

4. Determinanten

Vorbemerkungen

Jeder quadratischen Matrix A mit Koeffizienten aus einem Körper K kann man mittels einer gewissen Rechenvorschrift eine Invariante zuordnen, die so genannte *Determinante*. Diese ist genau dann von Null verschieden, wenn die Spalten oder, alternativ, die Zeilen von A linear unabhängig sind, d. h. genau dann, wenn A invertierbar ist.

Um einen Eindruck davon zu bekommen, wie man in mehr oder weniger zwangsläufiger Weise auf die Bildung der Determinante geführt wird, betrachten wir eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$$

und untersuchen, welche Anforderungen die Koeffizienten α_{ij} erfüllen müssen, damit die Spalten von A linear abhängig werden. Im Falle $A = 0$ sind die Spalten von A natürlich trivialerweise linear abhängig. Es sei deshalb $A \neq 0$, etwa $\alpha_{11} \neq 0$. Dann ist der erste Spaltenvektor von A nicht Null, und die beiden Spalten von A sind genau dann linear abhängig, wenn es ein $c \in K$ mit

$$\alpha_{12} = c\alpha_{11}, \quad \alpha_{22} = c\alpha_{21}$$

gibt. Hieraus folgt

$$c = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \quad \alpha_{22} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\alpha_{21}$$

und damit die Beziehung

$$(*) \quad \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} = 0.$$

Ein Zurückverfolgen der Rechnung zeigt, dass die Spalten von A unter der Bedingung $\alpha_{11} \neq 0$ genau dann linear abhängig sind, wenn der Ausdruck in $(*)$ verschwindet. Man kann nun exakt die gleiche Rechnung durchführen

- für $\alpha_{21} \neq 0$, wenn man die beiden Zeilen von A vertauscht,
- für $\alpha_{12} \neq 0$, wenn man die beiden Spalten von A vertauscht,
- für $\alpha_{22} \neq 0$, wenn man die beiden Spalten und Zeilen von A vertauscht.

Da bei allen diesen Vertauschungen der Ausdruck in $(*)$ bis auf das Vorzeichen unverändert bleibt und da dieser natürlich auch im Falle $A = 0$ verschwindet, können wir aus unserer Rechnung ablesen:

Eine (beliebige) Matrix $A = (\alpha_{ij}) \in K^{2 \times 2}$ hat genau dann maximalen Rang, wenn der Ausdruck $\det(A) := \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}$, den man als Determinante von A bezeichnet, nicht verschwindet.

Gegenüber konventionellen Betrachtungen bietet der Determinanten-Ausdruck $\det(A)$ den ganz wesentlichen Vorteil, dass mit seiner Hilfe die Maximalität des Rangs von A in direkter Weise von den Koeffizienten α_{ij} der Matrix A abgelesen werden kann, ohne dass Fallunterscheidungen zu beachten sind. Dieses Phänomen haben wir schon bei den Vorbemerkungen zu Kapitel 3 beobachten können. Dort hatten wir für

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in K^2,$$

wobei A maximalen Rang habe, und einen Vektor von Unbekannten $t = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$ das Gleichungssystem $A \cdot t = b$ studiert und eine Lösung erhalten, die sich unter Verwendung des oben definierten Determinantenausdrucks in der Form

$$t_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} \\ \beta_2 & \alpha_{22} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}}, \quad t_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \beta_2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}}$$

schreiben lässt. Auch hier waren bei der Herleitung Fallunterscheidungen notwendig, obwohl sich das Ergebnis am Ende als fallunabhängig herausstellte. Es handelt sich um den einfachsten Fall der *Cramerschen Regel*, die wir in allgemeiner Form in diesem Kapitel beweisen werden.

Historisch ist die Einführung von Determinanten in der Tat im Zusammenhang mit der Lösung linearer Gleichungssysteme zu sehen, und zwar mit der Entdeckung der nach Cramer benannten Regel. Wir wollen dies am Beispiel eines Systems bestehend aus 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten einmal erläutern:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}t_1 + \alpha_{12}t_2 + \alpha_{13}t_3 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}t_1 + \alpha_{22}t_2 + \alpha_{23}t_3 &= \beta_2 \\ \alpha_{31}t_1 + \alpha_{32}t_2 + \alpha_{33}t_3 &= \beta_3 \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1,2,3}$ habe den Rang 3. Dann hat die Matrix $A' = (\alpha_{ij})_{i=1,2,3;j=2,3}$ noch Rang 2, wobei wir mittels Vertauschungen der Reihenfolge der Gleichungen annehmen können, dass $(\alpha_{ij})_{i=1,2;j=2,3}$ Rang 2 hat. Wir bemühen uns nun, Koeffizienten $c_1, c_2 \in K$ zu finden, derart dass bei Addition des c_1 -fachen der ersten Zeile und des c_2 -fachen der zweiten Zeile zur dritten Zeile die Unbekannten t_2 und t_3 eliminiert werden. Dies ist möglich, da nach unserer Annahme die beiden ersten Zeilen von A' linear unabhängig sind. Wir müssen hierzu das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_{12}c_1 + \alpha_{22}c_2 &= -\alpha_{32} \\ \alpha_{13}c_1 + \alpha_{23}c_2 &= -\alpha_{33} \end{aligned}$$

lösen und erhalten gemäß der Cramerschen Regel für 2×2 -Matrizen

$$c_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} -\alpha_{32} & \alpha_{22} \\ -\alpha_{33} & \alpha_{23} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{pmatrix}} = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}},$$

$$c_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & -\alpha_{32} \\ \alpha_{13} & -\alpha_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{pmatrix}} = -\frac{\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}},$$

wobei $\det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}$ nicht verschwindet. Somit ergibt sich als dritte Gleichung unseres ursprünglichen Systems

$$(\alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + \alpha_{31})t_1 = \beta_1c_1 + \beta_2c_2 + \beta_3$$

mit einem Faktor $\alpha_{11}c_1 + \alpha_{21}c_2 + \alpha_{31}$, der nicht verschwindet, da sich der Rang der Koeffizientenmatrix des ursprünglichen Gleichungssystems nicht geändert hat. Dann aber können wir durch diesen Koeffizienten dividieren, und es folgt

$$t_1 = \frac{\beta_1 \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \beta_2 \det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \beta_3 \det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}}{\alpha_{11} \det \begin{pmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} - \alpha_{21} \det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} + \alpha_{31} \det \begin{pmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{pmatrix}}.$$

Wir haben diese Formel für t_1 unter der Annahme hergeleitet, dass die beiden ersten Zeilen der Matrix $A' = (\alpha_{ij})_{i=1,2,3;j=2,3}$ linear unabhängig sind, ein Fall, den wir durch Vertauschen der Reihenfolge der Gleichungen unseres Systems stets herstellen können. Um zu sehen, dass die Formel für t_1 auch im Allgemeinfall gültig ist, bleibt noch zu zeigen, dass diese invariant gegenüber solchen Vertauschungen ist. Dies ist aber leicht nachzuprüfen, wenn man benutzt, dass die Determinante (einer 2×2 -Matrix) invariant unter Transponieren ist und das Vorzeichen wechselt, wenn man zwei Spalten oder Zeilen der Matrix vertauscht.

In der Formel für t_1 erkennt man, dass Zähler und Nenner nach dem gleichen Bildungsgesetz aus den Matrizen

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

hervorgehen. In Kenntnis der Determinantentheorie würde man sagen, dass im Zähler und Nenner von t_1 jeweils die Determinanten dieser Matrizen stehen, und zwar in Form ihrer Entwicklung nach der ersten Spalte. Man kann nun den Ausdruck im Zähler bzw. Nenner von t_1 als *Definition* der Determinante einer 3×3 -Matrix nehmen, wobei diese Definition dann Bezug nimmt auf die Kenntnis von Determinanten von 2×2 -Matrizen.

Das gerade vorgestellte Verfahren funktioniert in induktiver Weise allgemeiner für Systeme von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, sofern die Koeffizientenmatrix maximalen Rang hat. Es ergibt sich eine Formel für t_1 ähnlich wie oben, wobei im Zähler und Nenner jeweils eine Summe von Vielfachen von Determinanten von $(n-1) \times (n-1)$ -Matrizen steht, in Form der Entwicklung der Determinante einer $n \times n$ -Matrix nach ihrer ersten Spalte. Die gewonnenen Ausdrücke kann man zur Definition der Determinante einer $n \times n$ -Matrix erheben, wodurch man dann insgesamt eine rekursive Definition der Determinante einer Matrix erhält.

Man beachte allerdings, dass das obige Verfahren zwar für t_1 auf die Entwicklung der Determinante einer $n \times n$ -Matrix nach ihrer ersten Spalte führt, für beliebiges t_j mit $1 \leq j \leq n$ jedoch auf die Entwicklung nach der j -ten Spalte. Dies sieht man etwa, indem man die Unbekannten t_1 und t_j vertauscht. Will man also die Cramersche Regel beweisen und gleichzeitig dabei Determinanten einführen, so hat man bei jedem Rekursionsschritt auch einige allgemeine Eigenschaften von Determinanten mitzubeweisen, etwa die Möglichkeit, Determinanten nach beliebigen Spalten (oder Zeilen) zu entwickeln. Wir werden natürlich nicht in dieser Weise vorgehen. Stattdessen beginnen wir mit dem Studium so genannter Determinantenfunktionen, in deren Kontext sich automatisch eine allgemeine nicht-rekursive Definition für Determinanten ergeben wird. Dabei werden einige Fakten über Permutationen benötigt, die wir zu Beginn des Kapitels zusammenstellen. Erst nach Klärung der Definition und der Eigenschaften von Determinanten beweisen wir schließlich die Cramersche Regel und im Zusammenhang hiermit auch die Möglichkeit, Determinanten nach Spalten oder Zeilen zu entwickeln. In einem optionalen Abschnitt geht es schließlich noch um äußere Produkte, in deren Zusammenhang wir auch den so genannten allgemeinen Laplaceschen Entwicklungssatz für Determinanten herleiten.

4.1 Permutationen

Wir hatten in Abschnitt 1.2 gesehen, dass für eine Menge X die bijektiven Selbstabbildungen $X \rightarrow X$ eine Gruppe G bilden, wenn man die Komposition von Abbildungen als Verknüpfung nimmt. Die identische Abbildung $\text{id} \in G$ ist das Einselement, und das inverse Element zu einem Element $f: X \rightarrow X$ von G wird gegeben durch die inverse Abbildung $f^{-1}: X \rightarrow X$.

Wir wollen hier für eine natürliche Zahl n speziell die Menge $X = \{1, \dots, n\}$ betrachten, wobei wir X im Falle $n = 0$ als die leere Menge annehmen. Für die zugehörige Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen von X schreibt man dann $\mathfrak{S}_n$ und nennt dies die *symmetrische Gruppe* oder die *Permutationsgruppe* zum Index n . Die Elemente von $\mathfrak{S}_n$ heißen *Permutationen* der Zahlen $1, \dots, n$, da sie sozusagen diese Elemente in ihrer Reihenfolge vertauschen. Gilt für eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ etwa $\sigma(i) = a_i$ für $i = 1, \dots, n$, so schreibt man auch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Die Permutationsgruppen $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ bestehen jeweils nur aus dem Einselement, welches die identische Abbildung auf $X = \emptyset$ bzw. $X = \{1\}$ repräsentiert. Weiter ist $\mathfrak{S}_2$ eine Gruppe von 2 Elementen und damit insbesondere abelsch, wohingegen $\mathfrak{S}_n$ für $n \geq 3$ nicht mehr abelsch ist. Für

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt beispielsweise

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{S}_n$ bestimmen. Hierzu bezeichnen wir für $n \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl $\prod_{i=1}^n i$ mit $n!$, wobei das Rufzeichen “!” als *Fakultät* gelesen wird. Insbesondere gilt $0! = 1! = 1$ sowie $2! = 2$.

Bemerkung 1. *Es besteht $\mathfrak{S}_n$ aus genau $n!$ Elementen.*

Beweis. Will man eine bijektive Selbstabbildung

$$\sigma: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$$

erklären, so kann man schrittweise vorgehen und zunächst $\sigma(1)$ festlegen, dann $\sigma(2)$ und so weiter, bis man schließlich $\sigma(n)$ festlegt. Dabei genügt es, eine injektive Abbildung zu konstruieren; diese ist wegen der Endlichkeit der Menge $\{1, \dots, n\}$ automatisch bijektiv. Für die Wahl von $\sigma(1)$ hat man zunächst n Möglichkeiten, denn für $\sigma(1)$ kann man jedes Element aus $\{1, \dots, n\}$ nehmen. Für die Wahl von $\sigma(2)$ verbleiben dann noch $n - 1$ Möglichkeiten, denn man muss $\sigma(2) \in \{1, \dots, n\}$ verschieden von $\sigma(1)$ wählen, da man eine injektive Abbildung konstruieren möchte. Bei der Festlegung von $\sigma(3)$ hat man noch $n - 2$ Möglichkeiten und so weiter, bis man schließlich bei der Wahl von $\sigma(n)$ lediglich noch eine Möglichkeit hat. Indem man das Produkt über die einzelnen Anzahlen bildet, erhält man insgesamt $n! = \prod_{i=1}^n i$ als Anzahl der Möglichkeiten, eine injektive Selbstabbildung von $\{1, \dots, n\}$ zu erklären. $\square$

Definition 2. *Eine Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$ heißt Transposition, wenn es zwei verschiedene Zahlen $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ sowie $\tau(k) = k$ für alle restlichen Zahlen $k \in \{1, \dots, n\}$ gibt. Man schreibt dann auch $\tau = (i, j)$.*

Die Transposition $\tau = (i, j)$ vertauscht also gerade die Zahlen i und j und lässt ansonsten alle Elemente von $\{1, \dots, n\}$ fest. Insbesondere gilt $\tau^2 = \text{id}$, d. h. τ ist zu sich selbst invers. Es besteht $\mathfrak{S}_2$ gerade aus der identischen Abbildung und der Transposition $(1, 2)$, wohingegen die Gruppen $\mathfrak{S}_0$ und $\mathfrak{S}_1$ keine Transpositionen enthalten.

Satz 3. *Jedes $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist ein Produkt von Transpositionen.*

Beweis. Wir schließen mit fallender Induktion nach $r(\pi)$, wobei $r(\pi)$ maximal in $\{0, 1, \dots, n\}$ gewählt sei mit der Eigenschaft $\pi(i) = i$ für $i = 1, \dots, r(\pi)$. Für $r(\pi) = n$ gilt $\pi = \text{id}$, und dies ist ein leeres Produkt von Transpositionen. Für $r = r(\pi) < n$ folgt notwendig $\pi(r+1) > r+1$. Setzen wir $\tau_1 = (r+1, \pi(r+1))$, so bildet das Produkt $\tau_1\pi$ die Elemente $1, \dots, r+1$ identisch auf sich selbst ab, erfüllt also $r(\tau_1\pi) > r(\pi)$, und ist somit nach Induktionsvoraussetzung ein Produkt von Transpositionen, etwa $\tau_1\pi = \tau_2 \dots \tau_s$. Multiplikation mit $\tau_1 = \tau_1^{-1}$ von links liefert dann wie gewünscht $\pi = \tau_1 \dots \tau_s$. $\square$

Man nennt eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ *gerade* oder *ungerade*, je nachdem ob sich π als ein Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl von Transpositionen darstellen lässt. Dabei wollen wir zeigen, dass eine Permutation π nicht gerade und ungerade zugleich sein kann. Als Hilfsmittel führen wir das so genannte *Signum* von π ein.

Definition 4. Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Dann heißt

$$\text{sgn } \pi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

das Signum der Permutation π .

Im Grunde genommen erstreckt sich die Produktbildung bei der Definition des Signums einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ über alle zwei-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Genauer meinen wir hiermit:

Bemerkung 5. Es sei M eine Menge von Indexpaaren (i, j) mit $1 \leq i, j \leq n$, so dass die Zuordnung $(i, j) \mapsto \{i, j\}$ eine Bijektion von M auf die Menge der zwei-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ erklärt. Dann gilt

$$\text{sgn } \pi = \prod_{(i,j) \in M} \frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i}$$

Beweis. Zunächst ist $\{\{i, j\}; 1 \leq i < j \leq n\}$ gerade die Menge aller zwei-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Berücksichtigt man dann noch die Gleichung

$$\frac{\pi(j) - \pi(i)}{j - i} = \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

so folgt die Behauptung. $\square$

Wir wollen einige Folgerungen aus dieser Bemerkung ziehen.

Satz 6. Sei $\pi \in \mathfrak{S}_n$. Dann gilt $\text{sgn } \pi = (-1)^s$, wobei s die Anzahl aller Fehlstände in der Folge $\pi(1), \dots, \pi(n)$ ist, d. h. die Anzahl aller Paare

$(\pi(i), \pi(j))$, $1 \leq i < j \leq n$, mit $\pi(i) > \pi(j)$. Insbesondere folgt $\operatorname{sgn} \pi = \pm 1$. Für eine Transposition $\pi \in \mathfrak{S}_n$ berechnet sich das Signum zu $\operatorname{sgn} \pi = -1$.

Beweis. Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ bildet die zwei-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ bijektiv auf sich selbst ab. Daher gilt

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) = \pm \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\pi(j) - \pi(i))$$

und damit $\operatorname{sgn} \pi = \pm 1$. Genauer erhält man $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^s$, wobei s gleich der Anzahl der Faktoren auf der rechten Seite ist, die negativ sind, also gleich der Anzahl der Fehlstände in der Folge $\pi(1), \dots, \pi(n)$.

Für eine Transposition $\pi = (i, j)$ mit $i < j$, also

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

gibt es in der Folge $\pi(1), \dots, \pi(n)$ genau $j - i$ Fehlstände der Form $(j, *)$ sowie $j - i$ Fehlstände der Form $(*, i)$. Da wir dabei (j, i) als Fehlstand in zweifacher Weise berücksichtigt haben, ergibt sich

$$\operatorname{sgn} \pi = (-1)^{2(j-i)-1} = -1,$$

wie behauptet. □

Satz 7. Die Abbildung $\operatorname{sgn}: \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{1, -1\}$ ist ein Gruppenhomomorphismus, d. h. es gilt $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau$ für $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n$.

Beweis. Mit Bemerkung 5 können wir wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} \\ &= \prod_{i < j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \prod_{i < j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i} \\ &= \operatorname{sgn} \sigma \cdot \operatorname{sgn} \tau \end{aligned}$$

□

Korollar 8. Ist $\pi \in \mathfrak{S}_n$ darstellbar als ein Produkt von s Transpositionen, so gilt $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^s$.

Wir sehen damit, dass eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ genau dann gerade, also ein Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen ist, wenn $\operatorname{sgn} \pi = 1$ gilt. Entsprechend ist π genau dann ungerade, also ein Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen, wenn $\operatorname{sgn} \pi = -1$ gilt.

In Satz 7 haben wir von einem *Gruppenhomomorphismus* gesprochen. Allgemein nennt man eine Abbildung $f: G \longrightarrow G'$ zwischen zwei Gruppen G und

G' einen Gruppenhomomorphismus, wenn f mit der Produktbildung in G und G' verträglich ist, wenn also für $g, h \in G$ stets $f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$ folgt. Dann gilt $f(1) = 1$ für die Einselemente in G und G' , sowie $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ für $g \in G$. Man kann sich leicht überlegen, dass der *Kern* von f , also $\ker f = f^{-1}(1)$, eine Untergruppe von G ist, sogar ein *Normalteiler*. Hierunter versteht man eine Untergruppe $N \subset G$ mit $g^{-1} \cdot h \cdot g \in N$ für alle $g \in G$ und $h \in N$. Letzteres ist natürlich nur für nicht-kommutative Gruppen eine echte Bedingung; in einer kommutativen Gruppe ist jede Untergruppe ein Normalteiler.

In der Situation von Satz 7 ist also sgn ein Gruppenhomomorphismus von $\mathfrak{S}_n$ in die multiplikative Gruppe $\{1, -1\}$. Der Kern dieses Homomorphismus besteht aus allen geraden Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$. Diese bilden einen Normalteiler und insbesondere eine Untergruppe $\mathfrak{A}_n \subset \mathfrak{S}_n$. Man nennt $\mathfrak{A}_n$ die *alternierende Gruppe* zum Index n . Zusammenfassend können wir sagen:

Bemerkung 9. Die geraden Permutationen in $\mathfrak{S}_n$ bilden einen Normalteiler

$$\mathfrak{A}_n = \{\pi \in \mathfrak{S}_n ; \operatorname{sgn} \pi = 1\} \subset \mathfrak{S}_n.$$

Weiter besteht

$$\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n = \{\pi \in \mathfrak{S}_n ; \operatorname{sgn} \pi = -1\}$$

aus allen ungeraden Permutationen in $\mathfrak{S}_n$, und es gilt

$$\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n = \tau \mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_n \tau$$

für jede ungerade Permutation $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Dabei bezeichnet $\tau \mathfrak{A}_n$ die Menge aller Produkte $\tau \circ \pi$ mit $\pi \in \mathfrak{A}_n$, entsprechend für $\mathfrak{A}_n \tau$.

Beweis. Es ist nur zeigen, dass sich die ungeraden Permutationen aus $\mathfrak{S}_n$ in der Form $\tau \mathfrak{A}_n$ bzw. $\mathfrak{A}_n \tau$ beschreiben lassen. Ist τ ungerade, so sieht man mittels Satz 7, dass $\tau \mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}_n \tau$ in $\mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$ enthalten sind. Ist umgekehrt $\pi \in \mathfrak{S}_n - \mathfrak{A}_n$, so sind $\tau^{-1} \circ \pi$ und $\pi \circ \tau^{-1}$ gerade, woraus $\pi \in \tau \mathfrak{A}_n$ bzw. $\pi \in \mathfrak{A}_n \tau$ folgt. $\square$

Aufgaben

1. Man bestimme das Signum der folgenden Permutationen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_5, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_8$$

2. Eine Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ heißt ein *r-Zyklus*, wenn es paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_r \in \{1, \dots, n\}$ gibt mit

$$\begin{aligned} \pi(a_i) &= a_{i+1} \text{ für } i = 1, \dots, r-1, \\ \pi(a_r) &= a_1, \end{aligned}$$

und π alle übrigen Elemente von $\{1, \dots, n\}$ fest lässt. Man bestimme $\operatorname{sgn} \pi$ für einen *r-Zyklus* $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

3. Man zeige, dass jedes Element $\pi \in \mathfrak{S}_n$ endliche Ordnung besitzt, d. h. dass es ein $r \in \mathbb{N} - \{0\}$ gibt mit $\pi^r = 1$.
4. Man zeige: Ist $N \subset \mathfrak{S}_n$ ein Normalteiler, der eine Transposition enthält, so gilt bereits $N = \mathfrak{S}_n$.
5. Man bestimme die Anzahl der Elemente der alternierenden Gruppe $\mathfrak{A}_n$.
6. Man zeige für eine Gruppe G und eine Untergruppe $N \subset G$, dass N bereits dann ein Normalteiler in G ist, wenn $gN \subset Ng$ für alle $g \in G$ gilt.
7. Für eine Gruppe G bezeichne $S(G)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von G nach G . Man zeige:
 - (i) $S(G)$ ist eine Gruppe unter der Komposition von Abbildungen.
 - (ii) Es existiert ein injektiver Gruppenhomomorphismus $G \longrightarrow S(G)$.

4.2 Determinantenfunktionen

In diesem Abschnitt fixieren wir einen K -Vektorraum V endlicher Dimension n und betrachten Abbildungen $\Delta: V^n \longrightarrow K$, sozusagen K -wertige Funktionen von n Argumenten aus V , wobei V^n im Falle $n = 0$ nur aus dem leeren Tupel besteht. Eine solche Abbildung heißt *multilinear*, wenn sie linear in jedem Argument ist. Dabei nennt man Δ linear im i -ten Argument, wenn für $a_1, \dots, a_n, a'_i \in V$ und $\alpha, \alpha' \in K$ stets

$$\begin{aligned} & \Delta(a_1, \dots, a_{i-1}, \alpha a_i + \alpha' a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \alpha \cdot \Delta(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &+ \alpha' \cdot \Delta(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \end{aligned}$$

gilt. Weiter heißt Δ *alternierend*, wenn $\Delta(a_1, \dots, a_n)$ verschwindet, sobald zwei der Vektoren $a_1, \dots, a_n$ übereinstimmen.

Definition 1. *Es sei V ein K -Vektorraum endlicher Dimension n . Eine Determinantenfunktion auf V ist eine alternierende multilineare Abbildung $\Delta: V^n \longrightarrow K$. Man bezeichnet Δ als nicht-trivial, wenn Δ nicht die Nullabbildung ist.*

Ähnlich wie K -lineare Abbildungen kann man Determinantenfunktionen addieren oder mit Skalaren aus K multiplizieren, um neue solche Funktionen zu erhalten. Die Determinantenfunktionen auf V bilden folglich einen K -Vektorraum, und wir werden im Folgenden sehen, dass dessen Dimension 1 ist, unabhängig von der Dimension von V . Doch zunächst wollen wir einige elementare Eigenschaften von Determinantenfunktionen angeben.

Bemerkung 2. *Zu einem K -Vektorraum V der Dimension n betrachte man eine multilineare Abbildung $\Delta: V^n \longrightarrow K$. Dann ist äquivalent:*

- (i) Δ ist alternierend und damit eine Determinantenfunktion.

(ii) Für jedes linear abhängige System von Vektoren $a_1, \dots, a_n \in V$ gilt $\Delta(a_1, \dots, a_n) = 0$.

Beweis. Es ist nur die Implikation (i) $\implies$ (ii) zu zeigen. Seien also $a_1, \dots, a_n$ linear abhängig. Dann lässt sich einer dieser Vektoren, etwa a_1 , als Linearkombination der restlichen darstellen, also $a_1 = \sum_{i=2}^n \beta_i a_i$, und es folgt aus (i) unter Benutzung der Multilinearität von Δ

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=2}^n \beta_i \Delta(a_i, a_2, \dots, a_n) = 0.$$

□

Bemerkung 3. Sei Δ eine Determinantenfunktion auf V . Für $a_1, \dots, a_n \in V$ gilt dann:

(i) $\Delta(\dots a_i \dots a_j \dots) = -\Delta(\dots a_j \dots a_i \dots)$, d. h. Δ ändert bei Vertauschung zweier verschiedener Argumente das Vorzeichen.

(ii) $\Delta(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn} \pi \cdot \Delta(a_1, \dots, a_n)$ für $\pi \in \mathfrak{S}_n$.

(iii) $\Delta(\dots a_i + \alpha a_j \dots a_j \dots) = \Delta(\dots a_i \dots a_j \dots)$ für $\alpha \in K$, d. h. Δ bleibt invariant, wenn man zum i -ten Argument ein skalares Vielfaches eines weiteren Arguments addiert.

Beweis. Unter Ausnutzung der Eigenschaften einer Determinantenfunktion können wir wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(\dots a_i + a_j \dots a_i + a_j \dots) \\ &= \Delta(\dots a_i \dots a_i + a_j \dots) + \Delta(\dots a_j \dots a_i + a_j \dots) \\ &= \Delta(\dots a_i \dots a_i \dots) + \Delta(\dots a_i \dots a_j \dots) \\ &\quad + \Delta(\dots a_j \dots a_i \dots) + \Delta(\dots a_j \dots a_j \dots) \\ &= \Delta(\dots a_i \dots a_j \dots) + \Delta(\dots a_j \dots a_i \dots) \end{aligned}$$

Dabei mögen die explizit aufgeschriebenen Argumente immer an den Stellen i und j stehen, wobei an den übrigen Stellen stets $a_1, \dots, a_{i-1}$ bzw. $a_{i+1}, \dots, a_{j-1}$ bzw. $a_{j+1}, \dots, a_n$ als Argumente einzusetzen sind. Aus der Rechnung folgt dann Aussage (i). Weiter ist (ii) eine Folgerung von (i), da jede Permutation nach 4.1/3 ein Produkt von Transpositionen ist und da man nach 4.1/8 $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^s$ hat, wenn π ein Produkt von s Transpositionen ist. Aussage (iii) schließlich ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} &\Delta(\dots a_i + \alpha a_j \dots a_j \dots) \\ &= \Delta(\dots a_i \dots a_j \dots) + \alpha \Delta(\dots a_j \dots a_j \dots) \\ &= \Delta(\dots a_i \dots a_j \dots) \end{aligned}$$

□

Eine multilineare Abbildung $\Delta: V^n \longrightarrow K$, die nach unserer Definition alternierend ist, ist also insbesondere alternierend in dem Sinne, dass sie das

Vorzeichen bei Vertauschung zweier ihrer Argumente ändert; daher die Bezeichnung alternierend. Man beachte jedoch, dass die Umkehrung hierzu nur dann richtig ist, wenn $1 \neq -1$ in K gilt.

Als Nächstes wollen wir ein nicht-triviales Beispiel einer Determinantenfunktion auf dem Vektorraum $V = K^n$ konstruieren.

Lemma 4. Für Matrizen $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ definiere man die Determinante von A durch

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(n),n}.$$

Dann ist $\det$, aufgefasst als Funktion in den n Spalten der Matrix A , eine Determinantenfunktion auf $V = K^n$, und es gilt $\det(E) = 1$ für die Einheitsmatrix $E \in K^{n \times n}$. Insbesondere ist die Determinantenfunktion $\det$ nicht-trivial.

Beweis. Zunächst ist die Funktion $\det$ multilinear in den Spalten der Matrix A , da ein Produkt $c_1 \cdot \dots \cdot c_n$ linear in jedem seiner Faktoren ist. Weiter ist zu zeigen, dass $\det(A) = 0$ gilt, sofern zwei Spalten in A identisch sind. Seien also $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A . Gilt dann $a_i = a_j$ für zwei Indizes $i \neq j$, so kann man die Transposition $\tau = (i, j) \in \mathfrak{S}_n$ betrachten. Durchläuft π die geraden Permutationen in $\mathfrak{S}_n$, so durchläuft $\pi \circ \tau$ nach 4.1/9 alle ungeraden Permutationen in $\mathfrak{S}_n$. Man erhält daher

$$\begin{aligned} & \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} \alpha_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(i),i} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(j),j} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(n),n} \\ &- \sum_{\pi \in \mathfrak{A}_n} \alpha_{\pi \circ \tau(1),1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi \circ \tau(i),i} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi \circ \tau(j),j} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi \circ \tau(n),n} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{\pi \circ \tau(i),i} &= \alpha_{\pi(j),i} = \alpha_{\pi(j),j} \cdot \\ \alpha_{\pi \circ \tau(j),j} &= \alpha_{\pi(i),j} = \alpha_{\pi(i),i}, \end{aligned}$$

sowie $\alpha_{\pi \circ \tau(k),k} = \alpha_{\pi(k),k}$ für $k \neq i, j$.

Schließlich verifiziert man leicht $\det(E) = 1$. In diesem Falle verschwinden nämlich in der definierenden Summe für $\det(E)$ alle Terme bis auf denjenigen zur Identität $\operatorname{id} \in \mathfrak{S}_n$. $\square$

Im Übrigen werden wir in 7.2/9 und 7.2/10 sehen, dass der Betrag der Determinante $\det(A)$ geometrisch als das Volumen des von den Spaltenvektoren von A in K^n aufgespannten Parallelotops interpretiert werden kann.

Als Nächstes wollen wir einsehen, dass das soeben gegebene Beispiel einer Determinantenfunktion auf ganz natürliche Weise entsteht.

Lemma 5. *Es sei Δ eine Determinantenfunktion auf V und $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V . Für beliebige Vektoren $a_1, \dots, a_n \in V$ gilt dann:*

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \det(a_{1,X}, \dots, a_{n,X}) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n).$$

Dabei bezeichnet $a_{j,X} \in K^n$ für $j = 1, \dots, n$ den Koordinatenspaltenvektor von a_j bezüglich der Basis X , also $a_{j,X} = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj})^t$, wenn $a_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i$.

Beweis. Unter Benutzung der Eigenschaften einer Determinantenfunktion ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \Delta(a_1, \dots, a_n) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \alpha_{i_1,1} \dots \alpha_{i_n,n} \cdot \Delta(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \alpha_{\pi(1),1} \dots \alpha_{\pi(n),n} \cdot \Delta(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi(1),1} \dots \alpha_{\pi(n),n} \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n) \\ &= \det(a_{1,X}, \dots, a_{n,X}) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

□

Wir können nun in einfacher Weise einige Folgerungen aus den beiden Lemmata ziehen.

Satz 6. *Es sei $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis eines K -Vektorraums V und weiter Δ eine Determinantenfunktion auf V . Dann ist äquivalent:*

- (i) Δ ist trivial.
- (ii) $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Beweis. Es ist nur die Implikation (ii) $\implies$ (i) zu begründen, und diese ergibt sich aus der Formel in Lemma 5. □

Satz 7. *Es sei Δ eine nicht-triviale Determinantenfunktion auf einem n -dimensionalen K -Vektorraum V . Für n Vektoren $x_1, \dots, x_n \in V$ ist dann äquivalent:*

- (i) $x_1, \dots, x_n$ sind linear abhängig.
- (ii) $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Beweis. Die Implikation (i) $\implies$ (ii) ergibt sich aus Bemerkung 2. Um die umgekehrte Implikation zu zeigen, gehen wir indirekt vor und nehmen an, dass $x_1, \dots, x_n$ linear unabhängig sind, also eine Basis X von V bilden. Nach Satz 6 ist Δ dann trivial, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung. □

Satz 8. *Es sei V ein K -Vektorraum mit einer Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$. Bezeichnet a_X für Vektoren $a \in V$ jeweils den Koordinatenspaltenvektor von a zur Basis X , so wird durch*

$$\det_X(a_1, \dots, a_n) = \det(a_{1,X}, \dots, a_{n,X})$$

eine Determinantenfunktion mit $\det_X(x_1, \dots, x_n) = 1$ auf V erklärt. Der K -Vektorraum der Determinantenfunktionen auf V wird von $\det_X$ erzeugt und besitzt folglich die Dimension 1.

Beweis. Indem man den Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} K^n$, $a \mapsto a_X$, verwendet, kann man sehen, dass $\det_X$ die Eigenschaften einer nicht-trivialen Determinantenfunktion mit $\det_X(x_1, \dots, x_n) = 1$ besitzt, da $\det$ die entsprechenden Eigenschaften hat; vgl. Lemma 4. Im Übrigen zeigt Lemma 5, dass jede weitere Determinantenfunktion Δ auf V ein skalares Vielfaches von $\det_X$ ist. Der Vektorraum der Determinantenfunktionen auf V besitzt also die Dimension 1. $\square$

Korollar 9. *Es seien Δ, Δ' Determinantenfunktionen auf dem K -Vektorraum V . Ist dann Δ nicht-trivial, so existiert ein eindeutig bestimmtes Element $\alpha \in K$ mit $\Delta' = \alpha \cdot \Delta$.*

Aufgaben

1. Es seien V ein n -dimensionaler K -Vektorraum, $U \subset V$ ein r -dimensionaler linearer Unterraum und $x_{r+1}, \dots, x_n$ ein fest gegebenes System von Vektoren in V . Für eine Determinantenfunktion $\Delta: V^n \rightarrow K$ zeige man, dass sich durch

$$\Delta_U(a_1, \dots, a_r) := \Delta(a_1, \dots, a_r, x_{r+1}, \dots, x_n)$$

eine Determinantenfunktion $\Delta: U^r \rightarrow K$ definieren lässt. Wann ist Δ_U nicht-trivial?

2. Es sei $\Delta: V^n \rightarrow K$ eine nicht-triviale Determinantenfunktion auf einem n -dimensionalen K -Vektorraum V und $x_1, \dots, x_{n-1}$ ein linear unabhängiges System von Vektoren in V . Man zeige: Es existiert ein $x_n \in V$ mit $\Delta(x_1, \dots, x_n) = 1$, wobei die Restklasse von x_n in $V/\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$ eindeutig bestimmt ist.
3. Für einen n -dimensionalen K -Vektorraum V mit einer Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ betrachte man den K -Vektorraum W aller multilinearen Abbildungen $V^n \rightarrow K$. Man bestimme $\dim_K W$ und gebe eine Basis von W an.

4.3 Determinanten von Matrizen und Endomorphismen

Für eine Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ haben wir bereits in 4.2/4 die Determinante durch die Formel

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(n),n}.$$

erklärt. Diese Formel ergibt für $n = 0$ als Determinante der leeren Matrix den Wert 1. Im Folgenden wollen wir nun allgemeiner die Determinante von Endomorphismen endlich-dimensionaler K -Vektorräume einführen.

Bemerkung 1. Es sei $f: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V endlicher Dimension n . Weiter sei Δ eine nicht-triviale Determinantenfunktion auf V ; eine solche existiert stets nach 4.2/8. Dann gilt:

(i) Auf V wird durch

$$\Delta_f(a_1, \dots, a_n) = \Delta(f(a_1), \dots, f(a_n)), \quad a_1, \dots, a_n \in V,$$

eine Determinantenfunktion Δ_f definiert.

(ii) Es existiert ein eindeutig bestimmtes Element $\alpha_f \in K$ mit $\Delta_f = \alpha_f \cdot \Delta$.

(iii) Ist $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V , so folgt

$$\alpha_f = \det(f(x_1)_X, \dots, f(x_n)_X) = \det(A_{f,X,X}),$$

wobei $f(x_i)_X$ der Koordinatenspaltenvektor von $f(x_i)$ bezüglich der Basis X und $A_{f,X,X}$ die Matrix von f bezüglich der Basis X sei. Insbesondere erkennt man, dass α_f unabhängig von der Wahl der Determinantenfunktion Δ ist.

Beweis. Die Funktion Δ_f ist offenbar multilinear, da Δ diese Eigenschaft hat und f linear ist. Sind weiter $a_1, \dots, a_n$ linear abhängig, so gilt Gleiches für $f(a_1), \dots, f(a_n)$, und es folgt $\Delta_f(a_1, \dots, a_n) = 0$. Folglich ist Δ_f eine Determinantenfunktion. Nach 4.2/9 gibt es dann eine eindeutig bestimmte Konstante $\alpha_f \in K$ mit $\Delta_f = \alpha_f \Delta$. Betrachten wir schließlich eine Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ von V , so ergibt sich mit 4.2/5

$$\begin{aligned} \alpha_f \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n) &= \Delta_f(x_1, \dots, x_n) = \Delta(f(x_1), \dots, f(x_n)) \\ &= \det(f(x_1)_X, \dots, f(x_n)_X) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

wobei $\Delta(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ wegen 4.2/7 und folglich

$$\alpha_f = \det(f(x_1)_X, \dots, f(x_n)_X)$$

gilt. Insbesondere erkennt man, dass α_f unabhängig von der Wahl von Δ ist. $\square$

Definition 2. Es sei $f: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V . Dann nennt man $\det f := \alpha_f$, wobei α_f wie in Bemerkung 1 bestimmt ist, die Determinante des Endomorphismus f . Es gilt

$$\det f = \det(A_{f,X,X})$$

für jede Matrix $A_{f,X,X}$, die f bezüglich einer Basis X von V beschreibt. Insbesondere erhält man $\det f = 1$ im Falle $V = 0$.

Wir wollen zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Determinanten herleiten.

Satz 3. Es sei V ein K -Vektorraum endlicher Dimension n und $\text{End}_K(V)$ der Endomorphismenring von V . Dann gilt für $f, g \in \text{End}_K(V)$ und $\alpha \in K$:

- (i) $\det(\text{id}) = 1$ für die Identität $\text{id} \in \text{End}_K(V)$.
- (ii) $\det(\alpha f) = \alpha^n \cdot \det(f)$.
- (iii) $\det(f \circ g) = \det(f) \cdot \det(g)$.
- (iv) $\det(f) \neq 0 \iff f$ invertierbar.
- (v) $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$, falls f invertierbar ist.
- (vi) $\det(f^*) = \det(f)$ für die duale Abbildung $f^*: V^* \longrightarrow V^*$ zu f .

Bevor wir zum Beweis kommen, formulieren wir die entsprechenden Aussagen auch noch für Determinanten von Matrizen.

Satz 4. Für $A, B \in K^{n \times n}$ und $\alpha \in K$ gilt:

- (i) $\det(E) = 1$ für die Einheitsmatrix $E \in K^{n \times n}$.
- (ii) $\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det(A)$.
- (iii) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
- (iv) $\det(A) \neq 0 \iff A$ invertierbar.
- (v) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$, falls A invertierbar ist.
- (vi) $\det(A^t) = \det(A)$ für die transponierte Matrix A^t zu A .

Beweis zu den Sätzen 3 und 4. Indem wir zwischen Endomorphismen und zugehörigen Matrizen wechseln, vgl. Abschnitt 3.1 sowie Satz 3.2/9, genügt es, alternativ entweder die Aussagen aus Satz 3 oder Satz 4 zu beweisen. Zudem ist nur der Fall $n = \dim V > 0$ von Interesse.

(i) $\det E = 1$ haben wir bereits in 4.2/4 gezeigt.

(ii) Man benutze die Multilinearität von Determinantenfunktionen: Sind $a_1, \dots, a_n$ die Spalten einer Matrix $A \in K^{n \times n}$, so folgt

$$\det(\alpha A) = \det(\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) = \alpha^n \det(a_1, \dots, a_n) = \alpha^n \det(A).$$

(iii) Für diese Aussage ist es günstiger, im Sinne von Determinanten von Endomorphismen zu argumentieren. Man wähle eine nicht-triviale Determinantenfunktion Δ auf V sowie eine Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ von V . Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n) &= \Delta(f \circ g(x_1), \dots, f \circ g(x_n)) \\ &= \det f \cdot \Delta(g(x_1), \dots, g(x_n)) \\ &= \det f \cdot \det g \cdot \Delta(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

und damit $\det(f \circ g) = \det f \cdot \det g$ wegen $\Delta(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

(iv) Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihr Rang n ist, vgl. 3.3/7, d. h. genau dann, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind. Damit ergibt sich die Aussage als Konsequenz von 4.2/4 und 4.2/7.

(v) Für $A \in \text{Gl}(n, K)$ gilt nach (i) und (iii)

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(E) = 1.$$

(vi) Für $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ gilt

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(n),n} \\
 &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{1,\pi^{-1}(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{n,\pi^{-1}(n)} \\
 &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi^{-1} \cdot \alpha_{1,\pi^{-1}(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{n,\pi^{-1}(n)} \\
 &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{1,\pi(1)} \cdot \dots \cdot \alpha_{n,\pi(n)} \\
 &= \det(A^t).
 \end{aligned}$$

□

Korollar 5. *Es sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix vom Rang r . Dann lässt sich aus A durch Streichen von Spalten und Zeilen eine quadratische Untermatrix $A' \in K^{r \times r}$ mit $\det(A') \neq 0$ konstruieren, und es ist r maximal mit dieser Eigenschaft.*

Beweis. Gemäß 3.2/10 dürfen wir den Rang von Matrizen wahlweise als Spalten- oder Zeilenrang interpretieren. Insbesondere können wir in A ein linear unabhängiges System von r Spalten auswählen. Durch Streichen der restlichen Spalten entsteht eine Untermatrix $A_1 \in K^{m \times r}$ von A mit Rang r . Entsprechend können wir in A_1 ein linear unabhängiges System von r Zeilen auswählen. Indem wir die restlichen Zeilen von A_1 streichen, entsteht eine quadratische Untermatrix $A' \in K^{r \times r}$ von A_1 bzw. A mit Rang r . Diese ist nach 3.3/7 invertierbar und erfüllt $\det(A') \neq 0$ gemäß Satz 4.

Ist andererseits $A' \in K^{s \times s}$ eine quadratische Untermatrix von A mit einer Spaltenzahl $s > r = \operatorname{rg} A$, so sind die Spalten von A' notwendigerweise linear abhängig, denn jeweils s Spalten von A sind linear abhängig. Es folgt dann $\det(A') = 0$, ebenfalls mit Satz 4. □

Wir gehen schließlich noch auf die Berechnung der Determinanten spezieller Matrizen $A \in K^{n \times n}$ ein und untersuchen zunächst, wie sich die Determinante ändert, wenn man auf A elementare Zeilen- oder Spaltentransformationen anwendet.

Satz 6. *Es seien $\alpha \in K$, $A \in K^{n \times n}$, sowie i, j zwei verschiedene Indizes mit $1 \leq i, j \leq n$.*

(i) *det A ändert sich nicht, wenn man zu der i -ten Zeile (bzw. Spalte) von A das α -fache der j -ten Zeile (bzw. Spalte) addiert.*

(ii) *det A ändert das Vorzeichen, wenn man in A die i -te mit der j -ten Zeile (bzw. Spalte) vertauscht.*

(iii) *det A multipliziert sich mit α , wenn man die i -te Zeile (bzw. Spalte) von A mit α multipliziert.*

Beweis. Nach Satz 4 gilt $\det A = \det A^t$. Wir können uns daher auf die Betrachtung elementarer Spaltenumformungen beschränken. Dann ergeben sich die behaupteten Aussagen jedoch unmittelbar aus der Tatsache, dass $\det A$ eine Determinantenfunktion in den Spalten von A ist; vgl. 4.2/3 und 4.2/4. $\square$

Der obige Satz bietet eine natürliche Möglichkeit, Determinanten von Matrizen $A \in K^{n \times n}$ explizit zu berechnen: Man bestimme zunächst mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens den Rang $r = \operatorname{rg} A$. Für $r < n$ folgt dann $\det A = 0$ gemäß 4.2/2. Im Falle $r = n$ jedoch lässt sich A , wie wir in Abschnitt 3.3 gesehen haben, mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E überführen, wobei $\det E = 1$ gilt. Benötigt man s solcher Umformungen (wobei man elementare Zeilen- und Spaltenumformungen gemischt verwenden darf), so ändert sich der Wert der Determinante bei jedem Schritt um einen gewissen Faktor α_σ , $\sigma = 1, \dots, s$, und es ergibt sich $\det A = \alpha_1^{-1} \dots \alpha_s^{-1}$.

Wir wollen einige Beispiele zur Berechnung spezieller Determinanten geben und dabei auch zeigen, wie das gerade beschriebene Verfahren in konkreten Situationen angewendet werden kann.

(1) Sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ mit $\alpha_{ij} = 0$ für $i > j$, also

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \dots & * \\ 0 & \alpha_{22} & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^n \alpha_{ii}$. In der Tat, betrachten wir einen Term der Summe

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(n),n}$$

zu einer Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$, so verschwindet dieser aufgrund unserer Voraussetzung über die α_{ij} , sofern es einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $\pi(i) > i$ gibt. Da andererseits aber $\pi(i) \leq i$, $i = 1, \dots, n$, nur für die identische Permutation gilt, reduziert sich obige Summe auf einen Term, und zwar auf $\alpha_{11} \cdot \dots \cdot \alpha_{nn}$.

Alternativ können wir im Sinne elementarer Zeilenumformungen argumentieren. Gilt $\alpha_{ii} = 0$ für einen Index $i \in \{1, \dots, n\}$, so sind die Spalten mit den Indizes $1, \dots, i$ offenbar linear abhängig, und es gilt $\det A = 0$. Ansonsten multipliziere man für $i = 1, \dots, n$ die i -te Zeile von A mit α_{ii}^{-1} , wobei sich die Determinante jeweils um den Faktor α_{ii}^{-1} ändert. Die resultierende Matrix lässt sich dann in die Einheitsmatrix überführen, indem man für $i = 2, \dots, n$ geeignete Vielfache der i -ten Zeile zu den vorhergehenden Zeilen addiert. Der Wert der Determinante bleibt dabei unverändert, so dass man wie gewünscht $\det A = \alpha_{11} \dots \alpha_{nn}$ erhält.

(2) Zu $m, n \in \mathbb{N}$ betrachte man Matrizen $A_{11} \in K^{m \times m}$, $A_{12} \in K^{m \times n}$, $A_{22} \in K^{n \times n}$ sowie die Nullmatrix $0 \in K^{n \times m}$. Für die zusammengesetzte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

gilt dann $\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22})$. Um dies nachzuweisen, nehmen wir A von der Form $(\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,m+n}$ an. Es gilt dann $\alpha_{ij} = 0$ für $m+1 \leq i \leq m+n$, $1 \leq j \leq m$. In der Summe

$$\det(A) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{m+n}} \operatorname{sgn} \pi \cdot \alpha_{\pi(1),1} \cdot \dots \cdot \alpha_{\pi(m+n),m+n}.$$

haben wir daher nur Terme zu solchen Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_n$ zu berücksichtigen, welche $\pi(i) \leq m$ für $i = 1, \dots, m$ erfüllen. Dann gilt automatisch $m+1 \leq \pi(i) \leq m+n$ für $i = m+1, \dots, m+n$, und es “zerfällt” π in Permutationen σ von $\{1, \dots, m\}$ und τ von $\{m+1, \dots, m+n\}$, wobei $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$ gilt. Da auf diese Weise die zu betrachtenden Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_{m+n}$ bijektiv den Paaren $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ entsprechen, ergibt sich mit $A_{22} = (\beta_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m, \tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau) \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(m),m} \cdot \beta_{\tau(1),1} \dots \beta_{\tau(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha_{\sigma(1),1} \dots \alpha_{\sigma(m),m} \cdot \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) \beta_{\tau(1),1} \dots \beta_{\tau(n),n} \\ &= \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22}), \end{aligned}$$

wie behauptet.

Alternativ kann man dieses Resultat allerdings auch ohne größere Rechnung erhalten, indem man die Theorie der Determinantenfunktionen verwendet. Seien $E_m \in K^{m \times m}$ und $E_n \in K^{n \times n}$ die Einheitsmatrizen. Wir benutzen, dass

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

einerseits eine Determinantenfunktion in den Spalten von A_{11} ist, sowie andererseits auch in den Zeilen von A_{22} . Mit 4.2/5 ergibt sich daher die Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11}) \cdot \det \begin{pmatrix} E_m & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

und entsprechend für $A_{11} = E_m$ die Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} E_m & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{22}) \cdot \det \begin{pmatrix} E_m & A_{12} \\ 0 & E_n \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_m & A_{12} \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

nach Beispiel (i) die Determinante 1 besitzt, folgt wie gewünscht

$$\det(A) = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22}).$$

Schließlich wollen wir noch zeigen, wie man mittels elementarer Umformungen argumentieren kann. Gilt $\operatorname{rg} A_{11} < m$, so kann A nicht maximalen Rang

besitzen, da dann die ersten m Spalten von A linear abhängig sind. Entsprechendes gilt für $\text{rg } A_{22} < n$, da in diesem Falle die letzten n Zeilen von A linear abhängig sind. Insgesamt ergibt sich $\det A = 0 = \det A_{11} \cdot \det A_{22}$, falls mindestens eine der Matrizen A_{11} und A_{22} nicht invertierbar ist. Sind jedoch A_{11} und A_{22} beide invertierbar, so wende man auf die ersten m Zeilen von A elementare Zeilenumformungen an, welche die Untermatrix A_{11} in die Einheitsmatrix überführen. Die Determinante von A ändert sich hierbei offenbar um den Faktor $(\det A_{11})^{-1}$. Entsprechend wende man auf die letzten n Zeilen von A elementare Zeilenumformungen an, die die Untermatrix A_{22} in die Einheitsmatrix überführen. Dies bewirkt eine Änderung der Determinante um den Faktor $(\det A_{22})^{-1}$. Die resultierende Matrix besitzt dann die in Beispiel (1) betrachtete Form, wobei die Diagonalelemente alle den Wert 1 haben. Somit ist die Determinante dieser Matrix 1, und es folgt $\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}$.

(3) Ein berühmtes Beispiel einer konkret gegebenen Determinante ist die so genannte *Vandermondesche Determinante*

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

welche zu Elementen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ gebildet wird. Wir wollen induktiv

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)$$

zeigen. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial. Für $n > 1$ subtrahiere man in obiger Matrix von der n -ten Zeile das α_1 -fache der $(n-1)$ -ten Zeile usw. bis schließlich von der 2. Zeile das α_1 -fache der 1. Zeile. Dann gilt

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \dots & \alpha_n - \alpha_1 \\ 0 & \alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n(\alpha_n - \alpha_1) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_1) & \dots & \alpha_n^{n-2}(\alpha_n - \alpha_1) \end{pmatrix}$$

und es folgt mit obigem Beispiel (2)

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\prod_{i > 1} (\alpha_i - \alpha_1) \right) V(\alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Per Induktion ergibt sich daraus die Behauptung.

Schließlich wollen für Matrizen $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$, $n \leq 3$, deren Determinanten noch explizit angeben.

$$\begin{aligned}
n = 1 : \quad \det(A) &= \alpha_{11} \\
n = 2 : \quad \det(A) &= \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12} \\
n = 3 : \quad \det(A) &= \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} + \alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13} + \alpha_{31}\alpha_{12}\alpha_{23} \\
&\quad - \alpha_{11}\alpha_{32}\alpha_{23} - \alpha_{31}\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{21}\alpha_{12}\alpha_{33}
\end{aligned}$$

Letztere Formel entspricht der Aufzistung

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \right. \\
\left. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Die Art der Summanden kann man sich dabei an folgendem Schema (bezeichnet als Regel von Sarrus) in Erinnerung bringen:

$$\begin{array}{ccccc}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\
\alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\
\alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32}
\end{array}$$

Man hat also zur Berechnung von $\det(\alpha_{ij})_{i,j=1,2,3}$ die Produkte über die Elemente der 3 von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen zu addieren und davon die Produkte über die Elemente der 3 von links unten nach rechts oben verlaufenden Diagonalen zu subtrahieren.

Aufgaben

1. Für $A \in K^{n \times n}$ mit $A^t = -A$ und ungeradem n zeige man: Es gilt $\det(A) = 0$ oder $1 + 1 = 0$ in K .
2. Für Matrizen $A \in K^{n \times n}$ lasse man folgende Zeilenoperationen zu:
 - (i) Vertauschen zweier verschiedener Zeilen und gleichzeitiges Multiplizieren einer Zeile mit -1 .
 - (ii) Multiplizieren einer Zeile mit einer Konstanten $\alpha \in K^*$ und gleichzeitiges Multiplizieren einer weiteren Zeile mit α^{-1} .
 - (iii) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.

Man zeige, dass sich invertierbare Matrizen $A \in K^{n \times n}$ mittels solcher Zeilenumformungen in Diagonalmatrizen des Typs

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d \end{pmatrix}$$

überführen lassen, wobei $d = \det A$ gilt.

3. Sei $A = (\alpha_{ij}) \in K^{n \times n}$ mit

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i < j \\ 0 & \text{für } i = j \\ -1 & \text{für } i > j \end{cases}$$

und n gerade. Man zeige $\det A = 1$.

4. Man berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

5. Es sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Für ein $x \in V$ gelte $V = \langle x, f(x), \dots, f^{n-1}(x) \rangle$ sowie

$$f^n(x) = a_{n-1}f^{n-1}(x) + \dots + a_1f(x) + a_0x.$$

Man zeige $\det f = (-1)^{n+1}a_0$.

6. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n \in K$ Konstanten mit $\alpha_i + \beta_j \neq 0$ für alle i, j . Man zeige (*Cauchysche Determinante*):

$$\det \begin{pmatrix} (\alpha_1 + \beta_1)^{-1} & \dots & (\alpha_1 + \beta_n)^{-1} \\ \dots & & \dots \\ (\alpha_n + \beta_1)^{-1} & \dots & (\alpha_n + \beta_n)^{-1} \end{pmatrix} = \frac{\prod_{i < j} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i)}{\prod_{i,j} (\alpha_i + \beta_j)}$$

4.4 Die Cramersche Regel

Wir wollen zunächst zu einer Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ die so genannte *adjungierte* Matrix A^{ad} erklären. Hierzu konstruieren wir für beliebige Indizes $i, j \in \{1, \dots, n\}$ eine $(n \times n)$ -Matrix A_{ij} aus A , indem wir alle Elemente $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}$ der i -ten Zeile und alle Elemente $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj}$ der j -ten Spalte von A durch 0 ersetzen, bis auf das Element α_{ij} im Schnittpunkt von i -ter Zeile und j -ter Spalte, welches wir zu 1 abändern, also:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,j-1} & 0 & \alpha_{1,j+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \alpha_{i-1,1} & \dots & \alpha_{i-1,j-1} & 0 & \alpha_{i-1,j+1} & \dots & \alpha_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{i+1,1} & \dots & \alpha_{i+1,j-1} & 0 & \alpha_{i+1,j+1} & \dots & \alpha_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n,j-1} & 0 & \alpha_{n,j+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Weiter werde die Matrix $A'_{ij} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$ durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte von A_{ij} erklärt.

Bemerkung 1. Es sei $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit den Spalten $a_1, \dots, a_n \in K^n$. Dann gilt für Indizes $1 \leq i, j \leq n$:

- (i) $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij})$.
- (ii) $\det(A_{ij}) = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$, wobei $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni})^t$ der i -te Einheitsvektor in K^n ist.

Beweis. Für $i = j = 1$ ist A_{ij} von der Gestalt

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{11} \end{pmatrix},$$

und wir erhalten, wie in Abschnitt 4.3 berechnet,

$$\det A_{11} = 1 \cdot \det A'_{11}.$$

Den Allgemeinfall von (i) führt man leicht hierauf zurück, indem man in A_{ij} die i -te Zeile mit allen vorhergehenden Zeilen sowie die j -te Spalte mit allen vorhergehenden Spalten vertauscht. Dies sind insgesamt $(i-1) + (j-1)$ Vertauschungen, so dass sich die Determinante der neuen Matrix dabei von $\det A_{ij}$ um den Faktor $(-1)^{i+j}$ unterscheidet.

Weiter ergibt sich (ii) aus 4.3/6(i), da sich die Matrix mit den Spalten $a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n$ in die Matrix A_{ij} überführen lässt, indem man geeignete Vielfache der j -ten Spalte e_i von den restlichen subtrahiert. $\square$

Definition 2. Für eine Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ und für Indizes $1 \leq i, j \leq n$ bilde man die Matrizen A_{ij}, A'_{ij} wie vorstehend beschrieben. Dann heißt

$$\tilde{\alpha}_{ij} = \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A'_{ij}$$

der Cofaktor von A zum Indexpaar (i, j) oder, in nicht ganz korrekter Sprechweise, der Cofaktor von A zum Koeffizienten α_{ij} . Die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{\alpha}_{ij})_{i,j}$ heißt die Matrix der Cofaktoren von A , und

$$A^{\text{ad}} := \tilde{A}^t = (\tilde{\alpha}_{ji})_{i,j}$$

die zu A adjungierte Matrix (oder die zu A gehörige Komplementärmatrix).

Als Nächstes wollen wir eine fundamentale Beziehung zwischen einer Matrix A und ihrer adjungierten A^{ad} beweisen, welche im weiteren Sinne als so genannte *Cramersche Regel* bezeichnet wird.

Satz 3. Sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$, und sei $E \in K^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Dann gilt

$$A^{\text{ad}} \cdot A = A \cdot A^{\text{ad}} = (\det A) \cdot E.$$

In ausführlicher Schreibweise bedeutet diese Identität:

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ji} \alpha_{jk} = \delta_{ik} \cdot \det A,$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \tilde{\alpha}_{kj} = \delta_{ik} \cdot \det A,$$

für $1 \leq i, k \leq n$.

Beweis. Es seien $a_1, \dots, a_n$ die n Spalten von A . Dann rechnet man unter Ausnutzung von Bemerkung 1

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ji} \alpha_{jk} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \cdot \det(A_{ji}) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \delta_{ik} \cdot \det(A), \end{aligned}$$

d. h. es gilt $\tilde{A}^t \cdot A = (\det A) \cdot E$. Um zu sehen, dass dies auch gleich $A \cdot \tilde{A}^t$ ist, benutze man die gerade bewiesene Beziehung für A^t anstelle von A , also

$$(\widetilde{A^t})^t \cdot A^t = (\det A^t) \cdot E.$$

Da man offenbar $\widetilde{A^t} = \tilde{A}^t$ hat, ergibt sich

$$\tilde{A} \cdot A^t = (\det A) \cdot E$$

unter Benutzung von $\det(A^t) = \det(A)$, vgl. 4.3/4. Transponieren liefert dann wie gewünscht

$$A \cdot \tilde{A}^t = (\det A) \cdot E.$$

□

Wir wollen einige Folgerungen aus diesem Satz ziehen. Zunächst erhält man als Spezialfall der Gleichungen in Satz 3 den nach Laplace benannten Satz zum Entwickeln einer Determinante nach einer Zeile oder Spalte.

Korollar 4. Sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$. Dann gilt:

$$\det A = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} \cdot \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij} \cdot \det(A'_{ij}), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \alpha_{ij} \cdot \det(A'_{ij}), \quad i = 1, \dots, n$$

Man bezeichnet dies als die Formeln zur Entwicklung von $\det A$ nach der j -ten Spalte bzw. i -ten Zeile.

Für invertierbare Matrizen kann man die Formeln in Satz 3 zur Berechnung der inversen Matrix benutzen.

Korollar 5. Für $A \in \text{Gl}(n, K)$ gilt $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A^{\text{ad}}$.

Des Weiteren wollen wir noch die Cramersche Regel im engeren Sinne herleiten, die sich auf die Lösung linearer Gleichungssysteme bezieht.

Korollar 6. Für eine Matrix $A \in \text{Gl}(n, K)$ und einen Spaltenvektor $b \in K^n$ betrachte man das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$. Dann ist $x = A^{-1} \cdot b$ die eindeutige Lösung dieses Systems. Sind $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A , so wird die i -te Komponente von $A^{-1} \cdot b$ gegeben durch

$$(\det A)^{-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Beweis. Wir benutzen die Formel $A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot \tilde{A}^t$ aus Korollar 5. Dann berechnet sich die i -te Komponente von $A^{-1} \cdot b$ für $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)^t$ mittels Bemerkung 1 zu

$$\begin{aligned} (\det A)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ji} \beta_j &= (\det A)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n (\det A_{ji}) \beta_j \\ &= (\det A)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \beta_j e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= (\det A)^{-1} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

□

Aufgaben

1. Man löse das folgende lineare Gleichungssystem mittels Cramerscher Regel:

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1$$

$$2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$$

$$5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1$$

2. Es sei $A = (\alpha_{ij}) \in \text{Gl}(n, \mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit Koeffizienten $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. Man zeige:

(i) A^{-1} hat Koeffizienten in $\mathbb{Q}$.

(ii) A^{-1} hat genau dann Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, wenn $\det A = \pm 1$ gilt.

3. Man zeige für invertierbare Matrizen $A, B \in \text{Gl}(n, K)$ und $\alpha \in K$:

(i) $(\alpha A)^{\text{ad}} = \alpha^{n-1} A^{\text{ad}}$

(ii) $(A^t)^{\text{ad}} = (A^{\text{ad}})^t$

(iii) $(AB)^{\text{ad}} = B^{\text{ad}} A^{\text{ad}}$

- (iv) $\det(A^{\text{ad}}) = (\det A)^{n-1}$
- (v) $(A^{\text{ad}})^{\text{ad}} = (\det A)^{n-2} A$
- (vi) $(A^{\text{ad}})^{-1} = (A^{-1})^{\text{ad}}$

Bemerkung: Alle vorstehenden Beziehungen, mit Ausnahme der letzten, bleiben auch für beliebige Matrizen aus $K^{n \times n}$ gültig. Um dies aus dem Fall invertierbarer Matrizen zu folgern, sind allerdings Konstruktionen erforderlich, die im Moment noch nicht zur Verfügung stehen.

4. Für Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n, b \in K^n$ und Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ gelte $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = b$. Man zeige

$$\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n) = \alpha_i \cdot \det(a_1, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

und folgere hieraus die Aussage von Korollar 6.

4.5 Äußere Produkte*

In Abschnitt 4.2 haben wir für einen K -Vektorraum V endlicher Dimension n alternierende Multilinearformen in n Variablen studiert. Wir wollen nun allgemeiner für beliebige K -Vektorräume V alternierende multilineare Abbildungen in einer gewissen Anzahl r von Variablen betrachten. Dabei heißt eine Abbildung $\Phi: V^r \longrightarrow W, (a_1, \dots, a_r) \longmapsto \Phi(a_1, \dots, a_r)$, in einen K -Vektorraum W *multilinear*, wenn Φ linear in jedem Argument ist, sowie *alternierend*, wenn $\Phi(a_1, \dots, a_r) = 0$ gilt, sofern zwei der Vektoren $a_1, \dots, a_r \in V$ übereinstimmen. Entsprechend wie in 4.2/2 bzw. 4.2/3 zeigt man:

Bemerkung 1. Für K -Vektorräume V, W und $r \in \mathbb{N}$ betrachte man eine alternierende multilineare Abbildung $\Phi: V^r \longrightarrow W$. Dann gilt für Vektoren $a_1, \dots, a_r \in V$:

- (i) $\Phi(a_1, \dots, a_r) = 0$, sofern $a_1, \dots, a_r$ linear abhängig sind.
- (ii) $\Phi(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(r)}) = \text{sgn } \pi \cdot \Phi(a_1, \dots, a_r)$ für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_r$.

Insbesondere folgt aus (i), dass es im Falle $r > \dim_K V$ nur triviale multilineare alternierende Abbildungen $V^r \longrightarrow W$ gibt. Wir wollen im Folgenden zu V und $r \in \mathbb{N}$ einen K -Vektorraum $\bigwedge^r V$ konstruieren, derart dass die alternierenden multilinearen Abbildungen $V^r \longrightarrow W$ in einen beliebigen K -Vektorraum W hinein in bijektiver Weise den K -linearen Abbildungen $\bigwedge^r V \longrightarrow W$ entsprechen.

Satz 2. Zu einem K -Vektorraum V und einer natürlichen Zahl $r \in \mathbb{N}$ gibt es stets einen K -Vektorraum D mit einer multilinearen alternierenden Abbildung $\sigma: V^r \longrightarrow D$, welche folgende universelle Eigenschaft besitzt:

Ist $\Phi: V^r \longrightarrow W$ eine alternierende multilineare Abbildung in einen K -Vektorraum W , so existiert eindeutig eine K -lineare Abbildung $\varphi: D \longrightarrow W$ mit $\Phi = \varphi \circ \sigma$, so dass also das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 V^r & \xrightarrow{\sigma} & D \\
 \searrow \Phi & & \nearrow \varphi \\
 & W &
 \end{array}$$

kommutiert.

Das Paar (D, σ) ist durch diese Abbildungseigenschaft bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

Dass in der Situation des Satzes zwei Paare (D, σ) und (D', σ') , welche die genannte universelle Abbildungseigenschaft besitzen, in kanonischer Weise isomorph sind, kann man leicht sehen. Es gibt dann nämlich eine eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung $\iota: D \rightarrow D'$ mit $\sigma' = \iota \circ \sigma$, sowie eine eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung $\iota': D' \rightarrow D$ mit $\sigma = \iota' \circ \sigma'$. Also hat man

$$\sigma = \iota' \circ \sigma' = \iota' \circ \iota \circ \sigma, \quad \sigma' = \iota \circ \sigma = \iota \circ \iota' \circ \sigma',$$

und damit

$$\text{id}_D \circ \sigma = (\iota' \circ \iota) \circ \sigma, \quad \text{id}_{D'} \circ \sigma' = (\iota \circ \iota') \circ \sigma'.$$

Es sind deshalb $\text{id}_D, \iota' \circ \iota: D \rightarrow D$ zwei K -lineare Abbildungen, die durch Komposition mit $\sigma: V^r \rightarrow D$ dieselbe alternierende multilineare Abbildung $V^r \rightarrow D$ ergeben. Die Eindeutigkeitsaussage in der Abbildungseigenschaft für (D, σ) ergibt dann $\iota' \circ \iota = \text{id}_D$. Entsprechend erhält man $\iota \circ \iota' = \text{id}_{D'}$, und es folgt, dass ι und ι' zueinander inverse Isomorphismen sind, eben die kanonischen Isomorphismen, deren Existenz im Satz behauptet wird.

In der Situation von Satz 2, dessen Beweis wir weiter unten fortführen werden, nennt man den K -Vektorraum D das r -fache äußere Produkt oder die r -fache äußere Potenz von V und benutzt hierfür die Notation $\bigwedge^r V$. Das Bild eines Tupels $(a_1, \dots, a_r) \in V^r$ unter der multilinearen alternierenden Abbildung $\sigma: V^r \rightarrow \bigwedge^r V$ wird mit

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_r$$

bezeichnet, wobei man hier auch von dem äußeren oder Dachprodukt der Elemente $a_1, \dots, a_r$ spricht. Diese Produktbildung ist linear und alternierend in den einzelnen Faktoren, d. h. es gilt für $\alpha, \beta \in K$, $a_1, \dots, a_r, b_i \in V$

$$\begin{aligned}
 & a_1 \wedge \dots \wedge (\alpha a_i + \beta b_i) \wedge \dots \wedge a_r \\
 &= \alpha \cdot (a_1 \wedge \dots \wedge a_i \wedge \dots \wedge a_r) + \beta \cdot (a_1 \wedge \dots \wedge b_i \wedge \dots \wedge a_r),
 \end{aligned}$$

sowie $a_1 \wedge \dots \wedge a_r = 0$, falls die Vektoren $a_1, \dots, a_r$ nicht paarweise verschieden sind. Wir können sogar aus der universellen Abbildungseigenschaft von $\bigwedge^r V$ folgende Information ableiten:

Bemerkung 3. Der K -Vektorraum $\bigwedge^r V$ wird von den Elementen $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ mit $a_1, \dots, a_r \in V$ erzeugt.

Beweis. Es sei $D' \subset \bigwedge^r V$ der lineare Unterraum, der von allen Elementen des Typs $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ erzeugt wird. Da das Bild von $\sigma: V^r \longrightarrow \bigwedge^r V$ in D' liegt, führt jede Zerlegung

$$\Phi: V^r \xrightarrow{\sigma} \bigwedge^r V \xrightarrow{\varphi} W$$

einer multilinearen alternierenden Abbildung $\Phi: V^r \longrightarrow W$ automatisch zu einer Zerlegung

$$\Phi: V^r \xrightarrow{\sigma} D' \xrightarrow{\varphi'} W$$

mit $\varphi' = \varphi|_{D'}$. Nun ist φ' aufgrund der Gleichung $\Phi = \varphi' \circ \sigma$ notwendigerweise eindeutig bestimmt auf dem Bild im σ , also auch auf dem von im σ erzeugten linearen Unterraum von D' , d. h. auf D' selbst. Somit erfüllt D' zusammen mit σ die universelle Eigenschaft eines äußeren Produkts, und man sieht wie oben, dass die Abbildung $D' \hookrightarrow \bigwedge^r V$ ein Isomorphismus ist, als Inklusion also die Identität darstellt. Somit bilden die Elemente des Typs $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ in der Tat ein Erzeugendensystem von $D' = \bigwedge^r V$. $\square$

Wir erleben hier zum ersten Mal, dass mathematische Objekte, nämlich der K -Vektorraum $\bigwedge^r V$ und die alternierende multilineare Abbildung

$$\sigma: V^r \longrightarrow \bigwedge^r V, \quad (a_1, \dots, a_r) \longmapsto a_1 \wedge \dots \wedge a_r,$$

nicht in konkreter Weise, sondern nur bis auf kanonische Isomorphie definiert werden. Natürlich muss noch gezeigt werden, dass Objekte mit den spezifizierten Eigenschaften auch wirklich existieren. Wir werden hierfür ein explizites Konstruktionsverfahren verwenden, das jedoch wegen seiner allgemeinen Natur nur von untergeordnetem Interesse sein kann. Stattdessen ist die charakterisierende universelle Eigenschaft das entscheidende Hilfsmittel zur Handhabung des Vektorraums $\bigwedge^r V$.

Um nun den *Beweis zu Satz 2* abzuschließen, bleibt noch die Existenz eines K -Vektorraums D zusammen mit einer alternierenden multilinearen Abbildung $\sigma: V^r \longrightarrow D$ nachzuweisen, welche die behauptete universelle Abbildungseigenschaft besitzt. Hierzu betrachten wir, motiviert durch die Aussage von Bemerkung 3, einen K -Vektorraum $\hat{D}$, der V^r als erzeugende Teilmenge enthält. Am einfachsten ist es, den freien von allen Symbolen $v \in V^r$ erzeugten K -Vektorraum zu betrachten, also

$$\hat{D} = K^{(V^r)} = \{(\alpha_v)_{v \in V^r}; \alpha_v \in K, \alpha_v = 0 \text{ für fast alle } v\}.$$

Hier bildet das System der Elemente

$$e_v = (\delta_{v,v'})_{v' \in V^r}, \quad v \in V^r,$$

eine Basis, wobei wir für Tupel $v = (a_1, \dots, a_r) \in V^r$ anstelle von e_v auch ausführlicher $e_{(a_1, \dots, a_r)}$ schreiben werden.

Sei $R \subset \hat{D}$ der lineare Unterraum, der von allen Elementen der Gestalt

$$e_{(\dots, \alpha a + \beta b, \dots)} - \alpha \cdot e_{(\dots, a, \dots)} - \beta \cdot e_{(\dots, b, \dots)},$$

$$e_{(\dots, a, \dots, a, \dots)}$$

mit $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in V$ erzeugt wird (wobei bei den Elementen ersteren Typs die Einträge an einer festen Stelle i stehen und die restlichen Einträge in allen drei Termen jeweils unverändert sind). Man setze dann $D = \hat{D}/R$ und bezeichne die Restklasse eines Basiselementes $e_{(a_1, \dots, a_r)} \in \hat{D}$ mit $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$. Dann ist nach Definition von R die Abbildung

$$\sigma: V^r \longrightarrow D, \quad (a_1, \dots, a_r) \longmapsto e_{(a_1, \dots, a_r)} \longmapsto a_1 \wedge \dots \wedge a_r,$$

sozusagen erzwingen ermaßen multilinear und alternierend. Um zu erkennen, dass σ die behauptete universelle Abbildungseigenschaft besitzt, betrachte man eine alternierende multilineare Abbildung $\Phi: V^r \longrightarrow W$ in einen K -Vektorraum W hinein. Dann kann man eine Abbildung $\hat{\varphi}: \hat{D} \longrightarrow W$ erklären, indem man die Bilder der kanonischen Basis $(e_v)_{v \in V^r}$ von $\hat{D}$ vorgibt, und zwar durch

$$\hat{\varphi}(e_{(a_1, \dots, a_r)}) = \Phi(a_1, \dots, a_r), \quad (a_1, \dots, a_r) \in V^r.$$

Man vergleiche hierzu Satz 2.1/7 (ii), den man in einer Version für nicht notwendig endliche Basen benötigt. Es entsteht somit das folgende kommutative Diagramm, wobei die Existenz der Abbildung φ noch zu erklären ist:

$$\begin{array}{ccc} & \hat{D} & \\ & \downarrow \hat{\varphi} & \\ V^r & \xrightarrow{\sigma} & D = \hat{D}/R \\ & \downarrow \Phi & \uparrow \varphi \\ & W & \end{array}$$

Aus der Eigenschaft, dass Φ multilinear und alternierend ist, ergibt sich sofort, dass $\ker \hat{\varphi}$ alle erzeugenden Elemente von R , also R selbst enthält. Mittels des Homomorphiesatzes 2.2/8 folgt dann, dass $\hat{\varphi}$ über den Quotienten $D = \hat{D}/R$ faktorisiert, sich also als Komposition der Projektion $\hat{D} \longrightarrow D$ und einer K -linearen Abbildung $\varphi: D \longrightarrow W$ schreiben lässt, wobei φ die Gleichung

$$(*) \quad \varphi(a_1 \wedge \dots \wedge a_r) = \Phi(a_1, \dots, a_r)$$

für $(a_1, \dots, a_r) \in V^r$ erfüllt; dies bedeutet aber $\Phi = \varphi \circ \sigma$.

Es bleibt nun noch einzusehen, dass φ durch die Gleichung $\Phi = \varphi \circ \sigma$ eindeutig bestimmt ist. Gilt diese Gleichung, d. h. gilt $(*)$ für alle Tupel in V^r , so ist φ als K -lineare Abbildung jedenfalls eindeutig bestimmt auf dem linearen Unterraum von D , der von allen Elementen des Typs $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ erzeugt wird; vgl. 2.1/7. Dieser Unterraum ist aber identisch mit D , da die Elemente $e_{(a_1, \dots, a_r)}$

nach unserer Konstruktion eine Basis von $\hat{D}$ bilden, die Elemente $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ also immerhin noch den Quotientenvektorraum D erzeugen. $\square$

Die vorstehende Konstruktion ergibt im Fall $r = 0$ einen eindimensionalen K -Vektorraum $\bigwedge^0 V$, der von dem Bild des leeren Tupels aus V^0 erzeugt wird. Eine solche Situation läßt sich natürlich konkretisieren: Man setzt $\bigwedge^0 V := K$, wobei man vereinbart, dass das Produkt $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ für $r = 0$ leer ist und demgemäß den Wert 1 hat.

Als Nächstes wollen wir überlegen, wie man, ausgehend von einer Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ eines K -Vektorraums V eine Basis von $\bigwedge^r V$ erhalten kann. Hierzu bezeichne Z_r^n für $n, r \in \mathbb{N}$ die Menge aller r -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$. Weiter werde für Elemente $H \in Z_r^n$ der Vektor $x_H \in \bigwedge^r V$ durch $x_H = x_{h_1} \wedge \dots \wedge x_{h_r}$ erklärt, wobei man $H = \{h_1, \dots, h_r\}$ mit $h_1 < \dots < h_r$ schreibe. Für Elemente $a_1, \dots, a_r \in V$, etwa $a_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i$ mit Koeffizienten $\alpha_{ij} \in K$, setzen wir dann noch

$$\det_{X,H}(a_1, \dots, a_r) = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha_{h_{\pi(1)},1} \dots \alpha_{h_{\pi(r)},r}.$$

Es ist also $\det_{X,H}(a_1, \dots, a_r)$, abgesehen vielleicht von dem trivialen Fall $r = 0$, die Determinante derjenigen $(r \times r)$ -Matrix, die man aus der $(n \times r)$ -Matrix $(a_{1,X}, \dots, a_{r,X})$ erhält, indem man alle Zeilen mit einem Index $i \notin H$ streicht; dabei ist $a_{j,X}$ jeweils der Koordinatenspaltenvektor von a_j bezüglich der Basis X , $j = 1, \dots, r$. Insbesondere ergibt sich, dass $\det_{X,H}: V^r \longrightarrow K$ eine alternierende multilineare Abbildung ist.

Satz 4. *Wie vorstehend beschrieben betrachte man einen K -Vektorraum V mit einer Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$, sowie das r -te äußere Produkt $\bigwedge^r V$.*

(i) *Die Elemente x_H , $H \in Z_r^n$, bilden eine Basis von $\bigwedge^r V$. Insbesondere gilt $\dim_K(\bigwedge^r V) = \binom{n}{r}$.*

(ii) *Für beliebige Elemente $a_1, \dots, a_r \in V$ gilt*

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_r = \sum_{H \in Z_r^n} \det_{X,H}(a_1, \dots, a_r) x_H.$$

Beweis. Der Fall $r = 0$ ist trivial; sei also $r > 0$. Als alternierende multilineare Abbildung faktorisiert $\det_{X,H}: V^r \longrightarrow K$ über eine K -lineare Abbildung

$$d_{X,H}: \bigwedge^r V \longrightarrow K,$$

und es gilt $d_{X,H}(x_{H'}) = \delta_{H,H'}$ für $H, H' \in Z_r^n$, wie man leicht einsieht. Letztere Gleichungen können aber nur dann bestehen, wenn die Elemente x_H , $H \in Z_r^n$ linear unabhängig sind. Dass weiter die x_H ein Erzeugendensystem und damit insgesamt eine Basis von $\bigwedge^r V$ bilden, folgt dann aus (ii), da die Elemente des Typs $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ ein Erzeugendensystem bilden.

Es bleibt also noch Aussage (ii) nachzuweisen. Schreibt man $a_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i$ mit Koeffizienten $\alpha_{ij} \in K$, so kann man wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} a_1 \wedge \dots \wedge a_r &= \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \alpha_{i_1,1} \dots \alpha_{i_r,r} \cdot x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \\ &= \sum_{H \in Z_r^n} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_r} \operatorname{sgn}(\pi) \alpha_{h_{\pi(1)},1} \dots \alpha_{h_{\pi(r)},r} \cdot x_H \\ &= \sum_{H \in Z_r^n} \det_{X,H}(a_1, \dots, a_r) \cdot x_H. \end{aligned}$$

□

Der gerade gegebene Beweis zeigt im Übrigen, dass die von den alternierenden multilinearen Abbildungen $\det_{X,H}: V^r \rightarrow K$ induzierten K -linearen Abbildungen $d_{X,H}: \bigwedge^r V \rightarrow K$ eine Basis des Dualraums $(\bigwedge^r V)^*$ bilden, nämlich gerade die duale Basis zu der Basis von $\bigwedge^r V$, die von den Elementen x_H gebildet wird.

Ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K -Vektorräumen, so gibt es für $r \in \mathbb{N}$ eine eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung

$$\bigwedge^r f: \bigwedge^r V \rightarrow \bigwedge^r W$$

mit

$$\bigwedge^r f(a_1 \wedge \dots \wedge a_r) = f(a_1) \wedge \dots \wedge f(a_r).$$

Die Eindeutigkeit von $\bigwedge^r f$ ist klar, da die Elemente des Typs $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ den Vektorraum $\bigwedge^r V$ erzeugen. Um die Existenz zu zeigen, betrachte man im Falle $r > 0$ die alternierende multilineare Abbildung

$$V^r \rightarrow \bigwedge^r W, \quad (a_1, \dots, a_r) \mapsto f(a_1) \wedge \dots \wedge f(a_r),$$

und nutze aus, dass diese über $\bigwedge^r V$ faktorisiert.

Korollar 5. *Es sei $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V endlicher Dimension n . Dann ist der zugehörige Endomorphismus*

$$\bigwedge^n f: \bigwedge^n V \rightarrow \bigwedge^n V$$

gerade die Multiplikation mit $\det f \in K$.

Beweis. Man wähle eine Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ von V . Dann gilt

$$(\bigwedge^n f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_n),$$

sowie nach Satz 4

$$f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_n) = \det(f(x_1)_X, \dots, f(x_n)_X) \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_n.$$

Da $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ eine Basis von $\bigwedge^n V$ bildet, folgt die Behauptung. □

Wir wollen nun noch zeigen, dass man das Dachprodukt “ $\wedge$ ” als Produkt in einem geeigneten Ring auffassen kann.

Lemma 6. *Es sei V ein K -Vektorraum. Zu $r, s \in \mathbb{N}$ existiert dann eine K -bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \wedge: \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V &\longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \\ (a_1 \wedge \dots \wedge a_r, b_1 \wedge \dots \wedge b_s) &\longmapsto a_1 \wedge \dots \wedge a_r \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_s, \end{aligned}$$

welche durch die angegebene Abbildungsvorschrift eindeutig charakterisiert ist.

Beweis. Man betrachte die alternierende multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi: V^{r+s} &\longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \\ (a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s) &\longmapsto a_1 \wedge \dots \wedge a_r \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_s, \end{aligned}$$

wobei wir $r, s > 0$ annehmen. Die Fälle $r = 0$ oder $s = 0$ sind in ähnlicher Weise zu behandeln, unter Verwendung der Konvention, dass leere Produkte den Wert 1 haben. Für festgewählte Elemente $a_1, \dots, a_r \in V$ ergibt sich eine alternierende multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} V^s &\longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \\ (b_1, \dots, b_s) &\longmapsto a_1 \wedge \dots \wedge a_r \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_s, \end{aligned}$$

welche durch $\bigwedge^s V$ faktorisiert. Es induziert Φ daher eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi': V^r \times \bigwedge^s V &\longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \\ (a_1, \dots, a_r, \sum_j b_{j1} \wedge \dots \wedge b_{js}) &\longmapsto \sum_j a_1 \wedge \dots \wedge a_r \wedge b_{j1} \wedge \dots \wedge b_{js}, \end{aligned}$$

und man sieht, da Dachprodukte der Form $a_1 \wedge \dots \wedge a_r \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_s$ multilinear und alternierend in den einzelnen Faktoren sind, dass $\Phi'(\cdot, b)$ für festes $b \in \bigwedge^s V$ multilinear und alternierend auf V^r ist. Folglich induziert Φ' eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi'': \bigwedge^r V \times \bigwedge^s V &\longrightarrow \bigwedge^{r+s} V, \\ \left(\sum_i a_{i1} \wedge \dots \wedge a_{ir}, \sum_j b_{j1} \wedge \dots \wedge b_{js} \right) &\longmapsto \sum_{ij} a_{i1} \wedge \dots \wedge a_{ir} \wedge b_{j1} \wedge \dots \wedge b_{js}, \end{aligned}$$

derart, dass $\Phi''(\cdot, b)$ für alle $b \in \bigwedge^s V$ K -linear auf $\bigwedge^r V$ ist. Die Rechenregeln für Dachprodukte zeigen dann, dass Φ'' sogar, wie gewünscht, K -bilinear ist. Dass Φ'' durch die angegebene Abbildungsvorschrift eindeutig charakterisiert ist, folgt daraus, dass die Elemente des Typs $a_1 \wedge \dots \wedge a_r$ ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^r V$ bilden und Entsprechendes für $\bigwedge^s V$ gilt. $\square$

Man kann nun zu einem K -Vektorraum V die (konstruierte) direkte Summe

$$\bigwedge V = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \bigwedge^r V$$

aller äußeren Potenzen bilden, womit man ähnlich wie in 1.6 denjenigen Teil des kartesischen Produktes $\prod_{r \in \mathbb{N}} \bigwedge^r V$ meint, der aus allen Familien $(\lambda_r)_{r \in \mathbb{N}}$ mit $\lambda_r \in \bigwedge^r V$ sowie $\lambda_r = 0$ für fast alle $r \in \mathbb{N}$ besteht. Es ist $\bigwedge V$ in natürlicher Weise ein K -Vektorraum, und man kann zeigen, dass die in Lemma 6 betrachteten Abbildungen des Typs $\bigwedge^r V \times \bigwedge^s V \longrightarrow \bigwedge^{r+s} V$ auf $\bigwedge V$ eine Multiplikation definieren, derart dass $\bigwedge V$ ein Ring wird. Dabei erkennt man $K = \bigwedge^0 V$ in kanonischer Weise als Unterring von $\bigwedge V$ und spricht von einer K -Algebra. Genauer bezeichnet man $\bigwedge V$ als die *äußere Algebra* zu V .

Wir wollen hier die Produktbildung aus Lemma 6 lediglich dazu benutzen, um den so genannten *allgemeinen Laplaceschen Entwicklungssatz* für Determinanten herzuleiten. Wir betrachten dazu wieder einen K -Vektorraum V mit Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ und verwenden eine Notation wie in Satz 4, insbesondere sei an die alternierenden multilinearen Abbildungen $\det_{X,H}: V^r \longrightarrow K$ zu Elementen $H \in Z_r^n$ erinnert. Dabei stimmt $\det_{X,\{1,\dots,n\}}$ mit der in 4.2/8 eingeführten Determinantenfunktion $\det_X$ überein. Weiter sei $H^\dagger \in Z_{n-r}^n$ für $H \in Z_r^n$ erklärt als Komplement $\{1, \dots, n\} - H$, und man setze $\rho_H = (-1)^\nu$, wobei ν die Anzahl aller Paare $(h, h^\dagger) \in H \times H^\dagger$ mit $h > h^\dagger$ bezeichnet.

Satz 7. *Es sei V ein K -Vektorraum mit Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$. Mit vorstehender Notation gilt dann für $1 \leq r < n$ und Vektoren $a_1, \dots, a_n \in V$:*

$$\det_X(a_1, \dots, a_n) = \sum_{H \in Z_r^n} \rho_H \cdot \det_{X,H}(a_1, \dots, a_r) \cdot \det_{X,H^\dagger}(a_{r+1}, \dots, a_n)$$

Beweis. Unter Verwendung von Satz 4 und Lemma 6 kann man wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} & \det_X(a_1, \dots, a_n) \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_n \\ &= a_1 \wedge \dots \wedge a_n \\ &= (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \wedge (a_{r+1} \wedge \dots \wedge a_n) \\ &= \left(\sum_{H \in Z_r^n} \det_{X,H}(a_1, \dots, a_r) \cdot x_H \right) \wedge \left(\sum_{H \in Z_{n-r}^n} \det_{X,H}(a_{r+1}, \dots, a_n) \cdot x_H \right) \\ &= \sum_{H \in Z_r^n} \det_{X,H}(a_1, \dots, a_r) \cdot \det_{X,H^\dagger}(a_{r+1}, \dots, a_n) \cdot x_H \wedge x_{H^\dagger} \\ &= \sum_{H \in Z_r^n} \rho_H \cdot \det_{X,H}(a_1, \dots, a_r) \cdot \det_{X,H^\dagger}(a_{r+1}, \dots, a_n) \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_n \end{aligned}$$

Da $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ eine Basis von $\bigwedge^n V$ bildet, insbesondere also von Null verschieden ist, ergibt sich die gewünschte Beziehung. $\square$

Wenden wir Satz 7 auf $V = K^n$ und die kanonische Basis an, so beschreibt die hergeleitete Formel die Entwicklung der Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix nach den ersten r Spalten. Durch Spaltenvertauschung und Berücksichtigung

entsprechender Vorzeichen gewinnt man einen Entwicklungssatz nach r beliebig vorgegebenen Spalten. Weiter kann man durch Transponieren hieraus einen Entwicklungssatz nach vorgegebenen r Zeilen gewinnen.

Aufgaben

1. Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subset V$ ein linearer Unterraum. Man formuliere eine universelle Eigenschaft, die den Quotientenvektorraum V/U charakterisiert.
2. Es sei V ein K -Vektorraum. Man zeige, gegebene Vektoren $a_1, \dots, a_r \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn das Element $a_1 \wedge \dots \wedge a_r \in \bigwedge^r V$ nicht trivial ist.
3. Es sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K -Vektorräumen. Man zeige für $r \in \mathbb{N}$, dass die Abbildung

$$\bigwedge^r f: \bigwedge^r V \longrightarrow \bigwedge^r W$$

injektiv bzw. surjektiv ist, sofern f diese Eigenschaft besitzt.

4. Es sei V ein K -Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Man bestimme

$$\dim \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} (\bigwedge^r V).$$

5. Für einen K -Vektorraum V betrachte man $\bigoplus_{r \in \mathbb{N}} \bigwedge^r V$ als Ring unter dem Dachprodukt $\wedge$. Man zeige, dass für ein Element a dieses Ringes genau dann $a \cdot a = 0$ gilt, wenn man $a \in \bigoplus_{i>0} \bigwedge^i V$ hat.
6. *Symmetrische Produkte:* Es sei V ein K -Vektorraum, und $r \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $\Phi: V^r \longrightarrow W$ in einen K -Vektorraum W heißt *symmetrisch*, wenn $\Phi(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(r)}) = \Phi(a_1, \dots, a_r)$ für alle r -Tupel $(a_1, \dots, a_r) \in V^r$ und alle Permutationen $\pi \in \mathfrak{S}_r$ gilt. Man zeige: Es existiert ein K -Vektorraum P mit einer symmetrischen multilinearen Abbildung $\sigma: V^r \longrightarrow P$, welche folgende universelle Eigenschaft erfüllt:

Zu jeder symmetrischen multilinearen Abbildung $\Phi: V^r \longrightarrow W$ in einen K -Vektorraum W existiert eindeutig eine K -lineare Abbildung $\varphi: P \longrightarrow W$ mit der Eigenschaft $\Phi = \varphi \circ \sigma$.

Man nennt P die r -te *symmetrische Potenz* von V .