

5 Normalformentheorie

Dieses Kapitel beschäftigt sich damit, die (geometrischen) Abbildungseigenschaften von Endomorphismen $F: V \longrightarrow V$ genauer zu analysieren. Das Vorgehen besteht dabei darin, geeignete Unterräume von V aufzufinden, auf denen F eine besonders übersichtliche, einfache und klassifizierbare Struktur aufweist. Der Satz über die Jordan'sche Normalform, der am Ende dieses Kapitels behandelt wird, ist in dieser Hinsicht das allgemeinste Ergebnis. Er besagt, dass sich V stets derart in eine direkte Summe $V = \bigoplus U_i$ von sogenannten F -invarianten Unterräumen U_i (das sind Unterräume, für die $F(U_i) \subset U_i$) zerlegen lässt, dass $F|_{U_i}$ einem Abbildungstyp entspricht, der durch eine Reihe von Invarianten eindeutig charakterisiert ist.

In matrizentheoretischer Hinsicht zielt die Fragestellung auf die *Klassifikation von $n \times n$ -Matrizen*. In Frage 202 wurde gezeigt, dass jede $n \times n$ -Matrix A mit

$\operatorname{rg} A = r$ äquivalent zu einer Matrix der Form $M_r := \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Es gibt

also stets Matrizen $Q, P \in \operatorname{GL}(n, K)$ mit $QAP = M_r$, woraus folgt, dass zwei $n \times n$ -Matrizen genau dann äquivalent sind, wenn sie denselben Rang haben. In diesem Kapitel steht dagegen die *Ähnlichkeit* von Matrizen im Mittelpunkt. Zwei Matrizen A und B sind *ähnlich*, wenn eine Matrix $P \in \operatorname{GL}(n, K)$ mit $B = P^{-1}AP$ existiert. Die Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation, und es stellt sich die Frage, zu jeder Ähnlichkeitsklasse einen besonders einfachen und typischen Repräsentanten anzugeben. Anders formuliert: Zu einem Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ finde man eine Basis $\mathcal{B}$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ einer bestimmten Normalform entspricht.

5.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Die kleinstmöglichen nicht-trivialen Unterräume $U \subset V$, die durch einen Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ auf sich selbst abgebildet werden, besitzen die Dimension 1, für diese gilt also $U = Kv$ mit einem Vektor $v \in V$. Auf diesen Unterräumen sind die Abbildungseigenschaften von F besonders übersichtlich, da jeder Vektor aus U durch F auf ein konstantes Vielfaches α seiner selbst abgebildet wird. Den Wert α nennt man in diesem Fall *Eigenwert* von F , den Unterraum U *Eigenraum* und jeden Vektor $v \in U$ einen *Eigenvektor* zum *Eigenwert* α . Besitzt V eine Zerlegung in eine direkte Summe von Eigenräumen von F , dann heißt F *diagonalisierbar*.

Frage 280 Was versteht man unter (a) einem **Eigenvektor**, (b) einem **Eigenwert**, (c) einem **Eigenraum** eines Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$?

Antwort: (a) Ein Vektor $v \in V$ heißt *Eigenvektor* von F , wenn $v \neq 0$ ist und ein $\lambda \in K$ existiert, so dass gilt

$$F(v) = \lambda v.$$

Ein Eigenvektor wird durch F also auf ein skalares Vielfaches seiner selbst abgebildet. Man beachte, dass der Nullvektor nach Definition kein Eigenvektor ist.

(b) In der Situation unter (a) heißt λ *Eigenwert* von F . Man spricht dann auch als v von einem Eigenvektor zum Eigenwert λ .

(c) Ist λ Eigenwert von F , so heißt

$$\text{Eig}(F, \lambda) := \{v \in V ; F(v) = \lambda v\}$$

der *Eigenraum* zum Eigenwert λ . Hierbei handelt es sich tatsächlich um einen Unterraum von V , denn aus $v, w \in \text{Eig}(F, \lambda)$ und $\alpha \in K$ folgt $F(v + w) = \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ sowie $F(\alpha v) = \alpha F(v) = \alpha \cdot \lambda v = \lambda(\alpha v)$, also $v + w \in \text{Eig}(F, \lambda)$ und $\alpha v \in \text{Eig}(F, \lambda)$. $\blacklozenge$

Frage 281 Welche Eigenwerte und Eigenvektoren besitzt die Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, -x_2)$ (Spiegelung an der x_1 -Achse). Was sind die Eigenräume?

Antwort: Durch eine anschaulich-geometrische Überlegung macht man sich klar, dass jeder Vektor des Typs $(x_1, 0)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, jeder Vektor des Typs $(0, x_2)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 ist. Darüber hinaus gibt es keine weiteren Eigenvektoren. Weiter gilt $\text{Eig}(F, 1) = \mathbb{R}e_1$ und $\text{Eig}(F, -1) = \mathbb{R}e_2$. $\blacklozenge$

Frage 282 Wieso gilt $\text{Eig}(F, 0) = \ker F$ für einen Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$?

Antwort: Es ist $\text{Eig}(F, 0) = \{x \in V ; F(x) = 0 \cdot x\} = \{x \in V ; F(x) = 0\} = \ker f$. $\blacklozenge$

Frage 283 Sei $F: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus und $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ für eine Basis $\mathcal{B}$ von V . Dann gilt: v ist ein Eigenvektor von F zum Eigenwert λ genau dann, wenn der Koordinatenvektor $\kappa_{\mathcal{B}}(v) \in K^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist. Können Sie diesen Zusammenhang begründen?

Antwort: Es gilt

$$A \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v) = \kappa_{\mathcal{B}}(F(v)).$$

Da $\kappa_{\mathcal{B}}$ ein Homomorphismus ist, folgt daraus $A \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v) = \lambda \kappa_{\mathcal{B}}(v) \iff F(v) = \lambda v$. Die Koordinatenabbildung ist ferner sogar ein Isomorphismus, so dass $v \neq 0$ genau dann gilt, wenn $\kappa_{\mathcal{B}}(v) \neq 0$ ist. Eigenvektoren werden damit durch $\kappa_{\mathcal{B}}$ auf Eigenvektoren abgebildet. $\blacklozenge$

Frage 284 Wie sind die Eigenwerte einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ erklärt?

Antwort: Die Eigenwerte einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ sind die Eigenwerte der durch A beschriebenen Abbildung $F_A: K^n \rightarrow K^n$ mit $F_A(x) = A \cdot x$. ♦

Frage 285 Sei $F: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V sowie $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ zwei Basen von V . Wieso besitzen dann $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ und $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ dieselben Eigenwerte?

Antwort: Nach den Fragen 283 und 284 ist λ ein Eigenwert von F genau dann, wenn λ ein Eigenwert von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ ist und genau dann, wenn λ ein Eigenwert von $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ ist. Daraus folgt die Behauptung. ♦

Frage 286 Wann heißen zwei $n \times n$ -Matrizen A und B **ähnlich**? Wieso ist die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation?

Antwort: Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, wenn eine Matrix $P \in GL(n, K)$ existiert, so dass $A = P^{-1}BP$ gilt.

Um zu zeigen, dass es sich bei der Ähnlichkeit um eine Äquivalenzrelation handelt, müssen die Eigenschaften der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität verifiziert werden. Dazu schreiben wir $A \sim B$, um die Relation „ A ist ähnlich zu B “ zu bezeichnen. Zunächst gilt $A = E_n^{-1}AE_n$, also $A \sim A$, d. h., „ $\sim$ “ ist reflexiv. Gilt $A = P^{-1}BP$, so folgt $B = Q^{-1}AQ$ mit $Q = P^{-1}$. Aus $A \sim B$ folgt also $B \sim A$. Damit ist „ $\sim$ “ reflexiv. Sei schließlich $A \sim B$ und $B \sim C$. Dann existieren Matrizen $P, Q \in M(n, K)$ mit $A = P^{-1}BP$ und $B = Q^{-1}CQ$. Hieraus folgt $A = (PQ)^{-1}CQP = S^{-1}CS$ mit $S = QP$. Somit gilt $A \sim C$, und es folgt die Transitivität von $\sim$. Insgesamt ist damit gezeigt, dass die Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $n \times n$ -Matrizen ist. ♦

Frage 287 Wieso besitzen ähnliche Matrizen dieselben Eigenwerte?

Antwort: Seien A und B ähnlich, so dass $A = P^{-1}BP$ mit einer Matrix $P \in GL(n, K)$ gilt. Man betrachte die durch $F(x) = A \cdot x$ definierte Abbildung $F: K^n \rightarrow K^n$. Bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von K^n gilt dann $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$. Fasst man nun P als Basiswechselmatrix auf, die $\mathcal{E}$ in eine weitere Basis $\mathcal{B}$ des K^n überführt, so gilt $B = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$. Nach Frage 285 besitzen $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ und damit A und B dieselben Eigenwerte. ♦

Frage 288 Können Sie zeigen, dass jede $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$, in der alle Zeilensummen den Wert λ haben, den Eigenwert λ und den Eigenvektor $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ besitzt?

Antwort: Es gilt

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} + \cdots + a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} + \cdots + a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot x.$$

Damit ist x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . ◆

Frage 289 Wieso ist ein System $(v_1, \dots, v_r)$ von Eigenvektoren von F zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ stets linear unabhängig?

Antwort: Angenommen, die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_r$ sind linear abhängig, so dass also gilt

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i = 0 \quad \text{mit } \alpha_i \in K, \text{ nicht alle } \alpha_i = 0. \quad (*)$$

Man zeigt nun, dass dies bereits die lineare Abhängigkeit von $v_2, \dots, v_r$ impliziert, woraus man induktiv $v_r = 0$ folgert, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht, dass v_r ein Eigenvektor ist.

Man betrachte also (*). Wegen $v_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, r$ gilt sogar, dass mindestens zwei der Skalare α_i in dieser Gleichung nicht verschwinden, also

$$\alpha_j \neq 0 \quad \text{für mindestens ein } j \in \{2, \dots, r\}. \quad (**)$$

Nun erhält man aus (*) einerseits $\sum_{i=1}^r \lambda_1 \alpha_i v_i = 0$, andererseits

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^r F(\alpha_i v_i) = F\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) = F(0) = 0.$$

Subtraktion dieser beiden Gleichungen liefert daher

$$\sum_{i=1}^r (\lambda_i - \lambda_1) \alpha_i v_i = \sum_{i=2}^r (\lambda_i - \lambda_1) \alpha_i v_i = 0.$$

Da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, ist $(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0$ für $i = 2, \dots, r$. Wegen (**) verschwinden damit nicht alle Koeffizienten in der rechten Summe, d. h., $v_2, \dots, v_r$ sind linear abhängig, was zu zeigen war. ◆

Frage 290 Wie viele paarweise verschiedene Eigenwerte kann ein Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ höchstens besitzen?

Antwort: Es existieren höchstens $n = \dim V$ paarweise verschiedene Eigenwerte, da die zugehörigen Eigenvektoren nach Antwort 289 linear unabhängig sind. ◆

Frage 291 Wie ist die **geometrische Vielfachheit** eines Eigenwerts erklärt?

Antwort: Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist die Dimension des von den zugehörigen Eigenvektoren aufgespannten Unterraums.

Z. B. besitzt die identische Abbildung $\text{id}: V \rightarrow V$ den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$, und jedes $v \in V$ ist ein zugehöriger Eigenvektor. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 zur identischen Abbildung ist also gleich $n = \dim V$. ♦

Frage 292 Warum ist die Summe der Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten eines Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ stets direkt?

Antwort: Da Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig sind, kann eine Summe $\sum_{i=1}^r v_i$ mit $v_i \in \text{Eig}(F, \lambda_i)$ auch nur dann verschwinden, wenn alle v_i gleich null sind. Das heißt nichts anderes, als dass die Summe $V' = \sum_{i=1}^r \text{Eig}(F, \lambda_i)$ direkt ist:

$$V' = \bigoplus_{i=1}^r \text{Eig}(F, \lambda_i). \quad \blacklozenge$$

Frage 293 Wann heißt ein Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ eines endlichdimensionalen K -Vektorraums **diagonalisierbar**?

Antwort: F heißt *diagonalisierbar*, wenn eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass die beschreibende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ *Diagonalform* besitzt, also wie folgt aussieht

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 294 Wie lässt sich die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ im Hinblick auf seine Eigenwerte charakterisieren?

Antwort: Es gilt:

Ein Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von F besitzt.

Beweis: Ist F diagonalisierbar, dann gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, so dass gilt:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Wegen $\kappa_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$ gilt dann

$$\kappa_{\mathcal{B}}(F(v_i)) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v_i) = \lambda_i \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v_i) = \kappa_{\mathcal{B}}(\lambda_i v_i).$$

Daraus folgt $F(v_i) = \lambda_i v_i$. Also ist v_i für $i = 1, \dots, n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i .

Ist umgekehrt $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren zu F mit den zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dann gilt

$$\kappa_{\mathcal{B}}(F(v_i)) = \kappa_{\mathcal{B}}(\lambda_i v_i) = \lambda_i \cdot \kappa_{\mathcal{B}}(v_i),$$

und damit besitzt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ notwendigerweise die Gestalt (*). ◆

Frage 295 Der Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ besitze $n = \dim V$ paarweise verschiedene Eigenwerte. Wieso ist F dann diagonalisierbar? Gilt hiervon auch die Umkehrung?

Antwort: Existieren n paarweise verschiedene Eigenwerte, so besitzt V nach Antwort 289 eine Basis aus Eigenvektoren und ist daher nach Frage 294 diagonalisierbar.

Die Umkehrung gilt natürlich nicht. Als Gegenbeispiel betrachte man die identische Abbildung. Diese ist diagonalisierbar (mit E_n als beschreibender Matrix), besitzt aber offensichtlich nur den einzigen Eigenwert $\lambda = 1$. ◆

Frage 296 Seien $\dim V = n < \infty$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte eines Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ und $m(\lambda_j) = \dim \operatorname{Eig}(F, \lambda_j)$ die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ_j . Können Sie zeigen:

$$F \text{ diagonalisierbar} \iff n = \sum_{j=1}^r m(\lambda_j).$$

Antwort: Sei F diagonalisierbar. Dann existiert eine Basis aus Eigenvektoren, von denen jeder in genau einem Eigenraum $\operatorname{Eig}(F, \lambda_i)$ mit $i = 1, \dots, r$ liegt. Da die Summe der Eigenräume direkt ist, gilt folglich

$$V = \bigoplus_{i=1}^r \operatorname{Eig}(F, \lambda_i),$$

und damit

$$n = \dim V = \dim \bigoplus_{i=1}^r \operatorname{Eig}(F, \lambda_i) = \sum_{i=1}^r \dim \operatorname{Eig}(F, \lambda_i) = \sum_{i=1}^r m(\lambda_i).$$

Umgekehrt folgt aufgrund der Direktheit der Summe der Eigenräume eben auch

$$\dim \bigoplus_{i=1}^r \operatorname{Eig}(F, \lambda_i) = \sum_{i=1}^r \dim \operatorname{Eig}(F, \lambda_i) = \sum_{i=1}^r m(\lambda_i) = n,$$

also

$$\bigoplus_{i=1}^r \text{Eig}(F, \lambda_i) = V.$$

Da die Eigenräume $\text{Eig}(F, \lambda_i)$ von Eigenvektoren von F aufgespannt werden, gilt dies damit auch für V . D. h., V besitzt eine Basis aus Eigenvektoren und ist daher diagonalisierbar (nach Frage 294). $\blacklozenge$

5.2 Das charakteristische Polynom

Nachdem im vorigen Abschnitt die Eigenschaften der Eigenwerte von Endomorphismen untersucht wurden, wird nun eine Methode behandelt, die Eigenwerte eines Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ explizit zu bestimmen. Die Grundlage dafür bildet die Tatsache, dass λ genau dann ein Eigenwert von $F \in \text{End}(V)$ ist, wenn $F - \lambda \text{id}$ einen nichttrivialen Kern hat bzw. wenn $\det(F - \lambda \text{id}) = 0$ gilt. Durch Bestimmung derjenigen Werte $x \in K$, für die $\det(F - x \text{id}) = 0$ gilt, erhält man also sämtliche Eigenwerte von F .

Frage 297 Sei $F: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Können Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen beweisen?

- (i) λ ist Eigenwert zu F
- (ii) $\ker(\lambda \text{id} - F) \neq \{0\}$
- (iii) $\lambda \text{id} - F$ ist nicht invertierbar
- (iv) $\det(\lambda \text{id} - F) = 0$.

Antwort: Die Äquivalenz von (ii), (iii) und (iv) gehört zur Theorie linearer Abbildungen und ihrer Determinanten und wurde in den entsprechenden Kapiteln schon gezeigt.

Ist v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , so gilt außerdem

$$F(v) = \lambda v \iff \lambda v - F(v) = \text{id}(\lambda v) - F(v) = \lambda \text{id}(v) - F(v) = (\lambda \text{id} - F)(v) = 0.$$

Daraus folgt $v \in \ker(\lambda \text{id} - F)$. Wegen $v \neq 0$ beweist das (i) $\iff$ (ii). $\blacklozenge$

Frage 298 Wie ist das **charakteristische Polynom** χ_F einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ erklärt?

Antwort: Zur Berechnung von Eigenwerten ist Punkt (iv) aus Frage 297 aufschlussreich. Ist F die durch die Matrix $A = (a_{ij})$ beschriebene Abbildung $K^n \rightarrow K^n$, so ist λ genau dann ein Eigenwert von F , wenn $\det(\lambda \text{id} - F)$ verschwindet. In diesem Fall gilt also

$$\det(\lambda E_n - A) = \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{\pi(i), i} - a_{\pi(i), i}) = 0$$

genau dann, wenn λ ein Eigenwert zu A ist bzw. genau dann, wenn λ eine Nullstelle des Polynoms

$$\chi_A := \sum_{\pi \in S_n} \text{sign } \pi \prod_{i=1}^n (X\delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}) \in K[X].$$

ist. χ_A heißt das *charakteristische Polynom* zur Matrix A .

Die Eigenwerte von F sind also genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms χ_A , wobei $A \in K^{n \times n}$ eine Darstellungsmatrix von F bezüglich einer Basis von V ist.

Formal wäre es komfortabler, das charakteristische Polynom einfach durch $\det(XE_n - A)$ zu definieren. Dabei entsteht allerdings der formale Missklang, dass die Einträge in der Matrix $XE_n - A$ keine Elemente des Körpers K , sondern des Polynomrings $K[X]$ sind, und eine Determinantentheorie für Matrizen mit Einträgen aus einem beliebigen Ring steht uns nicht zur Verfügung. Ein leichter Ausweg aus dieser Situation besteht darin, die Elemente X nicht als Elemente des Polynomrings $K[X]$, sondern des zugehörigen Quotientenkörpers $K(X)$ aufzufassen. Für diesen greift unsere Determinantentheorie, und mit dieser formalen Vereinbarung kann man $\chi_A = \det(XE - A)$ unzweideutig definieren. $\blacklozenge$

Frage 299 Wie ist das charakteristische Polynom χ_F eines Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ erklärt? Warum ist diese Definition basisunabhängig?

Antwort: Wird F bezüglich einer Basis von V durch die Matrix A beschrieben, dann setzt man

$$\chi_F := \chi_A.$$

Ist nun eine weitere Basis von V gegeben, bezüglich der F durch die $B \in K^{n \times n}$ beschrieben wird, so gilt $B = S^{-1}AS$ mit einer Matrix $S \in \text{GL}(n, K)$. Wegen $XE = S^{-1} \cdot XE \cdot S$ folgt

$$\begin{aligned} \det(XE - B) &= \det(XE - S^{-1}AS) = \det(S^{-1}(XE - A)S) \\ &= \det S^{-1} \cdot \det(XE - A) \cdot \det S = \det(XE - A). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass χ_F basisunabhängig ist. Eine äquivalente Formulierung dieses Ergebnisses lautet, dass ähnliche Matrizen dasselbe charakteristische Polynom haben. $\blacklozenge$

Frage 300 Was versteht man unter der **Spur** einer Matrix $A \in K^{n \times n}$?

Antwort: Die **Spur von** A ist die Summe der Diagonalelemente der Matrix A

$$\text{Spur}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

$\blacklozenge$

Frage 301 Warum besitzen ähnliche Matrizen dieselbe Spur?

Antwort: Man betrachte die Darstellung des charakteristischen Polynoms aus Antwort 298 mittels der Leibniz'schen Formel. Diese lässt sich schreiben als Summe

$$\begin{aligned}\chi_A &= \prod_{i=1}^n (X - a_{ii}) + \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi \neq \text{id}}} \prod_{i=1}^n (X \delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}) \\ &= X^n - \underbrace{(a_{11} + \cdots + a_{nn})}_{=\text{Spur}(A)} X^{n-1} + c_2 X^{n-2} + \cdots + \sum_{\substack{\pi \in S_n \\ \pi \neq \text{id}}} \prod_{i=1}^n (X \delta_{\pi(i),i} - a_{\pi(i),i}).\end{aligned}$$

Die rechte Summe stellt ein Polynom vom Grad $\leq n-2$ dar, da für $\pi \neq \text{id}$ mindestens zwei Komponenten $T \delta_{\pi(i),i}$ verschwinden. Da ähnliche Matrizen nach Frage 299 dasselbe charakteristische Polynom besitzen, folgt durch Koeffizientenvergleich, dass sie auch dieselbe Spur haben. $\blacklozenge$

Frage 302 Sei $\dim V = 2$ und $F \in \text{End}(V)$. Wieso gilt

$$\chi_F(X) = X^2 - \text{Spur}(F) \cdot X + \det(F)?$$

Antwort: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Darstellungsmatrix von F . Dann gilt

$$\begin{aligned}\chi_F &= \det \begin{pmatrix} X - a & b \\ c & X - d \end{pmatrix} = (X - a)(X - d) - bc \\ &= X^2 - (a + d)X + ad - bc = X^2 - \text{Spur}(F)X + \det(F).\end{aligned}$$

$\blacklozenge$

Frage 303 Warum tritt jedes normierte Polynom als charakteristisches Polynom eines geeigneten Endomorphismus auf?

Antwort: Zu $p(X) := X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0$ betrachte man die Matrix (die sogenannte *Begleitmatrix*)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & -c_0 \\ 1 & 0 & & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 & -c_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass dann $\chi_A = p$ gilt, was die Frage beantwortet.

Der Beweis erfolgt über Induktion nach $n = \deg(p)$. Für $n = 1$ ist der Zusammenhang klar. Sei sie für Polynome vom Grad $n - 1$ also bereits gezeigt. Dann liefert Entwicklung nach der ersten Zeile

$$\begin{aligned} \det(XE_n - A) &= \det \begin{pmatrix} X & & & c_0 \\ -1 & X & & c_1 \\ & -1 & X & c_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -1 & X + c_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= X \cdot \det \begin{pmatrix} X & & c_1 \\ -1 & X & c_2 \\ & \ddots & \vdots \\ & & -1 & X + c_{n-1} \end{pmatrix} + (-1)^{n-1} c_0 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & X \\ & -1 & X \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der erste Summand ist gleich $X \cdot (X^{n-1} + c_{n-1}X^{n-2} + \dots + c_1)$ gemäß der Induktionsvoraussetzung, und für den letzten ergibt sich $(-1)^{n-1} \cdot c_0 \cdot (-1)^{n-1} = c_0$, also hat man insgesamt

$$\chi_A = \det(XE - A) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0 = p(X),$$

was zu zeigen war. ◆

Frage 304 Wie ist die **algebraische Vielfachheit** eines Eigenwerts definiert?

Antwort: Ist λ ein Eigenwert des Endomorphismus F , so ist die *algebraische Vielfachheit* $\mu_F(\lambda)$ von λ gleich der Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_F .

Es ist $\mu(\lambda) = r$ also genau dann, wenn χ_F eine Darstellung

$$\chi_F = (X - \lambda)^r \cdot p(X)$$

mit einem Polynom $p(X)$ besitzt, welches keine Nullstelle für $X = \lambda$ hat. ◆

Frage 305 Wieso ist die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts stets kleiner oder gleich seiner algebraischen Vielfachheit?

Antwort: Sei λ ein Eigenwert zu F und sei $s := m(\lambda) = \dim \text{Eig}(F, \lambda)$. Man wähle eine Basis $(v_1, \dots, v_s)$ von $\text{Eig}(F, \lambda)$ und ergänze diese zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_s, v_{s+1}, \dots, v_n)$ von V . Es gilt dann

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ * \\ * \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} A' \\ A' \\ A' \end{matrix} \end{array} \right) \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} \lambda \\ \ddots \\ \lambda \end{matrix}} \right\} s \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} \right\} n-s \end{matrix}.$$

Folglich gilt $\chi_F = (X - \lambda)^s \cdot p(X)$ mit einem Polynom p vom Grad $n - s$. Die Vielfachheit von λ als Nullstelle von χ_F ist damit mindestens gleich s bzw. es gilt also $\mu(\lambda) \geq m(\lambda)$, was zu zeigen war.

Dass hier im Allgemeinen kein Gleichheitszeichen steht, zeigt das Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(X) = (X - 1)(X - 3) + 1 = (X - 2)^2$$

besitzt eine zweifache Nullstelle bei 2, aber das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b &= 2a \\ -a + 3b &= 2b \end{aligned}$$

besitzt nur den eindimensionalen Lösungsraum $\lambda(1, 1)^T$. ◆

Frage 306 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Wie lautet χ_A ? Was ist die geometrische, was die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1? Ist A diagonalisierbar?

Antwort: Es ist $\chi_A(X) = (X - 1)^2$ und somit $\mu(1) = 2$. Da aber das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b &= a \\ b &= b \end{aligned}$$

nur den eindimensionalen Lösungsraum $K \cdot (1, 0)^T$ besitzt, gilt für die algebraische Vielfachheit $m(1) = 1$. Damit ist A auch nicht diagonalisierbar, da ja andernfalls eine Basis aus Eigenvektoren (zum einzigen Eigenwert 1) existieren müsste. ◆

Frage 307 Sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $F \in \text{End}(V)$. Wieso ist F genau dann diagonalisierbar, wenn

$$\chi_F(X) = \prod_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{e_i}$$

mit $\lambda_j \in K$ sowie

$$e_i = m(\lambda_i) = \mu(\lambda_i)$$

gilt?

Antwort: Unter den gegebenen Bedingungen gilt

$$\sum_{i=1}^s m(\lambda_i) = \sum_{i=1}^s \mu(\lambda_i) = n,$$

und damit ist F diagonalisierbar nach Antwort 296. ♦

Frage 308 Wann heißt ein Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ eines K -Vektorraums V **trigonalisierbar**?

Antwort: F heißt *trigonalisierbar*, wenn eine Basis von $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, also folgende Gestalt besitzt:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
♦

Frage 309 Warum ist $F: V \rightarrow V$ genau dann trigonalisierbar, wenn χ_F über K in Linearfaktoren zerfällt?

Antwort: Ist F trigonalisierbar, existiert also eine Basis $\mathcal{B}$, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} =: A = (a_{ij})$ eine obere Dreiecksmatrix ist, so gilt $\chi_F = \chi_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$, also zerfällt χ_F vollständig in Linearfaktoren.

Die andere Richtung zeigt man mit vollständiger Induktion über $n = \dim V$. Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also die Behauptung für Vektorräume der Dimension $n - 1$ schon gezeigt. Für das charakteristische Polynom von $F: V \rightarrow V$ gelte

$$\chi_F = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

für $\lambda_i \in K$. Man wähle einen Eigenvektor v_1 zu λ_1 und ergänze diesen zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, w_2, \dots, w_n)$ von V . Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \boxed{B} \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Die Matrix B ist nun eine Darstellungsmatrix eines Endomorphismus $V' \rightarrow V'$ mit $\dim V' = n - 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung existiert eine Basis $\mathcal{B}' = (w'_1, \dots, w'_{n-1})$ von V' , bezüglich der B trigonalisierbar ist. Die Vektoren w'_i betten wir nun mit der Abbildung $F: V' \rightarrow V$ in V ein, die sich wie in dem unten stehenden Diagramm zusammensetzt

$$\begin{array}{ccc} V' & \xrightarrow{F} & V \\ \kappa_{\mathcal{B}'} \downarrow & & \downarrow \kappa_B \\ K^{n-1} & \xrightarrow{G} & K^n, \end{array}$$

bei dem G die kanonische Einbettung ist, die einen Vektor $(x_1, \dots, x_n)^T \in K^{n-1}$ auf $(0, x_1, \dots, x_n)^T$ abbildet. Damit ist dann $(v_1, F(w'_1), \dots, F(w'_{n-1}))$ ebenfalls eine Basis von V , und bezüglich dieser wird F durch eine Diagonalmatrix beschrieben.



Frage 310 Wann heißt ein Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ **nilpotent**? Nennen Sie weitere zu dieser Definition äquivalente Bedingungen.

Antwort: Man nennt einen Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ *nilpotent*, wenn $F^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Für $F \in \text{End}(V)$ und $n = \dim V$ sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (i) F ist nilpotent
- (ii) $F^\ell = 0$ für ein ℓ mit $1 \leq \ell \leq n$
- (iii) $\chi_F = \pm X^n$
- (iv) Es gibt eine Basis $\mathcal{B}$ von V , so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis: (i) $\implies$ (ii) Aus $F^k = 0$ und $F^{k-1} \neq 0$ folgt

$$\{0\} = \text{im } F^k \subsetneq \text{im } F^{k-1} \subsetneq \dots \subsetneq \text{im } F \subsetneq V. \quad (*)$$

Denn andernfalls würde $\operatorname{im} F^j = F(\operatorname{im} F^{j-1}) = \operatorname{im} F^{j-1}$ für ein $j < k$ gelten, und daraus folgte dann

$$\operatorname{im} F^{j+1} = F(\operatorname{im} F^j) = F(\operatorname{im} F^{j-1}) = \operatorname{im} F^{j-1}$$

und schließlich $\operatorname{im} F^m = \operatorname{im} F^{j-1} \neq 0$ für alle $m \geq j-1$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Kette in (*) besteht (ausschließlich V) also aus höchstens $n = \dim V$ Gliedern.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $F^\ell = 0$ impliziert, dass 0 der einzige Eigenwert ist. Wäre $\lambda \neq 0$ ein anderer Eigenwert und v ein zugehöriger Eigenvektor, dann würde ja $F^\ell(v) = \lambda^\ell v \neq 0$ gelten. Es folgt, dass das charakteristische Polynom die Form $\chi_F = \pm X^n$ haben muss.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Nach Antwort 309 ist F trigonalisierbar. Die entsprechende Dreiecksmatrix muss dann die spezielle Gestalt haben.

(iv) $\Rightarrow$ (i) In der Matrix $A = (a_{ij})$ gilt $a_{ij} = 0$ für alle Paare (i, j) mit $j \leq i$. Für die Einträge c_{ij} der Matrix A^2 gilt daher

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^n a_{i\ell} a_{\ell j} = \sum_{i < \ell < j} a_{i\ell} a_{\ell j},$$

d. h., es ist $c_{ij} = 0$ für alle Paare von Indizes (i, j) mit $j \leq i+1$. Induktiv ergibt sich mit diesem Argument, dass für die Einträge d_{ij} der Matrix A^n gelten muss: $d_{ij} = 0$ für alle Paare (i, j) mit $j \leq i+n-1$, woraus wegen $1 \leq i, j \leq n$ dann folgt, dass alle Einträge in A^n verschwinden. $\blacklozenge$

5.3 Einsetzen von Matrizen und Endomorphismen in Polynome

Um das Abbildungsverhalten eines Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ zu analysieren, müssen systematisch die Potenzen F^i untersucht werden. Das spielt vor allem dann eine Rolle, wenn es um das Auffinden F -invarianter Unterräume von V geht.

Frage 311 Wie sind für $F \in \operatorname{End}(V)$ bzw. $A \in M(n, K)$ die **Einsetzungshomomorphismen**

$$\Phi_F: K[X] \longrightarrow \operatorname{End}(V) \quad \text{bzw.} \quad \Phi_A: K[X] \longrightarrow M(n, K)$$

definiert?

Antwort: Für ein Polynom $p(X) = \sum_{i=0}^r \alpha_i X^i$ aus $K[X]$ ist $\Phi_F(p)$ derjenige Endomorphismus $V \rightarrow V$, den man durch formales Einsetzen von F für X in p erhält, analog für $\Phi_A(p)$. Es gilt also

$$\Phi_F(p) = p(F) = \sum_{i=0}^r \alpha_i F^i \quad \text{bzw.} \quad \Phi_A(p) = p(A) = \sum_{i=0}^r \alpha_i A^i.$$

Dabei sind die Potenzen F^i und A^i wie üblich rekursiv definiert durch

$$F^0 = \text{id}, \quad F^{i+1} = F \circ F^i, \quad A^0 = E_n, \quad A^{i+1} = A \cdot A^i. \quad \blacklozenge$$

Frage 312 Können Sie zeigen, dass es sich bei dem Einsetzungshomomorphismus Φ_F um einen Homomorphismus von Ringen handelt?

Antwort: Seien $p, q \in K[X]$ mit $p(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i X^i$ und $q(X) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i X^i$, wobei nur endlich viele der Koeffizienten α_i, β_i nicht verschwinden. Dann gilt

$$\begin{aligned} (p+q)(F) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} (\alpha_i + \beta_i) F^i = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i F^i + \sum_{i \in \mathbb{N}} \beta_i F^i = p(F) + q(F) \\ (\lambda p)(F) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda \alpha_i F^i = \lambda \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i F^i = \lambda \cdot p(F). \end{aligned}$$

Es folgt $\Phi_F(p+q) = \Phi_F(p) + \Phi_F(q)$ und $\Phi_F(\lambda p) = \lambda \Phi_F(p)$. Damit respektiert Φ_F die Vektorraumstrukturen von $K[X]$ und $\text{End}(V)$. Da für Endomorphismen F, G der Zusammenhang $\alpha F \circ \beta G = \alpha \beta \cdot F \circ G$ gilt, folgt außerdem

$$\begin{aligned} p(F) \circ q(F) &= p(F) \circ \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j F^j = \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j \cdot p(F) \circ F^j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \beta_j \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \cdot F^i \circ F^j = \sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_i \beta_j F^{i+j} = (p \cdot q)(F). \end{aligned}$$

Es gilt also $\Phi_F(p \cdot q) = \Phi_F(p) \circ \Phi_F(q)$. Die Abbildung Φ_F respektiert damit auch die Strukturen von $K[X]$ und $\text{End}(V)$ als Halbgruppen bezüglich der Multiplikation von Polynomen bzw. der Verkettung von Endomorphismen. Φ_F ist also in der Tat ein Homomorphismus von Ringen. $\blacklozenge$

Frage 313 Wieso gilt $\Phi_F(p) \circ \Phi_F(q) = \Phi_F(q) \circ \Phi_F(p)$?

Antwort: Da die Multiplikation von Polynomen in $K[X]$ kommutativ ist, folgt aus dem zweiten Teil von Frage 312

$$\Phi_F(p) \circ \Phi_F(q) = \Phi_F(p \cdot q) = \Phi_F(q \cdot p) = \Phi_F(q) \circ \Phi_F(p). \quad \blacklozenge$$

Frage 314 Können Sie $M_B^B(p(F)) = p(M_B^B(F))$ zeigen?

Antwort: Nach Frage 176 gilt für $F, G \in \text{End}(V)$ der Zusammenhang $M_B^B(F \circ G) = M_B^B(F) \cdot M_B^B(G)$, und daraus folgt $M_B^B(F^i) = (M_B^B(F))^i$. Mit $p = \sum_{i=1}^r \alpha_i X^i$ gilt also

$$\begin{aligned} p(M_B^B(F)) &= \sum_{i=1}^r \alpha_i (M_B^B(F))^i = \sum_{i=1}^r \alpha_i M_B^B(F^i) \\ &= \sum_{i=1}^r M_B^B(\alpha_i F^i) = M_B^B\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i F^i\right) = M_B^B(p(F)). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Frage 315 Wieso gibt es zu jedem Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ eines K -Vektorraums V der Dimension $n < \infty$ ein Polynom $p \neq 0$ mit $\Phi_F = p(F) = 0$?

Antwort: Der Raum $\text{End}(V)$ besitzt als K -Vektorraum die Dimension n^2 . Da $K[X]$ unendliche Dimension besitzt, muss der Vektorraumhomomorphismus $\Phi_F : K[X] \rightarrow \text{End}(V)$ einen nichttrivialen Kern haben. Konkreter und ausführlicher kann man auch wie folgt argumentieren. Sei $m = n^2 = \dim \text{End}(V)$. Dann sind die $m + 1$ Endomorphismen $\text{id} = F^0, F, \dots, F^m$ linear abhängig, für geeignete $\alpha_i \in K$ gilt also

$$\alpha_m F^m + \dots + \alpha_1 F + \alpha_0 \text{id} = 0.$$

Mit $p(X) = \sum_{i=0}^m \alpha_i X^i$ folgt dann $\Phi_F(p) = p(F) = 0$. Das beantwortet die Frage. $\blacklozenge$

Frage 316 Können Sie zeigen, dass es zu jeder 2×2 -Matrix A ein Polynom p vom Grad 2 gibt, für das $p(A) = 0$ gilt?

Antwort: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Man erhält $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$. Für jedes quadratische Polynom $p(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ gilt damit

$$p(A) = \begin{pmatrix} \alpha(a^2 + bc) + \beta a + \gamma & \alpha(ab + bd) + \beta b \\ \alpha(ac + cd) + \beta c & \alpha(bc + d^2) + \beta d + \gamma \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz $p(A) = 0$ führt auf ein lineares Gleichungssystem mit vier Gleichungen und drei Unbekannten. Der zweite und dritte Eintrag in der Matrix führen auf die Gleichungen $c(a\alpha + d\alpha + \beta) = 0$ und $b(a\alpha + d\alpha + \beta) = 0$, die linear abhängig sind. Aus ihnen ergibt sich $\beta = -\alpha a - \alpha d$. Setzt man das in den ersten und letzten Eintrag der Matrix ein, so führt das auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha a^2 + \alpha bc - \alpha a^2 - \alpha ad + \gamma &= \alpha bc - \alpha ad + \gamma = 0 \\ \alpha bc + \alpha d^2 - \alpha ad - \alpha d^2 + \gamma &= \alpha bc - \alpha ad + \gamma = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind dann ebenfalls linear abhängig. Man schließt daraus, dass das durch $p(A) = 0$ gegebene Gleichungssystem in drei Unbekannten einen Rang kleiner oder gleich 2 und damit nichttriviale Lösung (α, β, γ) besitzt. Mit $p = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$ gilt also $p(A) = 0$.

Setzt man übrigens $\alpha = 1$, so erhält man $\beta = -(a + b) = -\text{Spur } A$ und $\gamma = ad - bc = \det A$. Das führt auf das Polynom $X^2 - \text{Spur } A \cdot X + \det A$, welches gerade das charakteristische Polynom von A ist. ♦

Frage 317 Ist λ ein Eigenwert zu $F \in \text{End}(V)$ und $p \in K[X]$, dann ist $p(\lambda)$ ein Eigenwert von $p(F)$. Können Sie diese Aussage begründen?

Antwort: Ist v ein Eigenvektor zu λ , dann gilt $F(v) = \lambda v$ und somit $F^i(v) = \lambda^i v$. Mit $p(X) = \sum_{i=0}^r \alpha_i X^i$ gilt also

$$p(F)(v) = \sum_{i=0}^r \alpha_i F^i(v) = \sum_{i=0}^r \alpha_i \lambda^i \cdot v = p(\lambda) \cdot v.$$

Damit ist v ein Eigenvektor von $p(F)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$. Das beantwortet die Frage. ♦

Frage 318 Was ist das **Minimalpolynom** eines Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V ?

Antwort: Das *Minimalpolynom* $p_F \in K[X]$ ist durch die folgenden beiden Eigenschaften ausgezeichnet:

- (i) Es gilt $p_F(F) = 0$.
- (ii) p_F ist normiert, $p_F = X^r + \dots$.
- (iii) Für jedes Polynom $q \in K[X]$ mit $q(F) = 0$ gilt $p_F | q$.

Die Existenz des Minimalpolynoms folgt aus der Tatsache, dass die Menge

$$\mathcal{I}_F := \{q \in K[X] ; F(q) = 0\} \subset K[X]$$

ein Ideal im Hauptidealring $K[X]$ ist und daher von einem $p \in K[X]$ erzeugt wird, so dass also für jedes $q \in \mathcal{I}_F$ ein $r \in K[X]$ existiert mit $q = rp$. Damit erfüllt p die Eigenschaft (iii), und durch Normierung von p erhält man daraus p_F . ♦

Frage 319 Was besagt der *Satz von Cayley-Hamilton*? Wie kann man ihn beweisen?

Antwort: Der Satz von Cayley-Hamilton lautet:

Das Minimalpolynom eines Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ ist stets ein Teiler des charakteristischen Polynoms. Insbesondere gilt $\chi_F(F) = 0$ und $\deg p_F \leq \deg \chi_F$.

Beweis: Zunächst ist es sinnvoll, das Problem in ein matrizentheoretisches zu übersetzen, d. h. die zur Behauptung äquivalente Gleichung

$$\chi_A(A) = 0,$$

zu zeigen, bei der A eine Matrix aus $K^{n \times n}$ bezeichnet.

Man betrachte dazu die Matrix $(EX - A)$. Diese kann man gemäß der Bemerkung aus Frage 298 als Element von $K(X)^{n \times n}$ auffassen, wobei $K(X)$ den Quotientenkörper von $K[X]$ bezeichnet. Nach der Formel aus Frage 277 erhält man

$$(XE - A)^{\text{ad}} \cdot (XE - A) = \det(XE - A) \cdot E = \chi_A(X) \cdot E. \quad (*)$$

Diese Gleichung gilt zunächst in $K(X)^{n \times n}$, sie bleibt aber auch noch in $K[X]^{n \times n}$ gültig, da aufgrund der Definition der adjungierten Matrix auch $(XE - A)^{\text{ad}}$ zu $K[X]^{n \times n}$ gehört.

Das ist der erste wesentliche Schritt im Beweis. Der zweite erfordert einen kleinen begrifflichen Exkurs. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass – wie man sich leicht klarmacht – jede Matrix $C \in K[X]^{n \times n}$ sich eindeutig in der Form

$$C = \sum_{i \in \mathbb{N}} C_i (X \cdot E)^i, \quad C_i \in K^{n \times n}$$

schreiben lässt, wobei natürlich $C_i = 0$ für fast alle i gilt. Damit kann man – wenn man statt $X \cdot E$ einfach X schreibt – den Matrizenring $K[X]^{n \times n}$ mit dem Polynomring $K^{n \times n}[X]$ identifizieren. Dieser lässt sich analog zu den Polynomringen über kommutativen Ringen auch für den nicht-kommutativen Ring $K^{n \times n}$ definieren. Allerdings ist dann zu beachten, dass die Einsetzungsabbildung

$$F_A: K^{n \times n}[X] \longrightarrow K^{n \times n}, \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} C_i X^i \longmapsto \sum_{i \in \mathbb{N}} C_i A^i$$

für $A \in K^{n \times n}$ im Allgemeinen kein Homomorphismus von Ringen mehr ist, da A im Gegensatz zu X in der Regel nicht mit allen Elementen aus $K^{n \times n}$ kommutiert. Dieses Defizit kommt beim weiteren Beweis allerdings nicht zu Tragen.

Nach diesen Vorbereitungen kann man zum eigentlichen Beweis und der Formel $(*)$ zurück, nun aber ausgestattet mit der zusätzlichen Erkenntnis, dass man die Matrix $(XE - A)$ und ihre Adjunkte und damit auch deren Produkt als Polynome in $K^{n \times n}[X]$ auffassen kann. Es ist also $(XE - A)^{\text{ad}} = \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i X^i$ mit eindeutig

bestimmten Matrizen $A_i \in K^{n \times n}$, die für fast alle i verschwinden. Setzt man das in (*) ein, so folgt

$$\begin{aligned}
 \chi_A(X) \cdot E &= \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} A_i X^i \right) \cdot (XE - A) \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i X^{i+1} - \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i X^i A \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i X^{i+1} - \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i A X^i \\
 &= \sum_{i \in \mathbb{N}} A_i X^{i+1} - A_0 A - \sum_{i \in \mathbb{N}} A_{i+1} A X^{i+1} \\
 &= -A_0 A + \sum_{i \in \mathbb{N}} (A_i - A_{i+1}) X^{i+1}.
 \end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung lässt sich auch dann durchführen, wenn man für X eine Matrix B einsetzt, die mit A vertauschbar ist. Insbesondere kann man für X also A einsetzen und erhält

$$\chi_A(A) \cdot E = -A_0 A + \sum_{i \in \mathbb{N}} (A_i A^{i+1} - A_{i+1} A^{i+2}) = 0,$$

da der mittlere Gleichungsterm eine Teleskopsumme ist. Es folgt $\chi_A(A) = 0$, und damit ist der Satz von Cayley-Hamilton vollständig bewiesen. $\blacklozenge$

5.4 Die Jordan'sche Normalform

Ein Endomorphismus ist nur dann diagonalisierbar, wenn sein charakteristisches Polynom über dem Grundkörper vollständig in Linearfaktoren zerfällt *und* die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts mit der algebraischen Vielfachheit übereinstimmt. Ist die letzte Bedingung für einen Eigenwert nicht gegeben, so gilt die Zerlegung von V aus Frage 296 in eine direkte Summe aus Eigenräumen nicht mehr, selbst wenn das charakteristische Polynom vollständig in Linearfaktoren zerfällt, da die Dimensionen des entsprechenden Eigenraums in diesem Fall zu klein ist. Um auch unter diesen Bedingungen eine Zerlegung von V in F -invariante Unterräume zu bekommen, muss man demnach größere Räume in Betracht ziehen. Kandidaten dafür sind die sogenannten *Haupträume* oder *verallgemeinerten Eigenräume*.

Frage 320 Sei $F: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V . Können Sie zeigen, dass eine kleinste natürliche Zahl d mit $0 < d \leq n = \dim V$ existiert, für die

$$\operatorname{im} F^{d+1} = \operatorname{im} F^d \quad \text{und} \quad \ker F^{d+1} = \ker F^d$$

gilt? Wieso gilt dann bereits $\operatorname{im} F^{d+j} = \operatorname{im} F^d$ und $\ker F^{d+j} = \ker F^d$ für alle $j \in \mathbb{N}$?

Antwort: Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\operatorname{im} F^{k+1} \subseteq \operatorname{im} F^k$ und damit

$$n = \dim \operatorname{im} F^0 \geq \dots \geq \dim \operatorname{im} F^k \geq \dim \operatorname{im} F^{k+1} \geq 0.$$

Da diese Folge nicht endlos absteigen kann, muss an einer frühesten Stelle $\dim \operatorname{im} F^{d+1} = \dim \operatorname{im} F^d$ und folglich $\operatorname{im} F^{d+1} = \operatorname{im} F^d$ gelten. Daraus ergibt sich $F^{d+2}(V) = F(F^{d+1}(V)) = F(F^d(V)) = F^{d+1}(V) = F^d(V)$. Induktiv erhält man daraus $F^{d+j}(V) = F^d(V)$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Die entsprechenden Behauptungen für den Kern von F^d folgen daraus mithilfe der Dimensionsformel unter Benutzung von $\ker F^{k+1} \supseteq \ker F^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. ♦

Frage 321 Können Sie zeigen, dass mit der nach Frage 320 eindeutig bestimmten natürlichen Zahl $d = \min\{\ell \in \mathbb{N} ; \operatorname{im} F^\ell = \operatorname{im} F^{\ell+1}\}$ gilt

$$V = \operatorname{im} F^d \oplus \ker F^d, \quad (*)$$

und dass die Räume $\operatorname{im} F^d$ und $\ker F^d$ F -invariant sind?

Antwort: Wegen $\operatorname{im} F^{d+1} = \operatorname{im} F^d$ bzw. $\ker F^{d+1} = \ker F^d$ erhält man

$$v \in \operatorname{im} F^d \implies F(v) \in \operatorname{im} F^{d+1} \implies F(v) \in \operatorname{im} F^d$$

$$v \in \ker F^d \implies v \in \ker F^{d+1} \implies F^{d+1}(v) = F^d(F(v)) = 0 \implies F(v) \in \ker F^d.$$

Das zeigt die F -Invarianz der Räume $\operatorname{im} F^d$ und $\ker F^d$.

Um (*) zu zeigen, sei $v \in \operatorname{im} F^d \cap \ker F^d$. Dann gilt $v = F^d(w)$ für ein $w \in V$ sowie $F^d(v) = F^{2d}(w) = 0$ und folglich $w \in \ker F^{2d} = \ker F^d$. Damit hat man $v = F(w) = 0$. Somit ist die Summe $\operatorname{im} F^d + \ker F^d$ direkt. Die Gleichung (*) ergibt sich daraus mithilfe der Dimensionsformel. ♦

Frage 322 Sei $G: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus, dessen charakteristisches Polynom die Gestalt

$$\chi_G(X) = (X - \lambda)^m \cdot (X - \lambda_2)^{m_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_r$ besitzt. Können Sie zeigen, dass für die Abbildung $F := G - \lambda \operatorname{id}$ und die nach Frage 320 eindeutig bestimmten Zahl

$$d := \min\{\ell \in \mathbb{N} ; \operatorname{im} F^\ell = \operatorname{im} F^{\ell+1}\} = \min\{\ell \in \mathbb{N} ; \ker F^\ell = \ker F^{\ell+1}\}$$

die folgenden Behauptungen zutreffen?

- (i) Die Einschränkung von F auf $\operatorname{im} F^d$ ist injektiv.
- (ii) Es gilt $\chi_{G|_{\ker F^d}} = (X - \lambda)^m$.
- (iii) $\dim \ker F^d = m$ und $d \leq m$.

Antwort: (i) Sei $v \in \operatorname{im} F^d$, also $v = F^d(w)$ für ein $w \in V$. Dann gilt

$$F(v) = 0 \implies F(F^d(w)) = 0 \implies w \in \ker F^{d+1} = \ker F^d \implies v = F^d(w) = 0.$$

Also ist $F|_{\operatorname{im} F^d}: V \longrightarrow V$ injektiv.

(ii) Aufgrund der Zerlegung (*) aus Frage 321 gilt

$$\chi_F(X) = \chi_{F|_{\ker F^d}}(X) \cdot \chi_{F|_{\operatorname{im} F^d}}(X).$$

Es kann λ kein Eigenwert zu $G|_{\operatorname{im} F^d}$ sein, denn für $v = F^d(w) \in \operatorname{im} F^d$ gilt:

$$\begin{aligned} G(v) = \lambda v &\implies (F + \lambda \operatorname{id})(v) = \lambda v \implies F^{d+1}(w) + \lambda v = \lambda v \implies F^{d+1}(w) = 0 \\ &\implies w \in \ker F^{d+1} = \ker F^d \implies v = F(w) = 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass der Faktor $(X - \lambda)^m$ ein Teiler von $\chi_{G|_{\ker F^d}}$ sein muss. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, dass keiner der anderen Faktoren von χ_G ein Teiler von $\chi_{F|_{\ker F^d}}$ sein kann. Angenommen, es gilt $G(v) = (F + \lambda \operatorname{id})(v) = \lambda_i v$ für ein $i \in 2, \dots, n$ und ein $v \in \ker F^d$ mit $v \neq 0$. Dann folgt $F(v) = (\lambda_i - \lambda) \cdot v$ und somit $(\lambda_i - \lambda)^d \cdot v = 0$, also $\lambda_i = \lambda$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(iii) Der erste Teil folgt unmittelbar daraus, dass das charakteristische Polynom von $G|_{\ker F^d}$ den Grad m besitzt. Für den Beweis der zweiten Behauptung beachte man, dass nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt:

$$\chi_{G|_{\ker F^d}}(G|_{\ker F^d}) = (G|_{\ker F^d} - \lambda \operatorname{id})^m = 0,$$

also $(G - \lambda \operatorname{id})^m(v) = F^m(v) = 0$ für alle $v \in \ker F^d$. Daraus folgt $\ker F^d \subset \ker F^m$, also $d \leq m$. $\blacklozenge$

Frage 323 Was versteht man unter dem **Hauptraum** oder **verallgemeinertem Eigenraum** $H(F, \lambda)$ eines Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ zum Eigenwert λ ?

Antwort: Man definiert

$$H(F, \lambda) := \ker(F - \lambda \operatorname{id})^m,$$

wobei $m = \mu(F, \lambda)$ gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.

Aufgrund der Fragen 320 und 322 (iii) hat man $H(F, \lambda) = \ker(F - \lambda \operatorname{id})^d$. Dabei ist wie üblich $d = \min\{\ell \in \mathbb{N} ; \operatorname{im}(F - \lambda \operatorname{id})^\ell = \operatorname{im}(F - \lambda \operatorname{id})^{\ell+1}\}$. $\blacklozenge$

Frage 324 Können Sie sämtliche Haupträume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

angeben?

Antwort: Für das charakteristische Polynom gilt $\chi_A(X) = (X - 1) \cdot (X - 3)^2$. Damit ist $H(A, 1) = \ker(A - \text{id}) = L(A, 0) = \mathbb{R}e_1$ ein Hauptraum. Weiter gilt

$$\text{rg}(A - 3\text{id}) = 2, \quad \text{rg}(A - 3\text{id})^2 = \text{rg}(A - 3\text{id})^3 = 1.$$

Für den Eigenwert 2 hat man damit $d = 2$. Somit ist $\ker(A - 3\text{id})^2 = L(A - 3\text{id}, 0) = \text{span}((1, 1, 0)^t, e_3)$ der Hauptraum zum Eigenwert 2. $\blacklozenge$

Frage 325 Was besagt der **Satz über die Hauptraumzerlegung**?

Antwort: Der Satz über die Hauptraumzerlegung besagt:

Ist $F \in \text{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, dessen charakteristisches Polynom über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt, dann gilt

$$V = H(F, \lambda_1) \oplus \dots \oplus H(F, \lambda_r),$$

wobei die Unterräume $H(F, \lambda_i)$ für $i = 1, \dots, r$ F -invariant sind.

Beweis: Sei

$$\chi_F(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdot (X - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_r)^{m_r}$$

das charakteristische Polynom von F . Nach Frage 321 existiert eine Zerlegung

$$V = H(F, \lambda_1) \oplus U$$

in F -invariante Unterräume. Da die Einschränkung von F auf U das charakteristische Polynom $(X - \lambda_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (X - \lambda_r)^{m_r}$ besitzt, ergibt sich der Satz daraus mit vollständiger Induktion. $\blacklozenge$

Frage 326 Was versteht man unter einem **nilpotenten Endomorphismus**? Was ist ein **Nilpotenzindex**?

Antwort: Ein Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ heißt *nilpotent*, wenn eine natürliche Zahl k existiert, so dass $F^k(v) = 0$ für alle $v \in V$ gilt. Der *Nilpotenzindex* ist der kleinste Exponent, für den diese Gleichung gilt. $\blacklozenge$

Frage 327 Sei $F: V \rightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus mit Nilpotenzindex $n = \dim V$. Können Sie zeigen, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, bezüglich der F die folgende Gestalt hat

$$M_{\mathcal{B}}(F) = J_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} ?$$

Antwort: Es gibt ein Element $v \in V$ derart, dass die Vektoren

$$F^{n-1}(v), F^{n-2}(v), \dots, F(v), v \quad (*)$$

alle ungleich null sind. Sie sind ferner linear unabhängig, denn aus der Gleichung $\alpha_1 F^{n-1}(v) + \dots + \alpha_n v = 0$ folgt durch Anwendung von F^{n-1} auf beiden Seiten $\alpha_n F^{n-1}(v) = 0$, also $\alpha_n = 0$. Die Anwendung von F^{n-2} liefert anschließend $\alpha_{n-1} = 0$ usw.

Die Vektoren in $(*)$ bilden daher eine Basis $\mathcal{B}$ von V , und bezüglich dieser hat die Matrix $M_{\mathcal{B}}(F)$ die angegebene Gestalt. $\blacklozenge$

Frage 328 Können Sie zeigen, dass für jeden nilpotenten Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ mit Nilpotenzindex d eine Zerlegung

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_d$$

in Unterräume W_i existiert, für die $F(W_i) \subset W_{i-1}$ mit $i = 1, \dots, d$ und $W_0 = \{0\}$ gilt?

Antwort: Man betrachte die Kette

$$\{0\} = \ker F^0 \subsetneq \ker F^1 \subsetneq \dots \subsetneq \ker F^{d-1} \subsetneq \ker F^d = V$$

und wähle W_d in einem ersten Schritt so, dass

$$V = \ker F^d = \ker F^{d-1} \oplus W_d$$

gilt. Für den Raum W_d gelten die Eigenschaften

$$F(W_d) \subset \ker F^{d-1} \quad \text{und} \quad F(W_d) \cap \ker F^{d-2} = \{0\}. \quad (*)$$

Die erste Eigenschaft folgt einfach daraus, dass F den Nilpotenzindex d hat. Die zweite erkennt man folgendermaßen: Sei $v \in F(W_d) \cap \ker F^{d-2}$. Dann gilt $v = F(w)$ für ein $w \in W_d$ sowie $F^{d-2}(v) = F^{d-1}(w) = 0$, also $w \in W_d \cap \ker F^{d-1}$. Daraus folgt $w = 0$ und somit $v = F(0)$ aufgrund der Konstruktion von W_d .

Wegen $(*)$ sowie $\ker F^{d-2} \subset \ker F^{d-1}$ gibt es also eine Zerlegung

$$\ker F^{d-1} = \ker F^{d-2} \oplus W_{d-1} \quad \text{mit} \quad F(W_d) \subset W_{d-1}.$$

Man erhält

$$V = \ker F^{d-2} \oplus W_{d-1} \oplus W_d.$$

Der Unterraum $\ker F^{d-2}$ lässt sich nun wiederum nach dem obigen Muster zerlegen. Die wiederholte Zerlegung der Unterräume $\ker F^{d-j}$ führt schließlich auf

$$V = \ker F^0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_d = W_1 \oplus \dots \oplus W_d. \quad \blacklozenge$$

Frage 329 Können Sie die Zerlegung aus Frage 328 am Beispiel der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

demonstrieren?

Antwort: Sei F die durch A beschriebene lineare Abbildung. Mit $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^3 = 0$ erhält man $d = 3$ und

$$\{0\} = \ker F^0 \subset \ker F = \operatorname{span} e_1 \subset \ker F^2 = \operatorname{span}(e_1, e_2) \subset \ker F^3 = \mathbb{R}^3.$$

Aus $\mathbb{R}^3 = \ker F^2 \oplus W_3$ folgt zunächst $W_3 = \operatorname{span} e_3$. Für W_2 muss gelten

$$\mathbb{R}^3 = \ker F \oplus W_2 \oplus W_3 \quad \text{und} \quad F(W_3) \subset W_2.$$

Daraus folgt, dass $w_2 := A \cdot e_3 = (1, 1, 0)^T$ ein geeigneter Basisvektor von W_2 ist. Schließlich erhält man auf demselben Weg $w_3 := A \cdot w_2 = A^2 \cdot e_3 = (4, 0, 0)^T$ als Basisvektor von W_2 . Somit ist

$$V = \mathbb{R}w_3 \oplus \mathbb{R}w_2 \oplus \mathbb{R}e_3$$

die gesuchte Zerlegung in F -invariante Unterräume.

Bezüglich der Basis (w_3, w_2, e_3) wird F durch die Matrix

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben. ♦

Frage 330 Sei $F: V \rightarrow V$ ein nilpotenter Endomorphismus mit Nilpotenzindex d . Können Sie zeigen, dass eindeutig bestimmte natürliche Zahlen $s_1, \dots, s_d$ mit

$$d \cdot s_d + (d-1) \cdot s_{d-1} + \dots + s_1 = n = \dim V$$

existieren sowie eine Basis $\mathcal{B}$ von V , mit der gilt:

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} A_d & & & 0 \\ & A_{d-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_k = \begin{pmatrix} J_k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix} \Bigg\} s_k\text{-mal.}$$

Dabei besitzen die Matrizen $J_k \in K^{k \times k}$ die Form aus Frage 327.

Antwort: Um die gesuchte Basis von V zu konstruieren, orientiere man sich an der Zerlegung (*) aus Frage 328 und beginne mit einer Basis

$$w_{d,1}, \dots, w_{d,s_d} \quad (*)$$

von W_d (mit $s_d := \dim W_d$), wobei wie in Frage 328 gilt: $V = \ker F^{d-1} \oplus W_d$. Da die Einschränkung $F|_{W_d}$ injektiv abbildet und $F(W_d) \subset W_{d-1}$ gilt, sind die Bilder der Basisvektoren in (*) unabhängig in W_{d-1} . Sie lassen sich daher zu einer Basis

$$F(w_{d,1}), \dots, F(w_{d,s_d}), w_{d-1,1}, \dots, w_{d-1,s_{d-1}}$$

von W_{d-1} ergänzen, wobei $s_{d-1} = \dim W_{d-1} - s_d$ gilt. Auf diese Weise fortfahrend erhält man Vektoren

$$\begin{array}{ccccccc} w_{d,1} & \dots & w_{d,s_d} & & & & \\ F(w_{d,1}) & \dots & F(w_{d,s_d}) & & w_{d-1,1} & \dots & w_{d-1,s_{d-1}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ F^{d-1}(w_{d,1}) & \dots & F^{d-1}(w_{d,s_d}) & F^{d-2}(w_{d-1,1}) & \dots & F^{d-2}(w_{d-1,s_{d-1}}) & \dots w_{1,1} \dots, w_{1,s_1}. \end{array}$$

Hier ist die i -te Zeile von unten eine Basis für W_i . Aufgrund der Zerlegung aus Frage 328 bilden die $d \cdot s_d + (d-1) \cdot s_{d-1} + \dots + s_1$ Vektoren in diesem Schema eine Basis von V . Ferner sind die Zahlen s_i für $i = 1, \dots, d$ durch die Rekursionsformel $\dim W_i = \sum_{\nu=1}^i s_\nu$ eindeutig bestimmt. Das beantwortet den ersten Teil der Frage.

Man ordne die Vektoren in den Spalten des obigen Schemas nun zu jeweils linear unabhängigen Systemen $\mathcal{B}_\ell$ ($1 \leq \ell \leq \sum_{\nu=1}^d s_\nu$) an, indem man die Spalten von unten nach oben durchliest. Die Unterräume $U_\ell := \text{span}(\mathcal{B}_\ell)$ sind dann F -invariant, und die Einschränkungen $F|_{U_\ell}$ sind nilpotente Endomorphismen, deren Nilpotenzindex gerade der Dimension von U_ℓ entspricht. Daher gilt $M_{\mathcal{B}_\ell}(F|_{U_\ell}) = J_\ell$ nach Frage 327, und bezüglich der Zerlegung

$$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_{s_d} \oplus \dots \oplus U_{s_d+s_{d-1}} \oplus \dots \oplus U_{s_d+s_{d-1}+\dots+s_1}$$

mit den entsprechenden Basen $\mathcal{B}_\ell$ besitzt die Matrix die angegebene Gestalt. $\blacklozenge$

Frage 331 Was besagt der Satz über die **Jordan'sche Normalform**?

Antwort: Der Satz besagt:

Sei $F: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus eines K -Vektorraums V , dessen charakteristisches Polynom über K vollständig in Linearfaktoren zerfällt, also

$$\chi_F(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

mit den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ gilt. Dann existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V , bezüglich der F durch eine Matrix der Gestalt

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{C_1}}_{m_1} & & & 0 \\ & \underbrace{\boxed{C_2}}_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \underbrace{\boxed{C_r}}_{m_r} \end{pmatrix}$$

dargestellt wird. Dabei gilt mit eindeutig bestimmten natürlichen Zahlen μ_i und $\nu_{i,j}$ ($i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, \mu_i$)

$$C_i = \begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{J_{i,1}}}_{\nu_{i,1}} & & & \\ & \underbrace{\boxed{J_{i,2}}}_{\nu_{i,2}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \underbrace{\boxed{J_{i,\mu_i}}}_{\nu_{i,\mu_i}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J_{i,j} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \Bigg\} \nu_{i,j}.$$

Dabei sind die Blöcke der Größe nach geordnet: $\nu_{i,1} \geq \nu_{i,2} \geq \dots \geq \nu_{i,\mu_i}$, wobei an einigen Stellen allerdings auch das Gleichheitszeichen stehen kann.

Der Beweis beschränkt sich im Wesentlichen auf eine Zusammenfassung des bereits Entwickelten. Die Einschränkungen $(f - \lambda_i \text{id})|_{H(F, \lambda_i)}$ sind nilpotente Endomorphismen mit Nilpotenzindex d_i und werden demnach bezüglich einer geeigneten Basis $\mathcal{B}_i$ durch eine Matrix der Gestalt wie in Frage 330 beschrieben. Die Matrix von $F|_{H(F, \lambda_i)}$ sieht damit wie folgt aus

$$M_{\mathcal{B}_i}(F|_{H(F, \lambda_i)}) = \begin{pmatrix} A_{d_i} & & & 0 \\ & A_{d_i-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_j = \begin{pmatrix} J_{ij} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{ij} \end{pmatrix},$$

wobei die Größe der Blöcke A_j eindeutig bestimmt ist. Durch eine entsprechende Anordnung der Vektoren in $\mathcal{B}_i$ erreicht man, dass diese Blöcke der Größe nach absteigend geordnet sind und $M_{\mathcal{B}_i}(F|_{H(f, \lambda_i)})$ damit die Gestalt der Matrix C_i hat.

Daraus folgt nun die Jordan'sche Normalform mithilfe der Hauptraumzerlegung

$$V = H(F, \lambda_1) \oplus \cdots \oplus H(F, \lambda_r)$$

aus Frage 325. ◆

Frage 332 Wie lautet die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

aus Frage 329?

Antwort: Die Jordan'sche Normalform lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
