

Prüfungstrainer Lineare Algebra

Rolf Busam Thomas Epp

Prüfungstrainer Lineare Algebra

500 Fragen und Antworten
für Bachelor und Vordiplom

Autor

Dr. Rolf Busam
Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Im Neuenheimer Feld 288 (1. OG, Zimmer 218)
69120 Heidelberg
busam@mathi.uni-heidelberg.de

Thomas Epp
thomas_epp@web.de

Wichtiger Hinweis für den Benutzer

Der Verlag und die Autoren haben alle Sorgfalt walten lassen, um vollständige und akkurate Informationen in diesem Buch zu publizieren. Der Verlag übernimmt weder Garantie noch die juristische Verantwortung oder irgendeine Haftung für die Nutzung dieser Informationen, für deren Wirtschaftlichkeit oder fehlerfreie Funktion für einen bestimmten Zweck. Ferner kann der Verlag für Schäden, die auf einer Fehlfunktion von Programmen oder ähnliches zurückzuführen sind, nicht haftbar gemacht werden. Auch nicht für die Verletzung von Patent- und anderen Rechten Dritter, die daraus resultieren. Eine telefonische oder schriftliche Beratung durch den Verlag über den Einsatz der Programme ist nicht möglich. Der Verlag übernimmt keine Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren, Programme usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag hat sich bemüht, sämtliche Rechteinhaber von Abbildungen zu ermitteln. Sollte dem Verlag gegenüber dennoch der Nachweis der Rechtsinhaberschaft geführt werden, wird das branchenübliche Honorar gezahlt.

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

© Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg 2009
Spektrum Akademischer Verlag ist ein Imprint von Springer

09 10 11 12 13 5 4 3 2 1

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton
Herstellung: Andrea Brinkmann
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu-Ulm
Titelfotografie: © Panthermedia / Rilo N.
Satz: Autorensatz
Druck und Bindung: Krips b.v., Meppel

Printed The Netherlands

ISBN 978-3-8274-1976-7

Vorwort

Bei dem vorliegenden Band haben wir uns von denselben Zielen und Vorstellungen leiten lassen, die wir schon beim „Prüfungstrainer Analysis“ verfolgt haben. Unsere Idee war es, die zentralen Begriffe der Linearen Algebra in einer knappen und zielgerichteten Form zu rekapitulieren, und zwar in einer Weise, die Studentinnen und Studenten bei der Prüfungsvorbereitung eine echte Hilfestellung bietet. Wir wollten weder eine Aufgabensammlung vorlegen noch mit den zahlreichen Lehrbüchern und den Einführungsvorlesungen zur Linearen Algebra konkurrieren. Stattdessen haben wir versucht, Fragen zu formulieren, die man in einer mündlichen Prüfung realistischerweise erwarten kann. In aller Regel wird man dort nicht damit konfrontiert, komplizierte Rechnungen und aufwendige Beweise in allen Details vorzuführen, sondern zu zeigen, dass man die zentralen Begriffe verstanden hat und sie in den wichtigsten Beweistechniken auch anwenden kann. Unter diesem Gesichtspunkt sind die Fragen ausgesucht und die Antworten formuliert worden, wobei wieder wesentlich die Erfahrungen des erstgenannten Autors aus seiner jahrelangen Tätigkeit als Dozent und Prüfer an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg eingeflossen sind.

Die Inhalte werden, wie schon beim „Prüfungstrainer Analysis“, in einem knappen Frage- und Antworten-Stil dargestellt. Das soll dem Leser ermöglichen, sein Wissen stichpunktartig zu überprüfen und eventuelle Lücken schnell zu entdecken.

Das Buch richtet sich an alle Studierenden, die ein gewisses mathematisches Pensum in Ihrem Studium zu erfüllen haben. Die Lineare Algebra ist heutzutage derart grundlegend für sämtliche Teilgebiete der Mathematik und in ihrer Darstellung derart einheitlich, dass es künstlich wäre, Niveauunterschiede einzuführen und ein Buch über Lineare Algebra speziell an Diplommathematiker, Lehramtskandidaten oder Informatiker zu adressieren. Es mag sein, dass es in der Analysis Unterschiede in den Ansprüchen gibt, aber über die Grundlagen der Linearen Algebra muss im Großen und Ganzen jeder dasselbe wissen. Daher sind Studenten im Haupt- oder Nebenfach Mathematik (mit den Studienzielen Diplom, Bachelor oder Lehramt) genauso herzlich eingeladen, das Buch zur Hand zu nehmen, wie Studierende, die einen Abschluss in Informatik oder in einer Naturwissenschaft anstreben.

Wir danken dem Verlagsteam von Spektrum Akademischer Verlag für die konstruktive Zusammenarbeit. Besonderer Dank gebührt unserem Lektor Herrn Dr. Rüdinger, ohne dessen kompetente und engagierte Beratung das Buch in dieser Form nicht zustande gekommen wäre, sowie Frau Alton, die uns während der Entstehungsphase in allen organisatorischen Fragen tatkräftig und geduldig unterstützt hat.

Heidelberg/Berlin im September 2008

Rolf Busam
Thomas Epp

Inhaltsverzeichnis

1	Algebraische Grundlagen	1
1.1	Der Begriff der Gruppe	1
1.2	Abbildungen zwischen Gruppen, Untergruppen	9
1.3	Der Signum-Homomorphismus	18
1.4	Ringe und Körper	21
1.5	Polynomringe	28
2	Vektorräume	36
2.1	Grundbegriffe	36
2.2	Basis und Dimension	43
2.3	Summen von Vektorräumen	49
3	Lineare Abbildungen und Matrizen	52
3.1	Grundbegriffe	53
3.2	Quotientenvektorräume und affine Unterräume	61
3.3	Matrizen	66
3.4	Matrizenringe	73
3.5	Koordinatenisomorphismen und Basiswechselformalismus	79
3.6	Das Gauß'sche Eliminationsverfahren	86
3.7	Lineare Gleichungssysteme Teil 1	92
3.8	Der Dualraum	97
4	Determinanten	103
4.1	Alternierende Multilinearformen	104
4.2	Determinanten von Matrizen und Endomorphismen	107
5	Normalformentheorie	117
5.1	Eigenwerte und Eigenvektoren	117
5.2	Das charakteristische Polynom	123
5.3	Einsetzen von Matrizen und Endomorphismen in Polynome	130
5.4	Die Jordan'sche Normalform	135
6	Euklidische und unitäre Vektorräume	144
6.1	Bilinearformen und Skalarprodukte	144
6.2	Normierte Räume	151
6.3	Orthonormalbasen und das Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt	158
6.4	Lineare Gleichungssysteme Teil 2	167
6.5	Orthogonale und unitäre Endomorphismen	170
6.6	Die adjungierte Abbildung	176
6.7	Selbstadjungierte Endomorphismen	181

7	Anwendungen in der Geometrie	188
7.1	Affine Räume	188
7.2	Affine Abbildungen und Koordinaten	195
7.3	Projektive Räume	201
7.4	Projektive Abbildungen und Koordinaten.....	206
7.5	Invarianten von Projektivitäten	211
7.6	Projektive Quadriken	219
7.7	Affine Quadriken	230
	Literatur	235
	Symbolverzeichnis	236
	Namen- und Sachverzeichnis	241