

2. Lineare Abbildungen

Vorbemerkungen

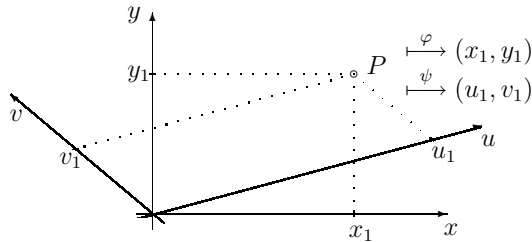
In Kapitel 1 haben wir Vektorräume über einem Körper K als Mengen eingeführt, die mit einer gewissen Struktur ausgestattet sind, nämlich einer Addition und einer skalaren Multiplikation mit Elementen aus K , wobei die Gültigkeit gewisser Axiome (Rechenregeln) gefordert wird. Unberührt blieb dabei zunächst die Frage, wann zwei K -Vektorräume V und V' als “gleich” oder “im Wesentlichen gleich” anzusehen sind. Es gibt eine natürliche Methode, um dies festzustellen: Man versuche, die Elemente von V mittels einer bijektiven Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ mit denjenigen von V' zu identifizieren, und zwar in der Weise, dass dabei die Addition und die skalare Multiplikation von V und V' in Übereinstimmung gebracht werden. Für die Abbildung f erfordert dies die Gleichungen

$$f(a + b) = f(a) + f(b), \quad f(\alpha a) = \alpha f(a),$$

für alle $a, b \in V$ und alle $\alpha \in K$. Lässt sich eine solche bijektive Abbildung f finden, so kann man die Vektorräume V und V' als “im Wesentlichen gleich” ansehen, und man nennt f in diesem Falle einen *Isomorphismus* zwischen V und V' . Allgemeiner betrachtet man auch nicht notwendig bijektive Abbildungen $f: V \longrightarrow V'$ mit den oben genannten Verträglichkeitseigenschaften und bezeichnet diese als *Homomorphismen* oder *lineare Abbildungen* von V nach V' . Die Untersuchung von Abbildungen dieses Typs ist das zentrale Thema des vorliegenden Kapitels.

In den Vorbemerkungen zu Kapitel 1 hatten wir erläutert, wie man $\mathbb{R}^2$, die Menge aller Paare reeller Zahlen, als Modell einer gegebenen anschaulichen Ebene E auffassen kann, und zwar indem man in E ein Koordinatensystem auszeichnet. Wir wollen hier noch etwas genauer untersuchen, in welcher Weise dieses Modell von der Wahl des Koordinatensystems abhängt, wobei wir $\mathbb{R}^2$ unter der komponentenweisen Addition und skalaren Multiplikation als $\mathbb{R}$ -Vektorraum auffassen. Wir wählen also einen Nullpunkt $0 \in E$ und ein Koordinatensystem in 0 mit den Achsen x und y ; in den nachfolgenden Skizzen ist dieses System der besseren Übersicht halber als rechtwinkliges Koordinatensystem gezeichnet, was aber keinesfalls erforderlich ist. Indem wir einem Punkt $P \in E$ das Paar $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ bestehend aus den Koordinaten von P bezüglich x und y zuordnen, erhalten wir eine bijektive Abbildung $\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}^2$, welche wir in den Vorbemerkungen zu Kapitel 1 jeweils als Identifizierung angesehen hatten. Für

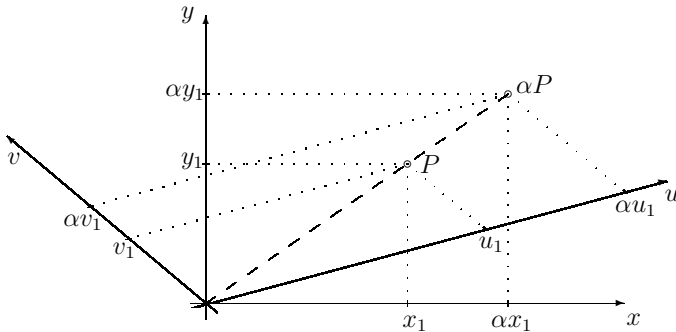
ein zweites Koordinatensystem in 0 mit den Koordinatenachsen u und v ergibt sich entsprechend eine bijektive Abbildung $\psi: E \rightarrow \mathbb{R}^2$, was mittels folgender Skizze verdeutlicht werden möge:



Der Übergang vom ersten zum zweiten Modell wird somit durch die Abbildung

$$f = \psi \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

beschrieben, und wir wollen plausibel machen, dass es sich hierbei um einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen in dem oben beschriebenen Sinne handelt. Zunächst einmal ist die Abbildung f bijektiv, da φ und ψ beide bijektiv sind. Es bleibt also lediglich noch zu zeigen, dass f mit der Vektorraumstruktur von $\mathbb{R}^2$ verträglich ist. Wir betrachten daher ein Paar $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$, den zugehörigen Punkt $P \in E$ mit $\varphi(P) = (x_1, y_1)$, sowie das Paar $(u_1, v_1) := \psi(P)$. Folglich besitzt P die Koordinaten x_1, y_1 bezüglich der Achsen x, y und entsprechend die Koordinaten u_1, v_1 bezüglich u, v . Nach Konstruktion gilt dann $f(x_1, y_1) = (u_1, v_1)$, und es ergibt sich für Skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ folgendes Bild:



Dabei sei $\alpha P \in E$ derjenige Punkt, der aus P durch Streckung mit Zentrum 0 und Faktor α entsteht. Mittels des Strahlensatzes folgt dann, dass die Koordinaten von αP bezüglich der Achsen x, y bzw. u, v ebenfalls durch Streckung mit Faktor α aus den entsprechenden Koordinaten von P hervorgehen. Dies bedeutet

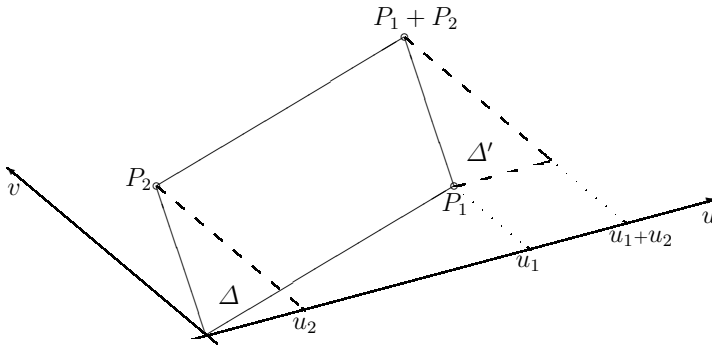
$$\varphi(\alpha P) = (\alpha x_1, \alpha y_1) = \alpha(x_1, y_1), \quad \psi(\alpha P) = (\alpha u_1, \alpha v_1) = \alpha(u_1, v_1),$$

und damit

$$f(\alpha(x_1, y_1)) = \psi(\varphi^{-1}(\alpha(x_1, y_1))) = \psi(\alpha P) = \alpha(u_1, v_1) = \alpha f((x_1, y_1)),$$

d. h. f ist verträglich mit der skalaren Multiplikation von $\mathbb{R}^2$.

Um auch die Verträglichkeit mit der Addition nachzuweisen, betrachten wir zunächst folgende Skizze:



Der Übersichtlichkeit halber haben wir uns hier auf ein einziges (schiefwinkliges) Koordinatensystem mit den Achsen u und v beschränkt. Ausgehend von den Punkten $P_1, P_2 \in E$ sei der Punkt $P_1 + P_2$ mittels der üblichen Parallelogrammkonstruktion definiert. Die Dreiecke Δ und Δ' , die jeweils die gestrichelten Strecken enthalten, erkennt man dann als kongruent, und es folgt, dass sich die u -Koordinate von $P_1 + P_2$ als Summe der u -Koordinaten von P_1 und P_2 ergibt. Entsprechendes gilt für die v -Koordinaten und in gleicher Weise für die Koordinaten bezüglich anderer Koordinatensysteme.

Gehen wir nun von zwei Punkten $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ aus und betrachten die zugehörigen Punkte $P_1, P_2 \in E$ mit $\varphi(P_i) = (x_i, y_i)$ für $i = 1, 2$, so ergibt sich mit $\psi(P_i) = (u_i, v_i)$ aufgrund vorstehender Beobachtung

$$\begin{aligned}\varphi(P_1 + P_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2), \\ \psi(P_1 + P_2) &= (u_1 + u_2, v_1 + v_2) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2).\end{aligned}$$

Die gewünschte Verträglichkeit von f mit der Addition auf $\mathbb{R}^2$ folgt dann aus der Gleichung

$$\begin{aligned}f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) &= \psi(\varphi^{-1}((x_1, y_1) + (x_2, y_2))) = \psi(P_1 + P_2) \\ &= (u_1, v_1) + (u_2, v_2) = f((x_1, y_1)) + f((x_2, y_2)),\end{aligned}$$

und man erkennt $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, wie behauptet, als Isomorphismus von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen.

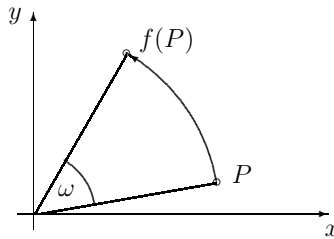
Die vorstehende Überlegung hat eine wichtige Konsequenz. Zeichnet man in der Ebene E einen Punkt 0 als Nullpunkt aus, so lässt sich E auf ganz natürliche Weise mit der Struktur eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums versehen. Man wähle nämlich ein Koordinatensystem in 0 und fasse die zugehörige Bijektion $\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}^2$, welche einem Punkt $P \in E$ die zugehörigen Koordinaten zuordnet, als Identifizierung auf. Die so von $\mathbb{R}^2$ auf E übertragene Vektorraumstruktur ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems von E in 0 . In der Tat, ist $\psi: E \longrightarrow \mathbb{R}^2$

eine Bijektion, die zu einem weiteren Koordinatensystem von E in 0 korrespondiert, so haben wir gerade gezeigt, dass die Komposition $\psi \circ \varphi^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ein Isomorphismus ist. Dies besagt aber, dass die mittels φ von $\mathbb{R}^2$ auf E übertragene Addition und skalare Multiplikation jeweils mit derjenigen übereinstimmt, die mittels ψ von $\mathbb{R}^2$ auf E übertragen werden kann. Wir können daher mit gutem Recht sagen, dass eine punktierte Ebene, also eine Ebene mit einem als Nullpunkt ausgezeichneten Punkt 0 , auf natürliche Weise die Struktur eines $\mathbb{R}$ -Vektorraums besitzt und dass dieser Vektorraum im Grunde genommen nichts anderes als das wohlbekannte Modell $\mathbb{R}^2$ ist, genauer, dass E als $\mathbb{R}$ -Vektorraum zu $\mathbb{R}^2$ isomorph ist. Entsprechendes gilt natürlich auch für eine Gerade und $\mathbb{R}^1$ als Modell, sowie für den drei-dimensionalen anschaulichen Raum und $\mathbb{R}^3$ als Modell. Es ist allgemeiner auch möglich, die Abhängigkeit der Modelle von der Wahl des Nullpunktes zu vermeiden. Anstelle linearer Abbildungen hat man dann so genannte *affine* Abbildungen zu betrachten, die sich als Komposition linearer Abbildungen mit Translationen darstellen.

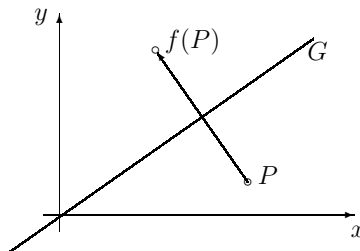
Beispiele für Isomorphismen $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gibt es zur Genüge, etwa die Streckung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_1, y_1) \longmapsto (\alpha_1 x_1, \beta_1 y_1),$$

mit fest vorgegebenen Konstanten $\alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}^*$, die Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit einem gewissen Winkel ω



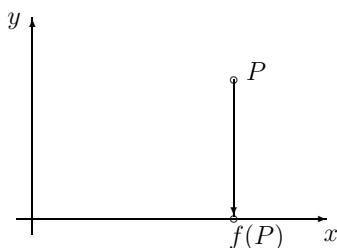
oder die Spiegelung an einer Geraden G , die den Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}$ enthält:



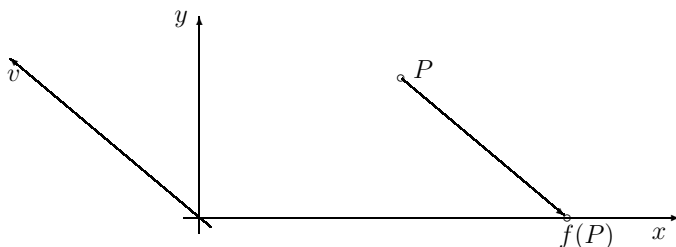
Ein einfaches Beispiel einer linearen Abbildung, die nicht bijektiv und damit kein Isomorphismus ist, stellt die so genannte *Projektion*

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, y_1) \longmapsto x_1,$$

dar. Diese Abbildung beschreibt sich in der Tat als (Parallel-) Projektion auf die x -Achse, indem man einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ auf den Schnittpunkt der x -Achse mit der Parallelen zur y -Achse durch P abbildet:



Man kann auch parallel zu einer anderen Achse v projizieren, etwa in der folgenden Weise:



Im Prinzip erhält man hier keine wesentlich andere lineare Abbildung, denn diese wird bezüglich der Koordinatenachsen x, v wiederum durch

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, v_1) \longmapsto x_1,$$

beschrieben. Ähnliche Beispiele für Isomorphismen oder, allgemeiner, lineare Abbildungen, lassen sich auch für höher-dimensionale Vektorräume $\mathbb{R}^n$ angeben.

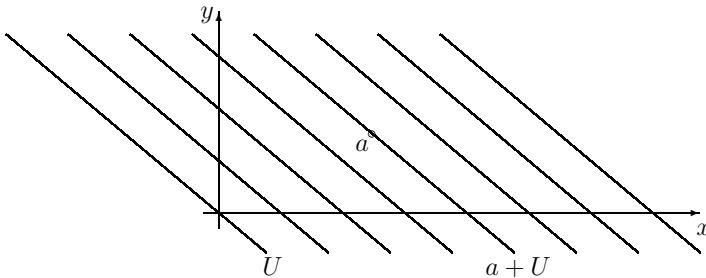
Im vorliegenden Kapitel wollen wir zunächst einmal einige allgemeine Eigenschaften linearer Abbildungen untersuchen, wobei wir wiederum Vektorräume über einem beliebigen Körper K betrachten. Zum Beispiel werden wir sehen, dass die Dimension des Bildes V' einer surjektiven linearen Abbildung $f: V \longrightarrow V'$, man spricht hier vom *Rang* von f , höchstens gleich der Dimension von V sein kann. Somit ist die Existenz beispielsweise einer surjektiven linearen Abbildung $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ausgeschlossen. Allgemeiner werden Phänomene dieser Art durch die so genannte *Dimensionsformel* für lineare Abbildungen geregelt. Auch wird sich zeigen, dass eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ bereits eindeutig durch die Bilder $f(x_i) \in V'$ einer vorgegebenen Basis $(x_i)_{i \in I}$ von V festgelegt ist, ja dass man sogar eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ eindeutig definieren kann, indem man lediglich die Bilder $f(x_i)$ in V' (in beliebiger Weise) vorgibt. Diese Eigenschaft ist wichtig für die Beschreibung linearer Abbildungen mittels Matrizen (das sind rechteckige Koeffizientenschemata mit Einträgen aus dem Grundkörper K) und damit für die rechnerische Handhabung linearer Abbildungen. Eine tiefergehende Betrachtung von Matrizen wird allerdings erst in Kapitel 3 erfolgen.

Ein weiteres Problem, das wir in diesem Kapitel lösen werden, beschäftigt sich mit der Konstruktion linearer Abbildungen $f: V \longrightarrow V'$ mit vorgegebenen Fasern $f^{-1}(f(a)) \subset V$, wobei a in V variiere. Man sieht leicht ein, dass für eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ die Faser zu $a = 0$, also $f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0)$

einen linearen Unterraum $U \subset V$ definiert, den so genannten *Kern* von f , der mit $\ker f$ bezeichnet wird, und dass für $a \in V$

$$f^{-1}(f(a)) = a + U = \{a + u; u \in U\}$$

gilt. Man erhält daher die Fasern von f , indem man den linearen Unterraum $U = \ker f$ mit allen Vektoren $a \in V$ parallel verschiebt, wobei man jeden solchen parallel verschobenen Unterraum $A = a + U$ als einen zu U *gehörigen affinen Unterraum* von V bezeichnet. Im Falle $V = \mathbb{R}^2$ und für eine Gerade $U \subset \mathbb{R}^2$ ergibt sich beispielsweise folgendes Bild:



Umgekehrt werden wir zu einem linearen Unterraum $U \subset V$ die Menge V/U aller zu U gehörigen affinen Unterräume betrachten und diese auf natürliche Weise zu einem K -Vektorraum machen, indem wir für $a, b \in V$ und $\alpha \in K$

$$(a + U) + (b + U) := (a + b) + U, \quad \alpha(a + U) := \alpha a + U$$

setzen. Dass man auf diese Weise tatsächlich einen Vektorraum erhält, den so genannten *Quotienten-* oder *Restklassenvektorraum* V/U , bedarf einiger Verifizierungen, die wir im Einzelnen durchführen werden. Insbesondere werden wir sehen, dass dann die kanonische Abbildung

$$\pi: V \longrightarrow V/U, \quad a \longmapsto a + U,$$

eine lineare Abbildung mit $\ker \pi = U$ ergibt, deren Fasern also gerade die zu U gehörigen affinen Unterräume von V sind. Die Abbildung π erfüllt eine wichtige, so genannte *universelle* Eigenschaft: Ist $f: V \longrightarrow V'$ eine lineare Abbildung mit einem Kern, der $U = \ker \pi \subset \ker f$ erfüllt, so zerlegt sich f in eine Komposition

$$f: V \xrightarrow{\pi} V/U \xrightarrow{\bar{f}} V'$$

mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $\bar{f}: V/U \longrightarrow V'$; dies ist im Wesentlichen die Aussage des *Homomorphiesatzes* für lineare Abbildungen.

Die Definition eines Vektorraums als Menge mit einer Addition und skalaren Multiplikation macht keinerlei Vorschriften über die Art der Elemente dieser Menge. Wir nutzen dies insbesondere bei der Definition des Restklassenvektorraums V/U aus, dessen Elemente affine Unterräume von V und damit

Teilmengen von V sind. Ein weiteres Beispiel eines Vektorraums, der zu einem gegebenen K -Vektorraum V konstruiert werden kann, ist der *Dualraum* V^* . Seine Elemente sind lineare Abbildungen, und zwar die linearen Abbildungen $V \rightarrow K$. Zwischen V und V^* bestehen enge symmetrische Beziehungen; man spricht von einer Dualität zwischen V und V^* , daher auch der Name Dualraum. Beispielsweise lässt sich V im Falle endlicher Dimension selbst wieder als Dualraum von V^* interpretieren. Mit dem Dualraum eines Vektorraums V decken wir in einem gewissen Sinne die linearen Eigenschaften von V auf einem höheren Niveau auf. Die zu beweisenden Ergebnisse werden es uns in gewissen Fällen ermöglichen, ansonsten erforderliche konventionelle Rechnungen durch konzeptionelle Argumente zu ersetzen.

2.1 Grundbegriffe

Zu Vektoren $a_1, \dots, a_n$ eines K -Vektorraums V kann man stets die Abbildung

$$f: K^n \rightarrow V, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i,$$

betrachten. Für die Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni}) \in K^n$, $i = 1, \dots, n$, welche die kanonische Basis von K^n bilden, gilt dann $f(e_i) = a_i$, und wir können in äquivalenter Weise sagen, dass f durch die Vorschrift

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$$

beschrieben wird. Bilden nun $a_1, \dots, a_n$ sogar eine Basis von V , so hat jedes Element $a \in V$ eine eindeutig bestimmte Darstellung $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$, und man sieht, dass in diesem Falle die Abbildung f bijektiv ist. Da weiter f verträglich mit den Vektorraumstrukturen auf K^n und V ist — es gilt nämlich $f(a + b) = f(a) + f(b)$ für $a, b \in K^n$ sowie $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ für $\alpha \in K$, $a \in K^n$ —, können wir V nach Auswahl der Basis $a_1, \dots, a_n$ unter Verwendung der Abbildung f mit K^n identifizieren. Dies zeigt insbesondere, dass Abbildungen zwischen Vektorräumen, welche die Vektorraumstrukturen respektieren, von Interesse sind.

Definition 1. Eine Abbildung $f: V \rightarrow V'$ zwischen K -Vektorräumen V, V' heißt K -Homomorphismus oder K -lineare Abbildung, falls gilt:

- (i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$ für $a, b \in V$.
- (ii) $f(\alpha a) = \alpha f(a)$ für $\alpha \in K$, $a \in V$.

Die Bedingungen (i) und (ii) lassen sich zusammenfassen, indem man für $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in V$ in äquivalenter Weise fordert:

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$$

Als einfache Rechenregeln prüft man leicht nach:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(-a) &= -f(a) \quad \text{für } a \in V \end{aligned}$$

Im Übrigen ist die Komposition linearer Abbildungen wieder linear. Wir wollen einige einfache Beispiele linearer Abbildungen anschauen.

(1) Die Abbildung $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Im}(z)$, ist $\mathbb{R}$ -linear, nicht aber $\mathbb{C}$ -linear.

(2) Für einen K -Vektorraum V ist die identische Abbildung $\operatorname{id}: V \longrightarrow V$, $a \longmapsto a$, ein Beispiel einer K -linearen Abbildung, ebenso die Nullabbildung $0: V \longrightarrow 0$, welche jedes Element $a \in V$ auf 0 abbildet. Weiter ist für einen linearen Unterraum $U \subset V$ die Inklusionsabbildung $U \hookrightarrow V$ ein Beispiel einer K -linearen Abbildung.

(3) Es sei K ein Körper. Zu $m, n \in \mathbb{N}$ betrachte man ein System

$$(\lambda_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

von Elementen aus K ; man spricht von einer *Matrix*. Dann wird durch

$$K^n \longrightarrow K^m, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{1j} \alpha_j, \dots, \sum_{j=1}^n \lambda_{mj} \alpha_j \right),$$

eine K -lineare Abbildung gegeben. Wir werden sogar im Weiteren sehen, dass jede lineare Abbildung $K^n \longrightarrow K^m$ von dieser Gestalt ist, also durch eine Matrix von Elementen aus K beschrieben werden kann. Allerdings werden wir dann Vektoren in K^n bzw. K^m in konsequenter Weise als *Spalten*-Vektoren und nicht mehr wie bisher als *Zeilen*-Vektoren schreiben, da dies besser mit dem dann einzuführenden Matrizenprodukt harmonisiert.

Man nennt eine K -lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ zwischen Vektorräumen einen *Monomorphismus*, falls f injektiv ist, einen *Epimorphismus*, falls f surjektiv ist, und einen *Isomorphismus*, falls f bijektiv ist.

Bemerkung 2. Ist $f: V \longrightarrow V'$ ein Isomorphismus zwischen K -Vektorräumen, so existiert die Umkehrabbildung $f^{-1}: V' \longrightarrow V$, und diese ist K -linear, also wiederum ein Isomorphismus.

Beweis. Es ist nur die K -Linearität der Umkehrabbildung f^{-1} zu zeigen. Seien also $a', b' \in V'$ gegeben. Für $a = f^{-1}(a')$ und $b = f^{-1}(b')$ hat man dann $a' = f(a)$ und $b' = f(b)$, sowie $a' + b' = f(a + b)$ aufgrund der Linearität von f . Folglich gilt

$$f^{-1}(a' + b') = a + b = f^{-1}(a') + f^{-1}(b').$$

Für $\alpha \in K$ gilt weiter $\alpha a' = f(\alpha a)$ und daher

$$f^{-1}(\alpha a') = \alpha a = \alpha f^{-1}(a'),$$

d. h. f^{-1} ist K -linear. □

Isomorphismen schreiben wir häufig in der Form $V \xrightarrow{\sim} V'$. Im Falle $V = V'$ bezeichnet man eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow V$ auch als einen *Endomorphismus* von V , und man versteht unter einem *Automorphismus* von V einen bijektiven Endomorphismus.

Bemerkung 3. *Es sei $f: V \rightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Dann sind*

$$\begin{aligned} \ker f &= f^{-1}(0) = \{a \in V; f(a) = 0\} \quad \text{und} \\ \operatorname{im} f &= f(V) = \{f(a); a \in V\} \end{aligned}$$

lineare Unterräume von V bzw. V' . Diese werden als Kern bzw. Bild von f bezeichnet.

Der *Beweis* ist einfach zu führen. Für $a, b \in \ker f$ hat man $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0 + 0 = 0$, also $a + b \in \ker f$. Weiter gilt $f(\alpha a) = \alpha f(a) = \alpha 0 = 0$ und damit $\alpha a \in \ker f$ für $\alpha \in K$ und $a \in \ker f$. Da $\ker f \neq \emptyset$ wegen $0 \in \ker f$, erkennt man $\ker f$ als linearen Unterraum von V .

Ähnlich sieht man, dass $\operatorname{im} f$ ein linearer Unterraum von V' ist. Wegen $0 \in \operatorname{im} f$ ist jedenfalls $\operatorname{im} f$ nicht leer. Seien weiter $\alpha \in K$, $a', b' \in \operatorname{im} f$, etwa $a' = f(a)$, $b' = f(b)$ mit $a, b \in V$. Dann folgt $\alpha a' = f(\alpha a)$ sowie $a' + b' = f(a + b)$, d. h. $\alpha a', a' + b' \in \operatorname{im} f$. Also ist auch $\operatorname{im} f$ ein linearer Unterraum von V' . □

Bemerkung 4. *Eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow V'$ zwischen Vektorräumen ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = 0$ gilt.*

Beweis. Sei zunächst f injektiv. Dann besteht insbesondere $\ker f = f^{-1}(0)$ aus höchstens einem Element, und wegen $0 \in f^{-1}(0)$ folgt $\ker f = 0$. Sei nun umgekehrt die Beziehung $\ker f = 0$ gegeben, und seien $a, b \in V$ mit $f(a) = f(b)$. Dann ergibt sich

$$f(a - b) = f(a) - f(b) = 0,$$

also $a - b \in \ker f = 0$ und damit $a = b$, d. h. f ist injektiv. □

Wir wollen weiter untersuchen, wie sich Erzeugendensysteme sowie linear abhängige bzw. unabhängige Systeme unter Anwendung linearer Abbildungen verhalten.

Bemerkung 5. *Es sei $f: V \rightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen.*

- (i) *Für Teilmengen $A \subset V$ gilt $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$.*

(ii) Es seien die Vektoren $a_1, \dots, a_n \in V$ linear abhängig. Dann sind auch deren Bilder $f(a_1), \dots, f(a_n) \in V'$ linear abhängig. Die Umkehrung hierzu gilt, wenn f injektiv ist.

(iii) Es seien $a_1, \dots, a_n \in V$ Vektoren, deren Bilder $f(a_1), \dots, f(a_n) \in V'$ linear unabhängig sind. Dann sind auch $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig. Die Umkehrung hierzu gilt, wenn f injektiv ist.

Der Beweis kann durch einfache Verifikation der Definitionen geführt werden. Die entsprechenden Rechnungen seien jedoch dem Leser überlassen. Als Konsequenz von Aussage (iii) vermerken wir noch:

Bemerkung 6. Für eine K -lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ zwischen Vektorräumen gilt $\dim_K f(V) \leq \dim_K V$.

Eine wichtige Eigenschaft linearer Abbildungen besteht darin, dass sie bereits durch die Werte, die sie auf einer Basis des Urbildraumes annehmen, festgelegt sind.

Satz 7. Es sei V ein K -Vektorraum mit Erzeugendensystem $a_1, \dots, a_n$. Sind dann $a'_1, \dots, a'_n$ beliebige Vektoren eines weiteren K -Vektorraums V' , so gilt:

(i) Es gibt höchstens eine K -lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ mit $f(a_i) = a'_i$, $i = 1, \dots, n$.

(ii) Ist $a_1, \dots, a_n$ sogar eine Basis von V , so existiert genau eine K -lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ mit $f(a_i) = a'_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeitsaussage (i). Sei also $f: V \longrightarrow V'$ K -linear mit $f(a_i) = a'_i$, $i = 1, \dots, n$, und sei $a \in V$. Dann besitzt a eine Darstellung der Form $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$. Aufgrund der Linearität von f folgt

$$f(a) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i),$$

was bedeutet, dass $f(a)$ durch die Werte $f(a_i)$, $i = 1, \dots, n$, eindeutig bestimmt ist.

Bilden nun $a_1, \dots, a_n$ im Falle (ii) eine Basis von V , so sind für $a \in V$ die Koeffizienten α_i in der Darstellung $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ eindeutig bestimmt, und man kann eine Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ erklären, indem man setzt:

$$f(a) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i)$$

Diese Abbildung ist K -linear. Sind nämlich $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ und $b = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$ zwei Elemente von V , so gilt

$$a + b = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) a_i.$$

Da dies die (eindeutig bestimmte) Darstellung von $a + b$ als Linearkombination von $a_1, \dots, a_n$ ist, ergibt sich

$$f(a + b) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \beta_i) a'_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i a'_i + \sum_{i=1}^n \beta_i a'_i = f(a) + f(b).$$

Entsprechend rechnet man für $\alpha \in K$

$$f(\alpha a) = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha \alpha_i a'_i = \alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i a'_i = \alpha f(a),$$

und man sieht, dass $f: V \rightarrow V'$ K -linear ist. Es existiert also eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow V'$ mit $f(a_i) = a'_i$, und diese ist eindeutig bestimmt, wie wir in (i) gesehen haben. $\square$

Für zwei K -Vektorräume V und V' bilden die K -linearen Abbildungen $f: V \rightarrow V'$ einen K -Vektorraum, sozusagen den *Vektorraum aller K -linearen V' -wertigen Funktionen auf V* ; dieser wird meist mit $\text{Hom}_K(V, V')$ bezeichnet, also

$$\text{Hom}_K(V, V') = \{f: V \rightarrow V'; f \text{ } K\text{-linear}\}.$$

Dabei ist für $f, g \in \text{Hom}_K(V, V')$ die Summe $f + g$ durch

$$f + g: V \rightarrow V', \quad x \mapsto f(x) + g(x),$$

erklärt und entsprechend für $\alpha \in K$ das Produkt $\alpha \cdot f$ durch

$$\alpha \cdot f: V \rightarrow V', \quad x \mapsto \alpha \cdot (f(x)).$$

Dass $f + g$ und $\alpha \cdot f$ wiederum K -lineare Abbildungen von V nach V' darstellen, ist mit leichter Rechnung nachzuprüfen. Der Sachverhalt von Aussage (ii) in Satz 7 ist dann präziser so zu formulieren, dass für eine Basis $a_1, \dots, a_n$ von V die Zuordnung $f \mapsto (f(a_1), \dots, f(a_n))$ Anlass zu einem Isomorphismus von K -Vektorräumen $\text{Hom}_K(V, V') \xrightarrow{\sim} (V')^n$ gibt.

Diese Korrespondenz kann man noch konkreter beschreiben, wenn man neben der Basis $a_1, \dots, a_n$ von V auch in V' eine Basis fixiert. Sei also $b_1, \dots, b_m$ eine Basis von V' , wobei wir V' als endlich-dimensional annehmen. Dann besitzt jeder Vektor $a' \in V'$ eine eindeutige Darstellung $a' = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i$, ist also durch das Koeffiziententupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ auf umkehrbar eindeutige Weise bestimmt. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow V'$ korrespondiert daher zu n solchen Koeffiziententupeln $(\lambda_{1j}, \dots, \lambda_{mj})$, $j = 1, \dots, n$, die wir als Spalten interpretieren und zu einer Matrix zusammenfügen:

$$(\lambda_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{pmatrix}$$

Man nennt dies die *zu der linearen Abbildung f gehörige Matrix*, wobei diese Bezeichnung natürlich relativ zu den in V und V' fixierten Basen zu verstehen ist. Die lineare Abbildung f lässt sich aus der Matrix (λ_{ij}) mit Hilfe der Gleichungen

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_{ij} b_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

bzw.

$$f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j a_j\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \alpha_j\right) b_i$$

rekonstruieren.

Satz 8. *Es seien V, V' K -Vektorräume.*

(i) *Falls es einen Isomorphismus $f: V \xrightarrow{\sim} V'$ gibt, so stimmen die Dimensionen von V und V' überein, also $\dim_K V = \dim_K V'$.*

(ii) *Umgekehrt existiert im Falle $\dim_K V = \dim_K V' < \infty$ stets ein Isomorphismus $f: V \xrightarrow{\sim} V'$.*

Beweis. Ist $f: V \xrightarrow{\sim} V'$ ein Isomorphismus, so sieht man mit Bemerkung 5, dass ein System von Vektoren $a_1, \dots, a_n \in V$ genau dann linear unabhängig ist, wenn die Bilder $f(a_1), \dots, f(a_n) \in V'$ linear unabhängig sind. Dies bedeutet aber $\dim_K V = \dim_K V'$.

Gilt umgekehrt $\dim_K V = \dim_K V' = n < \infty$, so wähle man zwei Basen $a_1, \dots, a_n \in V$ und $a'_1, \dots, a'_n \in V'$. Nach Satz 7 (ii) existiert dann eine eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow V'$ mit $f(a_i) = a'_i$ für $i = 1, \dots, n$. Ist nun $a \in \ker f$, etwa $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$, so folgt $\sum_{i=1}^n \alpha_i a'_i = f(a) = 0$ und wegen der linearen Unabhängigkeit von $a'_1, \dots, a'_n$ bereits $\alpha_i = 0$ für alle i , also $a = 0$. Damit ist f injektiv. Aber f ist auch surjektiv. Denn Elemente $a' \in V'$ kann man stets in der Form $a' = \sum_{i=1}^n \alpha_i a'_i$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$ darstellen, und es gilt dann $f(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i) = a'$. $\square$

Korollar 9. *Ist V ein K -Vektorraum der Dimension $n < \infty$, so gibt es einen Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} K^n$.*

Dies bedeutet, dass es bis auf Isomorphie als endlich-dimensionale K -Vektorräume nur die Vektorräume K^n gibt. Wir wollen abschließend noch die so genannte Dimensionsformel für K -lineare Abbildungen beweisen.

Satz 10. *Es sei $f: V \rightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Dann gilt*

$$\dim_K V = \dim_K(\ker f) + \dim_K(\operatorname{im} f).$$

Statt $\dim_K(\operatorname{im} f)$, also der Dimension des Bildraumes $f(V)$, schreibt man häufig auch $\operatorname{rg} f$ und nennt dies den *Rang* von f .

Beweis zu Satz 10. Ist einer der Vektorräume $\ker f$ oder $\operatorname{im} f$ von unendlicher Dimension, so auch V ; falls $\dim_K(\operatorname{im} f) = \infty$, so folgt dies aus Bemerkung 5.

Wir dürfen daher $\ker f$ und $\operatorname{im} f$ als endlich-dimensional ansehen. Man wähle dann Vektoren $a_1, \dots, a_m$ in V , so dass deren Bilder $f(a_1), \dots, f(a_m)$ eine Basis von $\operatorname{im} f$ bilden. Weiter wähle man eine Basis $a_{m+1}, \dots, a_n$ von $\ker f$. Es genügt dann nachzuweisen, dass $a_1, \dots, a_n$ eine Basis von V bilden. Hierzu betrachte man einen Vektor $a \in V$. Es existiert eine Darstellung $f(a) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(a_i)$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$, da $f(a_1), \dots, f(a_m)$ den Vektorraum $\operatorname{im} f$ erzeugen. Weiter liegt der Vektor $a - \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i$ im Kern von f , und, da dieser von $a_{m+1}, \dots, a_n$ erzeugt wird, gibt es $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n \in K$ mit $a - \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i = \sum_{i=m+1}^n \alpha_i a_i$, also mit $a = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Dies zeigt, dass $a_1, \dots, a_n$ ein Erzeugendensystem von V bilden.

Um zu sehen, dass $a_1, \dots, a_n$ auch linear unabhängig sind, betrachte man eine Relation $\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i = 0$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$. Hieraus ergibt sich

$$0 = f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f(a_i)$$

und damit $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$, da $f(a_1), \dots, f(a_m)$ linear unabhängig sind. Dann folgt aber $\sum_{i=m+1}^n \alpha_i a_i = 0$ und weiter $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$, da $a_{m+1}, \dots, a_n$ linear unabhängig sind. Die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ verschwinden daher sämtlich, und wir sehen, dass $a_1, \dots, a_n$ linear unabhängig sind. $\square$

Korollar 11. *Es sei $f: V \longrightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen mit $\dim_K V = \dim_K V' < \infty$. Dann ist äquivalent:*

- (i) *f ist ein Monomorphismus.*
- (ii) *f ist ein Epimorphismus.*
- (iii) *f ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Sei zunächst Bedingung (i) erfüllt, also f ein Monomorphismus. Dann folgt unter Benutzung von Satz 10

$$\dim_K V' = \dim_K V = \dim_K(\ker f) + \dim_K(\operatorname{im} f).$$

Wegen $\dim_K(\ker f) = 0$ besitzt daher der lineare Unterraum $\operatorname{im} f \subset V'$ dieselbe (endliche) Dimension wie V' . Mit 1.5/14 (ii) ergibt sich $\operatorname{im} f = V'$, d. h. f ist ein Epimorphismus, und (ii) ist erfüllt.

Sei nun f mit Bedingung (ii) als Epimorphismus vorausgesetzt. Die Dimensionsformel in Satz 10 ergibt dann wegen $\operatorname{im} f = V'$ und $\dim_K V' = \dim_K V$ notwendig $\ker f = 0$, d. h. f ist injektiv und erfüllt damit Bedingung (iii). Dass schließlich (iii) die Bedingung (i) impliziert, ist trivial. $\square$

Auch hier sei darauf hingewiesen, dass Korollar 11 ähnlich wie 1.5/14 (ii) nicht auf den Fall unendlich-dimensionaler Vektorräume zu verallgemeinern ist, da ein unendlich-dimensionaler K -Vektorraum stets echte lineare Unterräume unendlicher Dimension besitzt.

Aufgaben

- Für einen Körper K und ein $n \in \mathbb{N}$ betrachte man K^n als K -Vektorraum. Es bezeichne $p_i: K^n \rightarrow K$ für $i = 1, \dots, n$ jeweils die Projektion auf die i -te Komponente. Man zeige:
 - Die Abbildungen p_i sind K -linear.
 - Eine Abbildung $f: V \rightarrow K^n$ von einem K -Vektorraum V nach K^n ist genau dann K -linear, wenn alle Kompositionen $p_i \circ f$ K -linear sind.
- Gibt es $\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die die folgenden Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^4$ jeweils auf die angegebenen Vektoren $b_i \in \mathbb{R}^3$ abbilden?
 - $a_1 = (1, 1, 0, 0), \quad a_2 = (1, 1, 1, 0), \quad a_3 = (0, 1, 1, 1), \quad a_4 = (0, 0, 1, 1)$
 $b_1 = (1, 2, 3), \quad b_2 = (2, 3, 1), \quad b_3 = (3, 1, 2), \quad b_4 = (2, 0, 4)$
 - $a_1 = (0, 1, 1, 1), \quad a_2 = (1, 0, 1, 1), \quad a_3 = (1, 1, 0, 1)$
 b_1, b_2, b_3 wie in (i)
 - $a_1 = (0, 1, 1, 1), \quad a_2 = (1, 0, 1, 1), \quad a_3 = (1, 1, 0, 1), \quad a_4 = (-1, 1, 0, 0)$
 b_1, b_2, b_3, b_4 wie in (i)
 - $a_1 = (0, 1, 1, 1), \quad a_2 = (1, 0, 1, 1), \quad a_3 = (1, 1, 0, 1), \quad a_4 = (0, 2, 0, 1)$
 b_1, b_2, b_3, b_4 wie in (i)
- Man bestimme alle $\mathbb{R}$ -linearen Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
- Man bestimme alle Körperhomomorphismen $f: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, d. h. alle $\mathbb{Q}$ -linearen Abbildungen, die zusätzlich $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$ erfüllen.
- Es sei V ein K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus mit $f^2 = f$. Man zeige $V = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.
- Für lineare Unterräume U, U' eines K -Vektorraums V betrachte man die Abbildung

$$\varphi: U \times U' \rightarrow V, \quad (a, b) \mapsto a - b.$$

- Man zeige, dass φ K -linear ist, wenn man $U \times U'$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation als K -Vektorraum auffasst.
- Man berechne $\dim_K(U \times U')$.
- Man wende die Dimensionsformel für lineare Abbildungen auf φ an und folgere die Dimensionsformel für lineare Unterräume von V

$$\dim_K U + \dim_K U' = \dim_K(U + U') + \dim_K(U \cap U').$$

- Für K -Vektorräume V, V' bestimme man $\dim_K \operatorname{Hom}_K(V, V')$, also die Dimension des Vektorraums aller K -linearen Abbildungen von V nach V' .
- Es seien $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$ K -lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen. Man zeige:

$$\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g \leq \operatorname{rg}(g \circ f) + \dim V_2$$

2.2 Quotientenvektorräume

Neben den *linearen Unterräumen* von Vektorräumen V , also den Untervektorräumen im Sinne von 1.4/2, wollen wir in diesem Abschnitt auch so genannte *affine Unterräume* von V betrachten. Diese entstehen im Wesentlichen aus den linearen Unterräumen durch Translation (oder Parallelverschiebung) um Vektoren $a \in V$.

Definition 1. *Es sei V ein K -Vektorraum und $A \subset V$ eine Teilmenge. Man bezeichnet A als affinen Unterraum von V , wenn A leer ist, oder wenn es ein Element $a \in V$ und einen linearen Unterraum $U \subset V$ gibt mit*

$$A = a + U := \{a + u; u \in U\}.$$

In der Situation der Definition ergibt sich für $a \notin U$ insbesondere $0 \notin a + U$, und man sieht, dass $A = a + U$ in diesem Fall kein linearer Unterraum von V sein kann. Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass die Menge aller affinen Unterräume des Typs $a + U$, $a \in V$, in nahe liegender Weise einen K -Vektorraum bildet. Wir werden diesen Vektorraum mit V/U (man lese V modulo U) bezeichnen und zeigen, dass die Zuordnung $a \mapsto a + U$ eine surjektive K -lineare Abbildung $V \rightarrow V/U$ definiert, welche U als Kern besitzt.

Um das Problem etwas weiter zu verdeutlichen, wollen wir zunächst einmal die Existenz einer surjektiven K -linearen Abbildung $f: V \rightarrow V'$ mit $\ker f = U$ als gegeben annehmen. Für $a' \in V'$ nennt man $f^{-1}(a')$ die *Faser von f über a'* .

Bemerkung 2. *Es sei $f: V \rightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen mit $\ker f = U$. Dann erhält man für $a \in V$ als Faser von f über $f(a)$ gerade den affinen Unterraum $a + U$, d. h. $f^{-1}(f(a)) = a + U$.*

Beweis. Für $u \in U$ gilt $f(a+u) = f(a)$ und damit $a+U \subset f^{-1}(f(a))$. Umgekehrt folgt aus $a' \in f^{-1}(f(a))$ die Beziehung $f(a') = f(a)$ bzw. $f(a' - a) = 0$. Dies impliziert $a' - a \in \ker f = U$ bzw. $a' \in a + U$, was $f^{-1}(f(a)) \subset a + U$ und folglich die Gleichheit beider Mengen zeigt. $\square$

Wir können also vermerken, dass die Fasern einer surjektiven K -linearen Abbildung $f: V \rightarrow V'$ mit $\ker f = U$ gerade aus den affinen Unterräumen $a + U$, $a \in V$, bestehen. Da über jedem $a' \in f(V) = V'$ genau eine Faser liegt, nämlich $f^{-1}(a')$, können wir die Menge der affinen Unterräume des Typs $a + U \subset V$ mit V' identifizieren und zu einem K -Vektorraum V/U machen, indem wir die Vektorraumstruktur von V' übernehmen. Man addiert dann zwei Fasern $f^{-1}(f(a)) = a + U$, $f^{-1}(f(b)) = b + U$, indem man die Faser über $f(a) + f(b) = f(a + b)$ bildet, also

$$(a + U) + (b + U) = (a + b) + U.$$

Entsprechend multipliziert man eine Faser $f^{-1}(f(a)) = a + U$ mit einem Skalar $\alpha \in K$ indem man die Faser über $\alpha f(a) = f(\alpha a)$ bildet, also $\alpha(a+U) = \alpha a + U$. Schließlich ist klar, dass die Abbildung $V \longrightarrow V/U$, $a \longmapsto a + U$, ebenso wie $f: V \longrightarrow V'$, eine surjektive K -lineare Abbildung mit Kern U ist.

Die vorstehende Überlegung zeigt, dass das Problem, die Menge der affinen Unterräume des Typs $a + U \subset V$ zu einem K -Vektorraum zu machen, eine natürliche Lösung besitzt, wenn man über eine surjektive lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ mit $\ker f = U$ verfügt. Eine solche Abbildung kann man sich aber leicht verschaffen. Man wähle nämlich gemäß 1.6/4 ein Komplement U' zu U , also einen linearen Unterraum $U' \subset V$ mit $V = U \oplus U'$. Dann lässt sich jedes $a \in V$ auf eindeutige Weise in der Form $a = u + u'$ mit $u \in U$ und $u' \in U'$ schreiben. Indem wir a jeweils den Summanden u' zuordnen, erhalten wir wie gewünscht eine surjektive K -lineare Abbildung $p: V \longrightarrow U'$ mit Kern U . Man nennt p die Projektion von $U \oplus U'$ auf den zweiten Summanden.

Wir wollen im Folgenden jedoch den Quotientenvektorraum V/U auf eine andere Art konstruieren. Die verwendete Methode hat den Vorteil, dass sie nicht auf speziellen Eigenschaften von Vektorräumen (Existenz eines Komplements zu einem linearen Unterraum) beruht, sondern auch noch in anderen Situationen anwendbar ist.

Definition 3. Eine Relation auf einer Menge M besteht aus einer Teilmenge $R \subset M \times M$; man schreibt $a \sim b$ für $(a, b) \in R$ und spricht von der Relation “ $\sim$ ”. Eine Relation “ $\sim$ ” auf M heißt eine Äquivalenzrelation, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (i) Reflexivität: $a \sim a$ für alle $a \in M$.
- (ii) Symmetrie: $a \sim b \implies b \sim a$.
- (iii) Transitivität: $a \sim b, b \sim c \implies a \sim c$.

Ist “ $\sim$ ” eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M , so nennt man zwei Elemente $a, b \in M$ äquivalent, wenn für diese die Relation $a \sim b$ gilt. Weiter bezeichnet man

$$[a] = \{b \in M; b \sim a\}$$

als die Äquivalenzklasse des Elementes a in M . Um ein einfaches Beispiel zu geben, betrachte man eine K -lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ zwischen Vektorräumen und setze für $a, b \in V$

$$a \sim b : \iff f(a) = f(b).$$

Es ist dann unmittelbar klar, dass f auf diese Weise eine Äquivalenzrelation auf V induziert und dass $[a] = f^{-1}(f(a))$ die Äquivalenzklasse eines Elementes $a \in V$ ist.

Im Falle einer Äquivalenzrelation “ $\sim$ ” auf einer Menge M heißt jedes Element b einer Äquivalenzklasse $[a]$ ein *Repräsentant* dieser Klasse. Aufgrund von Definition 3 (i) ist ein Element $a \in M$ stets Repräsentant der Klasse $[a]$. Äquivalenzklassen sind daher stets nicht-leer. Wir wollen zeigen, dass zwei Elemente $a, b \in M$ genau dann dieselbe Äquivalenzklasse induzieren, dass also

$[a] = [b]$ gilt, wenn a, b zueinander äquivalent sind oder, alternativ, wenn sie beide zu einem dritten Element $c \in M$ äquivalent sind. Dies impliziert insbesondere, dass die Äquivalenzrelation auf M eine Unterteilung von M in disjunkte Äquivalenzklassen induziert.

Satz 4. *Es sei “ $\sim$ ” eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M . Für Elemente $a, b \in M$ ist dann gleichbedeutend:*

- (i) $a \sim b$
- (ii) $[a] = [b]$
- (iii) $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

Insbesondere ist M die disjunkte Vereinigung der zu “ $\sim$ ” gehörigen Äquivalenzklassen.

Beweis. Gelte zunächst (i), also $a \sim b$. Für $c \in M$ mit $c \sim a$ folgt aus $a \sim b$ bereits $c \sim b$ und somit $[a] \subset [b]$. Die umgekehrte Inklusion verifiziert man entsprechend, so dass sich insgesamt die Gleichung $[a] = [b]$ in (ii) ergibt. Da Äquivalenzklassen stets nicht-leer sind, ist weiter (iii) eine Konsequenz aus (ii). Ist schließlich Bedingung (iii) gegeben, so wähle man ein Element $c \in [a] \cap [b]$. Dann gilt $c \sim a$, bzw. $a \sim c$ aufgrund der Symmetrie, sowie $c \sim b$ und damit aufgrund der Transitivität auch $a \sim b$, d. h. (i). $\square$

Definiert man nun $M/\sim$ als Menge der Äquivalenzklassen in M , so kann man die kanonische Abbildung

$$M \longrightarrow M/\sim, \quad a \longmapsto [a],$$

betrachten, welche ein Element $a \in M$ auf die zugehörige Äquivalenzklasse $[a] \subset M$ abbildet. Dabei ist $[a]$ nach Satz 4 die eindeutig bestimmte Äquivalenzklasse in M , die a enthält. Im Folgenden sollen nun Äquivalenzrelationen auf Vektorräumen studiert werden.

Bemerkung 5. *Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subset V$ ein linearer Unterraum. Dann wird durch*

$$a \sim b :\Longleftrightarrow a - b \in U$$

eine Äquivalenzrelation auf V erklärt, auch als Kongruenz modulo U bezeichnet. Es gilt $[a] = a + U$ für die Äquivalenzklasse $[a]$ zu einem Element $a \in V$. Zwei Äquivalenzklassen $[a] = a + U$ und $[b] = b + U$ stimmen genau dann überein, wenn $a \sim b$, also $a - b \in U$ gilt.

Beweis. Für alle $a \in V$ gilt $a - a = 0 \in U$ und damit $a \sim a$; die Relation ist also reflexiv. Als Nächstes zeigen wir die Symmetrie. Gelte $a \sim b$, d. h. $a - b \in U$. Dann folgt $b - a = -(a - b) \in U$, was aber $b \sim a$ bedeutet. Schließlich überprüfen wir die Transitivität. Gelte $a \sim b$ und $b \sim c$, also $a - b, b - c \in U$. Dann ergibt sich

$$a - c = (a - b) + (b - c) \in U,$$

also $a \sim c$.

Im Übrigen berechnet sich die Äquivalenzklasse $[a]$ eines Vektors $a \in V$ zu

$$[a] = \{b \in V; b \sim a\} = \{b \in V; b - a \in U\} = a + U,$$

wie behauptet. Schließlich stimmen zwei Äquivalenzklassen $[a]$ und $[b]$ gemäß Bemerkung 5 genau dann überein, wenn $a \sim b$, also $a - b \in U$ gilt. $\square$

Für $a \in V$ bezeichnet man die Äquivalenzklasse $[a] = a + U$ genauer als die *Restklasse von a modulo U* oder auch als die *Nebenklasse von a bezüglich U* . Zur Definition des Quotientenvektorraums V/U haben wir auf der Menge dieser Restklassen eine Struktur als K -Vektorraum zu definieren. Um dies zu bewerkstelligen, leiten wir einige Regeln für das Rechnen mit Restklassen her, wobei wir aus Gründen der Übersichtlichkeit Restklassen $a + U$ noch einmal in der Form von Äquivalenzklassen $[a]$ schreiben.

Bemerkung 6. Auf einem K -Vektorraum V betrachte man die zu einem linearen Unterraum $U \subset V$ gehörige Äquivalenzrelation der Kongruenz modulo U . Es gelte $[a] = [a']$ und $[b] = [b']$ für Vektoren $a, a', b, b' \in V$. Dann folgt $[a + b] = [a' + b']$ sowie $[\alpha a] = [\alpha a']$ für $\alpha \in K$.

Beweis. Aus $[a] = [a']$, $[b] = [b']$ ergibt sich $a - a', b - b' \in U$ und damit $(a + b) - (a' + b') = (a - a') + (b - b') \in U$, also $[a + b] = [a' + b']$. Weiter folgt $\alpha a - \alpha a' = \alpha(a - a') \in U$, also $[\alpha a] = [\alpha a']$. $\square$

Die Bildung der Äquivalenzklassen $[a]$ zu Vektoren $a \in V$ ist also mit der Vektorraumstruktur von V verträglich. Bezeichnen wir mit V/U die Menge der Äquivalenzklassen $[a] = a + U$, wobei a in V variiert, so kann man unter Benutzung von Bemerkung 6 eine Addition

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U, \quad ([a], [b]) \longmapsto [a + b],$$

sowie eine skalare Multiplikation

$$K \times V/U \longrightarrow V/U, \quad (\alpha, [a]) \longmapsto [\alpha a],$$

auf V/U definieren, wobei in beiden Fällen nachzuprüfen ist, dass die Verknüpfung wohldefiniert ist. Genau genommen besagt etwa die Abbildungsvorschrift im Falle der Addition: Man betrachte zwei Äquivalenzklassen $A, B \subset V$, wähle Repräsentanten $a \in A$, $b \in B$, so dass man $A = [a]$, $B = [b]$ schreiben kann, und bilde dann das Paar (A, B) auf die Äquivalenzklasse $[a + b]$ ab. Man muss dabei wissen, dass das Resultat $[a + b]$ nicht von der Wahl der Repräsentanten $a \in A$, $b \in B$ abhängt; Letzteres war aber in Bemerkung 6 gezeigt worden. Entsprechend schließt man im Falle der skalaren Multiplikation.

Man prüft nun leicht unter Benutzung der Vektorraumstruktur von V nach, dass V/U mit den genannten Verknüpfungen ein K -Vektorraum ist und dass die kanonische Abbildung

$$\pi: V \longrightarrow V/U, \quad a \longmapsto [a],$$

K -linear und damit ein Epimorphismus ist. Somit können wir formulieren:

Satz 7. *Es sei V ein K -Vektorraum und $U \subset V$ ein linearer Unterraum. Dann ist*

$$V/U = \{a + U; a \in V\},$$

also die Menge der Restklassen modulo U , ein K -Vektorraum unter der Addition

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U, \quad (a + U, b + U) \longmapsto (a + b) + U,$$

sowie der skalaren Multiplikation

$$K \times V/U \longrightarrow V/U, \quad (\alpha, a + U) \longmapsto \alpha a + U.$$

Die kanonische Abbildung $\pi: V \longrightarrow V/U$ ist ein Epimorphismus, dessen Fasern gerade die Restklassen modulo U in V sind. Insbesondere gilt $\ker \pi = U$ und damit

$$\dim_K V = \dim_K U + \dim_K(V/U)$$

aufgrund der Dimensionsformel 2.1/10.

Man nennt V/U den *Quotienten- oder Restklassenvektorraum von V modulo U* . Die Konstruktion dieses Vektorraums zeigt insbesondere, dass es zu einem linearen Unterraum $U \subset V$ stets einen Epimorphismus $p: V \longrightarrow V'$ mit $\ker p = U$ gibt. Umgekehrt hatten wir zu Beginn gesehen, dass jede solche Abbildung benutzt werden kann, um die Menge V/U aller Restklassen modulo U in V mit der Struktur eines K -Vektorraums zu versehen, derart dass man auf natürliche Weise einen Epimorphismus $V \longrightarrow V/U$ mit Kern U erhält. Wir wollen diesen Sachverhalt hier weiter präzisieren, indem wir den Homomorphiesatz beweisen, welcher die so genannte universelle Abbildungseigenschaft für Quotientenvektorräume beinhaltet.

Satz 8 (Homomorphiesatz). *Es sei U ein linearer Unterraum eines K -Vektorraums V und $\pi: V \longrightarrow \bar{V}$ der kanonische Epimorphismus auf den Restklassenvektorraum $\bar{V} = V/U$ oder, allgemeiner, ein Epimorphismus mit $\ker \pi = U$. Dann existiert zu jeder K -linearen Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ mit $U \subset \ker f$ genau eine K -lineare Abbildung $\bar{f}: \bar{V} \longrightarrow V'$, so dass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ & \searrow \pi \quad \nearrow \bar{f} & \\ & \bar{V} & \end{array}$$

kommutiert, d. h. so dass $f = \bar{f} \circ \pi$ gilt. Weiter ist $\bar{f}$ genau dann injektiv, wenn $U = \ker f$ gilt und genau dann surjektiv, wenn f surjektiv ist.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit von $\bar{f}$. Sei also $\bar{f}: \bar{V} \longrightarrow V'$ K -linear mit $f = \bar{f} \circ \pi$. Ist dann $\bar{a} \in \bar{V}$ ein Vektor und $a \in \pi^{-1}(\bar{a})$ ein (beliebiges) Urbild, so folgt $\pi(a) = \bar{a}$ und daher $\bar{f}(\bar{a}) = \bar{f}(\pi(a)) = f(a)$. Damit ist $\bar{f}(\bar{a})$ eindeutig durch $\bar{a}$ bestimmt.

Zum Nachweis der Existenz einer K -linearen Abbildung $\bar{f}$ mit den geforderten Eigenschaften betrachte man einen Vektor $\bar{a} \in \bar{V}$ sowie zwei Urbilder $a, b \in \pi^{-1}(\bar{a})$. Es folgt dann

$$a - b \in \ker \pi = U \subset \ker f$$

und damit $f(a) = f(b)$. Der Wert $f(a)$ ist also unabhängig von der speziellen Wahl eines Urbildes $a \in \pi^{-1}(\bar{a})$, und wir können eine Abbildung $\bar{f}: \bar{V} \longrightarrow V'$ durch $\bar{a} \longmapsto f(a)$ erklären, wobei wir mit a jeweils (irgend)ein π -Urbild zu $\bar{a}$ meinen. Insbesondere gilt dann $f(a) = \bar{f}(\pi(a))$ für $a \in V$, d. h. die geforderte Beziehung $f = \bar{f} \circ \pi$ ist erfüllt. Schließlich ist $\bar{f}$ K -linear. Zu $\bar{a}, \bar{b} \in \bar{V}$ betrachte man nämlich π -Urbilder $a, b \in V$. Dann ist $a + b$ ein π -Urbild zu $\bar{a} + \bar{b}$ sowie αa für $\alpha \in K$ ein π -Urbild zu $\alpha \bar{a}$, und es gilt

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{a} + \bar{b}) &= f(a + b) = f(a) + f(b) = \bar{f}(\bar{a}) + \bar{f}(\bar{b}), \\ \bar{f}(\alpha \bar{a}) &= f(\alpha a) = \alpha f(a) = \alpha \bar{f}(\bar{a}).\end{aligned}$$

Es bleiben noch die zusätzlich behaupteten Eigenschaften von $\bar{f}$ nachzuweisen. Sei zunächst $\bar{f}$ injektiv. Für $a \in \ker f$ folgt dann $\bar{f}(\pi(a)) = f(a) = 0$, also $\pi(a) = 0$ bzw. $a \in \ker \pi$ aufgrund der Injektivität von $\bar{f}$. Dies bedeutet aber $\ker f \subset \ker \pi = U$ und, da die entgegengesetzte Inklusion ohnehin gilt, bereits $U = \ker f$. Ist umgekehrt diese Gleichung gegeben, so betrachte man ein Element $\bar{a} \in \ker \bar{f}$ sowie ein Urbild $a \in \pi^{-1}(\bar{a})$. Man hat dann $f(a) = \bar{f}(\pi(a)) = \bar{f}(\bar{a}) = 0$ und damit $a \in \ker f = U$. Wegen $U = \ker \pi$ ergibt sich dann aber $\bar{a} = \pi(a) = 0$, also insgesamt $\ker \bar{f} = 0$ und damit die Injektivität von $\bar{f}$.

Ist $\bar{f}$ surjektiv, so ist auch f als Komposition der surjektiven Abbildungen π und $\bar{f}$ surjektiv. Umgekehrt folgt aus der Surjektivität von $f = \bar{f} \circ \pi$, dass auch $\bar{f}$ surjektiv sein muss. $\square$

Als Folgerung wollen wir noch den so genannten Isomorphiesatz für Vektorräume herleiten.

Korollar 9 (Isomorphiesatz). *Es sei $f: V \longrightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Dann induziert f in kanonischer Weise einen Isomorphismus $V/\ker f \xrightarrow{\sim} \text{im } f$, also einen kanonischen Isomorphismus $V/\ker f \xrightarrow{\sim} V'$, falls f surjektiv ist.*

Beweis. Gemäß Satz 8 existiert ein kommutatives Diagramm K -linearer Abbildungen

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & V' \\
 \searrow \pi & & \nearrow \bar{f} \\
 & V/\ker f &
 \end{array}$$

wobei $\bar{f}$ wegen $\ker \pi = \ker f$ injektiv ist. Es definiert also $\bar{f}$ einen Isomorphismus von $V/\ker f$ auf den linearen Unterraum $\text{im } \bar{f} \subset V'$, und letzterer stimmt überein mit $\text{im } f$. $\square$

Wir wollen schließlich noch die Ergebnisse dieses Abschnitts zur Charakterisierung affiner Unterräume von Vektorräumen verwenden. Dabei wollen wir zunächst bemerken, dass jeder nicht-leere affine Unterraum eines K -Vektorraums V in eindeutiger Weise einen zugehörigen linearen Unterraum bestimmt.

Bemerkung 10. *Es sei V ein K -Vektorraum und $A \subset V$ ein nicht-leerer affiner Unterraum, d. h. eine Teilmenge der Form $a + U$ mit einem Vektor $a \in V$ und einem linearen Unterraum $U \subset V$. Dann ist U eindeutig durch A bestimmt.*

Beweis. Gilt etwa $a + U = A = a' + U'$ für Elemente $a, a' \in V$ und lineare Unterräume $U, U' \subset V$, so folgt

$$U = (a' - a) + U'.$$

Wegen $0 \in U$ bedeutet dies, dass $a' - a$ ein inverses Element in U' besitzt und daher selbst zu U' gehört. Dies aber impliziert $U = U'$, wie behauptet. $\square$

Insbesondere kann man daher nicht-leeren affinen Unterräumen eines Vektorraums V eine Dimension zuordnen, nämlich die Dimension des zugehörigen linearen Unterraums von V . Beispielsweise nennt man einen affinen Unterraum von V der Dimension 1 eine *Gerade*, der Dimension 2 eine *Ebene* oder der Dimension $n - 1$ eine *Hyperebene*, wenn $n = \dim_K V < \infty$.

Satz 11. *Es sei V ein K -Vektorraum und $A \subset V$ eine Teilmenge. Dann ist äquivalent:*

- (i) *A ist ein affiner Unterraum von V , d. h. A ist leer, oder es existieren ein Vektor $a \in V$ sowie ein linearer Unterraum $U \subset V$ mit $A = a + U$.*
- (ii) *Es existiert eine K -lineare Abbildung $f: V \rightarrow V'$, so dass A eine Faser von f ist, d. h. es existiert ein $a' \in V'$ mit $A = f^{-1}(a')$.*
- (iii) *Für jeweils endlich viele Elemente $a_0, \dots, a_r \in A$ sowie Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in K$ mit $\sum_{i=0}^r \alpha_i = 1$ folgt $\sum_{i=0}^r \alpha_i a_i \in A$.*

Beweis. Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial, da sich die leere Menge stets als Faser einer linearen Abbildung $f: V \rightarrow V'$ realisieren lässt. Man betrachte etwa $V' := V \times K$ als K -Vektorraum mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation. Dann ist

$$f: V \longrightarrow V', \quad v \longmapsto (v, 0),$$

eine K -lineare Abbildung mit $f^{-1}(0, 1) = \emptyset$.

Wir dürfen also im Folgenden $A \neq \emptyset$ voraussetzen. Sei zunächst Bedingung (i) gegeben, also A ein affiner Unterraum von V , etwa $A = a + U$. Betrachtet man dann den kanonischen Epimorphismus $\pi: V \longrightarrow V/U$, so gilt $A = \pi^{-1}(\pi(a))$ nach Bemerkung 2, d. h. A ist Faser einer K -linearen Abbildung und erfüllt damit Bedingung (ii).

Sei nun (ii) gegeben, also $A = f^{-1}(a')$ mit einem Element $a' \in V'$, und seien endlich viele Elemente $a_0, \dots, a_r \in A$ fixiert. Für Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in K$ mit $\sum_{i=0}^r \alpha_i = 1$ gilt dann

$$f\left(\sum_{i=0}^r \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=0}^r \alpha_i f(a_i) = \left(\sum_{i=0}^r \alpha_i\right) \cdot a' = a'$$

und damit $\sum_{i=0}^r \alpha_i a_i \in f^{-1}(a') = A$. Bedingung (iii) ist also erfüllt.

Sei schließlich (iii) gegeben. Wir wählen dann ein Element $a_0 \in A$ aus und behaupten, dass $\Delta A = \{a - a_0; a \in A\}$ ein linearer Unterraum von V ist. In der Tat, wir haben $0 \in \Delta A$ und damit $\Delta A \neq \emptyset$. Sind weiter $a, b \in \Delta A$, also $a = a_1 - a_0, b = b_1 - a_0$ mit $a_1, b_1 \in A$, so folgt $a_1 + (-1)a_0 + b_1 \in A$ gemäß (iii) und damit

$$a + b = (a_1 - a_0 + b_1) - a_0 \in \Delta A.$$

Für $\alpha \in K$ gilt weiter $\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_0 \in A$, ebenfalls unter Benutzung von (iii), also

$$\alpha a = (\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_0) - a_0 \in \Delta A.$$

Folglich ist ΔA ein linearer Unterraum in V , und wir sehen, dass $A = a_0 + \Delta A$ ein affiner Unterraum von V ist. $\square$

Wir wollen noch zeigen, wie man affine Unterräume von Vektorräumen in konkreter Weise erzeugen kann. Hierzu betrachte man einen K -Vektorraum V sowie Vektoren $a_0, \dots, a_r \in V$, $r \geq 0$. Dann existiert ein kleinster affiner Unterraum $A \subset V$, der diese Vektoren enthält, nämlich

$$A = \left\{a_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i (a_i - a_0); \alpha_1, \dots, \alpha_r \in K\right\}.$$

Um dies einzusehen, stellen wir zunächst fest, dass A ein affiner Unterraum in V ist, der die Vektoren $a_0, \dots, a_r$ enthält; der zugehörige lineare Unterraum $U \subset V$ mit $A = a_0 + U$ wird von den Vektoren $a_i - a_0$, $i = 1, \dots, r$, erzeugt. Da man eine Summe $a_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i (a_i - a_0)$ auch in der Form $(1 - \sum_{i=1}^r \alpha_i) \cdot a_0 + \sum_{i=1}^r \alpha_i a_i$ schreiben kann, erhält man weiter

$$A = \left\{\sum_{i=0}^r \alpha_i a_i; \alpha_0, \dots, \alpha_r \in K \text{ mit } \sum_{i=0}^r \alpha_i = 1\right\}.$$

Hieraus folgt unter Benutzung von Satz 11 (iii), dass A wie behauptet der kleinste affine Unterraum von V ist, der $a_0, \dots, a_r$ enthält. Beispielsweise kann man die durch zwei verschiedene Punkte a, b eines K -Vektorraums bestimmte affine Gerade betrachten. In gewohnter Weise ergibt sich

$$G = \{a + \alpha(b - a) ; \alpha \in K\} = \{\alpha a + \beta b ; \alpha, \beta \in K \text{ mit } \alpha + \beta = 1\}.$$

Aufgaben

- Man betrachte folgende Mengen M mit der jeweils angegebenen Relation $\sim$ und entscheide, ob es sich um eine Äquivalenzrelation handelt. Falls möglich gebe man die Äquivalenzklassen an.
 - $M = \mathbb{R}, a \sim b : \Longleftrightarrow |a| = |b|$
 - $M = \mathbb{R}, a \sim b : \Longleftrightarrow |a - b| < 1$
 - $M = \mathbb{Z}, a \sim b : \Longleftrightarrow a - b$ wird von p geteilt (d. h. es existiert eine Zerlegung $a - b = c \cdot p$ mit einem $c \in \mathbb{Z}$), wobei p eine fest vorgegebene ganze Zahl ist.
- Es seien V, V' Vektorräume über einem Körper K und $A \subset V$ sowie $A' \subset V'$ affine Unterräume. Man zeige:
 - Für eine lineare Abbildung $f: V \longrightarrow V'$ ist $f(A)$ ein affiner Unterraum von V' und $f^{-1}(A')$ ein affiner Unterraum von V .
 - Für $V = V'$ sind $A + A' = \{a + a' ; a \in A, a' \in A'\}$ und $A \cap A'$ affine Unterräume von V .
 - Es ist $A \times A'$ ein affiner Unterraum von $V \times V'$, wobei man $V \times V'$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation als K -Vektorraum auffasse.
- Es seien A, A' affine Unterräume eines K -Vektorraums V . Man zeige, $A \cup A'$ ist genau dann ein affiner Unterraum von V , wenn $A \subset A'$ oder $A' \subset A$ gilt.
- Es sei V ein K -Vektorraum und $A \subset V$ eine Teilmenge. Man zeige, dass es eine kleinste Teilmenge $A' \subset V$ mit $A \subset A'$ gibt, so dass die durch

$$a \sim b : \Longleftrightarrow a - b \in A'$$

definierte Relation eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Man bestimme A' unter der Voraussetzung, dass A abgeschlossen unter der skalaren Multiplikation ist, dass also aus $\alpha \in K, a \in A$ stets $\alpha a \in A$ folgt.

- Für eine Matrix $(\lambda_{ij})_{i=1, \dots, m; j=1, \dots, n}$ mit Koeffizienten aus einem Körper K und für Elemente $\delta_1, \dots, \delta_m \in K$ zeige man, dass durch

$$A = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n ; \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \alpha_j = \delta_i, i = 1, \dots, m\}$$

ein affiner Unterraum im K^n erklärt wird. Ist jeder affine Unterraum des K^n von dieser Bauart? (Hinweis: Man vermeide "unnötiges Rechnen", indem man geeignete lineare Abbildungen betrachtet. Man beginne mit dem Fall $m = 1$.)

6. Für Vektoren $a_0, \dots, a_r$ eines K -Vektorraums V betrachte man den von den a_i erzeugten affinen Unterraum $A \subset V$ sowie den von den a_i erzeugten linearen Unterraum $U \subset V$. Man zeige $A \subset U$ und weiter:

$$\dim_K A = \begin{cases} \dim_K U & \text{falls } 0 \in A \\ \dim_K U - 1 & \text{falls } 0 \notin A \end{cases}$$

7. Eine Abbildung $f: V \rightarrow V'$ zwischen K -Vektorräumen heiße *affin*, wenn es ein Element $x_0 \in V'$ gibt, so dass die Abbildung

$$V \rightarrow V', \quad a \mapsto f(a) - x_0,$$

K -linear ist. Man zeige: Eine Abbildung $f: V \rightarrow V'$ ist genau dann affin, wenn für jeweils endlich viele Vektoren $a_0, \dots, a_r \in V$ und Elemente $\alpha_0, \dots, \alpha_r \in K$ mit $\sum_{i=0}^r \alpha_i = 1$ stets

$$f\left(\sum_{i=0}^r \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=0}^r \alpha_i f(a_i)$$

gilt.

8. (1. *Isomorphiesatz*) Es seien U, U' lineare Unterräume eines K -Vektorraums V . Man zeige: Die kanonische Abbildung $U \hookrightarrow U + U' \rightarrow (U + U')/U'$ besitzt $U \cap U'$ als Kern und induziert einen Isomorphismus

$$U/(U \cap U') \xrightarrow{\sim} (U + U')/U'.$$

9. (2. *Isomorphiesatz*) Es seien V ein K -Vektorraum und $U \subset U' \subset V$ lineare Unterräume. Man zeige:

- (i) Die kanonische Abbildung $U' \hookrightarrow V \rightarrow V/U$ besitzt U als Kern und induziert einen Monomorphismus $U'/U \hookrightarrow V/U$. Folglich lässt sich U'/U mit seinem Bild in V/U identifizieren und somit als linearer Unterraum von V/U auffassen.
- (ii) Die Projektion $V \rightarrow V/U'$ faktorisiert über V/U , d. h. lässt sich als Komposition $V \xrightarrow{\pi} V/U \xrightarrow{f} V/U'$ schreiben, mit einer linearen Abbildung f und der kanonischen Projektion π .
- (iii) f besitzt U'/U als Kern und induziert einen Isomorphismus

$$(V/U)/(U'/U) \xrightarrow{\sim} V/U'.$$

10. Für lineare Unterräume U_1, U_2 eines K -Vektorraums V betrachte man die kanonischen Projektionen $\pi_i: V \rightarrow V/U_i$, $i = 1, 2$, sowie die Abbildung

$$(\pi_1, \pi_2): V \rightarrow V/U_1 \times V/U_2, \quad x \mapsto (\pi_1(x), \pi_2(x)).$$

Man zeige:

- (i) (π_1, π_2) ist K -linear, wenn man $V/U_1 \times V/U_2$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation als K -Vektorraum auffasst.
- (ii) (π_1, π_2) ist genau dann injektiv, wenn $U_1 \cap U_2 = 0$ gilt.
- (iii) (π_1, π_2) ist genau dann surjektiv, wenn $V = U_1 + U_2$ gilt.
- (iv) (π_1, π_2) ist genau dann bijektiv, wenn $V = U_1 \oplus U_2$ gilt.

11. Man konstruiere ein Beispiel eines K -Vektorraums V mit einem linearen Unterraum $0 \subsetneq U \subset V$, derart dass es einen Isomorphismus $V/U \xrightarrow{\sim} V$ gibt. Gibt es ein solches Beispiel im Falle $\dim_K V < \infty$?
12. Es seien $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3 \xrightarrow{h} V_4$ K -lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen. Man zeige:

$$\operatorname{rg}(g \circ f) + \operatorname{rg}(h \circ g) \leq \operatorname{rg}(h \circ g \circ f) + \operatorname{rg} g$$

2.3 Der Dualraum

Für zwei K -lineare Abbildungen $f, g: V \longrightarrow V'$ zwischen K -Vektorräumen hatten wir in Abschnitt 2.1 die Summe durch

$$f + g: V \longrightarrow V', \quad a \longmapsto f(a) + g(a),$$

und für eine Konstante $\alpha \in K$ das Produkt αf durch

$$\alpha f: V \longrightarrow V', \quad a \longmapsto \alpha(f(a)),$$

definiert. Man rechnet ohne Schwierigkeiten nach, dass $f + g$ und αf wieder K -linear sind und dass die K -linearen Abbildungen $V \longrightarrow V'$ mit diesen Verknüpfungen einen K -Vektorraum bilden; dieser wird mit $\operatorname{Hom}_K(V, V')$ bezeichnet. Speziell werden wir in diesem Abschnitt für V' als K -Vektorraum den Körper K selbst betrachten. K -lineare Abbildungen $V \longrightarrow K$ werden auch als *Linearformen* bezeichnet.

Definition 1. *Es sei V ein K -Vektorraum. Dann heißt der K -Vektorraum $\operatorname{Hom}_K(V, K)$ aller Linearformen auf V der Dualraum zu V . Dieser wird mit V^* bezeichnet.*

Beispielsweise ist für $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \alpha_1,$$

eine Linearform auf K^n . Betrachten wir allgemeiner einen K -Vektorraum V mit Basis $a_1, \dots, a_n$, so können wir aus 2.1/7 ablesen, dass es zu gegebenen Elementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ stets eine eindeutig bestimmte Linearform $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(a_i) = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$, gibt. Die Linearformen auf V korrespondieren folglich in bijektiver Weise zu den n -Tupeln von Konstanten aus K , wobei diese Zuordnung genauer einen Isomorphismus $V^* \xrightarrow{\sim} K^n$ darstellt. Legen wir etwa im Falle $V = K^n$ die kanonische Basis $e_1, \dots, e_n$ zugrunde, so werden dementsprechend die Linearformen auf K^n gerade durch die Abbildungen

$$K^n \longrightarrow K, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i,$$

zu n -Tupeln $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ gegeben. Insbesondere ist der Dualraum des Nullraums wieder der Nullraum.

Satz 2. *Es sei $f: U \longrightarrow V$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen. Dann ist die Abbildung*

$$f^*: V^* \longrightarrow U^*, \quad \varphi \longmapsto \varphi \circ f,$$

K -linear; man nennt f^ die duale Abbildung zu f . Ist $g: V \longrightarrow W$ eine weitere K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen, so gilt $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Man kann sich die Definition des Bildes $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ anhand des folgenden kommutativen Diagramms verdeutlichen:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow f^*(\varphi) & \downarrow \varphi \\ & & K \end{array}$$

Es wird die Linearform φ sozusagen unter der Abbildung f^* zu einer Linearform auf U zurückgezogen, indem man mit f komponiert.

Nun zum *Beweis von Satz 2*. Für $\varphi, \psi \in V^*$ sowie für $\alpha \in K$ ergibt sich in nahe liegender Weise

$$\begin{aligned} f^*(\varphi + \psi) &= (\varphi + \psi) \circ f = (\varphi \circ f) + (\psi \circ f) = f^*(\varphi) + f^*(\psi), \\ f^*(\alpha\varphi) &= (\alpha\varphi) \circ f = \alpha(\varphi \circ f) = \alpha f^*(\varphi) \end{aligned}$$

und damit die K -Linearität von f^* . Um die Formel für die Komposition dualer Abbildungen nachzuweisen, betrachte man für eine Linearform $\varphi \in W^*$ das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\ & \searrow (g \circ f)^*(\varphi) & \searrow g^*(\varphi) & & \downarrow \varphi \\ & & & & K \end{array}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} (g \circ f)^*(\varphi) &= \varphi \circ (g \circ f) = (\varphi \circ g) \circ f \\ &= (g^*(\varphi)) \circ f = f^*(g^*(\varphi)) = (f^* \circ g^*)(\varphi) \end{aligned}$$

und damit die gewünschte Relation $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, indem man φ in W^* variieren lässt. $\square$

Im Folgenden wollen wir einige Zusammenhänge zwischen linearen Abbildungen und den zugehörigen dualen Abbildungen untersuchen. Wir schließen dabei auch den Fall unendlich-dimensionaler Vektorräume mit ein, beschränken uns bei den Beweisen aus technischen Gründen aber meist auf den Fall endlich-dimensionaler Vektorräume.

Satz 3. *Es sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen sowie $f^*: W^* \rightarrow V^*$ die zugehörige duale Abbildung.*

- (i) *Ist f ein Monomorphismus, so ist f^* ein Epimorphismus.*
- (ii) *Ist f ein Epimorphismus, so ist f^* ein Monomorphismus.*

Beweis. Wir beginnen mit Aussage (i). Sei also f injektiv. Um zu sehen, dass f^* surjektiv ist, zeigen wir, dass jede Linearform $\psi \in V^*$ ein Urbild $\varphi \in W^*$ besitzt, dass also zu ψ eine Linearform $\varphi \in W^*$ mit $\psi = \varphi \circ f$ existiert. Hierzu schreiben wir f als Komposition zweier K -linearer Abbildungen, nämlich der von f induzierten Abbildung $f_1: V \rightarrow \text{im } f$, sowie der Inklusionsabbildung $f_2: \text{im } f \hookrightarrow W$. Dabei ist f_1 aufgrund der Injektivität von f ein Isomorphismus. Sodann betrachte man das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 V & \xrightarrow{f_1} & \text{im } f & \xhookrightarrow{f_2} & W \\
 \downarrow \psi & & \searrow \psi' & & \nearrow \varphi \\
 & & K & &
 \end{array}$$

wobei die Linearformen $\psi': \text{im } f \rightarrow K$ und $\varphi: W \rightarrow K$ noch zu konstruieren sind, und zwar so, dass das Diagramm kommutiert. Da f_1 ein Isomorphismus ist, können wir $\psi' = \psi \circ f_1^{-1}$ setzen. Dann bleibt noch das Problem, die Linearform $\psi': \text{im } f \rightarrow K$ zu einer Linearform $\varphi: W \rightarrow K$ fortzusetzen.

Um dies zu bewerkstelligen, wählen wir gemäß 1.6/4 ein Komplement W' zu $\text{im } f$ in W , also einen Untervektorraum $W' \subset W$ mit $W = (\text{im } f) \oplus W'$. Jedes $w \in W$ hat dann eine eindeutige Zerlegung $w = w_1 \oplus w_2$ mit $w_1 \in \text{im } f$ und $w_2 \in W'$. Setzt man jeweils $\varphi(w) = \psi'(w_1)$, so erhält man wie gewünscht eine Linearform $\varphi: W \rightarrow K$, die ψ' fortsetzt.

Zum Nachweis von (ii) setze man $f: V \rightarrow W$ als surjektiv voraus. Weiter seien $\varphi, \varphi' \in W^*$ mit $f^*(\varphi) = f^*(\varphi')$, also mit $\varphi \circ f = \varphi' \circ f$. Ist dann $w \in W$ beliebig gewählt und $v \in V$ ein Urbild unter f , so gilt

$$\varphi(w) = \varphi(f(v)) = (\varphi \circ f)(v) = (\varphi' \circ f)(v) = \varphi'(f(v)) = \varphi'(w).$$

Hieraus folgt $\varphi = \varphi'$, wenn man w in W variieren lässt. □

Die Aussage von Satz 3 lässt sich mittels so genannter exakter Sequenzen allgemeiner formulieren. Unter einer *Sequenz* wollen wir eine Kette

$$\dots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \dots$$

von K -linearen Abbildungen verstehen, wobei der Index n einen endlichen oder unendlichen Abschnitt in $\mathbb{Z}$ durchlaufe. Man sagt, die Sequenz besitze bei V_n die Eigenschaft eines *Komplexes*, wenn $f_n \circ f_{n-1} = 0$ oder, äquivalent hierzu, im $f_{n-1} \subset \ker f_n$ gilt. Weiter heißt die Sequenz *exakt bei V_n* , wenn sogar im $f_{n-1} = \ker f_n$ gilt. Erfüllt die Sequenz die Komplex-Eigenschaft an allen Stellen V_n (natürlich außer bei solchen V_n , die die Sequenz möglicherweise terminieren), so spricht man von einem Komplex. Entsprechend heißt die Sequenz *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist. Beispielsweise ist für eine K -lineare Abbildung $f: V' \rightarrow V$ die Sequenz

$$0 \rightarrow V' \xrightarrow{f} V$$

genau dann exakt, wenn f injektiv ist; dabei ist 0 der Nullvektorraum sowie $0 \rightarrow V'$ (als einzig mögliche K -lineare Abbildung von 0 nach V') die Nullabbildung. Entsprechend ist die Sequenz

$$V' \xrightarrow{f} V \rightarrow 0$$

genau dann exakt, wenn f surjektiv ist; auch hierbei ist $V \rightarrow 0$ (zwangsläufig) die Nullabbildung. Exakte Sequenzen des Typs

$$0 \rightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \rightarrow 0$$

werden auch als *kurze exakte Sequenzen* bezeichnet. Die Exaktheit einer solchen Sequenz ist äquivalent zu den folgenden Bedingungen:

- (1) f ist injektiv,
- (2) $\operatorname{im} f = \ker g$,
- (3) g ist surjektiv.

Bei einer kurzen exakten Sequenz können wir daher V' unter f als Untervektorraum von V auffassen, und es folgt mit dem Isomorphiesatz 2.2/9, dass g einen kanonischen Isomorphismus $V/V' \xrightarrow{\sim} V''$ induziert. Umgekehrt kann man zu jedem Untervektorraum $U \subset V$ in kanonischer Weise die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow V/U \rightarrow 0$$

betrachten.

Satz 4. *Es sei*

$$\dots \rightarrow V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} V_{n+1} \rightarrow \dots$$

eine exakte Sequenz von K -Vektorräumen. Dann ist auch die zugehörige duale Sequenz

$$\dots \leftarrow V_{n-1}^* \xleftarrow{f_{n-1}^*} V_n^* \xleftarrow{f_n^*} V_{n+1}^* \leftarrow \dots$$

exakt.

Formulieren wir Satz 3 im Sinne exakter Sequenzen um, so sieht man, dass für eine exakte Sequenz $0 \longrightarrow U \longrightarrow V$ auch die zugehörige duale Sequenz $V^* \longrightarrow U^* \longrightarrow 0$ exakt ist; vgl. Satz 3 (i). Entsprechend besagt Satz 3 (ii), dass für eine exakte Sequenz $U \longrightarrow V \longrightarrow 0$ die zugehörige duale Sequenz $0 \longrightarrow V^* \longrightarrow U^*$ exakt ist. Satz 4 ist daher eine Verallgemeinerung von Satz 3.

Beweis zu Satz 4. Es genügt zu zeigen, dass für eine exakte Sequenz

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

die zugehörige duale Sequenz

$$W^* \xrightarrow{g^*} V^* \xrightarrow{f^*} U^*$$

exakt ist. Zunächst folgt aus $g \circ f = 0$ für beliebiges $\varphi \in W^*$ die Beziehung $(f^* \circ g^*)(\varphi) = \varphi \circ g \circ f = 0$, d. h. es gilt $f^* \circ g^* = 0$ und damit $\text{im } g^* \subset \ker f^*$. Um auch die umgekehrte Inklusion zeigen zu können, betrachte man ein Element $\varphi \in \ker f^*$, also eine Linearform $\varphi: V \longrightarrow K$ mit $\varphi \circ f = 0$. Dann haben wir $\varphi(\text{im } f) = 0$ und wegen der Exaktheit von $U \longrightarrow V \longrightarrow W$ auch $\varphi(\ker g) = 0$; Letzteres bedeutet $\ker g \subset \ker \varphi$. Um nun $\varphi \in \text{im } g^*$ zu zeigen, haben wir eine Linearform $\psi \in W^*$ mit $\varphi = \psi \circ g$ zu konstruieren. Hierzu zerlegen wir $g: V \longrightarrow W$ ähnlich wie im Beweis zu Satz 3 in die von g induzierte surjektive Abbildung $g_1: V \longrightarrow \text{im } g$ sowie die Inklusion $g_2: \text{im } g \hookrightarrow W$. Aufgrund des Homomorphiesatzes 2.2/8 existiert dann eine Linearform $\varphi': \text{im } g \longrightarrow K$ mit $\varphi = \varphi' \circ g_1$. Weiter lässt sich φ' , wie im Beweis zu Satz 3 gezeigt oder unter Benutzung von Satz 3 (i), zu einer Linearform $\psi: W \longrightarrow K$ ausdehnen, d. h. mit $\psi \circ g_2 = \varphi'$. Dann gilt

$$g^*(\psi) = \psi \circ g = \psi \circ g_2 \circ g_1 = \varphi' \circ g_1 = \varphi,$$

also ist ψ ein Urbild zu φ unter g^* . Hieraus ergibt sich $\ker f^* \subset \text{im } g^*$ bzw. $\ker f^* = \text{im } g^*$ und damit die Exaktheit der Sequenz $W^* \longrightarrow V^* \longrightarrow U^*$. $\square$

Als Nächstes wollen wir für endlich-dimensionale K -Vektorräume und ihre Dualräume Basen zueinander in Beziehung setzen. Insbesondere wollen wir zeigen, dass ein Vektorraum und sein Dualraum dieselbe Dimension besitzen. Wir erinnern dabei nochmals an das Kronecker-Symbol δ_{ij} , welches für Indizes i, j aus einer vorgegebenen Menge erklärt ist. Und zwar gilt $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ sonst.

Satz 5. *Es sei V ein K -Vektorraum mit Basis $a_1, \dots, a_n$. Erklärt man dann Linearformen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in V^*$ gemäß 2.1/7 durch $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$, so bilden diese eine Basis von V^* , die so genannte duale Basis zu $a_1, \dots, a_n$.*

Beweis. Wir überprüfen zunächst, dass $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ linear unabhängig sind. Hierzu betrachte man eine Gleichung $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in K$. Einsetzen von a_j liefert

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(a_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

d. h. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sind linear unabhängig. Ist andererseits $\varphi \in V^*$ gegeben, so gilt

$$\varphi(a_j) = \sum_{i=1}^n \varphi(a_i) \varphi_i(a_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

was $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(a_i) \varphi_i$ gemäß 2.1/7 impliziert. $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ erzeugen also V^* und bilden damit sogar eine Basis von V^* . $\square$

Korollar 6. *Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Dann gilt $\dim_K V = \dim_K V^*$. Insbesondere existiert ein Isomorphismus $V \xrightarrow{\sim} V^*$.*

Man beachte, dass sich die Aussage von Satz 5 nicht auf unendlich-dimensionale K -Vektorräume verallgemeinern lässt. Ist nämlich $(a_i)_{i \in I}$ eine unendliche Basis, so erkläre man wiederum durch $\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$ ein System $(\varphi_i)_{i \in I}$ von Linearformen auf V . Wie im Beweis zu Satz 5 ergibt sich, dass dieses linear unabhängig ist und dass der von den φ_i erzeugte lineare Unterraum von V^* gerade aus denjenigen Linearformen $\varphi: V \rightarrow K$ besteht, für die $\varphi(a_i) = 0$ für fast alle $i \in I$ gilt. Andererseits kann man aber Linearformen $V \rightarrow K$ definieren, indem man die Bilder der Basisvektoren a_i beliebig vorgibt. Insbesondere gibt es Linearformen $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(a_i) \neq 0$ für unendlich viele Indizes $i \in I$. Somit kann $(\varphi_i)_{i \in I}$ im Falle einer unendlichen Indexmenge I kein Erzeugendensystem und damit auch keine Basis von V^* sein.

Als Nächstes wollen wir für lineare Abbildungen $f: V \rightarrow W$ den Rang $\operatorname{rg} f$, also die Dimension des Bildes von f , mit dem Rang der zugehörigen dualen Abbildung $f^*: W^* \rightarrow V^*$ vergleichen.

Satz 7. *Ist $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung endlich-dimensionaler Vektorräume und $f^*: W^* \rightarrow V^*$ die zugehörige duale Abbildung, so gilt $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^*$.*

Beweis. Wir spalten $f: V \rightarrow W$ auf in die induzierte surjektive lineare Abbildung $f_1: V \rightarrow \operatorname{im} f$, sowie die Inklusion $f_2: \operatorname{im} f \hookrightarrow W$. Nach Satz 2 ist dann $f^*: W^* \rightarrow V^*$ die Komposition von $f_2^*: W^* \rightarrow (\operatorname{im} f)^*$ und $f_1^*: (\operatorname{im} f)^* \rightarrow V^*$. Nun ist f_2^* surjektiv nach Satz 3 (i) und f_1^* injektiv nach Satz 3 (ii). Es wird daher $(\operatorname{im} f)^*$ unter f_1^* isomorph auf das Bild im f^* abgebildet, und man erhält mit Korollar 6

$$\operatorname{rg} f = \dim_K(\operatorname{im} f) = \dim_K(\operatorname{im} f)^* = \dim_K(\operatorname{im} f^*) = \operatorname{rg} f^*.$$

$\square$

Abschließend wollen wir noch den doppelt dualen Vektorraum $V^{**} = (V^*)^*$ zu einem K -Vektorraum V betrachten. Man hat stets eine kanonische Abbildung

$$\Phi: V \longrightarrow V^{**}, \quad a \longmapsto a^*,$$

wobei a^* für $a \in V$ gegeben ist durch

$$a^*: V^* \longrightarrow K, \quad \varphi \longmapsto \varphi(a).$$

Satz 8. *Ist V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, so ist die vorstehend beschriebene Abbildung $\Phi: V \longrightarrow V^{**}$ ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass Φ K -linear ist. Seien $a, b \in V$ und $\alpha \in K$. Dann stimmen die Abbildungen

$$\begin{aligned} (a+b)^*: V^* &\longrightarrow K, & \varphi &\longmapsto \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \\ a^* + b^*: V^* &\longrightarrow K, & \varphi &\longmapsto \varphi(a) + \varphi(b), \end{aligned}$$

überein, d. h. es gilt $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$. Entsprechend hat man

$$\begin{aligned} (\alpha a)^*: V^* &\longrightarrow K, & \varphi &\longmapsto \varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a), \\ \alpha a^*: V^* &\longrightarrow K, & \varphi &\longmapsto \alpha \varphi(a), \end{aligned}$$

d. h. es folgt $\Phi(\alpha a) = \alpha \Phi(a)$. Insgesamt ergibt sich die K -Linearität von Φ .

Bilden nun $a_1, \dots, a_n$ eine Basis von V und ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die hierzu duale Basis, so ist $a_1^*, \dots, a_n^*$ die duale Basis zu $\varphi_1, \dots, \varphi_n$; denn es gilt

$$a_i^*(\varphi_j) = \varphi_j(a_i) = \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, n.$$

Unter Φ wird also eine Basis von V auf eine Basis des Bildraumes V^{**} abgebildet. Dies bedeutet dann, dass Φ notwendig ein Isomorphismus ist. $\square$

Aufgaben

- Man prüfe, ob die folgenden Linearformen $\varphi_i: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$ ein linear unabhängiges System in $(\mathbb{R}^5)^*$ bilden:
 - $\varphi_1: (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$
 $\varphi_2: (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5$
 $\varphi_3: (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto \alpha_1 - \alpha_2$
 - $\varphi_1: (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto \alpha_1 + 7\alpha_2 + 7\alpha_3 + 7\alpha_4 + \alpha_5$
 $\varphi_2: (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5$
 $\varphi_3: (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto 12\alpha_1 + 7\alpha_2 + 13\alpha_3 + 8\alpha_4 + 9\alpha_5$
 $\varphi_4: (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto 10\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - 3\alpha_4 + 3\alpha_5$
- Für einen Körper K und ein $n \in \mathbb{N}$ betrachte man K^n als K -Vektorraum. Es sei $p_i: K^n \longrightarrow K$, $i = 1, \dots, n$, jeweils die Projektion auf die i -te Koordinate. Man zeige, dass $p_1, \dots, p_n$ eine Basis des Dualraums $(K^n)^*$ bilden, und zwar die duale Basis zur kanonischen Basis $e_1, \dots, e_n \in K^n$, bestehend aus den Einheitsvektoren $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni})$.

Im Falle $K = \mathbb{R}$ und $n = 4$ fixiere man

$$(1, 0, 0, 0), \quad (1, 1, 0, 0), \quad (1, 1, 1, 0), \quad (1, 1, 1, 1)$$

als Basis von $\mathbb{R}^4$ und bestimme die hierzu duale Basis von $(\mathbb{R}^4)^*$, indem man deren Elemente als Linearkombinationen der p_i angibt.

3. Es seien V, W K -Vektorräume. Man zeige, dass die Abbildung

$$\text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_K(W^*, V^*), \quad f \longmapsto f^*,$$

K -linear ist, was bedeutet, dass für Elemente $\alpha \in K$ und K -lineare Abbildungen $f, g: V \longrightarrow W$ stets $(f + g)^* = f^* + g^*$ sowie $(\alpha f)^* = \alpha \cdot f^*$ gilt.

4. Man betrachte einen K -Vektorraum V und zu einem Element $a \in V$ das induzierte Element $a^* \in V^{**}$, welches definiert ist durch

$$a^*: V^* \longrightarrow K, \quad \varphi \longmapsto \varphi(a).$$

Man zeige:

- (i) Die Abbildung $\iota: V \longrightarrow \text{Hom}_K(K, V)$, welche einem Element $a \in V$ die Abbildung $\alpha \longmapsto \alpha \cdot a$ zuordnet, ist ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.
- (ii) Man identifiziere V unter ι mit $\text{Hom}_K(K, V)$ und entsprechend K als K -Vektorraum mit seinem Dualraum $\text{Hom}_K(K, K)$. Dann ist für $a \in V$ das Element $a^* \in V^{**}$ zu interpretieren als die duale Abbildung zu $a = \iota(a)$.
5. Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und V^* sein Dualraum. Für lineare Unterräume $U_1 \subset V$ und $U_2 \subset V^*$ setze man

$$\begin{aligned} U_1^\perp &= \{\varphi \in V^* ; \varphi(U_1) = 0\}, \\ U_2^\perp &= \{a \in V ; \varphi(a) = 0 \text{ für alle } \varphi \in U_2\}. \end{aligned}$$

Man zeige für lineare Unterräume $U, U' \subset V$ bzw. $U, U' \subset V^*$:

- (i) $(U + U')^\perp = U^\perp \cap U'^\perp$
- (ii) $(U^\perp)^\perp = U$
- (iii) $(U \cap U')^\perp = U^\perp + U'^\perp$
- (iv) $\dim_K U + \dim_K U^\perp = \dim_K V$
6. Es sei $f: V \longrightarrow V'$ eine K -lineare Abbildung zwischen K -Vektorräumen und $f^*: V'^* \longrightarrow V^*$ die zugehörige duale Abbildung. Man konstruiere auf kanonische Weise einen Isomorphismus

$$\text{coker } f^* \xrightarrow{\sim} (\ker f)^*,$$

wobei man mit $\text{coker } f^*$ den *Kokern* von f^* , d. h. den Quotienten $V^*/\text{im } f^*$ bezeichnet.

7. Es sei $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von K -Vektorräumen. Man zeige, dass eine solche Sequenz stets *spaltet*, d. h. dass es eine K -lineare Abbildung $\tilde{g}: V'' \longrightarrow V$ mit $g \circ \tilde{g} = \text{id}_{V''}$ gibt. Die Wahl einer solchen Abbildung $\tilde{g}$ hat folgende Konsequenzen:

- (i) $\tilde{g}$ ist injektiv, und es gilt $V = \ker g \oplus \text{im } \tilde{g}$ bzw. $V = V' \oplus V''$, wenn wir V' unter f mit $\ker g = \text{im } f$ identifizieren und entsprechend V'' unter $\tilde{g}$ mit $\text{im } \tilde{g}$.

- (ii) Es existiert eine eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung $\tilde{f}: V \longrightarrow V'$ mit $\tilde{f} \circ f = \text{id}_{V'}$ und $\tilde{f} \circ \tilde{g} = 0$.
- (iii) Es ist $0 \longleftarrow V' \xleftarrow{\tilde{f}} V \xleftarrow{\tilde{g}} V'' \longleftarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz.
8. Man betrachte eine exakte Sequenz von endlich-dimensionalen K -Vektorräumen

$$0 \longrightarrow V_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \longrightarrow 0$$

und zeige

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \dim_K V_i = 0.$$