

Kapitel 3

Determinanten

In den vorhergehenden Kapiteln wurde laufend mit Linearkombinationen gerechnet, das gilt als der „triviale“ Teil der linearen Algebra. Nun steigen wir eine Stufe höher zur Determinante, das ist eine Zahl, die man einer quadratischen Matrix zuordnet. LEIBNIZ gab schon um 1690 eine Formel zur Berechnung dieser Zahl an ([Kow 1], §1). WEIERSTRASS benutzte in seinen Vorlesungen eine andere Methode: Er führte die Determinante mit axiomatisch angegebenen Eigenschaften ein. Dadurch kann man die chronischen Vorzeichenprobleme erst einmal im Hintergrund halten und all das bereitstellen, was man zur praktischen Berechnung der Determinanten benötigt. Es zeigt sich, daß auch hier das Verfahren aus Kapitel 0 zur Überführung einer Matrix in Zeilenstufenform zum Ziel führt. Diesen Weg haben wir mit Rücksicht auf eilige Leser in 3.1 beschritten. Die Vorzeichenspiele werden systematisch in 3.2 vorgeführt.

Für genauere historische Hinweise seien die entsprechenden Exkurse in [B1], [Fr], [Koe] und [Kow1] zur Lektüre empfohlen.

3.1 Beispiele und Definitionen

3.1.1. Zunächst geben wir zwei charakteristische Beispiele für das Auftreten von Determinanten.

1) Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \quad \text{I}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \quad \text{II}$$

Wir suchen eine Formel für die Lösung, die man bei beliebigen Werten der Koeffizienten anwenden kann. Umformungen ergeben die Gleichungen

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2, \quad a_{22}\text{I} - a_{12}\text{II}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \quad a_{11}\text{II} - a_{21}\text{I}$$

Definieren wir allgemein für eine (2×2) -Matrix eine *Determinante* durch

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc,$$

so erhält man für die Lösungen des obigen Systems

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Das ist der einfachste Fall der *CRAMERschen Regel*. Sie versagt, wenn

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0, \quad \text{also} \quad a_{22}(a_{11}, a_{12}) - a_{12}(a_{21}, a_{22}) = (0, 0).$$

Das bedeutet, daß der Rang der Koeffizientenmatrix kleiner als 2 ist. Entsprechend 2.3 gibt es hier keine eindeutige Lösung.

2) Die Fläche eines *Dreiecks* ist gegeben durch

$$\frac{1}{2} (\text{Grundlinie mal Höhe}).$$

Das zeigt man mit Hilfe des *CAVALIERIschen Prinzips*, indem man zuerst das Dreieck verdoppelt zu einem *Parallelogramm*, und dieses dann verschiebt zu einem Rechteck.

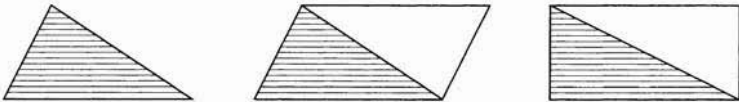


Bild 3.1

Zur Berechnung der Fläche eines Parallelogramms in der Ebene nehmen wir an, dieses sei durch zwei Vektoren

$$v = (a_1, a_2) \quad \text{und} \quad w = (b_1, b_2)$$

gegeben.

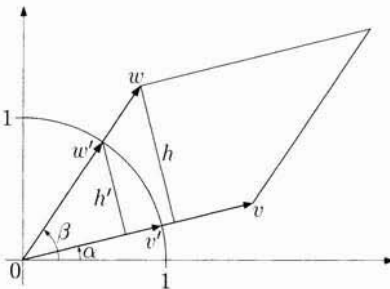


Bild 3.2

Wie in der Zeichnung angedeutet, ist

$$v = \varrho \cdot v' = \varrho \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha), \quad w = \sigma \cdot w' = \sigma \cdot (\cos \beta, \sin \beta),$$

wobei $\varrho, \sigma > 0$. Bezeichnet F bzw. F' die Fläche des von v und w bzw. v' und w' aufgespannten Parallelogramms, so verläuft die Rechnung für $0 \leq \beta - \alpha \leq \pi$ wie folgt:

$$h' = \sin(\beta - \alpha) = \cos \alpha \sin \beta - \cos \beta \sin \alpha = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \cos \beta & \sin \beta \end{vmatrix},$$

also

$$F = \varrho \cdot \sigma \cdot F' = \varrho \cdot \sigma \cdot h' = \begin{vmatrix} \varrho \cdot \cos \alpha & \varrho \cdot \sin \alpha \\ \sigma \cdot \cos \beta & \sigma \cdot \sin \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Die Fläche ist also gleich der Determinante. Daher kann man einige Eigenschaften der Abbildung

$$\det: M(2 \times 2; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc = \det A$$

geometrisch illustrieren. Dazu die folgende Notation: sind

$$v = (a, b) \quad \text{und} \quad w = (c, d)$$

die Zeilenvektoren von A , so schreiben wir $\det A = \det \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}$.

a) Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\det \begin{pmatrix} \lambda v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} v \\ \mu w \end{pmatrix} = \mu \cdot \det \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

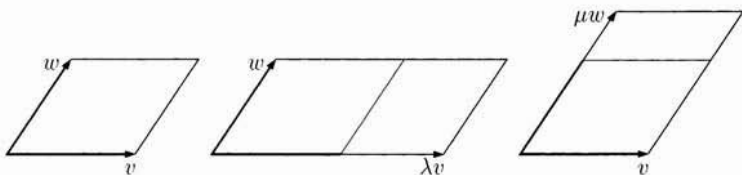


Bild 3.3

Das bedeutet, daß die Fläche so gestreckt wird wie einzelne Seiten.

b) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$\det \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v \\ w + \lambda v \end{pmatrix},$$

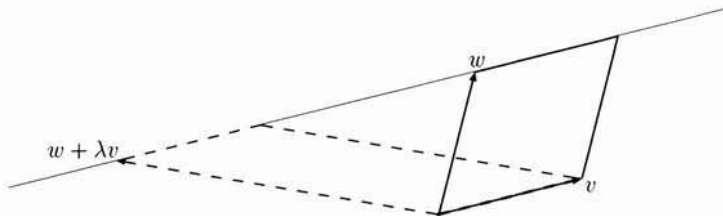


Bild 3.4

was die Invarianz der Fläche unter *Scherungen* nach dem Cavalierischen Prinzip bedeutet.

c)
$$\det \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Das bedeutet, das Einheitsquadrat hat die Fläche 1.

d)
$$\det \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}.$$

Daran sieht man, daß nicht nur der Betrag, sondern auch das Vorzeichen der Determinante eine geometrische Bedeutung hat. Es hängt von der Orientierung des Paares v, w ab, darauf kommen wir in 3.4 zurück.

e)
$$\det \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$$

ist gleichbedeutend mit der linearen Abhängigkeit von v und w , d.h. das Parallelogramm hat die Fläche Null.

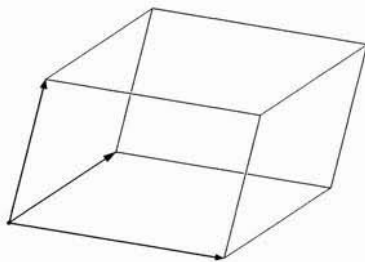


Bild 3.5

So wie zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ ein Parallelogramm erklären, spannen drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ einen *Spa* und n Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ein *Parallelotop* auf, und es entsteht das

Problem, den Inhalt zu berechnen. Wie man in der Analysis lernt, ist das die Determinante der $n \times n$ -Matrix mit den Vektoren als Zeilen ([Fo 3], §5).

3.1.2. Zur Erklärung der Determinante einer $n \times n$ -Matrix gibt es mehrere Möglichkeiten, zwei davon sind:

1) Eine Formel, in der die Einträge vorkommen, so wie das oben bei (2×2) -Matrizen angegeben war. Das hatte schon LEIBNIZ bei größeren Matrizen ausgeführt, das Ergebnis – die allgemeine Leibniz-Formel in 3.2.5 – ist leider ziemlich umständlich.

2) Eine Charakterisierung der Determinante durch Axiome, sie geht auf WEIERSTRASS zurück (vgl. [Fr]). Das ist nicht nur eleganter, sondern ergibt auch einfachere Methoden zur Berechnung als die Leibniz-Formel.

Nun zur axiomatischen Einführung der Determinante, wir benutzen dabei die folgende Notation:

Ist A eine n -reihige quadratische Matrix, so bezeichnen wir stets mit $a_1, \dots, a_n$ die Zeilenvektoren von A . Dann schreiben wir

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Definition. Sei K ein Körper und n eine von Null verschiedene natürliche Zahl. Eine Abbildung

$$\det: M(n \times n; K) \rightarrow K, \quad A \mapsto \det A,$$

heißt *Determinante*, falls folgendes gilt:

D1 $\det$ ist *linear in jeder Zeile*. Genauer heißt das folgendes. Für jeden Index $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

a) Ist $a_i = a'_i + a''_i$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a'_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a''_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

b) Ist $a_i = \lambda a'_i$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a'_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

An den mit Punkten bezeichneten Stellen stehen dabei jeweils unverändert die Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$.

D2 $\det$ ist *alternierend*, d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.

D3 $\det$ ist *normiert*, d.h. $\det E_n = 1$.

Eine andere Schreibweise für die Determinante ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Man beachte dabei, daß die senkrechten Striche nichts mit einem Absolutbetrag zu tun haben.

3.1.3. Diese Definition ist sehr einfach, aber es bleibt die Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen, und das wird etwas Mühe machen. Zunächst spielen wir mit den Axiomen und leiten daraus weitere Regeln ab.

Satz. Eine Determinante $\det: M(n \times n; K) \rightarrow K$ hat die folgenden weiteren Eigenschaften:

D4 Für jedes $\lambda \in K$ ist $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$.

D5 Ist eine Zeile von A gleich Null, so ist $\det A = 0$.

D6 Entsteht B aus A durch eine Zeilenvertauschung, so ist

$$\det B = -\det A.$$

Die Determinante ändert also bei Zeilenumformungen vom Typ IV ihr Vorzeichen.

D7 Ist $\lambda \in K$, und entsteht B aus A durch Addition der λ -fachen j -ten Zeile zur i -ten Zeile ($i \neq j$), so ist

$$\det B = \det A.$$

Die Determinante bleibt also bei Zeilenumformungen vom Typ III unverändert.

D8 Ist A eine obere Dreiecksmatrix, also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

so ist $\det A = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

D9 Sei $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n; K)$ von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_1 und A_2 quadratisch sind. Dann gilt

$$\det A = (\det A_1) \cdot (\det A_2).$$

D10 $\det A = 0$ ist gleichbedeutend mit $\text{rang } A < n$.

D11 Es gilt der Determinanten-Multiplikationssatz

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

für alle $A, B \in M(n \times n; K)$. Insbesondere gilt für $A \in GL(n; K)$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

Vorsicht! Die „Regel“ $\det(A + B) = \det A + \det B$ ist für $n \geq 2$ falsch.

Beweis. D4 und D5 folgen sofort aus D1 b). Zum Beweis von D6 nehmen wir an, daß die Zeilen $i < j$ vertauscht werden. Dann ist wegen D1 a) und D2

$$\begin{aligned} \det A + \det B &= \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_j \\ a_i \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_i \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_j \\ a_i \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_j \\ a_j \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_i + a_j \\ a_i + a_j \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Dabei sind zur Vereinfachung der Schreibweise nur die Einträge der Zeilen i und j angegeben, in den restlichen Zeilen ändert sich nichts.

Es sei bemerkt, daß D2 aus D6 folgt, wenn $\text{char}(K) \neq 2$, denn hat A zwei gleiche Zeilen, so ist nach D6

$$\det A = -\det A, \quad \text{also} \quad 2 \det A = 0.$$

D7: Wegen D1 und D2 ist

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_i + \lambda a_j \\ a_j \end{pmatrix} = \det A + \lambda \det \begin{pmatrix} a_j \\ a_j \end{pmatrix} = \det A.$$

D8: Sind alle $\lambda_i \neq 0$, so folgt durch wiederholte Anwendung von D7

$$\det A = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \cdot \det E_n = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Gibt es ein i mit $\lambda_i = 0$, so wählen wir i maximal, d.h. $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n \neq 0$. Mit Hilfe von $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n$ räumt man den Rest der i -ten Zeile aus, und mit D7 und D5 folgt $\det A = 0$.

D9: Durch Zeilenumformungen vom Typ III und IV an A mache man A_1 zu einer oberen Dreiecksmatrix B_1 . Dabei bleibt A_2 unverändert, aus C werde C' . Ist k die Anzahl der ausgeführten Zeilenvertauschungen, so ist

$$\det A_1 = (-1)^k \cdot \det B_1.$$

Dann mache man A_2 durch Zeilenumformungen vom Typ III und IV an A zu einer oberen Dreiecksmatrix. Dabei bleiben B_1 und C' unverändert. Ist l die Anzahl der ausgeführten Zeilenvertauschungen, so ist

$$\det A_2 = (-1)^l \cdot \det B_2.$$

Ist

$$B := \begin{pmatrix} B_1 & C' \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

so sind B , B_1 und B_2 obere Dreiecksmatrizen, es ist also nach D8 offensichtlich

$$\det B = (\det B_1) \cdot (\det B_2).$$

Wegen

$$\det A = (-1)^{k+l} \cdot \det B$$

folgt die Behauptung.

D10: Durch Zeilenumformungen vom Typ III und IV bringen wir A auf Zeilenstufenform B . Dann ist B obere Dreiecksmatrix, also

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

und nach D6 und D7 ist $\det B = \pm \det A$. Weiter ist $\text{rang } A = \text{rang } B$ und wegen D8

$$\text{rang } B = n \Leftrightarrow \det B = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \neq 0.$$

D11: Ist $\text{rang } A < n$, so ist $\text{rang } (A \cdot B) < n$, und die Gleichung lautet $0 = 0$ nach D10.

Andernfalls können wir $A \in \text{GL}(n; K)$ annehmen. Nach 2.7.3 gibt es Elementarmatrizen $C_1, \dots, C_s$, so daß

$$A = C_1 \cdot \dots \cdot C_s.$$

Es genügt also zu zeigen, daß für jede Elementarmatrix C vom Typ $S_i(\lambda)$ oder Q_i^j (vgl. 2.7.1)

$$\det(C \cdot B) = \det C \cdot \det B$$

gilt. Nach Eigenschaft D8 (die natürlich auch für untere Dreiecksmatrizen gilt) ist

$$\det S_i(\lambda) = \lambda \quad \text{und} \quad \det Q_i^j = 1.$$

Multiplizieren von links mit $S_i(\lambda)$ multipliziert die i -te Zeile von B mit λ , also ist

$$\det(S_i(\lambda) \cdot B) = \lambda \cdot \det B$$

nach D1. Multiplizieren von links mit Q_i^j bewirkt die Addition der j -ten zur i -ten Zeile, also ist

$$\det(Q_i^j \cdot B) = 1 \cdot \det B. \quad \square$$

Dieser letzte Beweis wird den Leser hoffentlich in seiner Wertschätzung der Elementarmatrizen bestärken.

3.1.4. Für die Praxis der Berechnung von Determinanten hat man nun alle erforderlichen Hilfsmittel zur Verfügung. Man bringt A durch Zeilenumformungen vom Typ III und IV auf obere Dreiecksgestalt B . Ist k die Anzahl der dabei durchgeführten Zeilenvertauschungen, so gilt

$$\det A = (-1)^k \cdot \det B = (-1)^k \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

Beispiele. a)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

b) Die Berechnung von Determinanten wird interessanter, wenn man die Einträge a_{ij} der Matrix als *Unbestimmte* auffaßt, das sind Zahlen, für die man beliebige Elemente des Körpers einsetzen kann, und zwar unabhängig voneinander.

Es ist üblich, das dadurch anzudeuten, daß man statt a den Buchstaben x verwendet. Auf diese Weise berechnet man mit Hilfe von D7 und D8

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{22} - \frac{x_{21}}{x_{11}}x_{12} \end{vmatrix} = x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12}. \quad (*)$$

Man beachte, daß x_{11} während der Rechnung vorübergehend im Nenner steht, nicht aber am Anfang und am Ende. Mit Hilfe von D6 kann man noch einmal direkt überprüfen, daß die Formel (*) auch für $x_{11} = 0$ gilt.

c) Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $a_{ij} = -a_{ji}$ und $a_{ii} = 0$ (im Fall $\text{char} K \neq 2$ folgt die zweite Bedingung aus der ersten). Die Berechnung solcher Determinanten ist besonders interessant, wir betrachten die Einträge wieder als Unbestimmte. Für $n = 2$ und 3 ist

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} \\ -x_{12} & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_{12} & 0 \\ 0 & -x_{12} \end{vmatrix} = x_{12}^2,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Dabei wurde zu Zeile III die Kombination $\frac{x_{23}}{x_{12}}\text{I} - \frac{x_{13}}{x_{12}}\text{II}$ addiert. Das ist ungefährlich, denn für $x_{12} = 0$ ist das Ergebnis ohnehin klar. Nun zum Fall $n = 4$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ -x_{13} & -x_{23} & 0 & x_{34} \\ -x_{14} & -x_{24} & -x_{34} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ -x_{12} & 0 & x_{23} & x_{24} \\ 0 & 0 & 0 & Q(x) \\ 0 & 0 & -Q(x) & 0 \end{vmatrix}$$

durch geeignete Umformungen der Zeilen III und IV, wobei

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x_{12}} \quad \text{mit} \quad P(x) := x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23}.$$

Aus D9 folgt schließlich

$$\det A = (P(x))^2.$$

Man nennt $P(x)$ ein *PAFFSches Polynom* (vgl. Aufgabe 5 und Aufgabe 8 zu 3.2).

Aufgaben zu 3.1

1. Berechnen Sie die Determinanten von

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = (x-1)^2(x+2),$$

$$\det \begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 + 1.$$

3. Berechnen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha & a \sin \alpha & b \cos \alpha & ab \\ -\cos \alpha & \sin \alpha & -a^2 \sin \alpha & b^2 \cos \alpha & a^2 b^2 \\ 0 & 0 & 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

4. Zeigen Sie, dass für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$ gilt:

$$\det(a_{ij}) = \det((-1)^{i+j} \cdot a_{ij}).$$

5. Sei K ein Körper mit $\text{char } K \neq 2$ und $A \in M(n \times n; K)$ alternierend (vgl. Aufgabe 3 zu 1.6). Zeigen Sie:

a) Ist n ungerade, so ist $\det A = 0$.

(Hinweis: Benutzen Sie Satz 3.2.6)

b) Ist n gerade, so ist $\det A$ Quadrat eines Polynoms in den Einträgen von A (vgl. Aufgabe 8 zu 3.2).

6. Sind $f = a_m t^m + \dots + a_0, g = b_n t^n + \dots + b_0 \in K[t]$ Polynome mit $\deg f = m, \deg g = n$, so ist die *Resultante* von f und g definiert durch

$$\operatorname{Res}_{f,g} := \det \left(\begin{array}{ccccccc} a_0 & & \cdots & & \cdots & & a_m \\ & \ddots & & & & & \\ & & a_0 & & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & \cdots & \cdots & b_n & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & b_0 & \cdots & \cdots & b_n \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ Zeilen} \\ \\ \\ m \text{ Zeilen} \end{array}$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- i) $\operatorname{Res}_{f,g} = 0$.
- ii) $f, tf, \dots, t^{n-1}f, g, tg, \dots, t^{m-1}g$ sind linear abhängig.
- iii) Es existieren $p, q \in K[t]$, $p, q \neq 0$, mit $\deg p \leq n-1, \deg q \leq m-1$ und $pf = qg$.

Mit etwas Teilbarkeitstheorie von Polynomen kann man zeigen, dass i) bis iii) äquivalent sind zu

- iv) f und g haben einen gemeinsamen nichtkonstanten Teiler $h \in K[t]$.

Insbesondere ist also $\operatorname{Res}_{f,g} = 0$, falls f und g eine gemeinsame Nullstelle haben, und im Fall $K = \mathbb{C}$ gilt: $\operatorname{Res}_{f,g} = 0 \Leftrightarrow f$ und g haben eine gemeinsame Nullstelle.

3.2 Existenz und Eindeutigkeit

Bei der Berechnung der Determinante nach der Methode aus 3.1.4 bleibt eine kleine, wieder spitzfindig erscheinende Frage: die durchzuführenden Zeilenvertauschungen sind nicht eindeutig bestimmt, man hat Wahlmöglichkeiten. Aber das Ergebnis $(-1)^k \lambda_1 \dots \lambda_n$ muß unabhängig von allen Auswahlen sein, insbesondere muß klar sein, ob k gerade oder ungerade ist. Das wird besonders deutlich an dem charakteristischen Beispiel einer Einheitsmatrix mit veränderter Reihenfolge der Zeilen: Dazu kommen wir zurück auf die schon in 1.2.2 betrachteten Permutationen. Ist σ eine bijektive Abbildung von $\{1, \dots, n\}$ auf sich, und bezeichnen $e_1, \dots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren, so betrachten wir die Matrix

$$E_\sigma := \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

mit den Basisvektoren in permutierter Reihenfolge als Zeilen, und die Vorzeichen-Frage spitzt sich zu zur Alternative

$$\det E_\sigma = \pm 1 ?$$

Vorzeichen sind eine Art von Butterbroten: die haben zwei Möglichkeiten zu fallen ([E]). Zur Beantwortung der Vorzeichenfrage benötigen wir eine zuverlässige Methode, an der Permutation zu erkennen, auf welche Arten sie durch wiederholte Vertauschungen rückgängig gemacht werden kann.

3.2.1. Wie wir gerade gesehen haben, ist zunächst ein kleiner Exkurs über Permutationen unvermeidlich.

Wie in 1.2.2 bezeichnen wir für jede natürliche Zahl $n > 0$ mit S_n die *symmetrische Gruppe* von $\{1, \dots, n\}$, d.h. die Gruppe aller bijektiven Abbildungen

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}.$$

Die Elemente von S_n nennen wir *Permutationen*. Das neutrale Element von S_n ist die identische Abbildung, die wir mit id bezeichnen. Wie üblich schreiben wir $\sigma \in S_n$ explizit in der Form

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix}.$$

Für $\sigma, \tau \in S_n$ ist dann

$$\begin{aligned} \tau \cdot \sigma &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(1) & \cdots & \tau(n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & n \\ \tau(\sigma(1)) & \cdots & \tau(\sigma(n)) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

zum Beispiel

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

aber

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Man beachte dabei, daß die *rechts* stehende Permutation *zuerst* angewandt wird, wie das bei Abbildungen üblich ist.

Bemerkung. Die Gruppe S_n enthält

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

(sprich: n -Fakultät) Elemente. Für $n \geq 3$ ist S_n nicht abelsch.

Beweis. Wir überlegen, wie viele Möglichkeiten es gibt, Elemente $\sigma \in S_n$ aufzubauen. Zunächst hat man für die Auswahl von

$$\sigma(1) \quad \text{genau } n \text{ Möglichkeiten.}$$

Da σ injektiv sein soll, muß $\sigma(2) \neq \sigma(1)$ sein. Es verbleiben für die Auswahl von

$$\sigma(2) \quad \text{genau } n-1 \text{ Möglichkeiten.}$$

Sind schließlich $\sigma(1), \dots, \sigma(n-1)$ gewählt, so ist $\sigma(n)$ festgelegt, es gibt also für

$$\sigma(n) \quad \text{nur eine Möglichkeit.}$$

Insgesamt gibt es daher

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

verschiedene Permutationen in S_n . Ist für $n \geq 3$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{bmatrix},$$

so folgt wie oben $\tau \cdot \sigma \neq \sigma \cdot \tau$. Die Gruppen S_1 und S_2 sind abelsch, wie man sofort sieht. $\square$

Um sehen zu können, wie schnell $n!$ mit n wächst, benutzt man die Formel von STIRLING

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

wobei $\approx$ eine asymptotische Näherung bezeichnet ([Fo1], §20). Die Zahl $60!$ ist ungefähr gleich 10^{82} , das ist in etwa die geschätzte Zahl der Nukleonen des Universums. Eine (60×60) -Matrix ist dagegen in den Problemen der Anwendungen als klein anzusehen.

3.2.2. Um die Veränderung des Vorzeichens der Determinante bei Umordnung der Zeilen zu kontrollieren, vertauscht man mehrfach jeweils zwei Zeilen. Solche Permutationen haben einen eigenen Namen.

Eine Permutation $\tau \in S_n$ heißt *Transposition*, falls τ zwei Elemente aus $\{1, \dots, n\}$ vertauscht und alle übrigen fest läßt, d.h. wenn es $k, l \in \{1, \dots, n\}$ mit $k \neq l$ gibt, so daß gilt:

$$\begin{aligned}\tau(k) &= l, \\ \tau(l) &= k \quad \text{und} \\ \tau(i) &= i \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k, l\}.\end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $\tau^{-1} = \tau$ für jede Transposition $\tau \in S_n$.

Daß man allein mit Vertauschungen von Zeilen auskommt, zeigt das

Lemma. Ist $n \geq 2$, so gibt es zu jedem $\sigma \in S_n$ (keineswegs eindeutig bestimmte) Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$ mit

$$\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k.$$

Beweis. Ist $\sigma = \text{id}$ und $\tau \in S_n$ irgendeine Transposition, so ist

$$\text{id} = \tau \cdot \tau^{-1} = \tau \cdot \tau.$$

Andernfalls gibt es ein $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$\sigma(i) = i \quad \text{für } i = 1, \dots, i_1 - 1 \quad \text{und} \quad \sigma(i_1) \neq i_1, \quad \text{also sogar} \quad \sigma(i_1) > i_1.$$

Sei τ_1 die Transposition, die i_1 mit $\sigma(i_1)$ vertauscht, und $\sigma_1 := \tau_1 \cdot \sigma$. Dann ist

$$\sigma_1(i) = i \quad \text{für } i = 1, \dots, i_1.$$

Entweder ist nun $\sigma_1 = \text{id}$, oder es gibt ein i_2 mit $i_2 > i_1$ und

$$\sigma_1(i) = i \quad \text{für } i = 1, \dots, i_2 - 1 \quad \text{und} \quad \sigma_1(i_2) > i_2.$$

Analog erhält man τ_2 und σ_2 und schließlich ein $k \leq n$ sowie Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k$ mit $\sigma_k = \tau_k \cdot \dots \cdot \tau_1 \cdot \sigma = \text{id}$. Daraus folgt

$$\sigma = (\tau_k \cdot \dots \cdot \tau_1)^{-1} = \tau_1^{-1} \cdot \dots \cdot \tau_k^{-1} = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k. \quad \square$$

Zur Vorsorge noch eine kleine technische

Bemerkung. Sei $n \geq 2$ und

$$\tau_0 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix} \in S_n$$

die Transposition, die 1 und 2 vertauscht. Dann gibt es zu jeder beliebigen Transposition $\tau \in S_n$ ein $\sigma \in S_n$ mit

$$\tau = \sigma \cdot \tau_0 \cdot \sigma^{-1}.$$

Beweis. Seien k und l die von τ vertauschten Elemente. Wir behaupten, daß jedes $\sigma \in S_n$ mit

$$\sigma(1) = k \quad \text{und} \quad \sigma(2) = l$$

die verlangte Eigenschaft hat. Sei $\tau' := \sigma \cdot \tau_0 \cdot \sigma^{-1}$. Wegen $\sigma^{-1}(k) = 1$ und $\sigma^{-1}(l) = 2$ ist

$$\tau'(k) = \sigma(\tau_0(1)) = \sigma(2) = l \quad \text{und} \quad \tau'(l) = \sigma(\tau_0(2)) = \sigma(1) = k.$$

Für $i \notin \{k, l\}$ ist $\sigma^{-1}(i) \notin \{1, 2\}$, also

$$\tau'(i) = \sigma(\tau_0(\sigma^{-1}(i))) = \sigma(\sigma^{-1}(i)) = i.$$

Daraus folgt $\tau' = \tau$. □

3.2.3. Die Zerlegung einer Permutation in Transpositionen ist nicht eindeutig. Wir müssen aber beweisen, daß die Anzahl der nötigen Transpositionen entweder immer gerade oder immer ungerade ist. Zu diesem Zweck ordnen wir jeder Permutation ein Vorzeichen zu. Elementar kann man es so beschreiben:

Ist $\sigma \in S_n$, so nennt man jedes Paar $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$i < j, \quad \text{aber} \quad \sigma(i) > \sigma(j),$$

einen *Fehlstand* von σ . Zum Beispiel hat

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

insgesamt 2 Fehlstände, nämlich

$$1 < 3, \quad \text{aber} \quad 2 > 1, \quad \text{und} \quad 2 < 3, \quad \text{aber} \quad 3 > 1.$$

Wir definieren das *Signum* (d.h. „Vorzeichen“) von σ durch

$$\text{sign } \sigma := \begin{cases} +1, & \text{falls } \sigma \text{ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat,} \\ -1, & \text{falls } \sigma \text{ eine ungerade Anzahl von Fehlständen hat.} \end{cases}$$

Man nennt $\sigma \in S_n$

gerade, falls $\text{sign } \sigma = +1$, und

ungerade, falls $\text{sign } \sigma = -1$.

Diese Definition ist recht gut geeignet, um das Signum durch systematisches Zählen zu berechnen, aber zu schwerfällig für theoretische Überlegungen. Daher

ist es hilfreich, das Zählen der Fehlstände und das Berechnen des Signums in einer Formel zusammenzufassen. In den folgenden Produkten sollen i und j stets die Menge $\{1, \dots, n\}$ durchlaufen, und zwar mit den unter dem Produktsymbol vermerkten Nebenbedingungen.

Lemma. Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt

$$\text{sign } \sigma = \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Beweis. Man mache sich erst einmal klar, daß man das Produkt als einen langen Bruch schreiben kann, bei dem in Nenner und Zähler die gleichen Differenzen vorkommen, allerdings im Zähler im allgemeinen an anderer Stelle und – das ist der Kniff – im Fall eines Fehlstandes mit negativem Vorzeichen.

Diese Vorstellung übersetzt man in die folgende Rechnung, bei der m die Anzahl der Fehlstände bezeichnet:

$$\begin{aligned} \prod_{i < j} (\sigma(j) - \sigma(i)) &= \left(\prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} (\sigma(j) - \sigma(i)) \right) \cdot (-1)^m \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} |\sigma(j) - \sigma(i)| \\ &= (-1)^m \prod_{i < j} |\sigma(j) - \sigma(i)| = (-1)^m \prod_{i < j} (j - i). \end{aligned}$$

Bei der letzten Gleichung wird verwendet, daß die beiden Produkte bis auf die Reihenfolge die gleichen Faktoren enthalten. Das folgt aus der Bijektivität der Abbildung σ . $\square$

Die entscheidende Eigenschaft des Signums ist, daß es mit der Hintereinanderschaltung von Permutationen verträglich ist.

Satz. Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\text{sign}(\tau \cdot \sigma) = (\text{sign } \tau) \cdot (\text{sign } \sigma)$.

Insbesondere gilt $\text{sign } \sigma^{-1} = \text{sign } \sigma$ für jedes $\sigma \in S_n$.

Anders ausgedrückt bedeutet das, daß die Abbildung

$$\text{sign} : S_n \rightarrow \{+1, -1\}$$

ein Homomorphismus in die Gruppe von zwei Elementen ist.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \text{sign}(\tau \cdot \sigma) &= \prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{j - i} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}. \end{aligned}$$

Da das zweite Produkt gleich $\text{sign } \sigma$ ist, genügt es zu zeigen, daß das erste Produkt gleich $\text{sign } \tau$ ist.

$$\begin{aligned}
 & \prod_{i < j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \\
 = & \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \\
 = & \prod_{\substack{i < j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i > j \\ \sigma(i) < \sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \\
 = & \prod_{\sigma(i) < \sigma(j)} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)}.
 \end{aligned}$$

Da σ bijektiv ist, enthält dieses letzte Produkt bis auf die Reihenfolge die gleichen Faktoren wie

$$\prod_{i < j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} = \text{sign } \tau,$$

und der Satz ist bewiesen. $\square$

Damit ist die zu Beginn von 3.2.3 gestellte Frage über die Anzahl der Transpositionen beantwortet:

Korollar 1. Sei $n \geq 2$.

1) Für jede Transposition $\tau \in S_n$ gilt $\text{sign } \tau = -1$.

2) Ist $\sigma \in S_n$ und $\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k$ mit Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_k \in S_n$, so ist

$$\text{sign } \sigma = (-1)^k.$$

Beweis. Ist τ_0 die Transposition, die 1 und 2 vertauscht, so ist $\text{sign } \tau_0 = -1$, denn τ_0 hat genau einen Fehlstand. Nach der Bemerkung aus 3.2.2 gibt es ein $\sigma \in S_n$ mit $\tau = \sigma \cdot \tau_0 \cdot \sigma^{-1}$, also folgt aus obigem Satz

$$\text{sign } \tau = \text{sign } \sigma \cdot \text{sign } \tau_0 \cdot (\text{sign } \sigma)^{-1} = \text{sign } \tau_0 = -1.$$

2) folgt aus 1) wieder nach obigem Satz. $\square$

Als entscheidende Folgerung für Determinanten erhalten wir das

Korollar 2. Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist

$$\det \begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \text{sign } \sigma.$$

Beweis. Ist $\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k$, so kann man E_n durch k Zeilenvertauschungen in die obige Matrix überführen. $\square$

3.2.4. Die Gruppe S_n zerfällt in zwei Klassen, die der geraden und die der ungeraden Permutationen, und diese beiden Klassen sind nahezu gleichberechtigt. Zunächst zu den geraden:

$$A_n := \{\sigma \in S_n : \text{sign } \sigma = +1\} \subset S_n$$

ist nach dem Satz aus 3.2.3 eine Untergruppe, sie heißt die *alternierende Gruppe*. Für jedes $\tau \in S_n$ haben wir

$$A_n \tau := \{\sigma \cdot \tau : \sigma \in A_n\}.$$

Für $\text{sign } \tau = +1$ ist offenbar $A_n \tau = A_n$.

Bemerkung. Ist $\tau \in S_n$ mit $\text{sign } \tau = -1$ gegeben, so ist

$$S_n = A_n \cup A_n \tau \quad \text{und} \quad A_n \cap A_n \tau = \emptyset.$$

Insbesondere ist die Anzahl der Elemente von A_n gleich $\frac{1}{2}n!$.

Beweis. Sei $\sigma \in S_n$ mit $\text{sign } \sigma = -1$ gegeben. Nach 3.2.3 ist $\text{sign}(\sigma \cdot \tau^{-1}) = +1$, also ist $\sigma \in A_n \tau$, denn $\sigma = (\sigma \cdot \tau^{-1}) \cdot \tau$. Für jedes $\sigma \in A_n \tau$ ist $\text{sign } \sigma = -1$, also ist die Vereinigung auch disjunkt.

Nach 1.2.4 ist die Abbildung $A_n \rightarrow A_n \tau$, $\sigma \mapsto \sigma \cdot \tau$, bijektiv. Da S_n aus $n!$ Elementen besteht, enthalten A_n und $A_n \tau$ je $\frac{1}{2}n!$ Elemente. $\square$

3.2.5. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Existenz und Eindeutigkeit der mit den Axiomen von WEIERSTRASS charakterisierten Determinante zu beweisen. Wir benutzen dazu den Weg über die Formel von LEIBNIZ, die zwar wenig beliebt, aber dennoch klassisch und manchmal für die Theorie nützlich ist.

Theorem. Ist K ein Körper und $n \geq 1$, so gibt es genau eine Determinante

$$\det: M(n \times n; K) \rightarrow K,$$

und zwar ist für $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}. \quad (*)$$

Die Formel (*) von LEIBNIZ hat für jede Permutation einen, also insgesamt $n!$ Summanden.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die Formel (*) aus den Axiomen folgt, das beweist die *Eindeutigkeit*. Dazu zerlegen wir jeden Zeilenvektor a_i von A in

$$a_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{in}e_n$$

und wenden Zeile für Zeile von oben nach unten das Axiom D1 an, bis eine Summe mit n^n Summanden entstanden ist. Das nennt man eine *Entwicklung* von A nach Zeilen.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &= \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{1i_1} \cdot \sum_{i_2=1}^n a_{2i_2} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ e_{i_2} \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \dots = \\ &= \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n} \cdot \det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun gilt nach Korollar 2 aus 3.2.3 und D2

$$\det \begin{pmatrix} e_{i_1} \\ \vdots \\ e_{i_n} \end{pmatrix} = \begin{cases} \text{sign } \sigma, & \text{falls es ein } \sigma \in S_n \text{ gibt mit } \sigma(\nu) = i_\nu \text{ für alle } \nu, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also bleiben „nur“ $n!$ der n^n Summanden übrig, und es gilt (*).

Leider ist der Beweis damit noch nicht zu Ende, denn allein aus der Tatsache, daß man die Axiome zur Ableitung der Formel benutzt hat, folgt noch nicht, daß die Formel alle diese Eigenschaften hat.

Für den *Existenzbeweis* definieren wir nun die Determinante durch die Formel von LEIBNIZ, und es sind die Axiome von WEIERSTRASS nachzuprüfen. Danach herrscht wieder Frieden zwischen den beiden alten Herren.

D1 sieht man direkt an der Summe

$$\begin{aligned}
 \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a'_i + a''_i \\ \vdots \end{pmatrix} &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot (a'_{i\sigma(i)} + a''_{i\sigma(i)}) \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a'_{i\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\
 &\quad + \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a''_{i\sigma(i)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\
 &= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a'_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a''_i \\ \vdots \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

also gilt D1 a). Für b) zeigt man, daß jeder Summand mit λ multipliziert wird.

D2 Angenommen, die k -te und die l -te Zeile von A seien gleich, wobei $k < l$. Ist τ die Transposition, die k und l vertauscht, so ist nach 3.2.4

$$S_n = A_n \cup A_n \tau,$$

und diese Vereinigung ist disjunkt. Ist $\sigma \in A_n$, so gilt

$$\text{sign} \sigma = +1 \quad \text{und} \quad \text{sign}(\sigma \cdot \tau) = -1.$$

Wenn σ die Gruppe A_n durchläuft, durchläuft $\sigma \cdot \tau$ die Menge $A_n \tau$. Also ist

$$\det A = \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} - \sum_{\sigma \in A_n} a_{1\sigma(\tau(1))} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(\tau(n))}. \quad (**)$$

Da die k -te und die l -te Zeile von A gleich sind, gilt nach der Definition von τ

$$\begin{aligned}
 &a_{1\sigma(\tau(1))} \cdot \dots \cdot a_{k\sigma(\tau(k))} \cdot \dots \cdot a_{l\sigma(\tau(l))} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(\tau(n))} \\
 &= a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{k\sigma(l)} \cdot \dots \cdot a_{l\sigma(k)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\
 &= a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{k\sigma(k)} \cdot \dots \cdot a_{l\sigma(l)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} \\
 &= a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.
 \end{aligned}$$

Also heben sich in (**) die Summanden gegenseitig auf, und es folgt

$$\det A = 0.$$

D3 Ist δ_{ij} das Kronecker-Symbol und $\sigma \in S_n$, so ist

$$\delta_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot \delta_{n\sigma(n)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \sigma \neq \text{id}, \\ 1 & \text{für } \sigma = \text{id}. \end{cases}$$

Also ist

$$\det E_n = \det(\delta_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \delta_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot \delta_{n\sigma(n)} = \text{sign}(\text{id}) = 1. \quad \square$$

3.2.6. Durch den Existenz- und Eindeutigkeitssatz ist die theoretische Rechtfertigung dafür geliefert, daß man Determinanten so berechnen darf, wie wir es in 3.1.4 mit Hilfe von Zeilenumformungen getan hatten. Man kann aber für kleine n auch die Formel von LEIBNIZ verwenden:

Für $n = 2$ ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Für $n = 3$ ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

Die Summe hat $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Summanden. Man kann sich diese Formel leicht merken durch die *Regel von SARRUS*: Man schreibt den ersten und zweiten Spaltenvektor noch einmal hinter die Matrix:

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & \\ & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Bild 3.6

Die Koeffizienten längs der „Hauptdiagonale“ und ihrer Parallelen ergeben dann die Summanden mit positivem Vorzeichen, die Koeffizienten längs der „Nebendiagonalen“ und ihrer Parallelen ergeben die Summanden mit negativem Vorzeichen.

Für $n = 4$ erhält man eine Summe mit $4! = 24$ Summanden, was schon höchst unangenehm ist. Man beachte, daß ein Analogon zur Regel von SARRUS für $n \geq 4$ nicht gilt. Für $n = 4$ würde man auf diese Weise nur 8 von 24 Summanden erhalten, und die Vorzeichen würden im allgemeinen nicht stimmen (wovon man sich zur Übung ein für allemal überzeugen sollte).

Wegen des rasanten Wachstums von $n!$ sind auch Computer mit der Formel von LEIBNIZ überfordert (vgl. Aufgabe 5). Die Methode aus 3.1.4 erfordert wesentlich weniger Rechenaufwand.

Zur Rehabilitation der Formel von LEIBNIZ geben wir zwei theoretische Anwendungen. Die Einträge a_{ij} der Matrix kann man als insgesamt n^2 Unbestimmte ansehen, dann ist die Abbildung

$$\det: K^{n^2} \rightarrow K$$

ein Polynom, im Fall $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ insbesondere differenzierbar und somit

stetig.

In den Axiomen der Determinante sind die Zeilen vor den Spalten ausgezeichnet. Das ist nur scheinbar so:

Satz. Für eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$ gilt $\det {}^t A = \det A$.

Beweis. Ist $A = (a_{ij})$, so ist ${}^t A = (a'_{ij})$ mit $a'_{ij} = a_{ji}$. Nun gilt

$$\begin{aligned} \det {}^t A &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a'_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a'_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} \\ &= \det A. \end{aligned}$$

Bei der vorletzten Gleichung wurde benutzt, daß für jedes $\sigma \in S_n$

$$a_{\sigma(1)1} \cdot \dots \cdot a_{\sigma(n)n} = a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

gilt, denn bis auf die Reihenfolge enthalten die beiden Produkte die gleichen Faktoren. Außerdem wurde verwendet, daß nach 3.2.3

$$\text{sign} \sigma = \text{sign} \sigma^{-1}$$

gilt. Für die letzte Gleichung haben wir benutzt, daß mit σ auch σ^{-1} „ganz S_n durchläuft“. Genauer gesagt bedeutet das, daß die Abbildung

$$S_n \rightarrow S_n, \quad \sigma \mapsto \sigma^{-1},$$

bijektiv ist. Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeit des inversen Elementes (vgl. 1.2.3). $\square$

3.2.7. Wie nützlich es ist, wenn man abwechselnd mit Zeilen und Spalten operieren kann, zeigt das

Beispiel. Wir betrachten $x_1, \dots, x_n$ als Unbestimmte und definieren die **VANDERMONDE-Determinante**

$$\Delta_n := \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = x_2 - x_1$. Für $n = 3$ formt man zuerst Spalten

um und zieht dann Faktoren aus den Zeilen:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 - x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_1 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{vmatrix} \\
 &= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).
 \end{aligned}$$

Nach diesem Muster erhält man durch Induktion über n (Aufgabe 2)

$$\Delta_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Daraus folgt, daß die Zeilen oder Spalten der obigen Matrix genau dann linear abhängig sind, wenn $x_i = x_j$ für mindestens ein Paar $i \neq j$.

3.2.8. Wie wir gesehen haben, ist es oft nützlich, in eine Matrix nicht nur Elemente eines Körpers, sondern allgemeinere Symbole – etwa Unbestimmte – einzutragen und damit rechnen zu dürfen. Damit das kein Ritt über den Bodensee bleibt, wird etwas theoretische Rechtfertigung dafür bereitgestellt.

Wir gehen aus von einem kommutativen Ring R mit Einselement 1 (s. 1.3.1). Mit

$$M(n \times n; R)$$

bezeichnen wir die quadratischen n -reihigen Matrizen mit Einträgen aus R . Addition und Multiplikation von Matrizen kann man wie bei einem Körper erklären (1.4.1 und 2.5.1), damit wird $M(n \times n; R)$ zu einem Ring mit Einselement E_n . Da im Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitstheorems aus 3.2.5 nirgendwo durch Einträge der Matrix dividiert wird, kann man ihn wörtlich auf R übertragen. Man überzeuge sich, daß die Kommutativität verwendet wird! Daraus folgt, daß die *Determinante*

$$\det: M(n \times n; R) \rightarrow R, \quad A = (a_{ij}) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

die Eigenschaften D1, D2 und D3 aus 3.1.2 hat.

Man beachte, daß von allen Folgerungen D4 bis D11 nur diejenigen direkt übertragen werden können, bei deren Beweis nicht dividiert wurde (Aufgabe 7).

Aufgaben zu 3.2

1. Stellen Sie die Permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

als Produkt von Transpositionen dar.

2. Beweisen Sie mit Induktion nach n , dass für die Vandermonde-Determinante gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

3. Geben Sie eine unendliche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an, in der jeweils n verschiedene Punkte linear unabhängig sind.

4. Zeigen Sie noch einmal

$$\det(a_{ij}) = \det((-1)^{i+j} \cdot a_{ij}),$$

(vgl. Aufgabe 4 zu 3.1), aber benutzen Sie nun zum Beweis die Formel von LEIBNIZ.

5. In dieser Aufgabe soll der Aufwand zum Berechnen der Determinante mit Hilfe der Leibniz-Formel bzw. des Gauß-Algorithmus verglichen werden.

- a) Bestimmen Sie die Anzahl der Additionen und Multiplikationen, die nötig sind, wenn man die Determinante von $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; \mathbb{R})$
- mit der Leibniz-Formel,
 - durch Umformung der Matrix in Zeilenstufenform mit dem Gauß-Algorithmus und Aufmultiplizieren der Diagonalelemente berechnet.
- b) Es stehe ein Computer zur Verfügung, der Addition und Multiplikation in 0.2 Mikrosekunden durchführen kann. Schätzen Sie ab, für welche Größe von Matrizen man mit den Verfahren i) bzw. ii) in einer vorgegebenen Rechenzeit von höchstens 48 Stunden auf diesem Computer Determinanten berechnen kann.

6. Beweisen Sie die Regeln D4 bis D11 aus 3.1.3 mit Hilfe der Leibniz-Formel.

7. Welche der Eigenschaften D4 bis D11 gelten, falls man Determinanten von Matrizen aus $M(n \times n; R)$ für einen Ring R betrachtet (vgl. 3.2.8)?

8. (Fortsetzung von Aufgabe 5 zu 3.1.)

Sei K ein Körper mit $\text{char } K \neq 2$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gerade, also $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n; K)$ schiefsymmetrisch. Definiert man

$$P(x_{11}, \dots, x_{nn}) = \sum \text{sign}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdot \dots \cdot x_{\sigma(2m-1)\sigma(2m)},$$

wobei über alle $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(2i) > \sigma(2i-1)$ für $i = 1, \dots, m$ summiert wird, so gilt $\det A = (\frac{1}{m!} P(a_{11}, \dots, a_{nn}))^2$. Man nennt P ein *Pfaffsches Polynom*.

9. Seien v, w zwei verschiedene Punkte des K^2 und $L \subset K^2$ die Gerade durch v und w . Dann gilt:

$$L = \{(x_1, x_2) \in K^2 : \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$

10.* Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{SL}(2; \mathbb{Z}) := \{A \in \mathrm{M}(2 \times 2; \mathbb{Z}) : \det A = 1\}$$

eine Gruppe bzgl. der Multiplikation ist und erzeugt wird von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathrm{SL}(2; \mathbb{Z}) = \mathrm{erz}(A, B)$ (vgl. Aufgabe 4 zu 1.2).

11. Gegeben sei ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und die $\mathbb{R}$ -Vektorräume

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}(I; \mathbb{R}) = \{\alpha : I \rightarrow \mathbb{R} : \alpha \text{ stetig}\},$$

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(I; \mathbb{R}^n) = \{\varphi = {}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n : \\ \varphi_i \text{ beliebig oft differenzierbar}\}.$$

Matrizen $A \in \mathrm{M}(n \times n; \mathcal{C})$ und $b \in \mathrm{M}(n \times 1; \mathcal{C})$ bestimmen das lineare Differentialgleichungssystem

$$y' = A \cdot y + b. \quad (*)$$

Für $b = 0$ heißt das System homogen. Die Lösungsräume sind erklärt durch

$$\mathcal{L} := \{\varphi \in \mathcal{D} : \varphi' = A \cdot \varphi + b\} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}_0 := \{\varphi \in \mathcal{D} : \varphi' = A \cdot \varphi\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{D}$ ein Untervektorraum und $\mathcal{L} \subset \mathcal{D}$ ein affiner Unterraum ist.

b) Zeigen Sie, dass für $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)} \in \mathcal{L}_0$ folgende Bedingungen äquivalent sind:

- $\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(n)}$ sind über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.
- Für ein $x_0 \in I$ sind $\varphi^{(1)}(x_0), \dots, \varphi^{(n)}(x_0) \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.
- $\det(\varphi_i^{(j)}) \neq 0$. Diese Determinante heißt *WRONSKI-Determinante*.

c) Zeigen Sie, dass $\dim \mathcal{L} = n$ (unabhängig von A).

Hinweis: Man benutze die in der Analysis bewiesene Existenz- und Eindeutigkeitsaussage ([Fo 2], §12), wonach es bei gegebenem x_0 zu beliebigem Anfangswert $c \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung φ von $(*)$ mit $\varphi(x_0) = c$ gibt.

12. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung $y'' = -y$. Überführen Sie dazu die Differentialgleichung mit dem Ansatz $y_0 = y$, $y_1 = y'$ in ein lineares Differentialgleichungssystem wie in Aufgabe 11, und benutzen Sie, dass φ genau dann eine Lösung von $y'' = -y$ ist, wenn (φ, φ') eine Lösung des linearen Systems ist.

3.3 Minoren*

Wie wir gesehen haben, wird die Berechnung von Determinanten bei wachsendem n sehr viel schwieriger. Daher kann es manchmal helfen, in einer Matrix Zeilen und Spalten zu streichen, und zunächst die Determinante der kleineren Matrix zu berechnen.

3.3.1. Zunächst benötigen wir einige sehr technische Vorbereitungen. Ist $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$, so sei A_{ij} für festes i, j die Matrix, die aus A entsteht, indem man a_{ij} durch 1 und alle anderen Komponenten, die in der i -ten Zeile oder der j -ten Spalte stehen, durch 0 ersetzt. Ausgeschrieben ist

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$A^\sharp = (a_{ij}^\sharp) \in M(n \times n; K) \quad \text{mit} \quad a_{ij}^\sharp := \det A_{ji}$$

heißt die zu A *komplementäre Matrix*. Man beachte dabei die Umkehrung der Reihenfolge der Indizes. Weiter bezeichnen wir mit

$$A'_{ij} := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M((n-1) \times (n-1); K)$$

die Matrix, die man durch *Streichen* der i -ten Zeile und der j -ten Spalte aus A erhält.

Bemerkung 1. Es gilt stets

$$\det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij}.$$

Beweis. Durch $i - 1$ Vertauschungen benachbarter Zeilen und $j - 1$ Vertauschungen benachbarter Spalten kann man A_{ij} auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{ij} \end{pmatrix}$$

bringen. Also folgt die Behauptung aus D6 und D9 wegen

$$(-1)^{(i-1)+(j-1)} = (-1)^{i+j}.$$

□

Ist $A = (a^1, \dots, a^n) \in M(n \times n; K)$, wobei $a^1, \dots, a^n$ die Spaltenvektoren von A sind, und ist

$$e^i = {}^t e_i = {}^t (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0),$$

so ist

$$(a^1, \dots, a^{j-1}, e^i, a^{j+1}, \dots, a^n)$$

die Matrix, die aus A entsteht, indem man a_{ij} durch 1 und alle anderen Komponenten der j -ten Spalte durch 0 ersetzt. Im Gegensatz zu A_{ij} bleiben die restlichen Komponenten der i -ten Zeile unverändert.

Bemerkung 2. Es gilt stets

$$\det A_{ij} = \det(a^1, \dots, a^{j-1}, e^i, a^{j+1}, \dots, a^n).$$

Beweis. Durch Addition von Vielfachen der j -ten Spalte zu den anderen Spalten kann man $(a^1, \dots, a^{j-1}, e^i, a^{j+1}, \dots, a^n)$ in A_{ij} überführen. Also folgt die Behauptung aus D7. □

Satz. Ist $A \in M(n \times n; K)$ und $A^\sharp$ die zu A komplementäre Matrix, so ist

$$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = (\det A) \cdot E_n.$$

Beweis. Wir berechnen die Komponenten von $A^\sharp \cdot A$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}^\sharp a_{jk} &= \sum_{j=1}^n a_{jk} \det A_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{jk} \det(a^1, \dots, a^{i-1}, e^j, a^{i+1}, \dots, a^n) \quad \text{nach Bem. 2} \\ &= \det(a^1, \dots, a^{i-1}, \sum_{j=1}^n a_{jk} e^j, a^{i+1}, \dots, a^n) \quad \text{nach D1} \\ &= \det(a^1, \dots, a^{i-1}, a^k, a^{i+1}, \dots, a^n) \\ &= \delta_{ik} \cdot \det A. \quad \text{nach D2} \end{aligned}$$

Also ist $A^\sharp \cdot A = (\det A) \cdot E_n$. Analog berechnet man $A \cdot A^\sharp$. □

3.3.2. In den Definitionen und Beweisen von 3.3.1 kann man den Körper K durch einen kommutativen Ring R mit Einselement ersetzen (vgl. 3.2.8). Der Leser möge zur Übung die Einzelheiten überprüfen. Kritischer Punkt ist der Beweis von Bemerkung 2; aber da man die 1 als Pivot für die Umformungen hat, geht alles gut. Ergebnis ist das

Korollar. Ist R ein kommutativer Ring mit 1 und $A^\sharp \in M(n \times n; R)$ die zu $A \in M(n \times n; R)$ komplementäre Matrix, so gilt

$$A^\sharp \cdot A = A \cdot A^\sharp = (\det A) \cdot E_n. \quad \square$$

Dies wird in 4.5.3 sehr nützlich sein.

3.3.3. Die gerade bewiesene Eigenschaft der komplementären Matrix hat wichtige Konsequenzen. Wir beschränken uns wieder auf den Fall eines Körpers K .

Entwicklungssatz von LAPLACE. Ist $n \geq 2$ und $A \in M(n \times n; K)$, so gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A'_{ij}$$

(Entwicklung nach der i -ten Zeile) und für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A'_{ij}$$

(Entwicklung nach der j -ten Spalte). Dabei bezeichnet A'_{ij} jeweils die in 3.3.1 definierte Streichungsmatrix.

Beweis. Nach Satz 3.3.1 ist $\det A$ für jedes i gleich der i -ten Komponente in der Diagonale der Matrix $A \cdot A^\sharp$, also

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ji}^\sharp = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \det A_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det A'_{ij}$$

nach Bemerkung 1 aus 3.3.1. Indem man ebenso mit $A^\sharp \cdot A$ verfährt, erhält man die Formel für die Entwicklung nach der j -ten Spalte. $\square$

Genau genommen gibt der Entwicklungssatz von Laplace nur ein Verfahren an, die Summanden der Formel von LEIBNIZ in einer speziellen Reihenfolge aufzuschreiben. Das kann aber doch nützlich sein, etwa dann, wenn in einer Zeile oder Spalte viele Nullen stehen. Als Beispiel berechnen wir noch einmal

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 2 = 3.$$

Die durch den Faktor $(-1)^{i+j}$ bewirkte Vorzeichenverteilung kann man sich als „Schachbrettmuster“ vorstellen:

+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+
+	-	+	-	+	-	+	-
-	+	-	+	-	+	-	+

3.3.4. Aus Satz 3.3.1 sieht man sofort, daß die komplementäre Matrix bis auf den Faktor $\det A$ gleich der *inversen Matrix* ist. Das kann man nach Bemerkung 1 in 3.3.1 auch so ausdrücken:

Satz. Sei $A \in GL(n; K)$. Definiert man $C = (c_{ij}) \in M(n \times n; K)$ durch

$$c_{ij} := (-1)^{i+j} \cdot \det A'_{ij},$$

so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t C. \quad \square$$

Im Spezialfall $n = 2$ erhält man

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot {}^t \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Auch für $n = 3, 4$ ist dieses Verfahren noch nützlich. Man berechne zur Übung

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

und vergleiche das Ergebnis mit dem in 2.7.5 erhaltenen.

Für größere n ist der Rechenaufwand wieder zu groß, weil man n^2 Determinanten berechnen muß. Dafür eine schöne Anwendung in der Theorie. Wegen der Stetigkeit von

$$\det: M(n \times n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist $GL(n; \mathbb{R}) \subset M(n \times n; \mathbb{R})$ eine offene Teilmenge, und aus den obigen Formeln folgt, daß die Abbildung

$$GL(n; \mathbb{R}) \rightarrow GL(n; \mathbb{R}), \quad A \mapsto A^{-1},$$

differenzierbar ist. Das ist nützlich in der Analysis.

3.3.5. Auch für die Lösung linearer Gleichungssysteme ist die komplementäre Matrix nützlich, und zwar im Fall

$$A \cdot x = b \quad \text{mit} \quad A \in GL(n; K).$$

Hier ist die entsprechend 2.3.6 eindeutige Lösung gegeben durch

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Man kann x auch ohne explizite Berechnung der inversen Matrix bestimmen: Sind $a^1, \dots, a^n$ die Spaltenvektoren von A , so hat A^{-1} nach 3.3.1 in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte die Komponente

$$\frac{\det A_{ji}}{\det A} = \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, e^j, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det A}.$$

Für die i -te Komponente von $x = A^{-1}b$ folgt nach D1 und Satz 3.2.6

$$x_i = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\det A_{ji}}{\det A} = \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det A}.$$

Man kann also x_i berechnen aus der Determinante von A und der Determinante der Matrix, die aus A durch Austausch der i -ten Spalte gegen b entsteht. Wir fassen das Ergebnis noch einmal zusammen.

CRAMERSche Regel. Sei $A \in GL(n; K)$, $b \in K^n$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$A \cdot x = b.$$

Bezeichnen $a^1, \dots, a^n$ die Spaltenvektoren der Matrix A , so gilt für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

$$x_i = \frac{\det(a^1, \dots, a^{i-1}, b, a^{i+1}, \dots, a^n)}{\det A}. \quad \square$$

Für große n ist diese Regel zur Bestimmung der Lösung nicht praktisch, denn man muß dazu $n+1$ Determinanten berechnen. Für theoretische Untersuchungen ist die Cramersche Regel jedoch sehr wertvoll. Im Fall $K = \mathbb{R}$ kann man damit zum Beispiel leicht einsehen, daß die Lösung x des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ stetig von den Koeffizienten von A und b abhängt.

Als Beispiel betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1, \\x_2 + x_3 &= 1, \\3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0,\end{aligned}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Umformungen erhält man das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= 1, \\x_2 + x_3 &= 1, \\2x_3 &= -2,\end{aligned}$$

und daraus die Lösung

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 2, -1).$$

Wegen $\det A = 2$ ergibt die Cramersche Regel

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1, & x_2 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \\x_3 &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1.\end{aligned}$$

3.3.6. Nach D10 ist $\text{rang } A < n$ für $A \in M(n \times n; K)$ gleichbedeutend mit $\det A = 0$. Um zu sehen, wie weit der Rang absinkt, muß man weitere Determinanten berechnen. Das kann man sogar auf beliebige Matrizen ausdehnen.

Ist $A \in M(m \times n; K)$ und $k \leq \min\{m, n\}$, so heißt eine quadratische Matrix $A' \in M(k \times k; K)$ eine *k-reihige Teilmatrix* von A , wenn A durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen auf die Form

$$\begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann (wobei an den mit * bezeichneten Stellen beliebige Matrizen stehen können). Das ist insbesondere dann der Fall, wenn A' aus A durch Streichen von $m - k$ Zeilen und $n - k$ Spalten entstanden ist. $\det A'$ heißt ein *k-reihiger Minor*.

Satz. Sei $A \in M(m \times n; K)$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $0 < r \leq \min \{m, n\}$. Dann sind folgende Bedingungen gleichwertig:

- i) $r = \text{rang } A$.
- ii) Es gibt einen r -reihigen Minor $\neq 0$, und für $k > r$ ist jeder k -reihige Minor gleich Null.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $0 < k \leq \min \{m, n\}$ folgende Bedingungen gleichwertig sind:

- a) $\text{rang } A \geq k$.
- b) Es gibt eine k -reihige Teilmatrix A' von A mit $\det A' \neq 0$.

$b) \Rightarrow a)$. Aus $\det A' \neq 0$ folgt $\text{rang } A' = k$ und somit $\text{rang } A \geq k$, weil sich der Rang einer Matrix bei Zeilen- und Spaltenvertauschungen nicht ändert.

$a) \Rightarrow b)$. Ist $\text{rang } A \geq k$, so gibt es k linear unabhängige Zeilenvektoren in A . Nach Zeilenvertauschungen können wir sie in die ersten k Zeilen bringen. Sei B die Matrix, die aus diesen Zeilen besteht. Wegen

$$\text{Zeilenrang } B = k = \text{Spaltenrang } B$$

gibt es k linear unabhängige Spaltenvektoren in B . Durch Spaltenvertauschungen können wir sie in die ersten k Spalten bringen. Sei $A' \in M(k \times k; K)$ die aus diesen Spalten bestehende Matrix. A' ist eine Teilmatrix von A , und wegen $\text{rang } A' = k$ gilt $\det A' \neq 0$, was zu zeigen war. $\square$

3.3.7. Die in 3.1.3 als Eigenschaft D11 bewiesene Multiplikativität der Determinante hat eine Verallgemeinerung, die zum Beispiel in der Analysis bei der Berechnung von Inhalten benutzt wird (vgl. [Fo3], §14). Sie betrifft rechteckige Matrizen. Dafür kann man zwar i.a. keine Determinante mehr erklären, aber Minoren. Sei $A = (a^1, \dots, a^n) \in M(m \times n; K)$, wobei die $a^j \in K^m$ die Spaltenvektoren bezeichnen. Ist $m \leq n$, so definieren wir für $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$ die Teilmatrix

$$A^{k_1, \dots, k_m} := (a^{k_1}, \dots, a^{k_m}) \in M(m \times m; K).$$

$\det(A^{k_1, \dots, k_m})$ heißt ein m -reihiger Minor von A , davon gibt es

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1}$$

Stück (vgl. [Fo1], §1). Hat B die gleiche Größe wie A , so ist $A \cdot {}^t B$ quadratisch, also gibt es davon eine Determinante. Wie man sie berechnen kann, sagt das

Determinanten-Multiplikationstheorem. Ist $m \leq n$, so gilt für alle Matrizen $A, B \in M(m \times n; K)$

$$\det(A \cdot {}^t B) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n} (\det A^{k_1, \dots, k_m}) \cdot (\det B^{k_1, \dots, k_m}). \quad (*)$$

Der Fall $m > n$ ist langweilig (vgl. Aufgabe 2), für $m = 1$ ist die Aussage offensichtlich.

Beweis. Für sehr kleine m und n kann man die Formel $(*)$ durch direkte Rechnung mit der Leibniz-Formel beweisen (Aufgabe 3), aber im allgemeinen Fall ist das eine einzige Index-Schlacht (vgl. etwa [Kow 1], §34). Übersichtlicher ist eine geeignete Zerlegung der Rechnung in elementare Schritte. Bei quadratischem A ging das mit Hilfe einer Produktdarstellung durch Elementarmatrizen (D11 in 3.1.3). Im rechteckigen Fall wird A bei festem, aber beliebigem B zeilenweise aus besonders einfachen Matrizen aufgebaut, das kann man als Umkehrung der Entwicklung nach Zeilen aus 3.2.5 ansehen.

1) Wir zeigen die Gültigkeit von $(*)$ für

$$A = \begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_m} \end{pmatrix} \quad \text{für beliebige } j_1, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\}.$$

Man beachte, daß die Zeilenvektoren e_j im K^n liegen. Für dieses spezielle A sind die Minoren ganz einfach zu berechnen: Ist $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$, so gilt

$$\det A^{k_1, \dots, k_m} = \begin{cases} \text{sign } \sigma, & \text{falls } j_i = k_{\sigma(i)} \text{ für ein } \sigma \in S_m, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nun betrachten wir die Wirkung der Multiplikation mit A : Ist

$$B = (b^1, \dots, b^n), \quad \text{so folgt} \quad A \cdot {}^t B = \begin{pmatrix} b^{j_1} \\ \vdots \\ b^{j_m} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante von $A \cdot {}^t B$ ist also höchstens dann von Null verschieden, wenn $j_1, \dots, j_m$ paarweise verschieden sind, d.h. wenn es eine Permutation $\sigma \in S_m$ und $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$ gibt mit $j_i = k_{\sigma(i)}$, und es ist dann

$$\det(A \cdot {}^t B) = \text{sign } \sigma \cdot \det B^{k_1, \dots, k_m}.$$

Also gilt in diesem Fall $(*)$ mit einem einzigen Summanden auf der rechten Seite.

2) Gilt die Formel für A , und entsteht $\tilde{A}$ aus A durch Multiplikation der i -ten Zeile mit $\lambda \in K$, so gilt die Formel auch für $\tilde{A}$. In Zeichen

$$(*) \Rightarrow (\tilde{*}).$$

Ist $C := A \cdot {}^t B$ und $\tilde{C} := \tilde{A} \cdot {}^t B$, so entsteht $\tilde{C}$ aus C durch Multiplikation der i -ten Zeile mit λ . Nach D1 ist

$$\det \tilde{A}^{k_1, \dots, k_m} = \lambda \cdot \det A^{k_1, \dots, k_m} \quad \text{und} \quad \det \tilde{C} = \lambda \cdot \det C,$$

also folgt $(\tilde{*}) = \lambda \cdot (*)$.

3) Ist die i -te Zeile a_i von A eine Summe $a_i = \tilde{a}_i + \tilde{\tilde{a}}_i$, und gilt die Formel für

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{a}_i \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \tilde{\tilde{a}}_i \\ \vdots \end{pmatrix},$$

so gilt sie auch für A . In Zeichen

$$(\tilde{*}) \text{ und } (\tilde{\tilde{*}}) \Rightarrow (*).$$

Wir setzen $\tilde{C} := \tilde{A} \cdot {}^t B$, $\tilde{\tilde{C}} := \tilde{\tilde{A}} \cdot {}^t B$ und $C = A \cdot {}^t B$. Axiom D1 angewandt auf $A^{k_1, \dots, k_m}$ und C ergibt

$$\det A^{k_1, \dots, k_m} = \det \tilde{A}^{k_1, \dots, k_m} + \det \tilde{\tilde{A}}^{k_1, \dots, k_m} \quad \text{und} \quad \det C = \det \tilde{C} + \det \tilde{\tilde{C}},$$

also folgt $(*) = (\tilde{*}) + (\tilde{\tilde{*}})$.

Es bleibt zu zeigen, daß man mit Hilfe von 1), 2) und 3) jede beliebige Matrix

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \text{mit Zeilenvektoren } a_i \in K^n$$

schrittweise aufbauen kann: In der ersten Etappe wählt man die Indizes $j_2, \dots, j_m \in \{1, \dots, n\}$ beliebig, aber fest. Läßt man j_1 von 1 bis n laufen, und wählt man nacheinander $\lambda_{j_1} = a_{1j_1}$, so folgt die Gültigkeit von $(*)$ für

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ e_{j_2} \\ \vdots \\ e_{j_m} \end{pmatrix} \quad \text{für beliebige } j_2, \dots, j_m.$$

In der zweiten Etappe hält man a_1 sowie $j_3, \dots, j_m$ fest und läßt j_2 von 1 bis n

laufen. Das ergibt wie oben die Gültigkeit von (*) für

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ e_{j_3} \\ \vdots \\ e_{j_m} \end{pmatrix} \quad \text{für beliebige } j_3, \dots, j_m.$$

In der m -ten Etappe erhält man schließlich (*) für $A_m = A$. $\square$

3.3.8. Im Spezialfall $m = n$ erhält man mit der oben angewandten Methode einen neuen Beweis des Determinantenmultiplikationssatzes D11. Für $B = A$ ergibt sich das

Korollar. Für jedes $A \in M(m \times n; K)$ mit $m \leq n$ gilt

$$\det(A \cdot {}^t A) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n} \det(A^{k_1, \dots, k_m})^2. \quad \square$$

Man nennt $\det(A \cdot {}^t A)$ eine GRAMsche *Determinante*. Insbesondere ist sie für $K = \mathbb{R}$ nie negativ und genau dann Null, wenn $\text{rang } A < m$ (vgl. 3.3.6).

Aufgaben zu 3.3

1. In dieser Aufgabe geht es um weitere Eigenschaften der komplementären Matrix.

a) Ist die Abbildung $M(n \times n; K) \rightarrow M(n \times n; K)$, $A \mapsto A^\sharp$ linear?

b) Zeigen Sie: ${}^t(A^\sharp) = ({}^t A)^\sharp$, $(AB)^\sharp = B^\sharp A^\sharp$.

c) $\det A^\sharp = (\det A)^{n-1}$.

d) $(A^\sharp)^\sharp = (\det A)^{n-2} \cdot A$.

2. Sind $A, B \in M(m \times n; K)$ und ist $m > n$, so folgt $\det A \cdot {}^t B = 0$.

3. Beweisen Sie die Formel für $\det A \cdot {}^t B$ aus 3.3.7 durch direktes Ausrechnen, wenn $A, B \in M(2 \times 3; K)$ sind.

4. Beweisen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.$$

5. Für $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$ aus K^n sind äquivalent:

- i) x und y sind linear abhängig.
 ii) $\det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0$ für alle i, j .

6. Ist $E = \text{span}(x, y) \subset K^n$ ein 2-dimensionaler Untervektorraum, so definieren wir

$$p_{ij} = \det \begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n.$$

Man nennt $p(x, y) = (p_{ij})_{1 \leq i < j \leq n} \in K^{\binom{n}{2}}$ die (homogenen) *Plückerkoordinaten* von $E = \text{span}(x, y)$; nach Aufgabe 5 ist $p(x, y) \neq 0$.

- a) Zeigen Sie, dass die Plückerkoordinaten bis auf einen Faktor aus $K \setminus \{0\}$ nur von E abhängen: Ist $E = \text{span}(x, y) = \text{span}(x', y')$, so existiert ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ mit $p(x, y) = \lambda \cdot p(x', y')$. In diesem Sinne wollen wir auch einfach von den Plückerkoordinaten $p(E)$ von E reden, diese sind dann bis auf einen Faktor $\neq 0$ eindeutig bestimmt.
 b) Zeigen Sie: Sind $E_1, E_2 \subset K^n$ Untervektorräume der Dimension 2, so dass $p(E_1)$ und $p(E_2)$ linear abhängig sind, so folgt $E_1 = E_2$.
 c) Ist $E = \text{span}(x, y) \subset K^4$, so erfüllen die Plückerkoordinaten (p_{ij}) von E die Gleichung $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$. Ist umgekehrt $p = (p_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4} \in K^6 \setminus 0$ gegeben mit $p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0$, so existiert ein 2-dimensionaler Untervektorraum $E = \text{span}(x, y) \subset K^4$ mit $p(E) = p$.
 d) Sind $E_1 = \text{span}(x, y), E_2 = \text{span}(x', y') \subset K^4$ zweidimensionale Untervektorräume mit Plückerkoordinaten $p(E_1) = (p_{ij}), p(E_2) = (q_{ij})$, so gilt:

$$E_1 \cap E_2 \neq \{0\} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x'_1 & y'_1 \\ x_2 & y_2 & x'_2 & y'_2 \\ x_3 & y_3 & x'_3 & y'_3 \\ x_4 & y_4 & x'_4 & y'_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow p_{12}q_{34} - p_{13}q_{24} + p_{14}q_{23} + p_{23}q_{14} - p_{24}q_{13} + p_{34}q_{12} = 0.$$

7. Zeigen Sie, dass $\det(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) \cdot x_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot x_{n\sigma(n)} \in K[x_{11}, \dots, x_{nn}]$ ein irreduzibles Polynom ist, das heißt, dass aus $\det(x) = P \cdot Q$ mit Polynomen P und Q stets $P \in K$ oder $Q \in K$ folgt.

3.4 Determinante eines Endomorphismus und Orientierung*

3.4.1. Nach den vielen Rechnungen mit Determinanten kommen wir zurück zur Frage nach ihrer geometrischen Bedeutung. Eine Matrix $A \in M(n \times n; K)$ kann auch als Endomorphismus des K^n angesehen werden. Dabei wird die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ auf die Spaltenvektoren $a^1, \dots, a^n$ von A abgebildet. Im Fall $K = \mathbb{R}$ hat der von $e_1, \dots, e_n$ aufgespannte Würfel im $\mathbb{R}^n$ das Volumen 1, das von $a^1, \dots, a^n$ aufgespannte Parallelotop hat das Volumen

$$|\det A| = |\det A|$$

(vgl. [Fo3], §5). Der Betrag der Determinante ist also das Maß für die durch den Endomorphismus bewirkte Veränderung des Volumens.

Sind ein beliebiger K -Vektorraum V mit $\dim V < \infty$ und ein Endomorphismus

$$F: V \rightarrow V$$

gegeben, so kann man eine Basis B von V wählen und

$$\det F := \det M_B(F) \in K$$

setzen. Ist A eine andere Basis von V , so gibt es nach 2.6.5 ein $S \in GL(n; K)$ mit

$$M_A(F) = S \cdot M_B(F) \cdot S^{-1}, \quad \text{also ist} \quad \det M_A(F) = \det M_B(F)$$

nach D11 aus 3.1.3. Daher haben wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\det: \text{End}(V) \rightarrow K, \quad F \mapsto \det F.$$

Im Gegensatz zum $\mathbb{R}^n$ hat man in einem allgemeinen V keine Volumenmessung mehr. Immerhin folgt aus D10 in 3.1.3 die

Bemerkung. Für $F \in \text{End}(V)$ sind folgende Bedingungen gleichwertig:

i) F ist surjektiv.

ii) $\det F \neq 0$. □

3.4.2. Für einen Endomorphismus des $\mathbb{R}^n$ ist der Betrag der Determinante ein Maß für die Veränderung der Volumina (vgl. 3.4.1). Das Vorzeichen der Determinante hat ebenfalls eine geometrische Bedeutung.

Beispiele. a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det A = \frac{3}{4} > 0$ und $\det A' = -\frac{9}{8} < 0$. Die Wirkung von A auf den Buchstaben F ist in Bild 3.7 zu sehen: Das Bild unter A ist nach einer Drehung wieder als F zu erkennen, das Bild unter A' ist gespiegelt.

b) Bei einem Automorphismus A des $\mathbb{R}^3$ betrachtet man das Bild einer linken Hand. Ist $\det A > 0$, so sieht es wieder aus wie eine linke Hand, falls $\det A < 0$, wird daraus eine rechte Hand.

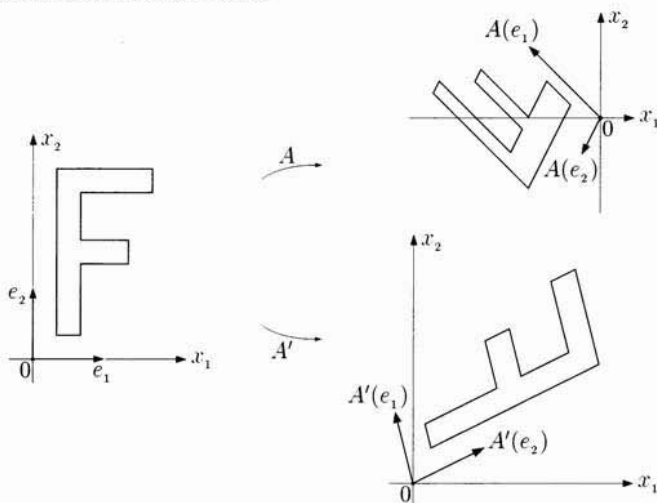


Bild 3.7

Das motiviert die

Definition. Ein Automorphismus eines $\mathbb{R}$ -Vektorraumes V mit $\dim V < \infty$ heißt
orientierungstreu, falls $\det F > 0$, und
orientierungsuntreu, falls $\det F < 0$.

3.4.3. Es ist bezeichnend für die Schwierigkeit der Definition, daß man „orientierungstreu“ erklären kann, bevor klar ist, was eine „Orientierung“ ist. Das wird nun nachgeholt:

Definition. Seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ Basen des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes V und F der nach 2.4.1 eindeutig bestimmte Automorphismus von V mit

$$F(v_1) = w_1, \dots, F(v_n) = w_n.$$

Dann heißen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ *gleichorientiert*, in Zeichen $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, wenn $\det F > 0$.

Offensichtlich ist dadurch eine Äquivalenzrelation in der Menge X aller Basen von V erklärt, und X zerfällt in zwei Äquivalenzklassen

$$X = X^* \cup X_*,$$

wobei je zwei Basen aus derselben Klasse gleichorientiert sind. Man beachte, daß X^* und X_* völlig gleichberechtigt sind.

Unter einer *Orientierung* von V versteht man eine Äquivalenzklasse gleichorientierter Basen; dafür gibt es zwei Möglichkeiten.

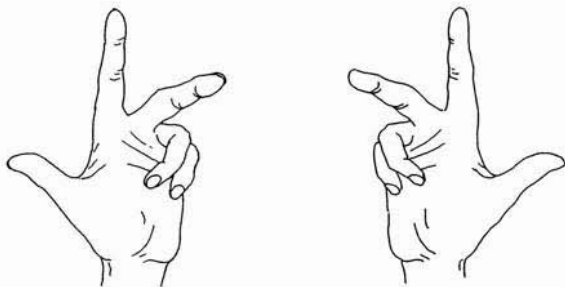


Bild 3.8 (aus [B 2])

Für $V = \mathbb{R}^n$ kann man die Zerlegung von X explizit beschreiben. Man hat eine kanonische bijektive Abbildung

$$M: X \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R}), \quad \mathcal{A} \mapsto A = M(\mathcal{A}),$$

wenn $M(\mathcal{A})$ die Matrix mit den Vektoren der Basis $\mathcal{A}$ als Spalten bezeichnet (vgl. Aufgabe 1), und es gilt

$$\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \Leftrightarrow \det M(\mathcal{A}) \cdot \det M(\mathcal{B}) > 0.$$

Man beachte dabei, daß $\det M(\mathcal{B})$ und $\det M(\mathcal{B})^{-1}$ das gleiche Vorzeichen haben. Die Gruppe $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ hat eine disjunkte Zerlegung in

$$G_+ := \{A \in \text{GL}(n; \mathbb{R}) : \det A > 0\} \quad \text{und}$$

$$G_- := \{A \in \text{GL}(n; \mathbb{R}) : \det A < 0\}.$$

Im $\mathbb{R}^n$ gibt es die *kanonische* (d.h. nach DUDEN „den kirchlichen Bestimmungen gemäß“) Basis $\mathcal{K}$, sie ist in einer der beiden Klassen X^* oder X_* enthalten, und diese ist dadurch ausgezeichnet (also ist es hier schon wieder vorbei mit der Gleichberechtigung). Ist etwa $\mathcal{K} \in X^*$, so folgt

$$G_+ = M(X^*) \quad \text{und} \quad G_- = M(X_*).$$

Wir können also im Fall $V = \mathbb{R}^n$ die Zerlegung

$$X = X^* \cup X_* \quad \text{ersetzen durch} \quad \text{GL}(n; \mathbb{R}) = G_+ \cup G_-.$$

Offensichtlich ist $G_+ \subset GL(n; \mathbb{R})$ eine Untergruppe, und es gilt die

Bemerkung. Ist $T \in GL(n; \mathbb{R})$ mit $\det T < 0$ gegeben, und ist

$$\tau: GL(n; \mathbb{R}) \rightarrow GL(n; \mathbb{R}), \quad A \mapsto A \cdot T,$$

die Rechtstranslation (vgl. 1.2.4), so gilt

$$\tau(G_+) = G_- \quad \text{und} \quad \tau(G_-) = G_+.$$

Der Beweis verläuft wie in 3.2.4. □

3.4.4. Nun wollen wir zeigen, daß zwei Basen des $\mathbb{R}^n$ genau dann gleichorientiert sind, wenn sie sich „stetig ineinander verformen“ lassen. Vor allem muß präzisiert werden, was das heißen soll. Dabei können wir entsprechend 3.4.3 die Menge aller Basen durch $GL(n; \mathbb{R})$ ersetzen.

Definition. Sind $A, B \in GL(n; \mathbb{R})$, so versteht man unter einem Weg von A nach B eine stetige Abbildung

$$\varphi: I \rightarrow GL(n; \mathbb{R}), \quad t \mapsto \varphi(t) = (\varphi_{ij}(t)),$$

wobei $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit $\varphi(\alpha) = A$ und $\varphi(\beta) = B$. Die Stetigkeit von φ bedeutet, daß die n^2 Funktionen φ_{ij} mit Werten in $\mathbb{R}$ stetig sind. Wesentlich dabei ist, daß die Matrix $\varphi(t)$ für jedes $t \in I$ invertierbar ist.

Die Matrizen $A, B \in GL(n; \mathbb{R})$ nennt man *verbindbar* (in Zeichen $A \sim B$), wenn es einen Weg von A nach B gibt.

Man betrachtet t als Zeitparameter, die Spalten von $\varphi(t)$ beschreiben eine Basis, die sich im Lauf der Zeit verformt.

Theorem. Für zwei Matrizen $A, B \in GL(n; \mathbb{R})$ sind folgende Bedingungen gleichwertig:

- i) A und B liegen in derselben Klasse G_+ oder G_- , d.h. $\det(A \cdot B) > 0$,
- ii) A und B sind in $GL(n; \mathbb{R})$ verbindbar.

In der Sprache der Topologie sagt man dafür, daß $GL(n, \mathbb{R})$ in die zwei Zusammenhangskomponenten G_+ und G_- zerfällt.

Korollar. Zwei Basen A und B des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann gleichorientiert, wenn sie stetig ineinander verformbar sind.

Wesentlich dabei ist wieder, daß man zu jedem Zeitpunkt der Verformung eine Basis hat.

Beispiele. a) Im $\mathbb{R}^1$ besteht eine Basis aus einem einzigen Vektor $x \in \mathbb{R}^* = GL(1; \mathbb{R})$. Ist y ein weiterer, so gibt es genau dann einen Weg von x nach y ,

wenn beide gleiches Vorzeichen haben (Bild 3.9). Dabei benutzt man den Zwischenwertsatz ([Fo1], §11).

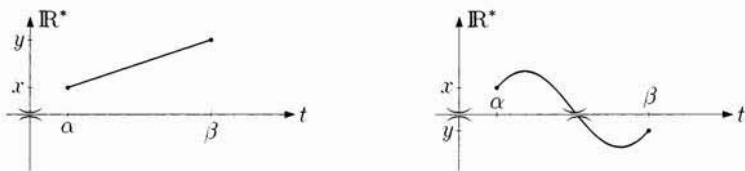


Bild 3.9

b) Die Basen $\mathcal{A} = (e_1, e_2)$ und $\mathcal{B} = (-e_1, e_2)$ sind nicht stetig ineinander verformbar. Man mache dazu ein Experiment mit einer nicht mehr benutzten oder gedachten Uhr: versuche, sie durch unabhängige Bewegung beider Zeiger von 3 Uhr auf 9 Uhr zu stellen, so daß die beiden Zeiger dabei nie auf einer Geraden liegen!

c) Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger einer nicht ganz flach gestreckten linken und rechten Hand repräsentieren die beiden möglichen Orientierungen des $\mathbb{R}^3$. Dreht man so lange, bis Mittelfinger und Zeigefinger der beiden Hände aufeinander liegen, so zeigen die Daumen in verschiedene Richtungen.

Wir benutzen folgende Teilresultate:

Lemma 1. Die Verbindbarkeit ist eine Äquivalenzrelation in $GL(n; \mathbb{R})$.

Lemma 2. Ist $\varphi: I \rightarrow GL(n; \mathbb{R})$ ein Weg von A nach B , so haben $\det A$ und $\det B$ das gleiche Vorzeichen.

Lemma 3. Ist $A \in GL(n; \mathbb{R})$ mit $\det A > 0$, so gibt es einen Weg von A nach E_n .

Daraus ergibt sich leicht der *Beweis des Theorems*: Nach Lemma 2 gilt ii) $\Rightarrow$ i). Es bleibt also i) $\Rightarrow$ ii) zu zeigen:

Sind $A, B \in G_+$, so gibt es nach Lemma 3 Wege von A nach E_n und von B nach E_n , also nach Lemma 1 auch einen Weg von A nach B .

Sind $A, B \in G_-$, so setze man etwa

$$T := \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dann ist } T^{-1} = T.$$

Die Rechtstranslation $C \mapsto C \cdot T$ bewirkt eine Multiplikation der ersten Spalte mit -1 , das ist eine stetige Abbildung von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ auf sich. Da $A \cdot T$ und $B \cdot T \in G_+$, gibt es einen Weg dazwischen, durch die Rechtstranslation mit T erhält man daraus einen Weg von A nach B . $\square$

Zum *Beweis von Lemma 1* verweisen wir auf Aufgabe 2. $\square$

Beweis von Lemma 2. Nach 3.2.6 ist die Determinante stetig, also ist

$$\det \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \det(\varphi(t)),$$

eine stetige Funktion. Da $\det(\varphi(t)) \neq 0$ für alle t , hat $\det(\varphi(t))$ nach dem Zwischenwertsatz für alle t das gleiche Vorzeichen. $\square$

Beweis von Lemma 3. Durch eine Folge verschiedenartiger Umformungen wird A in E_n überführt. Der Kniff ist, diese Umformungen nicht auf einen Schlag, sondern langsam durchzuführen. Dadurch erhält man kleine Wegstückchen, die man schließlich zum ganzen Weg von A nach E_n zusammenfügt.

Zur Vorbereitung der *ersten Etappe* überlegt man sich, daß jede invertierbare Matrix durch Spaltenumformungen vom Typ III (Addition einer μ -fachen i -ten Spalte zu einer j -ten Spalte mit $j \neq i$) in eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

überführt werden kann (Aufgabe 3). Es ist wichtig, Spaltenvertauschungen zu vermeiden, weil sie das Vorzeichen der Determinante verändern.

Seien also Elementarmatrizen $C_1, \dots, C_k$ vom Typ III gefunden, so daß

$$D = A \cdot C_1 \cdot \dots \cdot C_k.$$

Ist $C = Q_i^j(\mu)$ eine davon, so zeigen wir, wie daraus ein Wegstückchen gemacht werden kann. Ist

$$A = (\dots, a^i, \dots, a^j, \dots), \quad \text{so ist} \quad A \cdot Q_i^j(\mu) = (\dots, a^i, \dots, a^j + \mu a^i, \dots).$$

Definieren wir eine stetige Abbildung

$$\psi: [0, 1] \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}), \quad t \mapsto A \cdot Q_i^j(t \cdot \mu),$$

so ist $\psi(0) = A$ und $\psi(1) = A \cdot Q_i^j(\mu)$. Wie die stetige Ausführung dieser Scherung verläuft, ist in Bild 3.10 angedeutet.

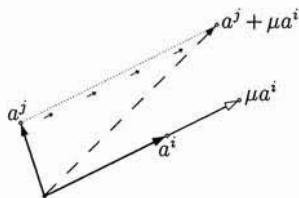


Bild 3.10

Nach Lemma 1 kann man die so erhaltenen k Wegstückchen zusammensetzen zur ersten Etappe

$$\varphi_1: [\alpha_1, \beta_1] \rightarrow \text{GL}(n; \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi_1(\alpha_1) = A \quad \text{und} \quad \varphi_1(\beta_1) = D.$$

Aus D7 folgt $\det(\varphi_1(t)) = \det A$ für jedes $t \in [\alpha_1, \beta_1]$, insbesondere

$$\det A = \det D = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n.$$

In der zweiten Etappe wird D verbunden mit

$$D' = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad \varepsilon_i = \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} = \pm 1.$$

Dazu benutzen wir, daß man in $\mathbb{R}^*$ jedes λ mit $\varepsilon = \frac{\lambda}{|\lambda|}$ geradlinig verbinden kann durch

$$\chi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad t \mapsto \lambda + (\varepsilon - \lambda)t = \lambda \left(1 + \left(\frac{1}{|\lambda|} - 1 \right) t \right).$$

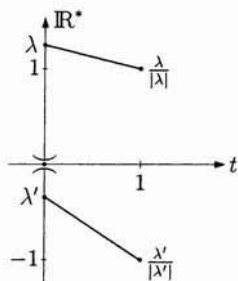


Bild 3.11

Die Multiplikation der Spalten mit Faktoren kann man auch durch Elementarmatrizen vom Typ $S_j(\mu)$ bewirken, also ist

$$D' = D \cdot S_1 \left(\frac{1}{|\lambda_1|} \right) \cdot \dots \cdot S_n \left(\frac{1}{|\lambda_n|} \right),$$

und jedes der n Wegstückchen von D nach D' ist beschrieben durch Multiplikation mit

$$S_j \left(1 + \left(\frac{1}{|\lambda_j|} - 1 \right) t \right)$$

für $t \in [0, 1]$. Diese n Stückchen zusammengefügt ergeben einen Weg

$$\varphi_2: [\alpha_2, \beta_2] \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi_2(\alpha_2) = D \quad \text{und} \quad \varphi_2(\beta_2) = D'.$$

Da $1 + \left(\frac{1}{|\lambda|} - 1 \right) t > 0$ für $0 \leq t \leq 1$, ist $\det D' = +1$, also ist die Anzahl der Einträge -1 in D' gerade.

In der *dritten Etappe* wird D' mit E_n verbunden, dazu nimmt man sich in jedem Schritt ein Pärchen von negativen Einsen vor. Wie sie gemeinsam ins Positive gewendet werden können, sieht man am besten im Spezialfall $n = 2$. Man nimmt die stetige Abbildung

$$\alpha: [-\pi, 0] \rightarrow \mathrm{GL}(2; \mathbb{R}), \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Für sie gilt

$$\alpha(-\pi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

Falls die beiden Einträge -1 an beliebigen Stellen sitzen, verwendet man die Abbildung

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \cos t & \cdots & -\sin t \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ & \sin t & \cdots & \cos t \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}).$$

Macht man dies nacheinander für jedes Paar, so erhält man insgesamt das Wegstück

$$\varphi_3: [\alpha_3, \beta_3] \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi_3(\alpha_3) = D' \quad \text{und} \quad \varphi_3(\beta_3) = E_n.$$

Durch Zusammensetzung von φ_1 , φ_2 und φ_3 erhält man schließlich den gesuchten Weg von A nach E_n . $\square$

Wie wir gesehen haben, gibt es für einen reellen Vektorraum zwei mögliche Orientierungen. Viel schwieriger ist es, den Begriff der Orientierung für eine reelle Mannigfaltigkeit, etwa eine Fläche, zu erklären. Das einfachste Beispiel für eine nicht orientierbare Fläche ist das um 1850 entdeckte **MÖBIUSband**, das nicht nur Anselm Wüßteger und Sophie beschäftigt hat (mehr darüber in [P]):



Aufgaben zu 3.4

1. Sei V ein K -Vektorraum, X die Menge aller Basen von V und $B \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi: X \rightarrow \mathrm{GL}(n; K), \quad \mathcal{A} \mapsto T_{\mathcal{A}}^B = M_{\mathcal{A}}^B(\mathrm{id})$$

bijektiv ist. Wie hängt Φ im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit der in 3.4.3 definierten kanonischen Bijektion

$$M: X \rightarrow \mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$$

zusammen?

2. Beweisen Sie, dass die Verbindbarkeit von Matrizen in $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ eine Äquivalenzrelation in $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ definiert.

3. Zeigen Sie, dass man eine invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}(n; K)$ durch Spaltenumformungen vom Typ III auf Diagonalgestalt bringen kann.

4. Zeigen Sie, dass in $M(n \times n; \mathbb{R})$ je zwei Matrizen durch einen Weg verbindbar sind.

5. Beweisen Sie, dass $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ zusammenhängend ist, das heißt, dass je zwei Matrizen aus $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ durch einen Weg in $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ verbunden sind.