.4	Das Eliminationsverfahren von GAUSS	20
1	Grundbegriffe	32
1.1	Mengen und Abbildungen	32
1.2	Gruppen	43
1.3	Ringe, Körper und Polynome	54
1.4	Vektorräume	75
1.5	Basis und Dimension	86
1.6	Summen von Vektorräumen*	100
2	Lineare Abbildungen	106
2.1	Beispiele und Definitionen	106
2.2	Bild, Fasern und Kern, Quotientenvektorräume*	114
2.3	Lineare Gleichungssysteme	129
2.4	Lineare Abbildungen und Matrizen	137
2.5	Multiplikation von Matrizen	143
2.6	Koordinatentransformationen	154
2.7	Elementarmatrizen und Matrizenumformungen	163
3	Determinanten	174
3.1	Beispiele und Definitionen	174
3.2	Existenz und Eindeutigkeit	186
3.3	Minoren*	201
3.4	Determinante eines Endomorphismus und Orientierung*	212
4	Eigenwerte	222
4.1	Beispiele und Definitionen	222
4.2	Das charakteristische Polynom	228
4.3	Diagonalisierung	234
4.4	Trigonalisierung*	242
4.5	Potenzen eines Endomorphismus*	250
4.6	Die Jordansche Normalform*	259

5	Euklidische und unitäre Vektorräume	274
5.1	Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$	274
5.2	Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$	282
5.3	Das kanonische Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$	286
5.4	Bilinearformen und Sesquilinearformen	288
5.5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	303
5.6	Selbstadjungierte Endomorphismen*	312
5.7	Hauptachsentransformation*	318
6	Dualität und Tensorprodukte*	331
6.1	Dualräume	331
6.2	Dualität und Skalarprodukte	340
6.3	Tensorprodukte	350
6.4	Multilineare Algebra	366
	Literaturverzeichnis	372
	Namensverzeichnis	374
	Sachwortverzeichnis	376
	Symbolverzeichnis	383



Diese *Blume der Linearen Algebra* wurde entworfen von Bettina Meserle, Claudia Jochum und Jonathan Zinsl.