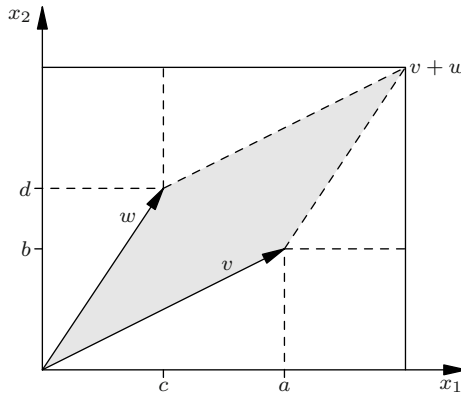


4 Determinanten

Die Determinante ordnet jeder linearen Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen der gleichen Dimension einen Wert aus dem Grundkörper K zu. Sie ist eine wichtige Kenngröße linearer Abbildungen. So liefert die Determinante z. B. ein *Invertierbarkeitskriterium* für quadratische Matrizen und eine Lösungsformel für lineare Gleichungssysteme (Cramer'sche Regel).

Die Determinantenabbildung besitzt für reelle Vektorräume eine anschauliche geometrische Interpretation. Sind $v_1, \dots, v_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so gibt $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ gerade das Volumen des durch diese n Vektoren aufgespannten Parallelotops im $\mathbb{R}^n$ an.



Für zwei Vektoren $v = (a, b)^T$ und $w = (c, d)^T$ bestätigt man dies etwa, indem man die von v und w eingeschlossene Fläche A elementargeometrisch berechnet. Man erhält

$$A = (a + c) \cdot (b + d) - ab - cd - 2 \cdot bc = ad - bc = \det(v_1, v_2).$$

Der Flächeninhalt beträgt genau dann null, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

Als geometrische Kenngröße tritt die Determinante auch in der mehrdimensionalen Analysis in Erscheinung, insbesondere als *Funktionaldeterminante*, die als Maß für die infinitesimale Volumenverzerrung einer Funktion interpretiert werden kann. Damit hängt auch die Rolle der Determinante bei der *Integraltransformationformel* zusammen. Abschließend sei auch noch die Rolle der Determinante bei der *Bestimmung der Eigenwerte einer linearen Abbildung* (s. Kapitel 5.1) erwähnt.

4.1 Alternierende Multilinearformen

Wir führen die Determinante auf $M(n, k)$ im Anschluss an Weierstraß als spezielle alternierende Multilinearform $V^n \rightarrow K$ ein, die durch die Eigenschaft der Normiertheit eindeutig bestimmt ist.

Frage 245 Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum. Was versteht man unter einer **alternierenden k -Form** (alternierende Multilinearform vom Grad k) auf V ? Was ist eine **Determinantenform** auf V ?

Antwort: Eine *alternierende k -Form* auf V ist eine Abbildung

$$g: V^k \rightarrow K, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto d(v_1, \dots, v_k),$$

die

- (a) *multilinear*, d. h. linear in jeder Komponente ist, so dass also für jedes $\alpha, \alpha' \in K$ gilt

$$g(\dots, \alpha v_i + \alpha' v'_i, \dots) = \alpha g(\dots, v_i, \dots) + \alpha' g(\dots, v'_i, \dots)$$

- (b) *alternierend* ist in dem Sinne, dass g verschwindet, falls zwei der k Argumente identisch sind

$$g(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0 \quad \text{für jedes } v \in V$$

Eine n -Form auf einem n -dimensionalen Vektorraum heißt *Determinantenform*. ◆

Frage 246 Wann heißt eine k -Form auf V **schiefsymmetrisch (antisymmetrisch)**?

Antwort: Eine k -Form heißt *antisymmetrisch*, wenn die Form bei Vertauschung von zwei der k Variablen $v_1, \dots, v_k$ ihr Vorzeichen wechselt. ◆

Frage 247 Warum sind alternierende k -Formen stets schiefsymmetrisch?

Antwort: Für eine alternierende k -Form g gilt

$$\begin{aligned} & g(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + g(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) \\ &= g(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) = 0, \end{aligned}$$

also

$$g(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -g(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots). \quad \text{◆}$$

Frage 248 Sei g eine alternierende k -Form und π eine Permutation aus S_k . Können Sie $g(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)})$ durch $g(v_1, \dots, v_k)$ ausdrücken?

Antwort: Es ist

$$g(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) = \text{sign } \pi \cdot g(v_1, \dots, v_k).$$

Das folgt aus der Schiefsymmetrie von g , wenn man π als Produkt von Transpositionen (vgl. Frage 49) schreibt. $\blacklozenge$

Frage 249 Ist $\text{char}(K) \neq 2$, wieso ist dann jede schiefsymmetrische k -Form auch alternierend?

Antwort: Jede schiefsymmetrische k -Form ist für $\text{char}(K) \neq 2$ wegen

$$\begin{aligned} g(\dots, v, \dots, v, \dots) &= g(\dots, \frac{1}{2}v, \dots, v, \dots) + g(\dots, \frac{1}{2}v, \dots, v, \dots) \\ &= g(\dots, \frac{1}{2}v, \dots, v, \dots) + \frac{1}{2}d(\dots, v, \dots, v, \dots) \\ &= g(\dots, \frac{1}{2}v, \dots, v, \dots) + g(\dots, v, \dots, \frac{1}{2}v, \dots) = 0 \end{aligned}$$

auch alternierend (man beachte, dass die Division durch 2 nur für $\text{char}(K) \neq 2$ erlaubt ist). $\blacklozenge$

Frage 250 Können Sie den folgenden Zusammenhang zeigen? Ist $f: V^k \rightarrow K$ eine alternierende k -Form, dann ist $g(v_1, \dots, v_k) = 0$ für jedes linear abhängige k -Tupel $(v_1, \dots, v_k)$.

Antwort: Lässt sich v_j aus den übrigen $k-1$ Vektoren linear kombinieren, so folgt

$$g(\dots, v_j, \dots) = g(\dots, \sum_{i=1, i \neq j}^k \alpha_i v_i, \dots) = \sum_{i=1, i \neq j}^k \alpha_i g(\dots, v_i, \dots).$$

In jedem der $k-1$ Summanden $\alpha_i g(\dots, v_i, \dots)$ kommt der Vektor v_i genau zweimal als Argument von g vor. Daher verschwindet jeder Summand und somit auch $g(v_1, \dots, v_k)$. $\blacklozenge$

Frage 251 Warum ist im Fall $k > n = \dim V$ jede alternierende k -Form die Nullform?

Antwort: Für $k > \dim V$ sind die k Argumente der alternierenden k -Form in jedem Fall linear abhängig. Der Zusammenhang folgt daher aus Frage 250. $\blacklozenge$

Frage 252 Können Sie zeigen, dass die alternierenden k -Formen auf V einen Vektorraum $\text{Alt}^k(V)$ bilden?

Antwort: Setzt man für zwei k -Formen g und f

$$(f + g)(v_1, \dots, v_k) = f(v_1, \dots, v_k) + g(v_1, \dots, v_k) \quad (*)$$

$$(\alpha f)(v_1, \dots, v_k) = \alpha \cdot f(v_1, \dots, v_k), \quad (**)$$

so überprüft man leicht, dass $f + g$ und αf ebenfalls alternierende k -Formen sind. Zusammen mit den in $(*)$ und $(**)$ definierten Verknüpfungen wird die Menge der alternierenden k -Formen auf V damit zu einem Vektorraum $\text{Alt}^k(V)$. ♦

Frage 253 Welche Dimension hat $\text{Alt}^k(V)$?

Antwort: Da jedes $g \in \text{Alt}^k(V)$ multilinear und alternierend ist, ist g bereits eindeutig durch die $\binom{n}{k}$ Werte

$$g(e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}) \quad \text{mit } i_1 < i_2 < \dots < i_k,$$

festgelegt, wobei die e_{i_k} Basisvektoren aus V sind.

Aufgrund dieser Eigenschaft ist es naheliegend, eine Basis von $\text{Alt}^k(V)$ zu konstruieren, indem man die Werte der Basisformen auf den n -Tupeln $(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ explizit so festlegt, dass diese linear unabhängig sind.

Das funktioniert folgendermaßen. Für jedes geordnete k -Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ mit $1 \leq i_j \leq n$ und $i_1 < \dots < i_k$ definiere man die Multilinearform $d^{i_1, \dots, i_k}$ durch

$$d^{i_1, \dots, i_k}(e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) = \begin{cases} \text{sign } \tau & \text{falls } j_1, \dots, j_k \text{ aus einer Permutation } \tau \\ & \text{von } i_1, \dots, i_k \text{ hervorgeht} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (*)$$

Man sieht dann leicht, dass die Multilinearformen $d^{i_1, \dots, i_k}$ alternierend sind, durch die Vorschrift $(*)$ bereits eindeutig festgelegt sind und daher Elemente aus $\text{Alt}^k(V)$ sind. Ferner sind die alternierenden k -Formen $d^{i_1, \dots, i_k}$ linear unabhängig, denn aus

$$g = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1, \dots, i_k} d^{i_1, \dots, i_k} = 0 \quad (*)$$

folgt insbesondere, dass g für jedes System aus k Basisvektoren gleich null ist und daher die Koeffizienten $a_{i_1, \dots, i_k}$ alle verschwinden.

Ferner besitzt jede alternierende k -Form g eine Darstellung der Form $(*)$. Die rechte Seite in $(*)$ hat nämlich für alle k -Tupel $(e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ mit $j_1 < \dots < j_k$ dieselben Werte wie g und stimmt daher aus Linearitätsgründen für alle k -Tupel $(v_1, \dots, v_k)$ beliebiger Vektoren aus V mit g überein.

Damit ist gezeigt, dass die $\binom{n}{k}$ alternierenden k -Formen $d^{i_1, \dots, i_k}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ eine Basis von $\text{Alt}^k(V)$ bilden. Es ist also

$$\dim \text{Alt}^k(V) = \binom{n}{k}. \quad \blacklozenge$$

Frage 254 Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Wieso gilt dann für $f, g \in \text{Alt}^n(V)$

$$f(v_1, \dots, v_n) = g(v_1, \dots, v_n) \iff f = g?$$

Antwort: Wegen $\dim \text{Alt}^n(V) = 1$ ist g ein skalar Vielfaches von f , $g = \alpha f$. Aus $f(v_1, \dots, v_n) = a$ mit $a \neq 0$ folgt also $g(v_1, \dots, v_n) = \alpha a$. Stimmen f und g auf den Basisvektoren überein, dann ist also $\alpha = 1$ und damit $f = g$. Im Fall $a = 0$ ist f die Nullform und aus $g(v_1, \dots, v_n) = 0$ folgt dann auch $g = 0$.

Die Umkehrung des Zusammenhangs ist trivial. ◆

4.2 Determinanten von Matrizen und Endomorphismen

Als spezielle Multilinearform auf K^n lässt sich die Determinante zunächst für Matrizen aus $M(n, K)$ definieren, indem man $\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n)$ setzt, wobei $a_1, \dots, a_n$ die Spaltenvektoren von A bezeichnen. Dies erlaubt auch unmittelbar, die Determinante für lineare Abbildungen $F: K^n \rightarrow K^n$ einzuführen, etwa durch $\det(F) = (F(e_1), \dots, F(e_n))$. Dabei ist allerdings nicht *a priori* klar, dass man dasselbe Ergebnis erhält, wenn man statt der Standardbasis eine beliebige Basis des K^n wählt. Dass dies aber tatsächlich der Fall ist, hängt damit zusammen, dass ähnliche Matrizen dieselbe Determinante besitzen.

Frage 255 Was versteht man unter der **Determinante** auf $M(n, K) \simeq (K^n)^n$?

Antwort: Die Determinante ist die (eindeutig bestimmte) alternierende *normierte* Multilinearform auf $(K^n)^n$. Dabei bedeutet die Normiertheit, dass die Determinante der Standardbasis den Wert 1 hat.

Aufgrund des Isomorphismus $M(n, K) \simeq (K^n)^n$ können wir die Determinante gleichermaßen auf Matrizen aus $M(n, K)$ anwenden wie auf k -Tupel von Vektoren aus K^n . Für $A \in K^{n \times n}$ definiere man einfach

$$\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n),$$

wobei $a_1, \dots, a_n$ die Spaltenvektoren von A sind. ◆

Frage 256 Wieso ist die Determinante durch die Normiertheitsforderung eindeutig bestimmt?

Antwort: Aus Linearitätsgründen ist die Determinante durch ihre Wirkung auf die Basisvektoren bereits eindeutig festgelegt.

Oder anders: Wegen $\dim \text{Alt}^k(V) = 1$ und weil $\det$ nicht die Nullform ist, ist jedes Element aus $g \in \text{Alt}^k(V)$ ein Vielfaches von $\det$, also $g = \alpha \det$. Aus $g(e_1, \dots, e_n) = 1 = \det(e_1, \dots, e_n)$ folgt dann bereits $\alpha = 1$, also $g = \det$. ◆

Frage 257 Erläutern Sie die Existenz der Determinante im Fall $n = 1$ und $n = 2$.

Antwort: Im Fall $n = 1$ ist die Determinante gerade die identische Abbildung

$$\det(a) = a \quad \text{für jedes } a \in K = K^{1 \times 1}.$$

Für $n = 2$ ist die Determinante durch die Abbildung

$$\Delta: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad ((a, b)^T, (c, d)^t) \longmapsto ad - bc$$

gegeben. ◆

Frage 258 Können Sie begründen, warum für eine Diagonalmatrix

$$D = \text{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

gilt

$$\det(D) = \alpha_1 \cdots \alpha_n?$$

Antwort: Es ist

$$\det(D) = \det(\alpha_1 e_1, \alpha_2 e_2, \dots, \alpha_n e_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \det(e_1, \dots, e_n) = \alpha_1 \cdots \alpha_n. \quad \blacklozenge$$

Frage 259 Seien $A, B \in M(n, K)$. Können Sie folgende Zusammenhänge begründen?

- (a) Geht B aus A durch Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $r \in K$ hervor, so gilt

$$\det B = r \cdot \det A.$$

- (b) Entsteht B aus A durch Vertauschen von zwei Spalten, so gilt

$$\det B = -\det A.$$

- (c) Entsteht B aus A durch Addition des α -fachen einer Spalte von A zu einer anderen Spalte von A ($\alpha \in K$), so gilt

$$\det B = \det A.$$

Antwort: Mit $a_1, \dots, a_n$ seien die Spalten von A und entsprechend mit $b_1, \dots, b_n$ die Spalten von B bezeichnet. Man erhält

- (a) $\det(B) = \det(a_1, \dots, ra_i, \dots, a_n) = r \cdot \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = r \cdot \det(A).$

(b) Folgt unmittelbar aus der Schiefsymmetrie von $\det$ (vgl. Frage 247).

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \det(B) &= \det(\dots, a_i + \alpha a_j, \dots, a_j, \dots) \\ &= \det(\dots, a_i, \dots, a_j, \dots) + \alpha \det(\dots, a_j, \dots, a_j, \dots) = \det A + 0. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt insbesondere im Zusammenhang mit Antwort 258 für Elementarmatrizen $\Lambda \in K^{n \times n}$ die Multiplikationsformel

$$\det(\Lambda A) = \det(\Lambda) \det(A). \quad \blacklozenge$$

Frage 260 Wieso gilt für eine obere Dreiecksmatrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

stets

$$\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}?$$

Antwort: Durch wiederholte Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen lässt sich A auf Diagonalform

$$A' = \text{Diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$$

bringen. Nach Antwort 259 (c) und 258 gilt

$$\det(A) = \det(A') = a_{11} \cdots a_{nn}. \quad \blacklozenge$$

Frage 261 Wieso gilt für $A \in K^{n \times n}$

$$\text{rg}(A) = n \quad \text{d. h., } A \text{ ist invertierbar} \iff \det A \neq 0?$$

Antwort: Wenn $\text{rg } A < n$ ist, dann kann man durch elementare Spaltenumformungen, die $\det A$ nicht ändern, eine Nullspalte erzeugen. Also ist in diesem Fall $\det A = 0$. Ist dagegen $\text{rg } A = n$, dann kann man nur durch Spaltenumformungen eine obere Dreiecksmatrix erzeugen, deren Diagonalelemente von null verschieden sind. Nach Frage 258 gilt dann $\det A \neq 0$. $\blacklozenge$

Frage 262 Was besagt die Cramer'sche Regel für ein LGS $Ax = b$ mit $A \in K^{n \times n}$, $b \in K^n$ und $\det A \neq 0$?

Antwort: Die Cramer'sche Regel lautet:

Ist $\det A \neq 0$, so berechnet sich die i -te Komponente der eindeutig bestimmten Lösung des LGS $Ax = b$ nach der Formel

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A}.$$

Dabei bezeichnen $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A .

Zur Herleitung der Cramer'schen Regel schreibe man das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ in der Form

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Subtraktion des Vektors b führt dann auf $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n - b = 0$ oder, was dasselbe ist, auf

$$a_1x_1 + \cdots + (x_ia_i - b) + \cdots + a_nx_n = 0, \quad (*)$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig gewählt werden kann. Nach Voraussetzung besitzt das Gleichungssystem $(*)$ eine nichttriviale Lösung, was bedeutet, dass die Vektoren $a_1, \dots, x_ia_i - b, \dots, a_n$ linear abhängig sind und daher

$$\det(a_1, \dots, x_ia_i - b, \dots, a_n) = 0$$

gilt. Aufgrund der Linearität der Determinante in der i -ten Komponente folgt

$$x_i \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n). \quad (**)$$

Nach Voraussetzung ist $\det(A) = \det(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, also darf in Gleichung $(**)$ durch $\det(A)$ dividiert werden, und man erhält

$$x_i = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det A},$$

was genau die Cramer'sche Regel ist. ◆

Frage 263 Warum ist die Cramer'sche Regel im Allgemeinen nicht für die praktische Berechnung der Lösung eines LGS $Ax = b$ mit $\det A \neq 0$ geeignet? Wieso hat sie dennoch theoretische Bedeutung?

Antwort: Man muss für jede Lösungskomponente eine neue Determinante ausrechnen. Das ist wesentlich rechenaufwendiger als die Lösung mit dem Gauß-Algorithmus.

Man kann der Cramer'schen Regel allerdings entnehmen, dass die Lösungen eines LGS *stetig* von den Koeffizienten des LGS abhängen. Auf diese Weise kann man Abschätzungen für die einzelnen Lösungskomponenten gewinnen. ◆

Frage 264 Welches neue Invertierbarkeitskriterium liefert die Determinante?

Antwort: Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist. ◆

Frage 265 Wie lautet der **Determinantenmultiplikationssatz**? Können Sie eine Beweisskizze geben?

Antwort: Für zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ gilt:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Beweis: Ist $\operatorname{rg} A < n$ oder $\operatorname{rg} B < n$, so ist auch $\operatorname{rg}(AB) < n$. Der Satz gilt daher im Fall $\det(A) = 0$ oder $\det(B) = 0$.

Sei daher $A, B \in GL(n, K)$. Jede Matrix aus $GL(n, K)$ lässt sich als endliches Produkt von Elementarmatrizen schreiben. Daher genügt es sogar, den Beweis für den Fall zu führen, dass $A \in GL(n, K)$ und B eine Elementarmatrix ist. Das wurde bereits in Antwort 259 erledigt. $\blacklozenge$

Frage 266 Können Sie zeigen: Ist $A \in K^{n \times n}$ invertierbar, dann gilt $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$?

Antwort: Wegen $\det(A^{-1}A) = \det(E_n) = 1$ ergibt sich das unmittelbar aus dem Multiplikationssatz aus Frage 265. $\blacklozenge$

Frage 267 Wieso haben ähnliche Matrizen die gleiche Determinante?

Antwort: Sind $A, B \in K^n$ ähnlich, so gibt es eine Matrix $S \in GL(n, K)$ mit $A = S^{-1}BS$. Der Determinantenmultiplikationssatz liefert dann

$$\det(A) = \det(S)^{-1} \det(B) \det(S) = \frac{\det(S)}{\det(S)} \det(B) = \det(B). \quad \blacklozenge$$

Frage 268 Wie ist allgemein die Determinante eines Endomorphismus $f: V \rightarrow V$ definiert? Wieso ist diese Definition eindeutig?

Antwort: Wird F bezüglich irgendeiner Basis F von V durch die Matrix A beschrieben, so definiert man

$$\det(f) := \det(A). \quad (*)$$

Hier muss natürlich noch der Nachweis erbracht werden, dass $\det(f)$ durch $(*)$ tatsächlich wohldefiniert, also unabhängig von der Wahl der speziellen Basis F ist. Sei daher F' eine weitere Basis von V , so dass f bezüglich dieser Basis durch die Matrix B beschrieben wird. Dann gilt $A = S^{-1}AS$ mit einer Matrix $S \in GL(n, K)$ (d. h., A und B sind ähnlich). Wegen Frage 267 ist also $\det(A) = \det(B)$, und somit ist $\det(f)$ durch $(*)$ tatsächlich wohldefiniert. $\blacklozenge$

Frage 269 Wie ist die Gruppe $SL(n, K)$ (spezielle lineare Gruppe) definiert?

Antwort: $SL(n, K)$ ist die Gruppe der Matrizen aus $K^{n \times n}$, die die Determinante 1 haben.

Offensichtlich ist $SL(n, K) \subset GL(n, K)$, und der Determinantenmultiplikationssatz stellt sicher, dass es sich bei $SL(n, K)$ tatsächlich um eine hinsichtlich Matrizenmultiplikation abgeschlossene Gruppe handelt. $\blacklozenge$

Frage 270 Versuchen Sie zu begründen, warum für $A \in K^{n \times n}$ stets $\det A = \det A^T$ gilt (Transpositionsinvarianz der Determinante).

Antwort: Da Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix stets identisch sind, gilt $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$. Aus $\det A = 0$ folgt daher $\det A^T = 0$ und umgekehrt. Ist aber $\det A \neq 0$, dann lässt sich A als ein Produkt von Elementarmatrizen schreiben. Da für Elementarmatrizen Δ der Zusammenhang $\det \Delta = \det \Delta^T$ gilt, wie sich leicht verifizieren lässt, folgt die Behauptung daraus mithilfe des Determinantenmultiplikationssatzes. $\blacklozenge$

Frage 271 Wie lautet die Leibniz'sche Formel zur Berechnung der Determinanten einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

und wie folgt sie aus der Definition der Determinantenabbildung?

Antwort: Die Leibniz'sche Formel lautet

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\pi) a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n}.$$

Dabei bezeichnet sign die Signum-Abbildung, die in Abschnitt 1.3 behandelt wurde. Zum Beweis der Formel. Zunächst gilt aufgrund der Multilinearität der Determinante

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1} e_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n} e_{i_n} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} \det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}). \end{aligned}$$

Nun sind die Terme $\det(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ genau dann null, wenn zwei der Basisvektoren gleich sind, wenn also $e_{i_l} = e_{i_k}$ für bestimmte $k, l \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Dies ist genau dann *nicht* der Fall, wenn die Menge der Indizes $\{i_1, \dots, i_n\}$ aus einer Permutation von $\{1, \dots, n\}$ hervorgeht. Somit folgt

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \det(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}). \quad (*)$$

Mit Antwort 248 ergibt sich ferner

$$\det(e_{\pi(1)}, \dots, e_{\pi(n)}) = \operatorname{sign}(\pi) \det(e_1, \dots, e_n) = \operatorname{sign} \pi.$$

Zusammen mit $(*)$ folgt daraus die Leibniz'sche Formel. $\blacklozenge$

Frage 272 Können Sie begründen, warum für $A \in M(n, K)$ gilt

$$\det(A^T) = \det(A)? \quad (*)$$

Antwort: Die Gleichung lässt sich etwa mithilfe der Leibniz'schen Formel herleiten. Es gilt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdots a_{\pi(n),n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \cdot a_{\pi(1),\pi^{-1} \circ \pi(1)} \cdots a_{\pi(n),\pi^{-1} \circ \pi(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \cdot a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdots a_{n,\pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi^{-1} \cdot a_{1,\pi^{-1}(1)} \cdots a_{n,\pi^{-1}(n)} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \cdot a_{1,\pi(1)} \cdots a_{n,\pi(n)} \\ &= \det(A^T). \end{aligned}$$

Aus (*) folgt insbesondere, dass die Determinante nicht nur linear in den Spalten von A , sondern ebenso in den Zeilen von A ist. $\blacklozenge$

Frage 273 Sei $A \in M(m+n, K)$ eine Blockmatrix der Gestalt

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & M \\ \hline 0 & C \end{array} \right), \quad \text{mit } B \in M(m, K), C \in M(n, K), M \in K^{m \times n}.$$

Können Sie zeigen, dass $\det(A) = \det(B) \cdot \det(C)$ gilt?

Antwort: Wir können annehmen, dass B und C maximalen Rang haben. Andernfalls hat nämlich auch A keinen maximalen Rang, und die Formel gilt wegen $\det(A) = 0$ trivialerweise.

Die Formel erhält man, indem man ausnutzt, dass $\det(A)$ einerseits linear in den Spalten von B und andererseits linear in den Zeilen von C ist. Genauer: Sind $b_1, \dots, b_m$ die Spaltenvektoren von B mit

$$b_j = \sum_{i=1}^m b_{ij} e_i,$$

so führt die lineare Entwicklung nach den Spalten von B auf

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^m b_{i_1,1} \cdots b_{i_m,m} \det \begin{pmatrix} E_m & M \\ 0 & C \end{pmatrix} \\ &= \sum_{\pi \in S_m} \text{sign } \pi \cdot b_{\pi(1),1} \cdots b_{\pi(m),m} = \det(B) \cdot \det \begin{pmatrix} E_m & M \\ 0 & C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entsprechend erhält man nun durch lineare Entwicklung nach den Zeilen von C die Formel

$$\begin{pmatrix} E_m & M \\ 0 & C \end{pmatrix} = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \cdot c_{1,\pi(1)} \cdots c_{1,\pi(m)} = \det(C) \cdot \det \begin{pmatrix} E_m & M \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

Da nach Frage 260 die Matrix

$$\begin{pmatrix} E_m & M \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$$

die Determinante 1 besitzt, folgt die Behauptung. $\blacklozenge$

Frage 274 Für $A \in K^{n \times n}$ sei

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

D. h., A_{ij} ist diejenige Matrix, die man aus A erhält, indem man $a_{ij} = 1$ setzt und ansonsten alle Komponenten in der i -ten Zeile und j -ten Spalte gleich null. Können Sie zeigen, dass

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij}) \quad (\dagger)$$

gilt, wobei $A'_{ij} \in K^{(n-1) \times (n-1)}$ die Matrix ist, die man aus A durch Streichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte erhält

$$A'_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}?$$

Antwort: Durch $(i-1)$ Zeilen und $(j-1)$ Spaltenvertauschungen lässt sich A_{ij} auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A'_{ij} \end{pmatrix}$$

bringen. Wegen $(-1)^{(i-1)+(j-1)} = (-1)^{i+j}$ und Frage 273 gilt daher

$$\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j} \det(A'_{ij}).$$

$\blacklozenge$

Frage 275 Wie lautet der **Laplace'sche Entwicklungssatz**? Können Sie einen Beweis skizzieren?

Antwort: Der Satz lautet:

Ist $n \geq 2$ und $A \in K^{n \times n}$, so gilt für jedes $i = \{1, \dots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}) \quad (*)$$

und entsprechend für jedes $j = \{1, \dots, n\}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}). \quad (**)$$

Dabei bezeichnet A'_{ij} die in Frage 274 definierte Matrix. Die Darstellung (*) bezeichnet man als *Entwicklung nach der i-ten Zeile*, die Darstellung (**) als *Entwicklung nach der j-ten Spalte*.

Beweis: Sei $(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$ diejenige Matrix, die man aus A erhält, indem man den i -ten Spaltenvektor durch e_i ersetzt. Obwohl dabei im Gegensatz zu A_{ij} die restlichen Spaltenvektoren unverändert bleiben, gilt trotzdem stets

$$\det(A_{ij}) = \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n),$$

da sich $(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n)$ durch Addition von Vielfachen der j -ten Spalte zu den anderen Spalten in A_{ij} umwandeln lässt. Nach Antwort 259 (c) bleibt die Determinante dabei unverändert.

Die Gleichung (**) folgt nun in Kombination mit Formel (†) aus Frage 274, indem man die j -te Spalte linear entwickelt

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \det(A_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A'_{ij}) \end{aligned}$$

Analog zeigt man (*), indem man die i -te Zeile von A linear entwickelt. ◆

Frage 276 Wie ist die zu $A \in K^{n \times n}$ **adjungierte Matrix** (Adjunkte) A^{ad} definiert?

Antwort: A^{ad} ist die $(n \times n)$ -Matrix, deren Komponente a_{ij}^{ad} gleich der Determinante der Matrix A_{ji} aus Frage 274 ist

$$A^{\text{ad}} := (a_{ij}^{\text{ad}}) \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & \cdots & \det(A_{n1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \det(A_{1n}) & \cdots & \det(A_{nn}) \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

Man beachte die Vertauschung von Zeilen und Spalten. ◆

Frage 277 Wieso gilt

$$A^{\text{ad}} \cdot A = A \cdot A^{\text{ad}} = \det(A) \cdot E_n \quad (*)$$

für jede Matrix $A \in K^{n \times n}$?

Antwort: Für die Komponente (c_{ik}) von $A^{\text{ad}} \cdot A$ gilt

$$\begin{aligned} c_{ik} &= \sum_{j=1}^n a_{ij}^{\text{ad}} a_{jk} = \sum_{j=1}^n \det(A_{ji}) a_{jk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{jk} \cdot \det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \quad (\text{wie in Antwort 275}) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, \sum_{j=1}^n a_{jk} e_j, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_{i-1}, a_k, a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &= \delta_{ik} \det(A). \end{aligned} \quad \text{◆}$$

Frage 278 Wofür ist die Gleichung $(*)$ aus Frage 277 unter anderem nützlich?

Antwort: Für $A \in \text{GL}(n, K)$ folgt aus der Formel sofort eine explizite Darstellung für die inverse Matrix:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{\text{ad}} \quad \text{◆}$$

Frage 279 Können Sie mit dem Ergebnis aus Frage 278 nochmals die Cramer'sche Formel herleiten?

Antwort: Für eine nicht-singuläre Matrix A lässt sich die eindeutig bestimmte Lösung des LGS $Ax = b$ in der Form $x = A^{-1} \cdot b$ darstellen. Nach der Antwort der vorigen Frage hat A^{-1} in der i -ten Spalte und j -ten Zeile die Komponente

$$\frac{\det(A_{ji})}{\det(A)} = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, e_j, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}.$$

Folglich erhält man für die i -te Komponente des Lösungsvektors x

$$x_i = \sum_{j=1}^n b_j \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)} = \frac{\det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}.$$

Das ist die Cramer'sche Formel. ◆