

Mathematik für das
LEHRAMT

O. Deiser

Analysis 1

Mathematik für das Lehramt

K. Reiss/G. Schmieder[†]: Basiswissen Zahlentheorie

A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Stochastik

J. Engel: Anwendungsorientierte Mathematik: Von Daten zur Funktion

K. Reiss/G. Stroth: Endliche Strukturen

O. Deiser: Analysis 1

Herausgeber: Prof. Dr. Kristina Reiss, Prof. Dr. Thomas Sonar,
Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

Oliver Deiser

Analysis 1

PD Dr. Oliver Deiser
Technische Universität München
School of Education
Schellingstraße 33
80799 München
Deutschland
deiser@tum.de

ISBN 978-3-642-22458-4 e-ISBN 978-3-642-22459-1
DOI 10.1007/978-3-642-22459-1
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2010): 26-01

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

für Caroline, Thalia und Larina

Inhalt

Vorwort	5
Zum Lehramtsstudium	11
Die Themen des Buches	14
Voraussetzungen und Notationen	17
Erster Abschnitt: Reelle und komplexe Zahlen	21
1.1 Warum die rationalen Zahlen nicht genügen	23
Die Entdeckung der alten Griechen: Irrationale Verhältnisse ...	23
Die Entdeckung von Cantor: Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$	26
Übungen	30
Erste Ergänzungen:	
Irrationale Verhältnisse in geometrischen Figuren	33
1.2 Struktureigenschaften der reellen Zahlen	37
Algebraische Eigenschaften	37
Ordnungstheoretische Eigenschaften	40
Übungen	46
Zweite Ergänzungen:	
Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, I	50

1.3 Komplexe Zahlen	55
Eine Multiplikation für die Ebene	55
Die Lösungen einfacher algebraischer Gleichungen	59
Übungen	64
Dritte Ergänzungen:	
Die geometrische Deutung der komplexen Multiplikation	66
 Zweiter Abschnitt: Folgen und Reihen	69
 2.1 Konvergente Folgen	71
Folgen und ihre Grenzwerte	71
Cauchy-Folgen und ihre Konvergenz	82
Übungen	86
Vierte Ergänzungen:	
Visualisierungen von Folgen und Grenzwerten	90
 2.2 Konvergente Reihen	93
Unendliche Reihen	93
Konvergenzkriterien für unendliche Reihen	99
Übungen	106
Fünfte Ergänzungen:	
Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, II	109
 2.3 Zur Theorie der Reihen	113
Umordnungen und Produkte	113
Die Exponentialreihe und die binomischen Reihen	119
Übungen	126
Sechste Ergänzungen:	
Untersuchung einiger spezieller Reihen	129
 Dritter Abschnitt: Stetige Funktionen	133
 3.1 Der Stetigkeitsbegriff	135
Die Limesstetigkeit	135
Die Umgebungsstetigkeit	144
Übungen	149
Siebte Ergänzungen:	
Visualisierungen stetiger Funktionen, I	153

3.2 Zur Theorie der Stetigkeit	155
Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen	155
Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen	161
Übungen	169
Achte Ergänzungen:	
Visualisierungen stetiger Funktionen, II	172
3.3 Elementare stetige Funktionen	173
Die Exponentialfunktion und der Logarithmus	173
Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen	184
Übungen	206
Neunte Ergänzungen:	
Die elementaren Funktionen in Natur und Geometrie	210
Vierter Abschnitt: Differentiation	213
4.1 Differentialquotienten	215
Die Ableitung einer Funktion	215
Differentiationsregeln	224
Übungen	231
Zehnte Ergänzungen:	
Zur Bedeutung der Ableitung	234
4.2 Zur Theorie der Differentiation	237
Der Mittelwertsatz	237
Weitere Anwendungen der Differentiation	249
Übungen	266
Elfte Ergänzungen:	
Zum Krümmungsbegriff und Newton-Verfahren	269
4.3 Potenzreihen und Taylor-Entwicklung	271
Potenzreihen	271
Die Taylor-Entwicklung	281
Übungen	292
Zwölfte Ergänzungen:	
Untersuchung spezieller Taylor-Entwicklungen	296

Anhänge	299
A1 Bezüge zur Schulmathematik	301
Rationale Zahlen	301
Funktionsbegriff	301
Reelle Zahlen	302
Die trigonometrischen Funktionen	303
Die Kreiszahl π	303
Exponentialfunktionen und Logarithmen	303
Grenzwertbegriff und Limesnotation	304
Stetigkeit	305
Differentialquotienten und Ableitungsregeln	305
Anwendungen der Differentiation	306
Die Eulersche Zahl e	306
A2 Literatur	307
A3 Verzeichnis der Abbildungen	311
A4 Notationen	313
A5 Index	315

Vorwort

Die Analysis gehört zu den erfolgreichsten, fruchtbarsten, geheimnisvollsten, mutigsten, stolzesten, ältesten und anwendungsreichsten Theorien der Mathematik. In ihrem Zentrum steht der Grenzwertbegriff. Es herrscht dort nicht nur beliebige, sondern vollkommene Genauigkeit. Wir können Grenzübergänge durchführen, und die Grenzwerte, die wir durch Grenzübergänge erhalten, sind mathematische Objekte, mit denen wir rechnen, argumentieren und neue Begriffe bilden können. Und am Ende können wir alles wieder zurückholen in die endliche Welt, und dort die relativ wenigen idealen Objekte, die uns letztendlich interessieren, beliebig genau approximieren. Der Umweg ins Reich des Ideellen ist auch für den in erster Linie „praktisch“ oder „realitätsnah“ denkenden Mathematiker unerlässlich. Er würde sich andernfalls in eine Schlacht mit wilden Abschätzungen und Ungleichungen stürzen, die er kaum gewinnen könnte. Er würde wenig sehen, während die höhere Warte einen klaren Blick genießt. Und für den ideell denkenden Mathematiker besitzt das Grenzwertreich der Analysis eine eigene Existenz, und die Entdeckung und Auslotung dieser Gefilde des Unendlichen ist sein schönstes Ziel. Unter dem Dach der Analysis können daher auch verschiedene philosophische Positionen friedlich nebeneinander existieren und sich gegenseitig befruchten.

Den Kern der elementaren Analysis bildet die von Leibniz und Newton entwickelte Differential- und Integralrechnung, die sich grob gesprochen als die

Analyse des lokalen Verhaltens einer ein- oder mehrdimensionalen reellen Funktion bzw. als unendlich feine Summation von Funktionswerten beschreiben lässt. Die Verzweigungen der Analysis sind dann vielfältig und besitzen klingende Namen wie Funktionalanalysis, Funktionentheorie, partielle Differentialgleichungen, Variationsrechnung und andere mehr. Die fundamentale Stellung des Gebiets ist durch die kaum zu überschätzende Bedeutung für die wissenschaftliche Naturbeschreibung wohl zeitlos gesichert. Jeder Physiker und jeder Ingenieur braucht, je nach Arbeitsfeld, ein Basis- oder Spezialwissen der Analysis. Deswegen ist die Analysis weltweit eine der Grundvorlesungen an den Universitäten, und auch in die Schulmathematik ist sie, verglichen mit anderen mathematischen Theorien, weit eingedrungen. Für die Universität bietet sich dadurch die Gelegenheit, Schulwissen aufzugreifen, zu erweitern und zu verändern. Der Analysis kommt damit auch eine Schlüsselrolle an der Schnittstelle zwischen Schule und Universität zu.

Buch und Lehrveranstaltung

Das vorliegende Buch beruht auf der Vorlesung „Analysis 1 für das Lehramt an Gymnasien“, die der Autor im Wintersemester 2010/11 an der Technischen Universität München im Rahmen des dort neugestalteten Lehramtsstudiengangs gehalten hat. Es orientiert sich an einem Vier-Ziele-Programm zur fachlichen Lehramtsausbildung in Mathematik, das wir im Anschluss an dieses Vorwort kurz vorstellen werden. Dem Text entspricht eine achtstündige Lehrveranstaltung mit der folgenden dreiteiligen Struktur:

- (1) Eine „klassische“ vierstündige Tafel-und-Kreide-Vorlesung, die etwas behutsamer und langsamer vorgeht, dabei aber im Hinblick auf Systematik, Präzision und Abstraktion das Niveau der Fachvorlesungen erreicht.
- (2) Zweistündige Tutorübungen mit etwas einfacheren schriftlichen Übungsaufgaben, bei deren Bearbeitung, Besprechung und Korrektur auf die Lesbarkeit der Darstellung und sichere Verwendung der mathematischen Sprache besonderer Wert gelegt wird.
- (3) Zweistündige lehramtsspezifische Ergänzungsübungen, die in der Form von Präsenzübungen und Diskussionen Bezüge zur Schulmathematik aufzeigen, die Anbindung des neu entstehenden an das vorhandene Wissen erleichtern und den Erwerb, die Fortentwicklung und die erklärende Weitergabe mathematischer Anschauungen fördern.

Viele positive Rückmeldungen gab es zu Ergänzungssektionen, bei denen das Wechselspiel zwischen anschaulichem Verständnis und formaler Beherrschung von Grundbegriffen und Argumentationen der Vorlesung thematisiert wurde. Von den Studenten erarbeitete Diagramme, Erklärungen und Visualisierungen wurden zur Diskussion gestellt; sprachliche Fähigkeiten wurden durch kritisch kommentierte Tafel-Vorführungen trainiert; schriftlich zu beantwortende Fragen halfen, den Unterschied zwischen Anschauung und exakter Definition bewusst zu machen.

Charakter der Darstellung

Das Buch will sich weder dem „axiomatisch-deduktiven“ noch dem „historisch-genetischen“ oder dem „psychologisch-genetischen“ Lager zuordnen lassen. Euklid und ein Großteil der heutigen Vorlesungen haben Recht, die beweisende Natur der Mathematik als selbstverständlich zu setzen. Und Beweise und weiter die Darstellung eines komplexeren mathematischen Gebäudes sind ohne formale Definitionen und ohne Systematik unmöglich. Damit ist ein gewisser, wenn auch sehr weitgefasster Rahmen vorgegeben. Felix Klein, der den historisch-genetischen Ansatz prägte, hat Recht, an das geschichtliche Werden der mathematischen Begriffe zu erinnern, das uns eine neue Dimension des Verständnisses eröffnen kann. Otto Toeplitz, der den Kleinschen Ansatz aufgriff, hat Recht, dass die Irrfahrten der Geschichte nicht in jedem Fall individuell nachvollzogen werden müssen, und dass der Lehrer auch als Vermittler auftreten kann, der den historischen Kern der mathematischen Begriffe kennt und daraus Schlussfolgerungen für die Lehre zieht, die dann auch frei von Historie sein kann. Und Martin Wagenschein, der der genetischen Methode eine psychologische Variante hinzufügte, hat Recht, das Werden von Wissen, Verständnis und geistigen Kräften im Individuum zu betonen, da jede Form der Lehre geistige Prozesse in Gang setzt.

Wenn alle Recht haben, wird man einem folgen, oder man wird auswählen, kombinieren, nacheinander vorbringen, Neues hinzufügen, und so das Bild weiter ergänzen. Damit tritt, wie schon immer, die individuelle Qualität der Lehre in den Vordergrund. Sie lässt sich daran messen, ob sie das erreicht, was sie erreichen will, und danach auswählen, ob das, was sie erreicht, erreicht werden soll. Da das zu Erreichende in der Mathematik vielgestaltig ist, gibt es mehrere gute Antworten auf die Frage, wie Mathematik zu lehren sei. Der Autor ist von mathematischen Axiomen, Deduktionen, historischen Entwicklungen und psychologischen Verständnis- und Entwicklungsprozessen gleichermaßen fasziniert, aber keine der Lehrphilosophien scheint ihm alle guten mathematischen Lehrbücher einzufangen. Gute Lehrbücher können deduktiv bestechend oder genetisch fesselnd, psychologisch ignorant oder feinfühlig, historisch durchdrungen oder den Stand der Dinge widerspiegelnd sein. Die mathematischen Texte, die dem Autor als nachahmenswerte Vorbilder dienen, sind in diesen Eigenschaften ganz verschieden, aber sie sind allesamt didaktisch ambitioniert und individuell gefärbt. Seine eigenen Texte sind gerade im Hinblick auf historische und genetische Aspekte unterschiedlich, versuchen aber den folgenden Idealen gerecht zu werden:

- mathematische Präzision und Genauigkeit,
- exakte Verwendung der mathematischen Sprache,
- Lesbarkeit und ansprechende Darstellung,
- für die ins Auge gefasste Zielgruppe anspruchsvolles Niveau,
- Anregung des Lesers zu Eigenarbeit und ergänzender Lektüre,
- logisch-systematischer Aufbau,
- straff formulierte Beweise mit einprägsamer Struktur.

Anknüpfend an in der Schule erworbenes Wissen über reelle Zahlen, Grenzwerte, elementare Funktionen und Differentialquotienten besprechen wir reelle Zahlen, Grenzwerte, elementare Funktionen und Differentialquotienten in der Art und Weise, wie sie in der Mathematik heute erscheinen. Wir wollen zeigen, wie man sich in der historisch gewachsenen, zum Teil schon recht vertrauten Welt der Analysis bewegen und zurechtfinden kann. Die Geschichte dieser Welt tritt dabei ebenso in den Hintergrund wie ihr mengentheoretisch-axiomatisches Fundament, und Gleiches gilt für die naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen. Alle diese Aspekte sind wichtig. Hier geht es aber darum, wie und in welcher Sprache sich bereits bekannte oder neue, aber zu- meist noch der Anschauung leicht zugängliche Begriffe exakt fassen lassen, wie sich ihre systematische Untersuchung darstellt, wie sie in Sätzen erscheinen, wie sie in Beweisen verwendet werden, und wie das Wechselspiel zwischen Anschauung und formaler Fassung helfen kann, sie zu beherrschen. Themen mit hohem Bezug zur Mathematik an der Schule werden dabei besonders ausführlich behandelt, etwa irrationale Zahlen, Lösen quadratischer Gleichungen, Dezimaldarstellungen, Exponentialfunktionen, Logarithmen, trigonometrische Funktionen, Differentiationsregeln, lokale Extremwerte, Krümmung und das Newton-Verfahren.

Der Autor nimmt seine Leser als intelligente und interessierte Menschen an, die ein im Vergleich zur Schule deutlich erweitertes Wissen und vertieftes Verständnis der Mathematik erwerben möchten. Über ein zeilenweise ausgeführtes Nach-Denken hinaus wird ein aktives Mit- und Weiterdenken ebenso erwartet wie die Bereitschaft, die formal-sprachlichen und systematischen Aspekte der Mathematik zu erlernen. Nach Überzeugung des Autors findet vieles, was selbst gedacht werden kann, tatsächlich besser im eigenen Kopf als auf dem bedruckten Papier statt, und die Qualität der Anregungen scheint ihm dabei weitaus wichtiger zu sein als die Quantität der Hilfestellungen. Alles zu kommentieren und im Detail auszuführen, hieße, das Kind, das ja den Windeln längst entstiegen ist, auf den Berg hochzutragen. Das Plakat „Beispiele und Musterlösungen“ ist oft nur Ausdruck des (menschlichen) Wunsches, die zweifellos anstrengende Geistestätigkeit, mathematische Definitionen, Sätze und Beweise zu durchdringen, doch irgendwie vermeiden zu können. Die Mathematik ist aber kein einfacher Automat, den man sich vielleicht tatsächlich besser durch zwei oder drei beispielhafte Bedienungen erklären lässt, anstatt seine Betriebsanleitung zu studieren. In der Mathematik sind Text und Objekt oft nur schwer zu unterscheiden, und im Zentrum der mathematischen Texte stehen seit den alten Griechen, bei denen die Mathematik als Wissenschaft beginnt, Definitionen, Sätze und Beweise. Sie enthalten sehr viel hochwertiges Gedankenfutter, sehr viele beispielhafte Lösungsmuster. Nur durch ihre Durchdringung und Aneignung wird das, was zu Beginn schwerfällt, irgendwann einmal einfach und leicht – wie etwa der Supremums- oder der Grenzwertbegriff –, und nur durch sie wird das, was zu Beginn unproblematisch erscheint, irgendwann einmal in seiner ungeahnten Komplexität erkennbar – wie etwa der Begriff der reellen Zahl.

Aufbau des Buches

Das Buch ist in vier Hauptabschnitte über reelle und komplexe Zahlen, Folgen und Reihen, Stetigkeit sowie Differenzierbarkeit unterteilt. Jeder Abschnitt besteht aus drei Unterabschnitten mit je zwei Kapiteln, die bei entsprechender Auswahl in einer Vorlesungswoche behandelt werden können. Dadurch entsteht ein Kernblock von zwölf Wochen. Zusätzliche Vorlesungszeit kann zu einer Einführung in mathematische Grundbegriffe und Methoden sowie zu einer ausführlicheren Darstellung spezieller Themen verwendet werden. Im Vergleich zur traditionellen Behandlung auch der Integration im ersten Semester dürfte in jedem Fall ausreichend Zeit zur Verfügung stehen, ein hinreichend repräsentatives Kernprogramm ohne Zeitdruck in einem Tempo zu absolvieren, das dem Entwicklungsstand der heutigen jüngeren Studienanfänger gerecht wird.

Am Ende jedes Unterabschnitts finden sich Übungsaufgaben verschiedenen Schwierigkeitsgrades, die den einzelnen Kapiteln zugeordnet sind, sowie Vorschläge für die Gestaltung der Ergänzungsübungen.

In einem Anhang stellen wir die Bezüge der behandelten Themen zur Mathematik der Schule zusammen, exemplarisch anhand des systematisch ausgewerteten Lehrplans für das achtjährige Gymnasium in Bayern. Diese Zusammenstellung gibt einen gewissen Überblick über fundamentale Gemeinsamkeiten und Differenzen, unter denen das Fehlen des Grenzwertbegriffs für Folgen an der Schule vielleicht am augenfälligsten ist.

Zielgruppe

Das Buch ist zuallererst ein Buch für motivierte, neugierige und begeisterungsfähige Anfänger, die eher den Beruf des Lehrers als den des Forschers anstreben. Ist das Werk auch primär gedacht als Begleittext eines einführenden Analysiskurses für das gymnasiale Lehramt, so ist es doch ausführlich und breit genug, auch von Lehramtsstudenten gelesen werden zu können, die eine Fachvorlesung besuchen, weil ihre Universität keine spezielle auf ihre Bedürfnisse zugeschnittene Lehrveranstaltung anbietet. Auch Fachstudenten dürfen sich angesprochen fühlen, zumal der Text keine Teilung in „zwei Welten“ propagiert, sondern eine Einführung in die Analysis mit spezifischen Schwerpunkten und Ausgestaltungen im Blick hat. Weiter lässt sich das Buch auch von Schülern zur Vorbereitung auf ein mathematisch-naturwissenschaftliches oder technisches Studium verwenden. Schließlich kann, bei ganz anderen Voraussetzungen, auch für Lehrer eine erneute Begegnung mit der Analysis, wie sie an der Universität gelehrt wird, gewinnbringend sein.

Voraussetzungen

Vorausgesetzt wird beim Leser das einer achtjährigen Ausbildung am Gymnasium entsprechende Schulwissen, das im Idealfall durch einen Brückenkurs vor Studienbeginn ergänzt wird, der wichtige Grundbegriffe zu Mengen, Relationen, Funktionen, Zahlen sowie zur mathematischen Argumentation ein-

schließlich der Verwendung der Junktoren und Quantoren und dem Beweis durch vollständige Induktion behandelt. In einem kurzen Vorspann ist das Wichtigste hierzu zusammengestellt. In jeder Anfängervorlesung werden diese Dinge je nach dem Stand des Vorwissens der Hörer, dem Geschmack des Dozenten und den durch die übrigen Vorlesungen gegebenen Rahmenbedingungen unterschiedlich ausgeführt. Der Leser wird bei Bedarf in vielen Büchern hierzu etwas finden.

Danksagung

Mein Dank gilt Heinz Jaskolla, Florian Quiring und Michael Vogt, die den gesamten Text aufmerksam gelesen und durch ihre zahlreichen Korrekturen und Vorschläge vielfach verbessert haben. Heinz Jaskolla hat darüber hinaus etwa ein Fünftel der Übungsaufgaben beigesteuert.

München, im Juni 2011

Oliver Deiser

Zum Lehramtsstudium

In die Frage der Gestaltung eines Studienganges im Lehramt Mathematik ist in jüngerer Zeit wieder Bewegung gekommen, vor allem auch durch die neuen Bachelor- und Masterstudiengänge, durch die die Universitäten ihre Ausbildungsziele neu überdenken. Dabei treten für den fachlichen Teil der Lehramtsausbildung für das Fach Mathematik vor allem die beiden folgenden Fragengruppen auf:

Was soll ein künftiger Mathematiklehrer in seiner Fachausbildung an der Universität lernen? Wie wichtig sind spezielle Inhalte? Welche Inhalte bilden ein Basiswissen und einen allgemein akzeptierten Grundkanon?

Welche über bloßes Wissen hinausgehende mathematische Fähigkeiten werden angestrebt? Wie können Lehramtsstudenten einen Umgang mit der Mathematik lernen, der sie auf ihren späteren Beruf vorbereitet und dazu beiträgt, den mathematischen Schulunterricht zu verbessern? Welche Erfahrungen mit der Mathematik sollen sie an der Universität sammeln?

An der School of Education der Technischen Universität München wurde hierzu ein Vier-Ziele-Programm für die Lehramtsausbildung Mathematik an Gymnasien aufgestellt. Die vier Ziele des Programms sind:

1. *Sprache*
Sichere Beherrschung der modernen mathematischen Sprache auf verschiedenen Kommunikationsebenen.
2. *Wissen*
Genaue Kenntnis der für die Schule relevanten wissenschaftlichen Inhalte.
3. *Selbständigkeit*
Fähigkeit, sich klassische Themen oder aktuelle Entwicklungen der Mathematik selbständig anzueignen.
4. *Einblick*
Verständnis von Mathematik als Wissenschaft.

Genauer werden diese vier Ziele wie folgt beschrieben und begründet.

1. Sprache: Sichere Beherrschung der modernen mathematischen Sprache auf verschiedenen Kommunikationsebenen.

Die Beherrschung der modernen mathematischen Sprache ist für einen Gymnasiallehrer wichtig, um den Schulunterricht auf einer universellen und gesellschaftlich verwendeten Grundlage gestalten zu können. Sie ist zudem notwendig, um die Tradition der Präzision in der Mathematik fortzuführen, den Austausch zwischen Schule und Universität zu ermöglichen, und um aktiv an neuen Lehrformen und Lehrmedien mitzuarbeiten. Auf einer informellen Ebene besitzt die Sprache der Mathematik vielfältige anschauliche Ausdrucksmöglichkeiten, deren Beherrschung für die Vermittlung spezieller Inhalte und allgemeiner Ideen an der Schule als besonders bedeutsam erscheint.

2. Wissen: Genaue Kenntnis der für die Schule relevanten wissenschaftlichen Inhalte.

Die Kenntnis mathematischer Themen mit Schulbezug auf höchstem wissenschaftlichen Niveau sichert einem Gymnasiallehrer inhaltliche Souveränität und trägt damit einen unverzichtbaren Teil seiner Autorität. Bei der Unterrichtsgestaltung dient dieses Wissen zudem der Orientierung und bildet Maßstab und Kontrast.

3. Selbständigkeit: Fähigkeit, sich klassische Themen oder aktuelle Entwicklungen der Mathematik selbständig anzueignen.

Ob es um mathematische Unendlichkeit, komplexe Zahlen, die Mandelbrot-Menge, das RSA-Verfahren oder graphentheoretische Algorithmen zur Routenberechnungen geht: ein Gymnasiallehrer sollte fähig sein, sich spannende klassische Themen oder öffentlich diskutierte neuere Entwicklungen der Mathematik anzueignen, um Fragen von interessierten Schülern beantworten und wissenschaftspropädeutische Schülerseminare anbieten zu können. Das Aneignen und Weitergeben von Mathematik wird dadurch immer wieder neu erlebt und hilft, künftige Veränderungen in den Lehrplänen mitzutragen und umzusetzen. Das Ziel umfasst auch den Erhalt und die Förderung der mathematischen Neugierde, und es stärkt die Rolle eines über den Schulstoff hinausgehenden Grundlagenwissens.

4. Einblick: Verständnis von Mathematik als Wissenschaft.

Ein Gymnasiallehrer muss ein exemplarisches Verständnis für die Mathematik als Wissenschaft besitzen: Wie und woran arbeiten Mathematiker? Welche Formen des Austausches gibt es zwischen ihnen? Was bedeutet Fortschritt in der Mathematik? Welche Ereignisse in der Geschichte der Mathematik waren besonders bedeutsam? Wie hängt die Mathematik mit anderen Wissenschaften zusammen? Welche gesellschaftliche Bedeutung kommt der Mathematik zu? Die Auseinandersetzung mit solchen Fragen trägt dazu bei, erworbenes Wissen einzuordnen und in übergreifenden Zusammenhängen sehen zu lernen.

Im Vergleich zum Fachstudium tritt bei diesen Zielen vor allem der Erwerb der Fähigkeit zurück, sich in angemessener Zeit in hochgradig komplexe Theorien einarbeiten und zugehörige längere Argumentationen verstehen, wiedergeben und weiterführen zu können. Fähigkeiten also, die für den künftigen Lehrer weniger bedeutsam sind als für den künftigen Forscher.

Im ersten Jahr eines Lehramtsstudiums der Mathematik stehen naturgemäß die beiden ersten Ziele im Vordergrund. Da für das Ziel *Sprache* in der Regel keine eigene Lehrveranstaltung angeboten wird, muss die Verwendung der verschiedenen mathematischen Sprachebenen innerhalb der Grundmodule gelehrt und gelernt werden. Die Art und Weise der Stellung, Besprechung und Korrektur der Übungsaufgaben bietet hierzu eine Möglichkeit („lieber einfacher, dafür aber verständlich und sprachlich korrekt aufzuschreiben“). Vor allem eignen sich Ergänzungsübungen dazu, die mathematische Sprache exemplarisch einzuüben. Dies kann durch kurze formal korrekt zu präsentierende und mit der Gruppe zu diskutierende Argumentationen ebenso erfolgen wie durch anschauliche, durch Diagramme gestützte Erklärungen zu aktuellen Begriffen der Vorlesungen. Hinsichtlich des Ziels *Wissen* können in den Grundvorlesungen Themen mit hohem Schulbezug besonders betont und ausführlicher behandelt werden, z. B. Lösen einfacher Gleichungen, trigonometrische Funktionen, verschiedene Möglichkeiten der Einführung der Eulerschen Zahl e oder der allgemeinen Exponentiation x^y , Newton-Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen. Bezüge zur Schule können explizit angesprochen werden, und Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Bekanntem und Neuem können mit den Hörern diskutiert werden, um Vernetzungsprozesse zu stärken. Dem Ziel *Selbständigkeit* kann wohl frühestens in Proseminaren und Seminaren angemessen entsprochen werden. Die selbständige Aneignung und aktive Darstellung von Mathematik kann aber auch mit Kurzvorträgen beginnen, die im zweiten Semester in den Übungsgruppen oder Ergänzungen stattfinden, und die Themen des ersten Semesters aufgreifen und vertiefen. Und auch erste Schritte zum Ziel *Einblick* können früh getan werden, durch Bemerkungen in den Vorlesungen zur Geschichte (etwa zum Streit um die Entdeckung der Infinitesimalrechnung, zur Rolle der infinitesimalen Größen damals und heute oder zur Präzisierung der Grundbegriffe im 19. Jahrhundert), zu Querverbindungen und Anwendungen (wann und wozu verwendet ein Analytiker oder Numeriker in seiner täglichen Arbeit die Taylor-Entwicklung?) und zu aktuellen Forschungsfragen und offenen Problemen (Summation über $1/n^3$, $1/n^5$, ..., Riemannsche Vermutung, maximale Periodenlänge der Dezimaldarstellung von Primzahlinversen $1/p$).

Die Themen des Buches

Erster Abschnitt: Reelle und komplexe Zahlen

Das Buch beginnt mit einer Betrachtung der irrationalen Zahlen und der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen. Wir motivieren anhand der Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die Pythagoreer und der Entdeckung der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen durch Georg Cantor im 19. Jahrhundert, warum die Analysis auf der überaus komplexen Grundstruktur der reellen Zahlen ruht. Nach dieser Einführung diskutieren wir die algebraischen Eigenschaften der reellen Zahlen. Die „üblichen Rechengesetze“ fassen wir in den Körperaxiomen zusammen, ohne dabei aber den algebraischen Begriff eines Körpers systematisch zu untersuchen. Danach werfen wir einen genaueren Blick auf die einem linearen Kontinuum innewohnende Ordnung. Nachdem wir die elementaren Ordnungseigenschaften zusammengetragen und die reellen Zahlen als angeordneten Körper gekennzeichnet haben, besprechen wir ausführlich die Vollständigkeit der reellen Zahlen in Form der Existenz von kleinsten oberen und größten unteren Schranken für nichtleere beschränkte Mengen reeller Zahlen. Diese Begriffe bereiten vielen Anfängern erfahrungsgemäß Schwierigkeiten, aber es erscheint sowohl inhaltlich als auch didaktisch durchaus angemessen, den fundamentalen Supremums- und Infimumsbegriff relativ früh zu diskutieren. Andernfalls besteht die Gefahr, dass diese Begriffe irgendwann unpassend hereinplatzen, und ganz unabhängig davon haben sie ja bei der Diskussion, warum die Analysis mit den rationalen oder algebraischen Zahlen nicht auskommt, ihren natürlichen Platz. Sie sind es doch, die letztendlich für die Überabzählbarkeit eines Kontinuums und damit für eines der großen Geheimnisse der Mathematik, für das auch viele Anfänger offene Ohren haben, verantwortlich sind. An die Diskussion der reellen Zahlen schließt sich dann eine relativ frühe Einführung der komplexen Zahlen an. Wir lernen einen weiteren Körper kennen, auf den wir im weiteren Verlauf immer wieder zurückkommen, und der in Form der komplexen Exponentialfunktion eine tragende Rolle in unserer Darstellung spielt. Mit den komplexen Zahlen werden wir im Rahmen einer ausführlichen Diskussion der Lösungen einfacher algebraischer Gleichungen weiter vertraut, und in den Ergänzungen diskutieren wir, wie wir die wichtige geometrische Multiplikationsregel für die komplexen Zahlen früh nachweisen können, wenn wir elementare geometrische Argumentation zulassen. Dadurch gewinnt $\mathbb{C}$ an Anschauung und Sympathie.

Zweiter Abschnitt: Folgen und Reihen

Wir beginnen mit der Betrachtung unendlicher Folgen in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) und ihren Grenzwerten. Dabei untersuchen wir auch den für Anfänger oft schwierigen Begriff der Teilfolge. Häufungspunkte und den Satz von Bolzano-Weierstraß betrachten wir sowohl für Folgen als auch, als ersten Hinweis auf den mengentheoretisch-topologischen Blick, für Mengen. Anschließend besprechen wir die Cauchy-Folgen in ihren beiden Bedeutungen: Sie eignen sich, um die Konvergenz von Folgen zu beweisen, deren Grenzwert man nicht kennt, und sie eignen sich für eine alternative Formulierung der entscheidenden Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen. Im Zentrum stehen dann unendliche Reihen, die zwar streng genommen nichts anderes sind als Folgen, aber die Praxis der Analysis beherrschen. Die geometrische Reihe tritt auf, und wir werden im Folgenden immer wieder sehen, wie sie die Entwicklung der Theorie befruchtet und trägt. Die üblichen Konvergenzkriterien für unendliche Reihen dürfen nicht fehlen, als da sind das Majorantenkriterium, das Quotientenkriterium, das Wurzelkriterium und das Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen. Ergänzt wird die Darstellung um einen ersten Kontakt mit der Abelschen Summation, die uns einen zweiten Beweis des Leibniz-Kriteriums ermöglicht und dann später bei der Untersuchung von Potenzreihen wichtige Dienste leisten wird. Die abstrakte Theorie der unendlichen Reihen verfolgen wir dann mit einer Untersuchung von Umordnungen und Produkten von Reihen. Der Leitidee, Abstraktes und Konkretes abwechselnd zu behandeln, folgen wir dann mit der Einführung der reellen und komplexen Exponentialreihe und der binomischen Reihe. Die zur Exponentialreihe gehörige komplexe Exponentialfunktion bildet fortan einen roten Faden der Darstellung.

Dritter Abschnitt: Stetigkeit

Das Thema des dritten Abschnitts bildet der in der Schule zur Unzufriedenheit vieler Mathematiker ausgegrenzte Stetigkeitsbegriff, der für eine systematisch entwickelte Analysis unerlässlich ist, und der darüber hinaus sicher zu den wichtigsten Begriffen der Mathematik überhaupt gehört. Wir besprechen ihn ausführlich im Gewand der Limesstetigkeit und der Umgebungsstetigkeit, und weiter dann in den starken Formen der gleichmäßigen Stetigkeit und der Lipschitz-Stetigkeit. Die Theorie der stetigen Funktionen entwickeln wir dann zunächst für stetige Funktionen, die auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen definiert sind. Für diese Funktionen beweisen wir den Nullstellen-, den Zwischenwert- und den Fixpunktsatz, den Satz von Weierstraß über die Annahme von Maximum und Minimum, und schließlich zeigen wir, dass sie gleichmäßig stetig sind. Weiter lernen wir dann zwei neue Grenzwertbegriffe für Funktionenfolgen kennen, und wir entdecken die ersten Phänomene der gleichmäßigen Konvergenz. Nach diesen abstrakten Untersuchungen stehen dann wieder konkrete Objekte im Mittelpunkt. Zunächst ist es die reelle Exponentialfunktion, mit deren Hilfe wir den natürlichen Logarithmus und weiter dann die allgemeine Exponentiation und den Logarithmus zu einer beliebigen positiven

Basis einführen. Anschließend steht die komplexe Exponentialfunktion im Zentrum. Wir sehen, dass zum exponentiellen Wachstum des Reellen im Komplexen das gänzlich neue Phänomen der Kreisaufwicklung tritt, und wir nutzen diese Eigenschaft zur Einführung der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen. Sinus und Kosinus haben per Definition einen geometrischen Gehalt, den wir durch den Nachweis der Äquivalenz der analytischen und der geometrischen Definition der Kreiszahl π völlig klären. Der Zoo der trigonometrischen Funktionen (Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens, Sekans, Kosekans) und weiter der hyperbolischen Funktionen bildet ein reiches Feld für genauere Betrachtungen mit hohem Bezug zur Schulmathematik. In den Ergänzungen identifizieren wir insbesondere die trigonometrischen Größen in durch die guten alten Dreiecke gegebenen geometrischen Figuren.

Vierter Abschnitt: Differenzieren

Wir führen die Ableitung einer Funktion ein und betonen die Sicht der linearen Approximation einer Funktion in einem Punkt, die die Ableitung eher als Funktion denn als Zahl ansieht. Mit Hilfe des linearen Approximationssatzes beweisen wir dann die gängigen Ableitungsregeln. Das Beispiel einer Funktion, die bei der Ableitung ihre Stetigkeit verliert, führt uns dann zum Nullstellen- und zum Zwischenwertsatz der Differentialrechnung, und eine wichtige Variation dieser beiden Sätze lernen wir dann im Satz von Rolle und im Mittelwertsatz kennen. Als erste Anwendungen der neuen Theorie zeigen wir den engen Zusammenhang zwischen Monotonie der Funktion und dem Vorzeichen ihrer Ableitung, sowie zwischen lokalen Extremwerten der Funktion und Nullstellen der Ableitung. Weiter charakterisieren wir die konstanten Funktionen und damit die Exponentialfunktion über ihre Differentialgleichung, und wir zeigen, dass differenzierbare Funktionen sehr starke Stetigkeitseigenschaften besitzen. Es folgt eine Etablierung der l'Hospitalischen Regeln zur Grenzwertberechnung und eine ausführliche Diskussion des Krümmungsverhaltens einer Funktion, die uns auch mit der Jensenschen Ungleichung bekannt macht. Eine kurze Darstellung des Newton-Verfahrens schließt dann die Anwendungen der Differentiation erst einmal ab, und wir wenden uns der Begriffswelt der Potenzreihen zu. Wir untersuchen ihren Konvergenzbereich mit Hilfe der geometrischen Reihe und weiter der Abelschen Summation. Der Satz über das gliedweise Differenzieren reicht schließlich eine endgültige Motivation der Exponentialreihe nach. Er liefert uns zudem die Juwelenreihen des Logarithmus und des Arkustangens, und im Verbund mit dem Abelschen Grenzwertsatz damit auch Reihen für $\log(2)$ und $\pi/4$. Danach motivieren wir die Taylor-Entwicklung als Verallgemeinerung des linearen Approximationssatzes. Den Satz von Taylor mit Lagrangeschem Restglied präsentieren und beweisen wir als verallgemeinerten Mittelwertsatz. Ein positiver Satz zur Potenzreihenentwicklung und ein Beispiel mit komplexem Ausblick beenden dann unsere erste intensive Begegnung mit der Welt der Analysis.

Voraussetzungen und Notationen

Wir stellen im Folgenden einige wichtige grundlegende Notationen und Begriffe zusammen. Für eine ausführliche und vollständigere Darstellung dürfen wir den Leser auf die Literatur verweisen.

Mengen

Wir arbeiten mit einem intuitiven Mengenbegriff, der eine Menge als Zusammenfassung von mathematischen Objekten ansieht. (In der Mathematik sind die Mengen heute ein undefinierter Grundbegriff, der durch in einer formalen Sprache formulierte Axiome beschrieben wird.) Die Objekte, die eine Menge bilden, heißen die *Elemente* der Menge. Ist a ein Element der Menge A , so schreiben wir $a \in A$. Eine Menge ist durch ihre Elemente eindeutig bestimmt.

Sind A und B Mengen und ist jedes Element von A ein Element von B , so heißt A eine *Teilmenge* von B und weiter B eine *Obermenge* von A . In Zeichen schreiben wir hierfür $A \subseteq B$, wobei das Teilmengenzeichen „ $\subseteq$ “ an das Kleiner-gleich-Zeichen „ $\leq$ “ erinnert. Gilt $A \subseteq B$ und $A \neq B$, so heißt A eine *echte Teilmenge* von B und B eine *echte Obermenge* von A . In Zeichen schreiben wir hierfür $A \subset B$. Gilt $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, so gilt $A = B$ (und umgekehrt).

Wir verwenden die geschweiften *Mengenklammern* „{“, „}“ und den *Eigenchaftsstrich* „|“ zur Darstellung von Mengen:

$$\{x \mid \mathcal{E}(x)\} \quad (\text{Mengenkomprehension})$$

ist die Menge aller Objekte x , die die Eigenschaft $\mathcal{E}(x)$ besitzen. (Die spannenden logischen Probleme der „zu großen“ Mengenkomprehensionen können wir hier ignorieren.) Endliche Mengen können wir direkt angeben als

$$\emptyset = \{\} = \{x \mid x \neq x\}, \quad (\text{leere Menge})$$

$$\{a\} = \{x \mid x = a\}, \quad (\text{Einermenge})$$

$$\{a, b\} = \{x \mid x = a \text{ oder } x = b\}, \quad (\text{Paarmenge, ungeordnetes Paar})$$

usw. Es gilt $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, a, b\}$, usw. Auch endliche oder unendliche „Pünktchennotationen“ wie

$$\{0, 2, 4, 6, \dots, 100\},$$

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\} (= \{n \mid n \text{ ist eine ungerade natürliche Zahl}\})$$

sind nützlich und suggestiv, solange die angegebene Menge im Rahmen des Prinzips des guten Lesewillens eindeutig erkennbar ist.

Von $\{a, b\}$ zu unterscheiden ist das *geordnete Paar* (a, b) , bei dem die Reihenfolge von a und b eine Rolle spielt. Rückführend auf den Mengenbegriff kann man $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ setzen.

An besonders wichtigen Operationen mit Mengen A und B notieren wir:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}, \quad (\text{Vereinigung})$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}, \quad (\text{Durchschnitt})$$

$$A - B = A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}, \quad (\text{Differenz})$$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ und } b \in B\}. \quad (\text{kartesisches Produkt, Kreuzprodukt})$$

Weiter ist dann $A^2 = A \times A$, $A^3 = A^2 \times A$, usw.

Zahlen

Wir verwenden die Symbole $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ für die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen. Die natürlichen Zahlen enthalten die Null. Es gilt also

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Eine rationale Zahl q in Bruchform stellen wir bevorzugt dar als $q = m/n$ mit einer ganzen Zahl m und einer natürlichen Zahl $n \geq 1$. Es gilt also

$$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}.$$

Weiter können wir eine rationale Zahl als endlichen oder periodisch unendlichen Dezimalbruch darstellen, etwa

$$4/3 = 1,333\dots \quad 1/7 = 0,142857142857142857\dots$$

Die reellen Zahlen werden wir im ersten Kapitel genauer untersuchen. Grob gesprochen nehmen wir dabei aus didaktischer Sicht an, dass die reellen Zahlen für den Leser eine gewisse „physikalische Realität“ besitzen und in Form unendlicher Dezimaldarstellungen die Punkte einer Linie repräsentieren.

Nützlich sind zuweilen noch die Notationen

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}, \quad \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}, \quad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}, \quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Funktionen

Wir schreiben $f: X \rightarrow Y$, falls f eine Funktion ist, die jedem $x \in X$ ein eindeutig bestimmtes $f(x) \in Y$ zuordnet. Für jedes $x \in X$ heißt dann $f(x)$ der *Funktionswert* von f an der *Stelle* x oder für das *Argument* x oder im *Punkt* x . Weiter heißt X der *Definitionsbereich* von f , und wir sagen auch, dass f eine Funktion *auf* X ist. Die Menge Y nennen wir einen *Wertevorrat* der Funktion f , und

$$f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \quad (\text{Wertebereich, Bild})$$

heißt der *Wertebereich* oder das *Bild* von f . Der Wertebereich ist im Allgemeinen eine echte Teilmenge des betrachteten Wertevorrats. Für jede Menge Z mit

$f[X] \subseteq Z$ können wir $f: X \rightarrow Z$ schreiben. So gilt zum Beispiel $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ für den Sinus auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Ist $f: X \rightarrow Y$ und A eine Teilmenge von X , so ist die *Einschränkung* $f|A$ der Funktion f auf die Menge A die Funktion g auf A mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in A$. Es gilt dann $f|A: A \rightarrow Y$.

Ist f eine Funktion und gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$, so heißt die Funktion f *eindeutig* oder *injektiv*. Diese Eigenschaft ist von einem betrachteten Wertevorrat unabhängig. Wird jedes Element eines betrachteten Wertevorrats Y angenommen (d.h. gibt es für alle $y \in Y$ ein x mit $f(x) = y$), so heißt die Funktion $f: X \rightarrow Y$ *surjektiv*. Schließlich heißt $f: X \rightarrow Y$ *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist. Die Funktion f stellt dann eine vollständige Paarbildung zwischen den Elementen von X und Y dar.

Ist $f: X \rightarrow Y$ injektiv, so ist die *Umkehrfunktion* f^{-1} von f definiert als die Funktion g auf $f[X]$ mit $g(f(x)) = x$ für alle $x \in X$. Es gilt dann

$f^{-1}: f[X] \rightarrow X$ bijektiv.

Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ zwei Funktionen, so ist die *Komposition* oder *Verknüpfung* $g \circ f$ der Funktionen f und g die Funktion h auf X mit $h(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$. Es gilt dann

$g \circ f: X \rightarrow Z$.

Die Notation „ $g \circ f$ “ wird gelesen als „ g nach f “.

Während für viele Funktionen in der Analysis spezielle Zeichen verwendet werden (etwa für den Sinus), gibt es gerade für einige einfache Funktionen keine eigenen Notationen. Ein Beispiel ist die Quadratfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ für alle x . Zur Vermeidung umständlicher Formulierungen behandeln wir gelegentlich einen Term wie x^2 als Funktion. Wir können dann zum Beispiel sagen: „Die Funktion x^2 ist stetig im Nullpunkt.“ Üblich ist auch die Notation $(\cdot)^2$ für die Quadratfunktion, die wir in diesem Text aber nicht verwenden.

Junktoren und Quantoren

Die wichtigsten mathematischen Junktoren sind „nicht“ oder „non“ (in Zeichen $\neg$), „und“ ($\wedge$), „oder“ ($\vee$), „impliziert“ ($\rightarrow$) und „genau dann, wenn“ ($\leftrightarrow$). Das „oder“ wird dabei in einem nicht ausschließlichen Sinn verwendet, und eine Implikation $A \rightarrow B$ ist äquivalent zu $\neg A \vee B$.

Zur Quantifizierung verwendet man den *Allquantor* „für alle“ (in Zeichen $\forall$) und den *Existenzquantor* „es gibt (mindestens ein)“ (in Zeichen $\exists$).

Besonders wichtig für die Analysis sind die Verneinungsregeln für die Quantoren:

$\neg \forall x A(x)$	ist äquivalent zu	$\exists x \neg A(x)$,
$\neg \exists x A(x)$	ist äquivalent zu	$\forall x \neg A(x)$,
$\neg \forall x \exists y A(x, y)$	ist äquivalent zu	$\exists x \forall y \neg A(x, y)$,
$\neg \exists x \forall y A(x, y)$	ist äquivalent zu	$\forall x \exists y \neg A(x, y)$, usw.

Indirekte Beweise und Widerspruchsbeweise

Wichtige Beweistechniken der Mathematik sind der *direkte* und der *indirekte Beweis* einer Implikation $A \rightarrow B$ und der *Widerspruchsbeweis* einer Aussage A .

Bei einem direkten Beweis von $A \rightarrow B$ nimmt man A an und versucht B zu beweisen. Gelingt dies, hat man $A \rightarrow B$ bewiesen. Bei einem indirekten Beweis von $A \rightarrow B$ nimmt man dagegen $\neg B$ an und versucht $\neg A$ zu beweisen. Gelingt dies, so hat man $\neg B \rightarrow \neg A$ bewiesen, was logisch äquivalent zu $A \rightarrow B$ ist. Es gibt keine allgemeine Regel, wann ein direkter und wann ein indirekter Beweis von $A \rightarrow B$ einfacher zu finden oder einfacher zu verstehen ist.

Bei einem Widerspruchsbeweis zeigt man eine Aussage A wie folgt. Man nimmt an, dass $\neg A$ gilt, und versucht, mit Hilfe dieser Annahme eine widersprüchliche Aussage wie $0 = 1$ herzuleiten. Damit ist dann die doppelte Verneinung $\neg\neg A$ von A bewiesen, was logisch äquivalent zu A ist.

Vollständige Induktion

Will man zeigen, dass alle natürlichen Zahlen n eine bestimmte Eigenschaft $\mathcal{E}(n)$ besitzen, so kann man dies durch *vollständige Induktion* erreichen, indem man die beiden folgenden Aussagen beweist:

- (1) Es gilt $\mathcal{E}(0)$. (*Induktionsanfang*)
- (2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathcal{E}(n)$ impliziert $\mathcal{E}(n + 1)$. (*Induktionsschritt*)

Den Beweis von (2) beginnt man oft mit: „Es gelte also $\mathcal{E}(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.“ Man versucht nun, mit Hilfe der sog. *Induktionsvoraussetzung* $\mathcal{E}(n)$ zu beweisen, dass $\mathcal{E}(n + 1)$ gilt. Gelingt dies, ist (2) gezeigt.

Zur Illustration beweisen wir mit Hilfe vollständiger Induktion die bekannte Summenformel:

„Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 + 1 + \dots + n = n(n + 1)/2$.“

Induktionsanfang:

Offenbar ist $0 = 0 \cdot (0 + 1)/2$.

Induktionsschritt von n nach $n + 1$:

Es gelte also $0 + \dots + n = n(n + 1)/2$ (Induktionsvoraussetzung). Dann gilt

$$0 + \dots + n + (n + 1) = n(n + 1)/2 + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2.$$

Üblich im Kontext der vollständigen Induktion ist die Abkürzung I. V. für „Induktionsvoraussetzung“.

Zuweilen kann es im Beweis hilfreich sein, im Induktionsschritt nicht nur $\mathcal{E}(n)$, sondern stärker $\mathcal{E}(0)$, ..., $\mathcal{E}(n)$ anzunehmen. Dies ist erlaubt, und man spricht dann von einer *starken Induktion*. Logisch äquivalent zur starken Induktion ist das *Prinzip des kleinsten Ausreißers*: Gilt eine Eigenschaft $\mathcal{E}(n)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$, so gibt es ein kleinstes n_0 , das die Eigenschaft $\mathcal{E}$ nicht besitzt, d. h. es gilt $\neg\mathcal{E}(n_0)$ und zudem $\mathcal{E}(n)$ für alle $n < n_0$.

1. Abschnitt

Reelle und komplexe Zahlen

1. Warum die rationalen Zahlen nicht genügen

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{ n/m \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m \neq 0 \}$ bilden auf den ersten Blick ein gutes mathematisches Modell für ein räumliches oder zeitliches Linear-kontinuum: Die Ordnung auf $\mathbb{Q}$ ist dicht, d. h. zwischen je zwei rationalen Zahlen p und q liegt eine weitere rationale Zahl r , etwa das arithmetische Mittel $r = (p + q)/2$ von p und q . Wir haben also mit $\mathbb{Q}$ einen scheinbar perfekten Zahlenstrahl zur Verfügung. Dennoch zeigt sich, dass die rationalen Zahlen für die Zwecke der Geometrie und weiter der Analysis nicht geeignet sind: Es fehlen, wie die alten Griechen entdeckten, einfache geometrisch konstruierbare Punkte. Weiter fehlen, wie Georg Cantor im 19. Jahrhundert entdeckte, in einem gewissen Sinne sogar „fast alle“ Punkte, die als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen auftauchen. Diese beiden mathematisch grundlegenden und historisch ungemein bedeutsamen Erkenntnisse wollen wir in diesem Kapitel kennenlernen. Dabei legen wir unser in der Schule erworbenes Verständnis der reellen Zahlen zugrunde. Im zweiten Kapitel werden wir dann die wichtigsten algebraischen und ordnungstheoretischen Eigenschaften der reellen Zahlen zusammenstellen und diskutieren.

Die Entdeckung der alten Griechen: Irrationale Verhältnisse

Betrachten wir ein Quadrat mit der Seitenlänge 1, so ist seine Diagonale ganz ohne Zweifel eine natürliche mathematische Größe und sollte also einem Punkt auf unserem aus Zahlen gebildeten Modell eines Kontinuums entsprechen. Wir können die Diagonale mit einem Zirkel abgreifen und auf unseren Zahlenstrahl übertragen, mit der Nadel des Zirkels im Nullpunkt. Die alten Griechen entdeckten, dass wir dabei keinen Punkt von $\mathbb{Q}$ treffen: Der aus rationalen Zahlen gebildete Zahlenstrahl hat dort, wo die Mine des Zirkels ideell landet, ein „Loch“. Dem Beweis dieser Tatsache stellen wir einige zahlentheoretische Überlegungen voran.

Die Zahl $14 = 2 \cdot 7$ können wir genau 1 mal ohne Rest durch 2 teilen, die Zahl $16 = 2^4$ genau 4 mal, die Zahl $280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ genau 3 mal, die Zahl 1111 genau 0 mal. Für jede natürliche Zahl n sei $z(n)$ die maximale Anzahl der möglichen Zweiteilungen von n ohne Rest. So gilt also $z(14) = 1$, $z(16) = 4$, $z(280) = 3$ und $z(1111) = 0$. Die Zahl $z(n)$ nennen wir den *Zweifaktor* von n . Der Zweifaktor erfüllt für alle natürlichen Zahlen n die beiden folgenden Eigenschaften, die sich mit Hilfe der Rechenregeln für die Exponentiation leicht einsehen lassen:

- (i) $z(2n) = z(n) + 1$,
- (ii) $z(n^2) = 2z(n)$.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun unseren Beweis führen.

Satz (*Irrationalität der Quadratwurzel aus 2*)

Sei d die Länge der Diagonalen des Einheitsquadrats. Dann ist d keine rationale Zahl, d. h. es gilt $d \neq n/m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$.

Beweis

Annahme, es gilt $d = n/m$ für gewisse $n, m \in \mathbb{N}, m \neq 0$. Nach dem Satz des Pythagoras ist $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, also gilt $(n/m)^2 = 2$ und damit

$$(\#) \quad n^2 = 2m^2.$$

Seien $a = z(n)$ und $b = z(m)$ die Zweifaktoren von n und m . Dann ist nach obigen Eigenschaften $z(n^2) = 2a$ und $z(2m^2) = 2b + 1$. Nach $(\#)$ ist dann $2a = z(n^2) = z(2m^2) = 2b + 1$, während doch die gerade Zahl $2a$ sicher verschieden von der ungeraden Zahl $2b + 1$ ist, und damit haben wir den

— gewünschten Widerspruch erreicht.

Das Argument verbindet zwei Welten. Das zahlentheoretische Argument für sich betrachtet zeigt, dass keine rationale Zahl d die Gleichung $d^2 = 2$ erfüllen kann. Der Satz des Pythagoras beleuchtet dieses Ergebnis dann am Einheitsquadrat. Diese Brücke zwischen Arithmetik und Geometrie sichert dem Beweis einen unbefristeten Platz im Juwelenkabinett der Mathematik.

Analog kann man zeigen, dass die Quadratwurzel aus 3 irrational ist. Eine sehr starke Verallgemeinerung liefert dann ein schöner Satz von Gauß. Er zieht wieder einige zahlentheoretische Eigenschaften heran, die wir vorab diskutieren wollen. Wir betrachten hierzu $10 = 2 \cdot 5$. Dann gilt $10^k = 2^k \cdot 5^k$ für alle natürlichen Zahlen k . In den Potenzen von 10 tauchen also keine neuen Primfaktoren auf. Analog ist $18 = 2 \cdot 3^2$ und $18^k = 2^k \cdot 3^{2k}$ für alle natürlichen Zahlen k . Allgemein gilt für alle ganzen Zahlen n und natürlichen Zahlen $k \geq 1$:

(+) Die Zahlen n und n^k haben dieselben Primfaktoren.

Mit Hilfe dieser Beobachtung können wir nun beweisen:

Satz (*Satz von Gauß*)

Seien $a_0, \dots, a_{k-1}$ ganze Zahlen, und sei x eine reelle Zahl mit

$$x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x^1 + a_0 = 0.$$

Dann ist x eine ganze Zahl oder irrational.

Beweis

Wir nehmen an, dass $x = n/m$ eine rationale Zahl ist, und dass n/m gekürzt ist. Wir zeigen, dass $m = 1$ gelten muss und beweisen so den Satz.

Einsetzen von $x = n/m$ in die Gleichung des Satzes liefert

$$(n/m)^k + a_{k-1} (n/m)^{k-1} + \dots + a_1 (n/m) + a_0 = 0.$$

Die Multiplikation mit m^k ergibt

$$n^k + a_{k-1} n^{k-1} m^1 + \dots + a_1 n^1 m^{k-1} + a_0 m^k = 0.$$

Also ist

$$n^k = -m (a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0 m^{k-1}).$$

Folglich ist m ein Teiler von n^k . Wäre nun $p \geq 2$ ein Primfaktor von m , so wäre p also ein Primfaktor von n^k . Nach (+) wäre dann aber p auch ein Primfaktor von n , und dann wäre n/m nicht gekürzt. Also besitzt m keinen

– Primfaktor $p \geq 2$, und damit ist $m = 1$ und $x = n$ eine ganze Zahl.

Die Gleichungen $x^2 - 2 = 0$ und $x^3 - 3 = 0$ haben die Form der im Satz von Gauß betrachteten Gleichungen und sie besitzen offenbar keine ganzzahligen Lösungen. Also folgt aus dem Satz, dass die Quadratwurzeln aus 2 und 3 irrational sind. Allgemeiner zeigt diese Betrachtung, dass die Wurzel einer natürlichen Zahl n irrational ist, falls n keine Quadratzahl ist, d. h. n nicht von der Form m^2 für eine natürliche Zahl m ist.

Man könnte angesichts der Entdeckung der alten Griechen versucht sein, zu den rationalen Zahlen alle mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Größen hinzuzufügen, um so die „Löcher“ von $\mathbb{Q}$ zu stopfen. Eine nichttriviale Überlegung zeigt, dass alle diese Größen Lösungen von gewissen Gleichungen $a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ mit rationalen Koeffizienten $a_0, \dots, a_k$ sind. Wir definieren hierzu:

Definition (*algebraische Zahlen, $\mathbb{A}$*)

Eine reelle Zahl x heißt *algebraisch*, falls rationale Zahlen $a_0, \dots, a_k$ existieren mit $a_k \neq 0$ und $a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$. Wir setzen weiter

$$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ ist algebraisch}\}.$$

Die Multiplikation mit dem Hauptnenner der Zahlen a_i in Bruchdarstellung zeigt, dass wir hier auch die Existenz ganzzahliger Koeffizienten fordern können. Die algebraischen Zahlen sind damit genau die Nullstellen der nichttrivialen Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten.

Es zeigt sich, dass die algebraischen Zahlen immer noch nicht genügen. Wichtige geometrische und analytische Größen der Mathematik wie die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e sind nicht algebraisch. Wir definieren:

Definition (*transzendente Zahlen*)

Eine reelle Zahl x heißt *transzendent*, falls x nicht algebraisch ist.

Dass die Kreiszahl π und die Eulersche Zahl e transzendent sind, ist eine tief-
liegende Erkenntnis des 19. Jahrhunderts. Im folgenden Zwischenabschnitt werden wir aber zeigen, dass transzendente Zahlen überhaupt existieren.

Die Entdeckung von Cantor: Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Der Leser wird sich vielleicht gefragt haben, warum wir nicht die Dezimaldarstellung reeller Zahlen verwendet haben, um zu zeigen, dass es irrationale Zahlen gibt. Denn bekanntlich ist eine reelle Zahl in unendlicher Dezimaldarstellung

$$x = \pm n, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots, \quad n \in \mathbb{N}, a_i \in \{0, 1, \dots, 9\},$$

genau dann rational, wenn die Darstellung periodisch ist. (Diese Tatsache werden wir später noch genauer betrachten.) Damit sind zum Beispiel die reellen Zahlen

$$x_1 = 0,10110111011110\dots,$$

$$x_2 = 0,100111000011111000000\dots,$$

$$x_3 = 0,1234567891011121314151617\dots$$

irrational. Die Bedeutung der obigen Überlegungen liegt aber gerade darin, konkrete für die Mathematik bedeutsame Größen wie etwa $\sqrt{2}$ als irrational zu erkennen. Geeignete Rechenverfahren liefern z. B.

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504\dots,$$

erlauben aber in der Regel nicht, die berechnete Zahl als irrational oder rational zu identifizieren.

Dessen ungeachtet liefert uns die Dezimaldarstellung spielerische Möglichkeiten zur Konstruktion irrationaler Zahlen. Und sie leistet noch weit mehr. Hierzu müssen wir wieder etwas weiter ausholen und einige Betrachtungen über die Eigenheiten unendlicher Mengen vorausschicken.

Das *Hilbertsche Hotel* hat unendlich viele Zimmer $0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots$. Alle Zimmer des Hotels sind belegt. Ein neuer Gast kann aber trotzdem untergebracht werden, indem jeder alte Gast von seinem Zimmer n in das Zimmer $n + 1$ umzieht. Dadurch wird das Zimmer 0 für den neuen Gast frei. Ebenso können unendlich viele neue Gäste $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ untergebracht werden, indem jeder alte Gast von Zimmer n in das Zimmer $2n$ umzieht. Dadurch werden die Zimmer $1, 3, 5, 7, \dots$ für die neuen Gäste frei.

Eine mathematische Version dieses Gedankenexperiments ist, dass es, im Sinne einer möglichen 1-1-Korrespondenz, ebenso viele natürliche Zahlen größergleich 0 wie natürliche Zahlen größergleich 1 gibt:

$$0, 1, 2, 3, \dots$$

$$1, 2, 3, 4, \dots$$

Ebenso gibt es, im Sinne einer möglichen 1-1-Korrespondenz, ebenso viele natürliche Zahlen wie gerade natürliche Zahlen:

$$0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$0, 2, 4, 6, 8, \dots$$

Und es gibt auch ebenso viele natürliche Zahlen wie ganze Zahlen:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...

Diese Beobachtungen lassen sich mit Hilfe des Bijektionsbegriffs allgemein und scharf fassen. In der Mathematik heißen zwei Mengen M und N *gleichmächtig*, falls eine Bijektion $f: M \rightarrow N$ existiert. Hier genügt uns die begrifflich einfachere Gleichmächtigkeit einer Menge M mit der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Wir definieren:

Definition (*abzählbar unendlich, abzählbar*)

Eine Menge M heißt *abzählbar unendlich*, falls es eine Bijektion $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ gibt. Weiter heißt M *abzählbar*, falls M endlich oder abzählbar unendlich ist.

Eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow M$ lässt sich in der Form obiger Beispiele darstellen:

0, 1, 2, 3, 4, ...

$f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), \dots$

Diese Darstellung können wir zur „Folgenform“ $f(0), f(1), f(2), \dots$ verkürzen. Damit ist leicht einzusehen, dass eine Menge M genau dann abzählbar unendlich ist, wenn wir die Elemente von M ohne Wiederholungen in die Form $f(0), f(1), f(2), \dots$ bringen können. Können wir M mit eventuellen Wiederholungen als $g(0), g(1), g(2), \dots$ aufzählen, so ist M abzählbar, denn das Streichen der Wiederholungen liefert eine endliche Aufzählung $f(0), \dots, f(n)$ von M oder aber eine wiederholungsfreie Aufzählung $f(0), f(1), f(2), \dots$ von M .

Obige Überlegung zeigt, dass die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen abzählbar unendlich ist. Stärker gilt nun sogar:

Satz (*Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$*)

Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich.

Beweis

Wir können alle rationalen Zahlen wie folgt aufzählen:

0/1, (Gewicht 1)

1/1, -1/1, (Gewicht 2)

2/1, -2/1, 1/2, -1/2, (Gewicht 3)

3/1, -3/1, 1/3, -1/3, (Gewicht 4)

4/1, -4/1, 3/2, -3/2, 2/3, -2/3, 1/4, -1/4 (Gewicht 5)

...

Hierbei erhält ein gekürzter Bruch p/q mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ das „Gewicht“ $g = |p| + q$. Wir können damit ganz $\mathbb{Q}$ aufzählen, indem wir die jeweils endlich vielen gekürzten Brüche mit Gewicht $g = 1, 2, 3, \dots$ aneinander
– fügen.

Ein ganz ähnliches Argument zeigt viel stärker:

Satz (*Abzählbarkeit der algebraischen Zahlen*)

Die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar unendlich.

Beweis

Jede algebraische Zahl ist eine Lösung einer algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten. Da jede solche Gleichung nur endlich viele Lösungen besitzt, genügt es zu zeigen, dass wir alle diese Gleichungen aufzählen können. Hierzu ordnen wir einer Gleichung

$$a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0,$$

ihr „Gewicht“ $g = n + |a_n| + \dots + |a_0|$ zu. Dann gibt es für jedes vorgegebene Gewicht g nur endlich viele Gleichungen mit dem Gewicht g . Damit erhalten wir eine Aufzählung aller algebraischen Gleichungen und weiter

– dann eine Aufzählung aller algebraischen Zahlen.

Man wird nun vielleicht einwenden, dass diese Überlegungen lediglich zeigen, dass im Reich des Unendlichen alle Größenunterschiede verschwimmen. Die Begriffsbildung „abzählbar unendlich“ scheint überflüssig, da sich scheinbar jede noch so umfassende unendliche Menge mit Hilfe der natürlichen Zahlen durchzählen lässt. Dass dies nicht so ist, zeigt der folgende fundamentale Satz von Georg Cantor aus dem Jahre 1874:

Satz (*Überabzählbarkeit der reellen Zahlen*)

Die Menge $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beweis

Seien $x_0, x_1, x_2, \dots$ reelle Zahlen. Wir konstruieren ein x^* mit $x^* \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hierzu schreiben wir in Dezimaldarstellung:

$$x_0 = z_0, a_{0,0} \ a_{0,1} \ a_{0,2} \ \dots,$$

$$x_1 = z_1, a_{1,0} \ a_{1,1} \ a_{1,2} \ \dots,$$

$$x_2 = z_2, a_{2,0} \ a_{2,1} \ a_{2,2} \ \dots,$$

$$x_3 = z_3, a_{3,0} \ a_{3,1} \ a_{3,2} \ \dots,$$

...

$$x_n = z_n, a_{n,0} \ a_{n,1} \ a_{n,2} \ \dots,$$

...

Wir definieren nun für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{n,n} = 2, \\ 2, & \text{falls } a_{n,n} \neq 2, \end{cases}$$

und setzen $x^* = 0, b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots$. Dann ist x^* eine reelle Zahl in eindeutiger Dezimaldarstellung, und für jedes n ist $x^* \neq x_n$, denn die n -ten Nachkommastellen von x^* und x_n sind verschieden.

–

Wir lesen also die Nachkommastellen der Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ „diagonal“ und konstruieren mit Hilfe der Diagonalziffern $a_{0,0} a_{1,1} a_{2,2} \dots$ eine reelle Zahl x^* , die für jedes n spätestens ab der n -ten Nachkommastelle von x_n abweicht. Dieses Vorgehen ist als „Diagonalargument“ in die Geschichte der Mathematik eingegangen. Es gehört heute ebenso zur Allgemeinbildung eines Mathematikers wie der klassische Beweis der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2.

Gegen das Argument wird oft eingewandt, dass man ja die konstruierte Zahl x^* noch zu den Zahlen $x_0, x_1, x_2, \dots$ hinzufügen könne, und im Sinne des Hilbertschen Hotels dann die Zahlen $x^*, x_0, x_1, \dots$ vorliegen hätte. Hierzu bemerken wir, dass aus der Annahme der Abzählbarkeit von $\mathbb{R}$ folgt, dass es eine Folge $x_0, x_1, \dots$ gibt, die alle reellen Zahlen durchläuft. Unser Beweis findet eine Zahl x^* , die nicht in der Folge vorkommt. Damit ist die Annahme falsch, d. h. die reellen Zahlen sind nicht abzählbar.

Es gibt also, im Sinne einer unmöglichen 1-1-Korrespondenz, mehr reelle Zahlen als natürliche oder ganze oder rationale Zahlen. Der Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist damit gewaltig. Die durch die alten Griechen entdeckten Löcher von $\mathbb{Q}$ sind so zahlreich, dass wir sie nicht aufzählen können. $\mathbb{R}$ entsteht nicht aus $\mathbb{Q}$ durch Hinzufügen von abzählbar vielen Zahlgrößen $x_0, x_1, x_2, \dots$, denn die entstehende Menge $\mathbb{Q} \cup \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ wäre immer noch abzählbar. Es gibt also überabzählbar viele irrationale Zahlen. Die gleiche Überlegung gilt für die algebraischen Zahlen. Wir notieren hier explizit:

Korollar (*Existenz transzendenter Zahlen*)

Es gibt überabzählbar viele transzendente Zahlen.

Beweis

Wäre die Menge $\mathbb{R} - \mathbb{A}$ der transzendenten Zahlen abzählbar, so wäre aufgrund der Abzählbarkeit von $\mathbb{A}$ die Menge $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{A})$ abzählbar,

– was nicht der Fall ist.

Wir haben keine neue Erkenntnis über π oder e gewonnen, aber wir haben gezeigt, dass alle bis auf abzählbar viele reelle Zahlen transzendent sind.

Die Struktur der reellen Zahlen ist also komplizierter, als man meinen möchte, und die bislang so vertraute Dezimaldarstellung reeller Zahlen beginnt Fragen aufzuwerfen: Was heißt eigentlich „beliebige Folge von Nachkommastellen“? Welche derartigen Folgen existieren? Diese Fragen führen letztendlich zum Wunsch nach einer präzisen Konstruktion der reellen Zahlen, und es ist kein Zufall, dass die ersten expliziten Konstruktionen von $\mathbb{R}$ historisch mit der Entdeckung der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ zusammenfallen. Wir wollen diese Überlegungen aber an dieser Stelle nicht weiter verfolgen, sondern uns im folgenden Kapitel den Struktureigenschaften zuwenden, die für die Zwecke der Analysis gebraucht werden. Dabei werden wir eine algebraische Charakterisierung notieren, die ans Licht bringt, welches Ziel man bei einer Konstruktion eines mathematischen Kontinuums anstrebt. Die obigen Überlegungen zeigen dann, dass man dieses Ziel mit einer abzählbar unendlichen Menge notwendig verfehlt. Die Analysis ruht auf einer überabzählbaren Struktur.

Übungen

1.1.1 Die Entdeckung der alten Griechen: Irrationale Verhältnisse

Übung 1

- (a) Sei $s = \sqrt{2}$. Zeigen Sie, dass $\sqrt{s}$ irrational ist.
- (b) Zeigen Sie analog zum Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, dass $\sqrt{3}$ irrational ist. Formulieren Sie hierzu wieder explizit die in der Argumentation benötigten zahlentheoretischen Eigenschaften.
- (c) Zeigen Sie, dass die dritte Wurzel aus 4 irrational ist.

Übung 2

- (a) Zwei reelle Zahlen a und b mit $a > b > 0$ stehen im Verhältnis des *Goldenen Schnitts*, falls gilt:

$$(+)\ a/b = b/(a - b).$$

Zeigen Sie, dass a/b eindeutig bestimmt und irrational ist.

[Hinweis: Setzen Sie $x = a/b$ und lösen Sie die sich aus (+) ergebende quadratische Gleichung.]

- (b) Ein rechteckiges Papier mit Seitenlängen $a \geq b > 0$ erfülle die folgende Bedingung:

„Wird das Papier an der Seite a in der Mitte durchgeschnitten, so stehen die Seitenlängen der dadurch entstehenden kleineren Papiere im gleichen Verhältnis wie die Seitenlängen a und b des ursprünglichen Papiers.“

Zeigen Sie, dass durch diese Bedingung das Verhältnis a/b eindeutig festgelegt ist und bestimmen Sie dieses Verhältnis. Überprüfen Sie weiter ein Blatt Papier im Format DIN A4 auf dieses Verhältnis.

Übung 3

Seien $a_0, \dots, a_{k-1}$ ganze Zahlen, und sei x eine ganze Zahl mit

$$x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0.$$

Zeigen Sie, dass x ein Teiler von a_0 ist, d. h. es gibt ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $x d = a_0$.

Übung 4

Zeigen Sie, dass $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ irrational ist.

[Betrachten Sie das Polynom $x^4 - 10x^2 + 1$ und wenden Sie den Satz von Gauß an.]

1.1.2 Die Entdeckung von Cantor: Die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Übung 1

- (a) Seien M und N abzählbar unendliche Mengen. Zeigen Sie, dass $M \cup N$ abzählbar unendlich ist.
[Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Z}$.]
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{N}^2 = \{ (n, m) \mid n, m \in \mathbb{N} \}$ abzählbar ist.
[Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.]

Übung 2

Seien A, B, C Mengen derart, dass $A - B$ und $A - C$ endlich sind.
Zeigen Sie, dass $A - (B \cap C)$ endlich ist.

Übung 3

Zeigen Sie, dass es Teilmengen $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots, n \in \mathbb{N}$, von $\mathbb{N}$ gibt mit den Eigenschaften:

- (a) $\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ($= \{ k \mid \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \in A_n \}$),
(b) $A_n \cap A_m = \emptyset$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$.

Übung 4

Betrachten Sie den Beweis der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen, und definieren Sie statt b_n

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{n,n} = 0, \\ 0, & \text{falls } a_{n,n} \neq 0. \end{cases}$$

Setzen Sie $y^* = 0, c_0 c_1 c_2 \dots$. Geben Sie nun reelle Zahlen $x_0, x_1, x_2, \dots$ in Dezimaldarstellung an, für die $y^* = x_0$ gilt. Begründen Sie, warum dieses Phänomen für die Zahl $x^* = 0, b_0 b_1 b_2 \dots$ des Beweises nicht auftreten kann.

Übung 5

Zeigen Sie, dass die Menge

$$M = \{ (n_1, \dots, n_k) \mid k \in \mathbb{N}, n_i \in \mathbb{N} \text{ für alle } 1 \leq i \leq k \}$$

aller endlichen Tupel natürlicher Zahlen abzählbar ist.

Argumentieren Sie hiermit, dass (1) eine „Universalbibliothek“, die alle denkbaren Bücher enthält, abzählbar ist, und dass (2) die reellen Zahlen, deren Nachkommastellen mit Hilfe eines Computerprogramms berechnet werden können, eine abzählbare Menge bilden.

[Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis der Abzählbarkeit von $\mathbb{A}$.]

Übung 6

Betrachten Sie unendliche „Worte“ w , die aus den Zeichen a und b gebildet sind, etwa $w = ababaaabbbaa\dots$. Zeigen Sie, dass die Menge aller dieser unendlichen Worte nicht abzählbar ist.

Übung 7

Beweisen Sie die Übungen 1 (b) und 3, indem Sie Zahlen der Form $2^a \cdot 3^b$ bzw. $p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ betrachten, mit natürlichen Exponenten $a, b, a_1, \dots, a_k \geq 1$ und Primzahlen $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \dots$

Übung 8

Zeigen Sie, dass es keine Bijektion zwischen $\mathbb{R}$ und der Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gibt.

Erste Ergänzungen: Irrationale Verhältnisse in geometrischen Figuren

Im zehnten Buch der „Elemente“ des Euklid findet sich ein Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$, der sich in moderner Lesart wie folgt darstellen lässt:

Klassischer Beweis der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2

Wir nehmen an, dass $\sqrt{2} = n/m$ für natürliche Zahlen n und m gilt.
 Weiter nehmen wir an, dass der Bruch n/m gekürzt ist, sodass also n oder m ungerade ist. Es gilt $n^2 = 2 \cdot m^2$. Also ist n^2 und damit auch n selbst gerade.
 Dann ist aber n^2 durch 4 teilbar. Wegen $m^2 = n^2/2$ ist dann aber m^2 gerade.
 Also ist auch m gerade, Widerspruch.

Ergänzungsübung 1

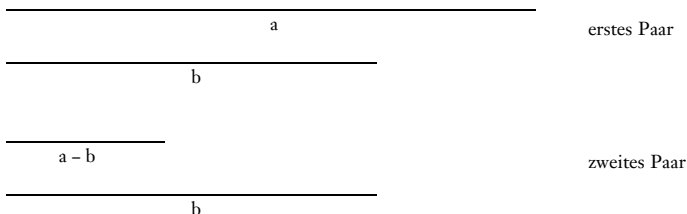
Vergleichen Sie diesen Beweis mit dem oben mit Hilfe des Zweifaktors einer Zahl geführten Beweis. Welche zahlentheoretischen Eigenschaften werden benutzt? Welche Verallgemeinerung lässt das Argument zu?
 Welche Analogien bestehen zum Beweis des Satzes von Gauß?

In unseren Beweisen der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 und des allgemeinen Satzes von Gauß haben wir arithmetische Eigenschaften benutzt, um zu zeigen, dass gewisse Zahlen nicht die Form n/m haben können. Im Folgenden wollen wir Verhältnisse, die in geometrischen Figuren auftreten, mit Hilfe rein geometrischer Argumentation als irrational erkennen. Der Überlieferung zufolge sind irrationale Verhältnisse sogar in dieser Weise von den Pythagoreern entdeckt worden.

Entscheidendes Hilfsmittel ist die *Wechselwegnahme* oder der *Euklidische Algorithmus*. Dieser Algorithmus arbeitet in jedem Schritt mit zwei positiven reellen Größen a und b und führt folgende Aktion durch:

„Ziehe die kleinere von der größeren Größe ab.“
(Iterationsvorschrift für den Euklidischen Algorithmus)

Ist $a < b$, so wird also a von b abgezogen, und die Anweisung hinterlässt dann die Größen a und $b - a$. Ist $b < a$, so wird das Paar b und $a - b$ erzeugt. Sind die beiden neuen Größen gleich, so stoppt der Algorithmus. Andernfalls wird die Anweisung für die beiden neuen Größen wiederholt.



Im Allgemeinen wird die kleinere Größe mehr als einmal in die größere hineinpassen und damit eine Zeit lang der „aktuelle Maßstab“ bleiben. Sobald der verbliebene Rest aber kleiner wird als der aktuelle Maßstab, wird dieser Rest zum „neuen Maßstab“, mit dem nun der alte Maßstab gemessen wird. Diese Überlegung erklärt die Bezeichnung „Wechselwegnahme“. In der Tat ist es interessant mitzuschreiben, wie oft der aktuelle Maßstab jeweils in die aktuell zu messende Größe hineinpasst.

Aus der Schule wird dem Leser vielleicht der Euklidische Algorithmus angewendet auf zwei natürliche Zahlen n und m bekannt sein. Er liefert den größten gemeinsamen Teiler von n und m . Für $n = 30$ und $m = 75$ lautet die Folge der produzierten Zahlenpaare zum Beispiel $(30, 75)$, $(30, 45)$, $(30, 15)$, $(15, 15)$, und 15 ist der größte gemeinsame Teiler von 30 und 75. Dies müssen wir für das Folgende aber gar nicht wissen. Entscheidend ist:

Satz (*nichtabbrechende Wechselwegnahme*)

Bricht die Wechselwegnahme für zwei positive reelle Zahlgrößen a und b nicht ab, so ist a/b irrational.

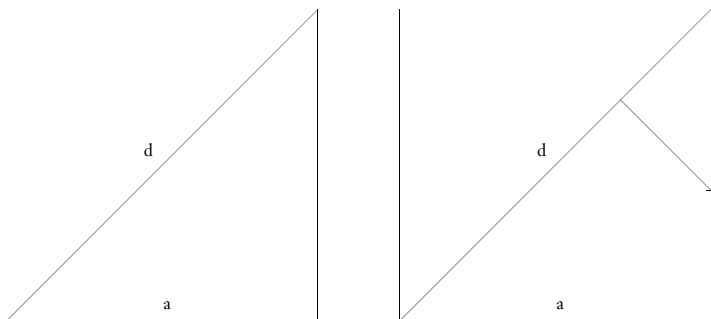
Ergänzungsübung 2

Beweisen Sie diesen Satz.

[Hinweis: Argumentieren Sie indirekt, d. h.: Ist a/b rational, so bricht das Verfahren ab.]

Es gilt auch die Umkehrung: Ist a/b irrational, so bricht die Wechselwegnahme nicht ab. Für unser Ziel genügt aber die Aussage des Satzes. Wir betrachten zwei Größen a und b einer geometrischen Figur, und argumentieren geometrisch, dass die Wechselwegnahme für diese Größen nicht abbrechen kann. Dies gelingt durch den Nachweis, dass die Wechselwegnahme ähnliche geometrische Figuren erzeugt und dadurch immer wieder die gleichen Messvorgänge produziert. Wir wollen diese Strategie am Quadrat und weiter dann am Pentagon durchführen.

Wir beginnen mit einem Quadrat mit Seitenlänge a und Diagonale d .

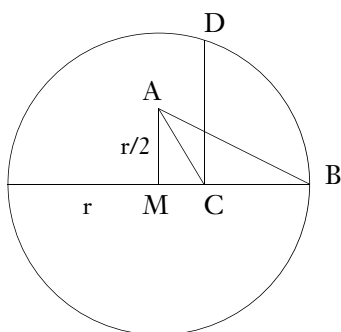


Ergänzungsübung 3

Zeigen Sie durch geometrische Argumentation, dass die Wechselwegnahme für das Paar a, d nicht abbricht.

[Hinweis: Betrachten und ergänzen Sie die Figur rechts im obigen Diagramm.]

Als zweites Beispiel betrachten wir ein regelmäßiges Fünfeck (*Pentagon*) der Seitenlänge a und den durch die Diagonalen der Länge d des Fünfecks erzeugten Fünfstern (*Pentagramm*). Hierzu konstruieren wir zunächst ein Pentagon mit Zirkel und Lineal wie folgt:

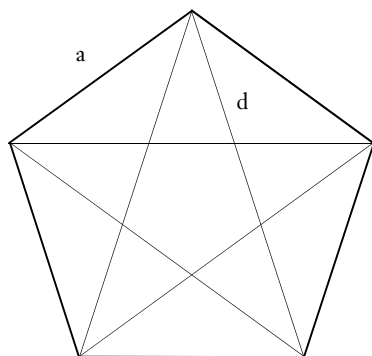


Wir zeichnen einen Kreis mit Radius r und Mittelpunkt M . Die halbe Mittelsenkrechte über M liefert den Punkt A , und die Winkelhalbierende des Winkels MAB den Punkt C . Schließlich erzeugt die Senkrechte über C den Punkt D . Die Strecke BD bildet nun die Seite eines in den Kreis eingeschriebenen Pentagons.

Ergänzungsübung 4

Beweisen Sie, dass BD ein Pentagon erzeugt.

Damit können wir also mit Zirkel und Lineal folgende Figur konstruieren. Hierbei sei a die Länge der Seiten des Pentagons und d die Länge der Seiten des zugehörigen Pentagramms, das durch die Verbindung je zweier Ecken des Pentagons entsteht.

*Ergänzungsübung 5*

Zeigen Sie durch geometrische Argumentation, dass die Wechselwegnahme für das Paar a, d nicht abbricht.

2. Struktureigenschaften der reellen Zahlen

Im Umgang mit den reellen Zahlen dominieren zwei Aspekte: Wir können mit den reellen Zahlen rechnen, und wir können reelle Zahlen miteinander vergleichen. In diesem Kapitel wollen wir die wichtigsten algebraischen und ordnungstheoretischen Eigenschaften der reellen Zahlen zusammenstellen und untersuchen.

Algebraische Eigenschaften

Die grundlegenden algebraischen Operationen auf den reellen Zahlen sind die Addition und die Multiplikation. Dabei gelten für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften:

- (K1) $x + (y + z) = (x + y) + z,$ *(Assoziativgesetz für die Addition)*
- (K2) $x + 0 = x,$ *(Neutralität der Null)*
- (K3) es gibt ein x' mit $x + x' = 0,$ *(Existenz additiver Inverser)*
- (K4) $x + y = y + x,$ *(Kommutativgesetz für die Addition)*
- (K5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$ *(Assoziativgesetz für die Multiplikation)*
- (K6) $x \cdot 1 = x,$ *(Neutralität der Eins)*
- (K7) $x \neq 0$ *impliziert* es gibt ein x' mit $x \cdot x' = 1,$ *(Existenz multiplikativer Inverser)*
- (K8) $x \cdot y = y \cdot x,$ *(Kommutativgesetz für die Multiplikation)*
- (K9) $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z),$ *(Distributivgesetz)*
- (K10) $0 \neq 1.$ *(Verschiedenheit der neutralen Elemente)*

In der Algebra nennt man eine Menge K , die mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$ ausgestattet ist und die obigen Eigenschaften (K1) – (K10) erfüllt, einen *Körper*. Die Eigenschaften (K1) – (K10) heißen auch die *Körperaxiome*. Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ bilden also einen Körper. Der Leser wird sehen, dass auch $\mathbb{Q}$ mit der Addition und der Multiplikation einen Körper bildet, nicht aber $\mathbb{Z}$. Eine nicht triviale Überprüfung zeigt zudem, dass auch die algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ einen Körper bilden. Später werden wir mit den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ einen weiteren Körper kennenlernen.

Die systematische Untersuchung des Körperbegriffs ist eine der Grundaufgaben der Algebra. Für unsere Zwecke genügt es, die obige Liste (K1) – (K10) als Essenz der für die rationalen und reellen Zahlen gültigen Rechengesetze anzusehen. In der Tat folgen aus diesen Eigenschaften alle vertrauten Regeln. Man kann mit ihrer Hilfe beispielsweise zeigen, warum „minus mal minus gleich plus“ gilt, und man kann begründen, warum man „durch 0 nicht teilen darf“. Weiter lassen sich die Rechenregeln für das Bruchrechnen und für die Exponentiation beweisen. Wir diskutieren derartige Folgerungen aus den Körperaxiomen hier lediglich exemplarisch, um die Idee der axiomatischen Beschreibung mathematischer Strukturen zu illustrieren.

Gilt $x + x' = 0$, so heißt x' ein *additives Inverses* von x . Ein additives Inverses von x ist aber eindeutig bestimmt: Gilt nämlich $x + x' = 0$ und $x + x'' = 0$, so ist

$$x' = x' + 0 = x' + (x + x'') = (x' + x) + x'' = 0 + x'' = x''.$$

Für das eindeutig bestimmte additiv inverse Element von x schreiben wir $-x$, und weiter schreiben wir dann $x - y$ statt $x + (-y)$ für alle x, y . Damit haben wir, nur auf die Körperaxiome gestützt, eine *Subtraktion* eingeführt.

Eine wichtige Folgerung ist die folgende *Kürzungsregel* für die Addition: Gilt $y + x = z + x$, so ist $y = z$, denn

$$y = y + 0 = y + (x - x) = (y + x) - x = (z + x) - x = z + (x - x) = z + 0 = z.$$

Analog schreiben wir x^{-1} für das eindeutig bestimmte multiplikative Inverse von $x \neq 0$, und weiter schreiben wir x/y statt $x \cdot y^{-1}$ für alle x und alle $y \neq 0$. Damit haben wir auf der Basis der Körperaxiome eine *Division* eingeführt. Einen Term x/y nennen wir wie üblich einen *Bruch* mit *Zähler* x und *Nenner* y .

Nach Definition gilt $x - x = 0$ für alle x und $x/x = 1$ für alle $x \neq 0$. Weiter gilt $-(-x) = x$ für alle x , denn $-(-x)$ ist per Definition das additive Inverse von $-x$, und dieses ist gleich x (da $-x + x = x - x = 0$). Völlig analog gilt $1/(1/x) = x$ für alle $x \neq 0$.

Warum spielt die Null nun eine Sonderrolle bei der Inversenbildung? Eine mögliche Antwort ist die folgende: Wäre z ein multiplikatives Inverses von 0 , so wäre $0 \cdot z = 1$. Wegen $0 + 0 = 0$ ist dann aber

$$1 = 0 \cdot z = (0 + 0) \cdot z = 0 \cdot z + 0 \cdot z = 1 + 1, \text{ also}$$

$$0 = 1$$

nach der Kürzungsregel, im Widerspruch zu (K10). Mit anderen Worten: Wollen wir, dass $0 + 0 = 0$, $0 \neq 1$ und das Distributivgesetz gelten, so kann die Null kein multiplikatives Inverses besitzen. Damit ist 0^{-1} nicht definiert, und weiter ist dann für alle x auch $x/0 = x \cdot 0^{-1}$ nicht definiert.

Diese Elementarexegese von Strukturaxiomen ist für den Anfänger erfahrungsgemäß keine leichte Übung, und das zugehörige Training wird traditionell auch eher innerhalb der „Linearen Algebra“ absolviert. Dennoch ist es überraschend, was wir mit relativ wenigen Zeilen erreicht haben. Mit der Subtraktion und der Division haben wir alle vier Grundrechenarten zur Verfügung, und das Distributivgesetz beleuchtet die Sonderrolle der Null bei der Division, ganz ohne Argumente der Form „ $1/0$ wäre unendlich groß“.

Wir führen nun noch einige Konventionen ein, die die Notation von Termen vereinfachen. Aus den Assoziativgesetzen folgt zunächst, dass wir Klammern weglassen können, etwa in $x + y + z$ oder in $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$. Weiter verabreden wir wie üblich, dass die Multiplikation stärker binden soll als die Addition, und dass wir in symbolischen Ausdrücken den Malpunkt oft auch weglassen. Damit ist z. B. $xy + z$ eine Kurzform von $(x \cdot y) + z$. Durch diese Konventionen fallen viele Klammern weg, und Terme werden kürzer und besser lesbar.

Iterierte Summen- und Produktbildungen notieren wir informell als $x_1 + \dots + x_n$ und $x_1 \cdot \dots \cdot x_n$. Daneben notieren wir diese Summen und Produkte in der Form

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \quad \text{bzw.} \quad \prod_{1 \leq i \leq n} x_i.$$

Dabei steht das große griechische Sigma für „Summe“ und das große griechische Pi für „Produkt“. Gleichwertige notationelle Varianten sind

$$\sum_{i=1}^n x_i, \quad \prod_{i=1}^n x_i, \quad \sum_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i, \quad \prod_{i \in \{1, \dots, n\}} x_i.$$

Der Leser wird darüber hinaus auch keine Schwierigkeiten haben, Summen wie zum Beispiel $\sum_{4 \leq i \leq 10, i \text{ gerade}} x_i$ zu verstehen.

Formal befriedigend kann man die iterierte Summe und das iterierte Produkt rekursiv wie folgt einführen:

$$\sum_{1 \leq i \leq 0} x_i = 0, \quad \sum_{1 \leq i \leq n+1} x_i = (\sum_{1 \leq i \leq n} x_i) + x_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\prod_{1 \leq i \leq 0} x_i = 1, \quad \prod_{1 \leq i \leq n+1} x_i = (\prod_{1 \leq i \leq n} x_i) \cdot x_{n+1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Konvention, dass die „leere Summe“ gleich Null und das „leere Produkt“ gleich Eins ist, ist an vielen Stellen nützlich.

Sind $x_{i,j}$ reelle Zahlen für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$, so gilt

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} x_{i,j} = \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{1 \leq i \leq n} x_{i,j},$$

da in beiden Summen dieselben Summanden auftauchen und wir aufgrund des Kommutativgesetzes beliebig umordnen dürfen. Allgemeiner dürfen endlich viele Summanden in beliebiger Reihenfolge aufsummiert werden. Später werden wir auch unendliche Summationen durchführen und sehen, dass im Unendlichen die Reihenfolge der Summation eine Rolle spielen kann.

Auch die Exponentiation kann rekursiv eingeführt werden. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir rekursiv

$$x^0 = 1, \quad x^{n+1} = x^n \cdot x \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $x^n = \prod_{1 \leq i \leq n} x$ (was man auch zur Definition von x^n verwenden könnte). Weiter sei $x^{-n} = 1/x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \neq 0$. Damit ist die Exponentiation x^a mit ganzzahligen Exponenten auf der Basis der Körperaxiome eingeführt, und es lassen sich die üblichen Rechenregeln beweisen. Später werden wir mit Hilfe genuin analytischer Überlegungen auch allgemeinere Exponenten zulassen. Hierzu genügen die Körperaxiome nicht mehr.

Ordnungstheoretische Eigenschaften

Die reellen Zahlen sind mit einer Ordnung $<$ ausgestattet, die es erlaubt, zwei reelle Zahlen miteinander zu vergleichen. Die Ordnung bringt die Menge $\mathbb{R}$ in die Form einer Linie, die ein „links und rechts“ oder ein „früher und später“ modellieren kann. Die wesentlichen, für alle reellen Zahlen x, y, z gültigen Ordnungseigenschaften sind dabei:

- (O1) $\text{non } (x < x)$, (Irreflexivität)
 (O2) $x < y$ und $y < z$ *impliziert* $x < z$, (Transitivität)
 (O3) $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$. (Vergleichbarkeit)

Eine Struktur $(M, <)$, die die Eigenschaften (O1) – (O3) erfüllt, nennt man eine *totale* oder *lineare Ordnung* (vom strikten Typ). Neben den reellen Zahlen bilden die mit den üblichen Kleiner-Relationen ausgestatteten Mengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ Beispiele für lineare Ordnungen.

Wir schreiben $x \leq y$, falls $x < y$ oder $x = y$ gilt. Aus dieser Definition ergeben sich die folgenden Eigenschaften, die wieder für alle x, y, z gelten:

- $x \leq x$, (Reflexivität)
 $x \leq y$ und $y \leq x$ *impliziert* $x = y$, (Antisymmetrie)
 $x \leq y$ und $y \leq z$ *impliziert* $x \leq z$, (Transitivität)
 $x \leq y$ oder $y \leq x$. (Vergleichbarkeit)

Mit Hilfe einer linearen Ordnung lassen sich wie üblich *Intervalle* definieren. Für alle x, y mit $x \leq y$ setzen wir:

- $[x, y] = \{z \mid x \leq z \leq y\}$, (abgeschlossenes Intervall von x bis y)
 $]x, y[= \{z \mid x < z < y\}$. (offenes Intervall von x bis y)

Analog sind die *halboffenen Intervalle* $[x, y[$ und $]x, y]$ definiert. Schließlich definieren wir auch noch die *uneigentlichen Intervalle* $[x, \infty[= \{z \mid x \leq z\}$ und $] - \infty, x] = \{z \mid z \leq x\}$, und analog die offenen Versionen, die x nicht enthalten.

Für $x \geq 0$ sei $|x| = x$, und für $x < 0$ sei $|x| = -x$. Wir nennen $|x|$ den (*Absolut-)* *Betrag* von x . Eigenschaften des Betrags besprechen wir in den Übungen.

Die Arithmetik und die Ordnung auf $\mathbb{R}$ sind zunächst zwei getrennte Welten. Die Brücke wird durch die beiden folgenden, für alle reellen Zahlen x, y, z gültigen Eigenschaften geschlagen:

- (A1) $x < y$ *impliziert* $x + z < y + z$,
 (A2) $0 < x, y$ *impliziert* $0 < x \cdot y$.

Wird ein Körper $(K, +, \cdot)$ mit einer linearen Ordnung $<$ ausgestattet, sodass (A1) und (A2) gelten, so heißt die Struktur $(K, +, \cdot, <)$ ein *angeordneter Körper*. Die Aussagen (A1) und (A2) heißen die *Anordnungsaxiome*.

Die reellen Zahlen bilden also einen angeordneten Körper. Dies gilt aber auch für die rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$, +, ·, <) und für die algebraischen Zahlen ($\mathbb{A}$, +, ·, <), und damit haben wir den Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{A}$ und $\mathbb{R}$ bei dieser algebraisch-ordnungstheoretischen Analyse noch nicht erfasst. Eine ordnungstheoretische Begriffsbildung, die dies leistet, wollen wir nun diskutieren. Wir beginnen mit einigen suggestiven Sprechweisen und Notationen.

Definition (*obere Schranke, untere Schranke*)

Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann heißt s eine *obere Schranke* von X , in Zeichen $X \leq s$, falls $x \leq s$ für alle $x \in X$ gilt. Analog heißt s eine *untere Schranke* von X , in Zeichen $s \leq X$, falls $s \leq x$ für alle $x \in X$ gilt.

Es gilt also z. B. $[0, 1] \leq 2$ und $0 \leq]0, 1[$. Weiter definieren wir:

Definition (*nach oben und unten beschränkt*)

Ein $X \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben (unten) beschränkt*, falls eine obere (untere) Schranke von X existiert. Zudem heißt X *beschränkt*, falls X nach oben und nach unten beschränkt ist.

Eine obere Schranke von X können wir solange verkleinern, bis sie die Menge X von rechts berührt. Analog können wir eine untere Schranke von X solange vergrößern, bis sie die Menge X von links berührt. Die formale Fassung dieser Anschauung ist für die Analysis von entscheidender Bedeutung:

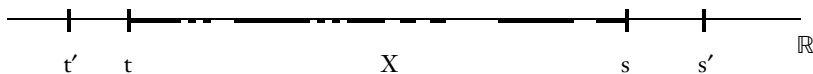
Definition (*Supremum, Infimum*)

Seien $X \subseteq \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann heißt s das *Supremum* von X , in Zeichen $s = \sup(X)$, falls gilt:

(Sup1) $X \leq s$, (Sup2) ist $s' \in \mathbb{R}$ mit $X \leq s'$, so gilt $s \leq s'$.

Analog heißt ein $t \in \mathbb{R}$ das *Infimum* von X , in Zeichen $t = \inf(X)$, falls gilt:

(Inf1) $t \leq X$, (Inf2) ist $t' \in \mathbb{R}$ mit $t' \leq X$, so gilt $t' \leq t$.



$$t' \leq X, \quad t = \inf(X), \quad s = \sup(X), \quad X \leq s'$$

Mit anderen Worten: Das Supremum einer Menge X reeller Zahlen ist die kleinste obere Schranke von X , und das Infimum von X ist die größte untere Schranke von X . Das Supremum und Infimum kann dabei der Menge X angehören oder nicht. So ist z. B. $\sup([0, 1[) = \sup([0, 1]) = 1 = \inf([1, 2[) = \inf([1, 2])$.

Die Begriffsbildungen „obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum“ können nicht nur für $\mathbb{R}$, sondern allgemein für eine durch (O1) – (O3) ge-

ordnete Struktur $(M, <)$ formuliert werden. Insbesondere gilt dies für die rationalen Zahlen. So gilt zum Beispiel $\inf(\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}) = 0$ in $\mathbb{Q}$. Dagegen zeigen unsere Überlegungen zur Irrationalität der Quadratwurzel aus 2, dass beschränkte Mengen in $\mathbb{Q}$ im Allgemeinen kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzen. Die Menge $X = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$ ist beschränkt in $\mathbb{Q}$, aber ihr Supremum existiert nicht in $\mathbb{Q}$. Die entscheidende Eigenschaft der reellen Ordnung, die sie von der rationalen Ordnung unterscheidet, ist nun in der Tat die Existenz von Suprema und Infima:

- (V) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum und ein Supremum. (Vollständigkeit)

Gilt (V) in einem angeordneten Körper $(K, +, \cdot, <)$, so heißt der Körper *vollständig angeordnet*. Die Aussage (V) heißt das *Vollständigkeitsaxiom*. Die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ bilden also einen vollständig angeordneten Körper.

In einem Aufbau des Zahlensystems werden heute üblicherweise die reellen Zahlen ausgehend von den rationalen Zahlen konstruiert, und das Ziel dieser Konstruktion ist gerade die Vollständigkeit der reellen Ordnung. Die Grundidee hierbei ist, die „Löcher“ der rationalen Zahlen mit neuen Objekten zu füllen und die neuen Objekte dann mit einer Arithmetik und Ordnung zu versehen, die die Arithmetik und Ordnung von $\mathbb{Q}$ erweitert. Dabei wird ein „Loch“ oder eine „Lücke“ von $\mathbb{Q}$ genau durch diejenigen beschränkten Teilmengen von $\mathbb{Q}$ markiert, die kein Supremum oder Infimum in $\mathbb{Q}$ besitzen, wie zum Beispiel die Menge $X = \{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$. Die Dezimaldarstellung der reellen Zahlen führt man dann erst nach der Konstruktion ein. Dadurch wird ein Begriff der reellen Zahlen erzeugt, der die von einer Darstellung unabhängigen Struktureigenschaften ins Zentrum rückt. Und in der Tat hat man alle wesentlichen Eigenschaften eingefangen, denn es lässt sich zeigen, dass die Konstruktion „bis auf die Namen der reellen Zahlen“ eindeutig ist: Ist $(K, +, \cdot, <)$ ein vollständig angeordneter Körper, so gibt es eine Bijektion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $(K, +, \cdot, <)$ in $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ übergeführt wird, wenn wir jedes $a \in K$ durch $f(a) \in \mathbb{R}$ ersetzen. Eine präzise Formulierung dieses Satzes verwendet den Isomorphiebegriff, den wir hier nicht weiter diskutieren wollen. Es genügt an dieser Stelle, wenn der Leser zur Kenntnis nimmt, dass die reellen Zahlen die im Wesentlichen eindeutige mit einer Addition, Multiplikation und Ordnung ausgestattete Menge sind, in der die üblichen Rechenregeln für $+$, $\cdot$ und $<$ gelten, und in der beschränkte nichtleere Teilmengen stets ein Supremum und ein Infimum besitzen.

Die Vollständigkeit der reellen Ordnung wird in der Analysis durchgehend benutzt. Als eine erste Anwendung zeigen wir:

Satz (*archimedische Anordnung der reellen Zahlen*)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ gilt:

- (a) Die Menge $\{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist unbeschränkt.
- (b) $\inf(\{x/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}) = 0$.

Beweis

zu (a): Sei $x > 0$, und sei $X = \{ nx \mid n \in \mathbb{N} \}$. *Annahme*, $s = \sup(X)$ existiert.

Dann ist $s - x$ keine obere Schranke von X , also existiert ein n^* mit $s - x < n^* x$. Dann ist aber $s < (n^* + 1)x$, *im Widerspruch* zu $(n^* + 1)x \in X$ und s obere Schranke von X . Also ist X unbeschränkt.

zu (b): Es genügt zu zeigen, dass für alle $x > 0$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 1$ existiert mit $x/n < \varepsilon$. Seien also $x > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach (a) ist

– $\{ n \varepsilon \mid n \geq 1 \}$ unbeschränkt, also gibt es ein $n \geq 1$ mit $x < n\varepsilon$, d.h. $x/n < \varepsilon$.

Der Satz zeigt, dass es keine *infinitesimalen Größen* in $\mathbb{R}$ gibt, d.h. Zahlen $x > 0$ mit $x < 1/n$ für alle natürlichen $n \geq 1$.

Ein angeordneter Körper, der die Aussage des Satzes erfüllt, heißt *archimedisch angeordnet*. Der Beweis zeigt, dass das Vollständigkeitsaxiom die archimedische Anordnung impliziert. Eine Folgerung der archimedischen Anordnung ist nun:

Korollar ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$)

Die rationalen Zahlen sind dicht in den reellen Zahlen, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gibt es ein $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.

Beweis

Ohne Einschränkung ist $0 < x < y$. Sei $\varepsilon = y - x$. Nach dem Satz gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, mit $1/n < \varepsilon$. Weiter gibt es nach dem Satz ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m/n > x$. Wir wählen zudem m kleinstmöglich, sodass $m/n > x$. Dann ist $(m - 1)/n \leq x$, also ist

$$m/n \leq x + 1/n < x + y - x = y.$$

– Also ist $q = m/n$ wie gewünscht.

Anschaulich lautet das Argument: Die ganzzahligen Vielfachen von $1/n$ überdecken die reelle Achse mit der Feinheit $1/n$. Damit fällt in jedes Intervall, das eine Länge größer als $1/n$ besitzt, ein derartiges Vielfaches. Wählen wir also n so groß, dass $1/n < y - x$ gilt, so liegt ein Vielfaches m/n zwischen x und y .

Angesichts der Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$ und der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ ist der Satz über die Dichtheit von $\mathbb{Q}$ vielleicht kontraintuitiv. Es ist aber kein Widerspruch festzustellen. Wir haben ein weiteres interessantes Phänomen des Unendlichen entdeckt.

Eine zweite wichtige Folgerung des Vollständigkeitsaxioms ist:

Satz (*Prinzip der Intervallschachtelung*)

Seien $I_n = [a_n, b_n]$ abgeschlossene Intervalle mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Weiter gelte $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$, d.h. es gelte

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_1 \leq b_0.$$

Sei $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in I_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \}$. Dann ist $I \neq \emptyset$.

Beweis

Sei $X = \{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Dann ist X nichtleer und es gilt $X \leq b_n$ für alle n .

Also existiert $s^* = \sup(X)$. Dann gilt $a_n \leq s^*$ für alle n . Wegen $X \leq b_n$ gilt weiter $s^* \leq b_n$ für alle n , denn s^* ist die kleinste obere Schranke von X .

– Also ist $a_n \leq s^* \leq b_n$ für alle n , d.h. es gilt $s^* \in I_n$ für alle n . Folglich ist $s^* \in I$.

Analog gilt $t^* \in I$ für $t^* = \inf(\{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \})$, und hieraus folgt leicht, dass

$$I = [s^*, t^*] = [\sup(\{ a_n \mid n \in \mathbb{N} \}), \inf(\{ b_n \mid n \in \mathbb{N} \})].$$

Wird die Länge $b_n - a_n$ der Intervalle I_n beliebig klein, so gilt $s^* = t^*$, und dann besteht I aus genau einem Punkt, d.h. es gilt $I = \{ s^* \} = \{ t^* \}$.

Die Axiome für die reellen Zahlen

Wir stellen die Axiome der reellen Zahlen noch einmal tabellarisch zusammen.

Die reellen Zahlen sind eine Struktur der Form $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ mit zwei ausgezeichneten Elementen $0 \in \mathbb{R}$ und $1 \in \mathbb{R}$ derart, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(K1) \quad x + (y + z) = (x + y) + z, \quad (\text{Assoziativgesetz für die Addition})$$

$$(K2) \quad x + 0 = x, \quad (\text{Neutralität der Null})$$

$$(K3) \quad \text{es gibt ein } x' \text{ mit } x + x' = 0, \quad (\text{Existenz additiver Inverser})$$

$$(K4) \quad x + y = y + x, \quad (\text{Kommutativgesetz für die Addition})$$

$$(K5) \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad (\text{Assoziativgesetz für die Multiplikation})$$

$$(K6) \quad x \cdot 1 = x, \quad (\text{Neutralität der Eins})$$

$$(K7) \quad x \neq 0 \text{ impliziert es gibt ein } x' \text{ mit } x \cdot x' = 1, \\ (\text{Existenz multiplikativer Inverser})$$

$$(K8) \quad x \cdot y = y \cdot x, \quad (\text{Kommutativgesetz für die Multiplikation})$$

$$(K9) \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \quad (\text{Distributivgesetz})$$

$$(K10) \quad 0 \neq 1, \quad (\text{Verschiedenheit der neutralen Elemente})$$

$$(O1) \quad \text{non } (x < x), \quad (\text{Irreflexivität})$$

$$(O2) \quad x < y \text{ und } y < z \text{ impliziert } x < z, \quad (\text{Transitivität})$$

$$(O3) \quad x < y \text{ oder } x = y \text{ oder } y < x, \quad (\text{Vergleichbarkeit})$$

$$(A1) \quad x < y \text{ impliziert } x + z < y + z, \quad (\text{erstes Anordnungsaxiom})$$

$$(A2) \quad 0 < x, y \text{ impliziert } 0 < x \cdot y, \quad (\text{zweites Anordnungsaxiom})$$

$$(V) \quad \text{ist } X \subseteq \mathbb{R} \text{ nichtleer und beschränkt, so existieren das Supremum und das Infimum von } X. \\ (\text{Vollständigkeitsaxiom})$$

Die ersten zehn Aussagen sind die Körperaxiome, die die vier Grundrechenarten und ihre Rechenregeln etablieren. Es folgen drei Aussagen, die $\mathbb{R}$ linear ordnen, und zwei Aussagen, die die Ordnung und die Arithmetik miteinander verbinden. Die letzte Aussage schließlich ist ein starkes Axiom, das $\mathbb{R}$ von den rationalen oder algebraischen Zahlen abhebt. Es impliziert, dass keine infinitesimalen Größen existieren und dass die rationalen Zahlen dicht liegen.

In einem Aufbau des Zahlensystems konstruiert man – zumeist von $\mathbb{Q}$ ausgehend – eine Struktur mit all diesen Eigenschaften und zeigt, dass diese Struktur bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Jede solche Struktur heißt dann ein *Körper der reellen Zahlen* und stellt ein mathematisches Modell für ein (lineares) Kontinuum dar.

Übungen

1.2.1 Algebraische Eigenschaften

Übung 1

- (a) Welche der Körperaxiome gelten in $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ und welche sind verletzt?
- (b) Formulieren und beweisen Sie eine Kürzungsregel für die Multiplikation in $\mathbb{R}$.
- (c) Ergänzen Sie die Pünktchen „...“ im folgenden Ausdruck und begründen Sie, warum die Gleichheit gilt:

$$(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i) (\sum_{1 \leq j \leq m} y_j) = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \dots$$

- (d) Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome, dass für alle x, y, z, w mit $y, w \neq 0$ gilt:

$$x/y + z/w = (xw + zy)/(yw), \quad x/y \cdot z/w = (xz)/(yw).$$

Übung 2

Zeigen Sie mit Hilfe der Körperaxiome die folgenden Aussagen:

- (a) Für alle x, y gilt: $xy = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.
- (b) „Minus mal Minus gleich Plus“, d.h. für alle x, y gilt $(-x)(-y) = xy$.

Übung 3

Ergänzen und begründen Sie wie in der Übung oben:

$$\prod_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq m} x_{i,j} = \sum \dots \prod_{1 \leq i \leq n} \dots$$

[Hinweis: In der Summe auf der rechten Seite tauchen Funktionen auf.]

Übung 4

Eine *Polynomfunktion* auf $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass reelle Zahlen $a_0, \dots, a_n$ existieren mit $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Eine *rationale Funktion* auf $\mathbb{R}$ ist eine Funktion $h: P \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass Polynomfunktionen f, g existieren mit $P = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$ und $h(x) = f(x)/g(x)$ für alle $x \in P$. Haben zudem f und g keine gemeinsamen Teilerpolynome (d.h. es gibt keine Polynome k, f_1, g_1 mit $f(x) = k(x) f_1(x)$, $g(x) = k(x) g_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, k nicht konstant), so heißt h *gekürzt* oder eine rationale Funktion mit *vollständigem Definitionsbereich*.

Zeigen Sie, dass $K = \{h \mid h \text{ ist eine gekürzte rationale Funktion}\}$ ein Körper ist, wobei $f_1/g_1 + f_2/g_2$ und $f_1/g_1 \cdot f_2/g_2$ als die Kürzungen der rationalen Funktionen $(f_1 g_2 + f_2 g_1)/(g_1 g_2)$ bzw. $(f_1 f_2)/(g_1 g_2)$ definiert werden.

1.2.2 Ordnungstheoretische Eigenschaften

Übung 1

Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie für alle $x, y \in K$:

- (a) $x^2 \geq 0$.
- (b) Ist $x \leq 0$ und $y \geq 0$, so ist $xy \leq 0$.

Übung 2

Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie für alle $x, y, x_1, \dots, x_n \in K$:

- (a) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
- (b) $|\sum_{1 \leq i \leq n} x_i| \leq \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|$,
- (c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$,
- (d) $||x| - |y|| \leq |x + y|$,
- (e) $|x + y| + |x - y| \geq |x| + |y|$.
- (f) $|xy| = |x| \cdot |y|$.

Übung 3

Sei K ein angeordneter Körper. Zeigen Sie für alle $x, y \in K$ mit $x, y \neq 0$:

$$|x/y + y/x| \geq 2 \quad (\text{mit } 2 = 1 + 1).$$

Übung 4

Sei K ein Körper, und sei $M \subseteq K$ derart, dass gilt:

- (a) Jedes $x \in K$ ist Element genau einer der drei Mengen M , $\{0\}$ und $\{-x \mid x \in M\}$.
- (b) Für alle $x, y \in M$ gilt $x + y \in M$ und $x \cdot y \in M$.

Für alle $x, y \in K$ sei $x < y$, falls ein $z \in M$ existiert mit $x + z = y$. Zeigen Sie, dass K dadurch zu einem angeordneten Körper mit $M = \{x \in K \mid x > 0\}$ wird.

Übung 5

Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gelte $x \leq 1/n$. Zeigen Sie, dass $x = 0$.

Übung 6

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Weiter sei $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von X . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $s = \sup(X)$.
- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ existiert ein $x \in X$ mit $s - 1/n \leq x$.

Übung 7

Sei $X \neq \emptyset$ eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, und sei $s^* = \sup(X)$.

- Sei $X + 1 = \{x + 1 \mid x \in X\}$. Zeigen Sie, dass $\sup(X + 1) = s^* + 1$.
- Sei $Y = \{y \in \mathbb{R} \mid X \leq y\}$. Zeigen Sie, dass $s^* = \inf(Y)$. Begründen Sie weiter, warum das Vollständigkeitsaxiom auch oft so formuliert wird: „Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge besitzt ein Supremum.“
- Sei $X \neq \{s^*\}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\sup(X - \{s^*\}) = s^*$.
- Zeigen Sie, dass ein abzählbares $Y \subseteq X$ existiert mit $\sup(Y) = s^*$.

Übung 8

Für alle $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ seien

$$X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}, \quad XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Zeigen Sie für alle nichtleeren und nach oben beschränkten $X, Y \subseteq \mathbb{R}$:

- $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$,
- $\sup(XY) = \sup(X) \cdot \sup(Y)$, falls $x, y \geq 0$ für alle $x \in X$ und $y \in Y$.

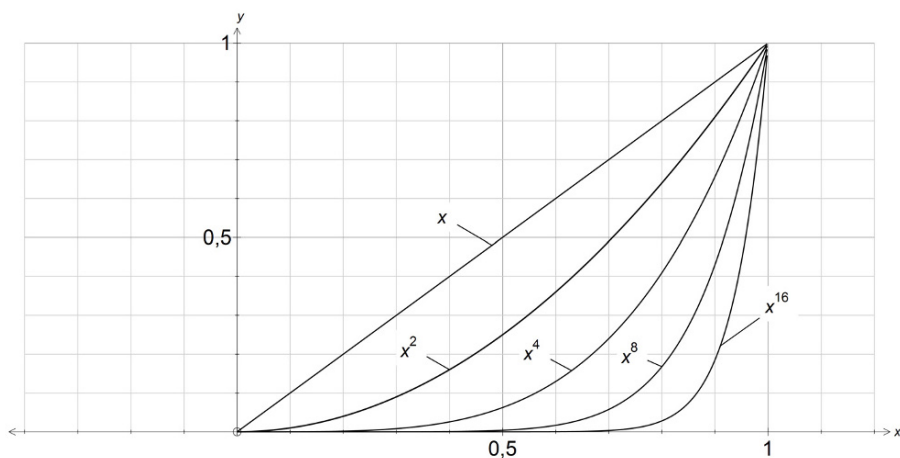
Übung 9

Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (\text{Bernoulli-Ungleichung})$$

Folgern Sie hieraus:

- Für alle $x \in]1, \infty[$ und alle $y \geq 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n > y$.
- Für alle $x \in]0, 1[$ und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n < \varepsilon$.



die Potenzfunktionen x, x^2, x^4, x^8 und x^{16} in $[0, 1]$

Übung 10

Man kann zeigen, dass die algebraischen Zahlen einen Körper bilden. Dabei ist unter anderem zu zeigen:

- (i) Ist x algebraisch, so ist auch $-x$ algebraisch.
- (ii) Ist $x \neq 0$ algebraisch, so ist auch $1/x$ algebraisch.

Beweisen Sie die Aussagen (i) und (ii). Beobachten Sie, dass alle anderen Körperaxiome automatisch gelten (da sie für $\mathbb{R}$ gelten). Warum haben wir dennoch noch nicht gezeigt, dass $(\mathbb{A}, +, \cdot)$ einen Körper bildet? Was ist noch zu zeigen?

Übung 11

Für alle $k, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ sei

$$B(n, k) = \binom{n}{k} = n! / (k! (n - k)!)$$

der Binomialkoeffizient „ n über k “, wobei wie üblich $n! = \prod_{1 \leq k \leq n} k$ die Fakultät von n ist. Verwenden Sie, dass $B(n, k)$ die Anzahl aller 0-1-Tupel der Länge n ist, die genau k Einsen und $n - k$ Nullen enthalten, und beweisen Sie hiermit, dass in einem Körper für alle x, y und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} B(n, k) x^{n-k} y^k.$$

Übung 12

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ gilt:

- (a) $\sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0,$
- (b) $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}.$

Übung 13

Sei K der Körper der gekürzten rationalen Funktionen aus der Übung oben. Ein $h \in K$ heißt *positiv*, falls h nicht das Nullpolynom ist und es Polynomfunktionen f, g gibt, sodass $h = f/g$ gekürzt ist und die Koeffizienten der höchsten Potenzen in f und g dasselbe Vorzeichen besitzen. Wir definieren für alle $h_1, h_2 \in K$:

$h_1 < h_2$, falls „es gibt ein positives $h \in K$ mit $h_1 + h = h_2$ “.

Zeigen Sie, dass K dadurch zu einem angeordneten Körper wird. Zeigen Sie weiter, dass das Archimedische Axiom nicht gilt.

Zweite Ergänzungen: Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, I

Wir wollen nun noch einen Weg zur Einführung der vertrauten Dezimaldarstellung reeller Zahlen auf der Grundlage unserer axiomatischen Beschreibung vorstellen. Dieser Weg beginnt bei den endlichen Dezimalbrüchen.

Endliche Dezimaldarstellungen

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_k \in \{0, \dots, 9\}$ für ein $k \geq 1$. Dann nennen wir den Ausdruck $n, a_1 \dots a_k$ einen k -stelligen *Dezimalbruch* mit den *Dezimal-* oder *Nachkommaziffern* $a_1, \dots, a_k$. Jedem Dezimalbruch $n, a_1 \dots a_k$ ordnen wir eine rationale Zahl zu, die wir ebenfalls mit $n, a_1 \dots a_k$ bezeichnen. Wir setzen hierzu:

$$n, a_1 \dots a_k = n + a_1/10 + \dots + a_k/10^k = n + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i/10^i.$$

Gilt $x = \pm n, a_1 \dots a_k$ für eine reelle Zahl x , so heißt $\pm n, a_1 \dots a_k$ eine (*endliche*) *Dezimaldarstellung* oder *Dezimalbruchentwicklung* von x .

In konkreten Darstellungen wird man die natürliche Zahl n ebenfalls im Dezimalsystem angeben, d.h. man schreibt $n = \sum_{m \geq j \geq 0} d_j 10^j$ für gewisse eindeutig bestimmte $0 \leq d_j \leq 9$, $d_m \neq 0$ für $n \neq 0$, und erhält dann die Dezimalschreibweise

$$d_m \dots d_0, a_1 \dots a_k = \sum_{m \geq j \geq 0} d_j 10^j + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i/10^i.$$

Oft wird statt des trennenden Kommas auch ein Punkt verwendet. Dies ist insbesondere dann nützlich, wenn Dezimalbrüche in einer Menge auftauchen, etwa in $\{0.2, 1.45, 3.15\}$. Alternativ kann man hier $\{0,2; 1,45; 3,15\}$ schreiben.

Unendliche Dezimaldarstellungen

Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots \in \{0, \dots, 9\}$. Dann nennen wir den Ausdruck $n, a_1 a_2 \dots$ einen (*unendlichen*) *Dezimalbruch* mit den *Dezimal-* oder *Nachkommaziffern* $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$. Wir wollen wieder jedem unendlichen Dezimalbruch $n, a_1 a_2 \dots$ eine eindeutig bestimmte reelle Zahl x zuordnen, die wir erneut mit $n, a_1 a_2 \dots$ bezeichnen werden. Hierzu beobachten wir:

Ergänzungsübung 1

Zeigen Sie für alle $k \geq 1$: $n \leq n, a_1 \dots a_k \leq n, a_1 \dots a_{k+1} \leq n + 1$.

Die Menge $\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\}$ ist also beschränkt und besitzt aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ also ein Supremum. Damit können wir für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, a_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$ definieren:

$$n, a_1 a_2 \dots = \sup(\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\}).$$

Gilt $x = \pm n, a_1 a_2 \dots$ für ein $x \in \mathbb{R}$, so nennen wir $\pm n, a_1 a_2 \dots$ eine (*unendliche*) *Dezimaldarstellung* oder *Dezimalbruchentwicklung* der reellen Zahl x . Weiter heißt $n, a_1 \dots a_k$ die k -te (*kanonische*) *Näherung* oder *Trunkierung* von $n, a_1 a_2 \dots$.

Als nächstes wollen wir zeigen, dass jede Zahl x wenigstens eine Dezimaldarstellung besitzt. Sei hierzu $x \geq 0$ eine reelle Zahl. Weiter sei n die größte natürliche Zahl, die kleinergleich x ist. Wir definieren nun rekursiv natürliche Zahlen a_k für alle $k \geq 1$ durch:

$a_1 =$ „das größte $a \in \{0, \dots, 9\}$ mit $n, a \leq x$ “,

$a_{k+1} =$ „das größte $a \in \{0, \dots, 9\}$ mit $n, a_1 \dots a_k a \leq x$ “.

Die Idee ist, dass jeder Dezimalbruch $n, a_1 \dots a_k$ die im Rahmen der k -stelligen Dezimalbrüche bestmögliche Annäherung von unten an die reelle Zahl x ist. Wie erhofft klappt zwischen allen endlichen Approximationen und x dann keine Lücke:

Ergänzungsübung 2

Zeigen Sie, dass $x = \sup(\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\})$.

[Sei $x_k = n, a_1 \dots a_k$ für alle $k \geq 1$. Dann gilt $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq \dots \leq x$. Weiter gilt $x - x_k \leq 10^{-k}$ für alle $k \geq 1$ nach Konstruktion. Zudem ist $\inf(\{10^{-k} \mid k \geq 1\}) = 0$.]

Damit haben wir bewiesen, dass jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Dezimaldarstellung der Form

$$x = \pm n, a_1 a_2 \dots a_k \dots$$

besitzt. Dabei haben wir die archimedische Anordnung der reellen Zahlen benutzt, also eine Folgerung des Vollständigkeitsaxioms.

Die Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl ist nicht immer eindeutig, denn es gilt z. B.

$$1,0000\dots = 1 = \sup(\{0,9, 0,99, 0,999, \dots\}) = 0,999\dots,$$

$$0,2100\dots = 0,21 = \sup(\{0,2, 0,209, 0,2099, 0,20999, \dots\}) = 0,20999\dots,$$

wobei die zweiten Gleichungen aus der archimedischen Anordnung folgen und die dritten Gleichungen nach Definition der unendlichen Dezimalbrüche gelten.

Das Phänomen der Nichteindeutigkeit lässt sich durch eine geometrische Interpretation der Dezimalbruchentwicklung, die ganz ohne Rechnung auskommt, weiter beleuchten:

Ergänzungsübung 3

Interpretieren Sie die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl $x \in [0, 1]$, indem Sie x durch wiederholte gleichmäßige 10-Teilung abgeschlossener Intervalle immer genauer lokalisieren. Fertigen Sie hierzu eine geeignete Skizze an. Erklären Sie anhand der Skizze, warum es zu nichteindeutigen Darstellungen kommt, und identifizieren Sie die entsprechenden Punkte.

[Trifft x auf einen der Unterteilungspunkte, so können wir x entweder im linken oder im rechten angrenzenden Intervall lokalisieren, und erhalten dadurch zwei verschiedene Darstellungen.]

b-adische Darstellungen

Allgemeiner kann man statt der Basis 10 eine beliebige natürliche Basis $b \geq 2$ festlegen. Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \dots, a_k \in \{0, \dots, b-1\}$ definiert man zunächst die endlichen b-adischen Brüche durch

$$n, a_1 \dots a_k = n + a_1/b + a_2/b^2 + \dots + a_k/b^k = n + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i/b^i.$$

Wie oben definiert man nun die unendlichen *b-adischen Brüche* $n, a_1 a_2 \dots$ via

$$n, a_1 a_2 \dots = \sup(\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\}).$$

Im Fall $b = 2$ spricht man auch von *Dualdarstellungen* und von *dyadischen Brüchen*.

Zur Unterscheidung und Spezifizierung der verwendeten Basis b kann man Notationen wie $[n, a_1 \dots a_k]_{10}$ (für $b = 10$) oder $[0, 10101]_3$ (für $b = 3$) benutzen.

Diese Ausführungen mögen an dieser Stelle genügen. Sobald wir unendliche Reihen zur Verfügung haben, werden wir auf die unendlichen Dezimaldarstellungen noch einmal zurückkommen. Es ist dann zum Beispiel leicht zu sehen, dass die rationalen Zahlen durch periodische Dezimaldarstellungen charakterisiert sind.

Von den Dezimaldarstellungen zu den Struktureigenschaften

Wir haben gesehen, wie wir die Dezimaldarstellung reeller Zahlen aus den Axiomen für die reellen Zahlen gewinnen können. Umgekehrt ist es instruktiv, sich die wesentlichen Struktureigenschaften der reellen Zahlen mit Hilfe einer nicht weiter hinterfragten Dezimaldarstellung – die ja zweifellos eine Stütze des Vorwissens darstellt – zu begründen. So kann man zum Beispiel mit Hilfe der Dezimaldarstellung leicht sehen, dass die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen:

Ergänzungsübung 4

Zeigen Sie mit Hilfe von Dezimaldarstellungen, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, und dass also $\mathbb{R}$ archimedisch angeordnet ist.

[Ist $0 < x < y$ und $y = n, a_1 a_2 \dots a_i \dots$, so ist y das Supremum der rationalen Zahlen $n, a_1 \dots a_k$, $k \geq 1$.]

Stärker lässt sich auch das Vollständigkeitsaxiom mit Hilfe von Dezimaldarstellungen beweisen:

Ergänzungsübung 5

Zeigen Sie mit Hilfe von Dezimaldarstellungen, dass jede beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum besitzt.

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jede nach nichtleere Menge X ein Infimum besitzt. Minimieren Sie hierzu iteriert die Nachkommastellen der Zahlen in X und gewinnen Sie so das Infimum von X in Dezimaldarstellung. Argumentieren Sie anschließend, dass Infima und Suprema für alle beschränkten nichtleeren Teilmengen existieren.]

Vollständigkeit und Überabzählbarkeit

Schließlich wollen wir nun noch zeigen, wie wir ein Ergebnis, das wir mit Hilfe der Dezimaldarstellung bewiesen haben, auch allein mit Hilfe der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen ohne jede Darstellungstheorie erhalten können: Das Vollständigkeitsaxiom impliziert überraschend direkt, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind. Ein einfacher Beweis hierzu verwendet das Prinzip der Intervallschachtelung:

Ergänzungsübung 6

Beweisen Sie die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen mit Hilfe des Prinzips der Intervallschachtelung.

[Hinweis: Fixieren Sie reelle Zahlen $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots, n \in \mathbb{N}$. Teilen Sie das Intervall $[0, 1]$ wiederholt in jeweils drei abgeschlossene Teilintervalle und weichen Sie dabei schrittweise den Zahlen $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ aus.]

3. Komplexe Zahlen

Wir führen in diesem Kapitel den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ein, der die reellen Zahlen erweitert und sich durch die universelle Lösbarkeit algebraischer Gleichungen auszeichnet. Obwohl die komplexe Analysis – die sog. Funktionentheorie – in der Regel erst nach und nicht parallel zur reellen Analysis erlernt wird, ist es nützlich, wenn die komplexen Zahlen möglichst früh zur Verfügung stehen. So werden wir zum Beispiel die Exponentialfunktion für komplexe Zahlen einführen und dadurch viele reelle Eigenschaften einfach beweisen können.

Eine Multiplikation für die Ebene

Mit dem vollständig angeordneten Körper der reellen Zahlen können wir ein Kontinuum modellieren. Aus algebraischer Sicht haben die reellen Zahlen aber eine bedauerliche Schwäche: Viele algebraische Gleichungen $a_k x^k + \dots + a_0 = 0$ besitzen keine Lösung in $\mathbb{R}$. Ein Beispiel ist $x^2 + 1 = 0$. Die beiden formalen Lösungen dieser Gleichung wären

$$x_1 = \sqrt{-1} \quad \text{und} \quad x_2 = -\sqrt{-1}.$$

In einem angeordneten Körper ist aber, wie wir in den Übungen gesehen haben, das Quadrat einer Zahl immer größergleich Null, und damit kann es in einem solchen Körper kein x geben mit $x^2 = -1$. Mit anderen Worten: Negative Zahlen besitzen in einem angeordneten Körper keine Quadratwurzel.

Es zeigt sich aber, dass man mit den Wurzeln negativer Zahlen gut rechnen kann. Setzen wir experimentell

$$i = \sqrt{-1}, \quad (\text{imaginäre Einheit})$$

so erhalten wir unter Anwendung der üblichen Rechenregeln:

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad \dots, \quad i^{-1} = -i, \quad i^{-2} = -1, \quad i^{-3} = i, \quad i^{-4} = 1, \quad \dots$$

$$(i+1)^2 = -1 + 2i + 1 = 2i, \quad (i-1)^2 = -1 - 2i + 1 = -2i,$$

$$(i+1)(i-1) = i^2 - i + i - 1 = -1 - 1 = -2.$$

Für die Identität „ $i^{-1} = -i$ “ benutzen wir nur, dass i^{-1} multiplikativ invers zu i sein soll, d.h. es gilt $i \cdot i^{-1} = 1$. Aber $i \cdot (-i) = -(i \cdot i) = -(-1) = 1$.

Wir können nun fragen: Ist der „Umweg über das Imaginäre“ eine nützliche Methode, um reelle Funktionen zu untersuchen, etwa die Nullstellen von Poly-

nomen? Und vorsichtiger: Erzeugt eine Rechnung, die mit reellen Zahlen startet und endet, aber die „imaginäre Größe“ i zulässt, immer korrekte Ergebnisse? Wie genau lauten die Regeln eines Kalküls mit $i = \sqrt{-1}$? Dass es hier der Sorgfalt bedarf, zeigt schon die folgende einfache Rechnung:

$$2 = \sqrt{(-2) \cdot (-2)} = i\sqrt{2} \cdot i\sqrt{2} = i^2 \cdot 2 = -2.$$

Ein korrekter Kalkül ist aber in der Tat möglich, und es zeigt sich, dass eine sehr reiche mathematische Körperstruktur vorliegt, die die reelle Analysis beleuchtet und für sich genommen eine genauere Untersuchung verdient.

Beim Rechnen mit der imaginären Einheit i tauchen Terme der Form $ai^n + bi^m$ auf, mit reellen Zahlen a, b und ganzen Zahlen n, m . Aufgrund der oben berechneten Potenzen von i ist jeder solche Term aber von der Form $x + iy$, und das Produkt zweier Terme dieser Form ist wieder von dieser Form:

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

Diese Überlegung motiviert, eine Größe $x + iy$ als Paar (x, y) der reellen Zahlen x und y zu betrachten und auf der Menge $\mathbb{R}^2$ aller dieser Paare eine Addition und eine Multiplikation zu definieren. Wegen $i = 0 + i1$ ist dann $i = (0, 1)$. Die Zahlen $x + iy$ erhalten so eine klare geometrische Interpretation als Punkte oder Vektoren der Ebene. In der Tat lässt sich dieser Ansatz leicht formal durchführen, und er liefert eine wohlbegründete Theorie der komplexen Zahlen, die das Wort „imaginär“ nur noch aus traditionellen Gründen verwendet. Wir definieren:

Definition (*komplexe Zahlen*)

Sei $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Jedes Element $z = (x, y)$ von $\mathbb{C}$ heißt eine *komplexe Zahl*.

Für alle komplexen Zahlen $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ setzen wir:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (\text{komplexe Addition})$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2). \quad (\text{komplexe Multiplikation})$$

Auf der rechten Seite der beiden Definitionen wird dabei die reelle Addition und Multiplikation verwendet. Die komplexe Addition ist damit die übliche Vektoraddition in der Ebene. Dagegen ist die Form der komplexen Multiplikation neuartig und an dieser Stelle nur durch obige formale Berechnung des Produkts $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ motiviert. Eine sehr sympathische geometrische Interpretation der Multiplikation werden wir in den Ergänzungen kennenlernen.

Die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ liefert in der Tat einen Körper:

Satz (*der Körper der komplexen Zahlen*)

Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bilden einen Körper mit additiv neutralem Element $0 = (0, 0)$ und multiplikativ neutralem Element $1 = (1, 0)$.

Für alle $(x, y) \in \mathbb{C}$ ist $(-x, -y)$ additiv invers zu (x, y) , und für alle $(x, y) \in \mathbb{C}$ mit $(x, y) \neq 0$ ist $(x/w, -y/w)$ multiplikativ invers zu (x, y) , wobei $w = x^2 + y^2$.

Der Nachweis der Körperaxiome sei dem Leser zur Übung überlassen.

Beim Beweis des Satzes fällt auf, dass die Körperaxiome (K1) – (K4) für die Addition auch für die Vektoraddition im $\mathbb{R}^n$ für ein beliebiges $n \geq 1$ gelten. Es stellt sich dann die Frage, ob man nicht auch im $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, usw. eine Multiplikation so erklären kann, dass ein Körper entsteht. Es zeigt sich aber, dass dies nicht möglich ist. Es gibt noch einigermaßen „gute“ Multiplikationen für den $\mathbb{R}^4$ und den $\mathbb{R}^8$, die zu den *Quaternionen* und den *Oktaven* führen. Körper entstehen dadurch aber nicht mehr.

Der Körper $\mathbb{C}$ lässt sich nicht mehr anordnen, da ja $i^2 = -1 < 0$ gelten würde, was mit den Anordnungsaxiomen nicht verträglich ist. Dem Verlust der Anordnenbarkeit steht nun aber die Lösbarkeit algebraischer Gleichungen gegenüber, die nichts mehr zu wünschen übrig lässt. Es gilt:

Satz (*Fundamentalsatz der Algebra*)

Sei $a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0 = 0$ eine algebraische Gleichung mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$, $k \geq 1$. Dann gibt es $w_1, \dots, w_k \in \mathbb{C}$ mit

$$a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0 = a_k (z - w_1) \cdot (z - w_2) \cdot \dots \cdot (z - w_k),$$

d.h. die Gleichung hat genau die komplexen Lösungen $w_1, \dots, w_k$.

Die ersten vollständigen Beweise dieses Satzes wurden Ende des 18. Jahrhunderts von Gauß und Laplace geführt. Alle bekannten Beweise benutzen Methoden, die über eine rein algebraische Argumentation hinausgehen.

Wir wollen die komplexen Zahlen nun weiter untersuchen. Dabei kommen wir zunächst ohne Wurzeln für komplexe Zahlen aus. Obige Berechnung „ $2 = -2$ “ hat ja gezeigt, dass wir Wurzeln vorsichtig verwenden müssen. Wir können aber die entscheidende Größe i einfach so definieren:

Definition (*imaginäre Einheit*)

Wir setzen $i = (0, 1)$. Die komplexe Zahl i heißt die *imaginäre Einheit*.

Wir können die reellen Zahlen als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen, indem wir jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$ identifizieren. Diese Identifikation ist mit der Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ verträglich, da $(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0)$ und weiter $(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$ gilt. Damit haben wir also unser Zahlensystem erneut um eine Stufe erweitert und $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ erreicht.

Für alle reellen Zahlen x gilt

$$xi = (x, 0)(0, 1) = (0, x).$$

Allgemeiner gilt für alle komplexen Zahlen $z = (x, y)$:

$$zi = (x, y)(0, 1) = (-y, x),$$

was geometrisch der Drehung des Vektors (x, y) um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn entspricht.

Als nächstes führen wir zwei ebenso einfache wie nützliche reellwertige Funktionen auf den komplexen Zahlen ein:

Definition (*Real- und Imaginärteil, rein imaginär*)

Für alle komplexen Zahlen $z = (x, y)$ setzen wir:

$$\operatorname{Re}(z) = x, \quad \operatorname{Im}(z) = y.$$

Die reelle Zahl $\operatorname{Re}(z)$ heißt der *Realteil* von z , und die reelle Zahl $\operatorname{Im}(z)$ der *Imaginärteil* von z . Eine komplexe Zahl z heißt *rein imaginär*, falls $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z = (\operatorname{Re}(z), 0) + (0, \operatorname{Im}(z)) = (\operatorname{Re}(z), 0) + i(0, \operatorname{Im}(z)) = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z),$$

und damit haben wir die ausgezeichnete Rolle der imaginären Einheit vor Augen: Das Rechnen mit komplexen Größen kann auf das Rechnen mit reellen Größen und i zurückgeführt werden.

Eine häufig benutzte komplexwertige Funktion auf $\mathbb{C}$ ist:

Definition (*komplexe Konjugation*)

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ setzen wir:

$$\bar{z} = \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z).$$

Die komplexe Zahl $\bar{z}$ heißt die *Konjugierte* von z .

Geometrisch beschreibt die komplexe Konjugation die Spiegelung des Vektors z an der x -Achse.

Auch im Komplexen können wir mit Hilfe der reellen Quadratwurzel eine Betragsfunktion definieren:

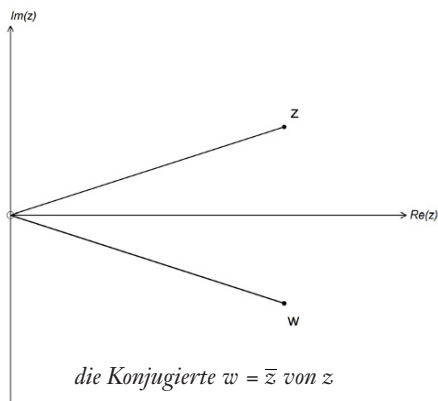
Definition (*Betrag einer komplexen Zahl*)

Für jede komplexe Zahl z sei $|z| = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$. Die reelle Zahl $|z|$ heißt der *Betrag* von z .

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = (x, y)$ ist also die euklidische Länge des Vektors (x, y) . Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| = |(x, 0)|$, d.h. die komplexe Betragsfunktion setzt die reelle Betragsfunktion fort. Für die komplexe Betragsfunktion gelten wieder die üblichen Eigenschaften. So gilt etwa für alle $z, w \in \mathbb{C}$ die Dreiecksungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$ und die Produktregel $|zw| = |z| |w|$. Leicht zu sehen ist weiter, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ der folgende Zusammenhang zwischen Betrag und Konjugation besteht:

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}.$$

Diese und weitere Eigenschaften der eingeführten Funktionen diskutieren wir in den Übungen.



Die Lösungen einfacher algebraischer Gleichungen

Ist K ein Körper und sind $a_0, a_1, \dots, a_k \in K$ mit $a_k \neq 0$, so heißt

$$(\#) \quad a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

eine *algebraische Gleichung* in K vom *Grad* k in der *Unbestimmten* z . Die Körperelemente $a_0, \dots, a_k$ heißen die *Koeffizienten* der Gleichung und a_k ihr *Leitkoeffizient*. Definieren wir für alle $z \in K$

$$P(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0,$$

so heißt die Funktion $P : K \rightarrow K$ eine *Polynomfunktion* oder kurz ein *Polynom* über K vom *Grad* k mit *Koeffizienten* $a_0, \dots, a_k$. Ein $z \in K$ heißt eine *Nullstelle* von P , falls $P(z) = 0$ gilt. Eine algebraische Gleichung heißt *lösbar*, falls ihr zugeordnetes Polynom eine Nullstelle besitzt, und jede solche Nullstelle heißt dann eine *Lösung* der Gleichung. Das Lösen von algebraischen Gleichungen ist also äquivalent mit der Bestimmung von Nullstellen von Polynomfunktionen.

Abspalten von Nullstellen

Ist w eine Lösung der Gleichung $(\#)$, so können wir aus rein algebraischen Gründen unser Lösungsproblem um einen Grad reduzieren:

Satz (*Abspalten von Nullstellen*)

Sei $P(z) = a_k z^k + \dots + a_1 z + a_0$ mit $a_k \neq 0$, $k \geq 1$, und sei w eine Nullstelle von P . Dann existiert ein Polynom $Q(z)$ vom Grad $k - 1$ mit

$$P(z) = (z - w) Q(z).$$

Beweis

Für $1 \leq i \leq k$ setzen wir

$$Q_i(z) = z^{i-1} w^0 + z^{i-2} w^1 + \dots + z^1 w^{i-2} + z^0 w^{i-1} = \sum_{0 \leq j < i} z^{i-1-j} w^j.$$

Also ist $Q_1(z) = 1$, $Q_2(z) = z + w$, $Q_3(z) = z^2 + zw + w^2$, ...

Dann gilt

$$z^i - w^i = (z - w) Q_i(z) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq k.$$

Damit rechnen wir:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - 0 = P(z) - P(w) = \\ &= a_k(z^k - w^k) + a_{k-1}(z^{k-1} - w^{k-1}) + \dots + a_1(z - w) = \\ &= (z - w)(a_k Q_k(z) + a_{k-1} Q_{k-1}(z) + \dots + a_1 Q_1(z)). \end{aligned}$$

– Der zweite Faktor dieses Produkts ist ein Polynom $Q(z)$ vom Grad $k - 1$.

Nullstellen lassen sich also abspalten und hinterlassen dann ein Polynom vom Grad $k - 1$. Damit kann eine algebraische Gleichung vom Grad k höchstens k Lösungen besitzen. Weiter ist der oben formulierte Fundamentalsatz der Algebra äquivalent dazu, dass jedes komplexe Polynom von Grad $k \geq 1$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Die Faktorisierung in Linearfaktoren ergibt sich dann durch wiederholte Anwendung des Satzes.

Manchmal lässt sich die Lösbarkeit von Gleichungen abstrakt zeigen. So besitzt zum Beispiel jedes reelle Polynom $P(x) = a_3 x^3 + \dots + a_0$ dritten Grades eine reelle Lösung, da P sowohl negative als auch positive Werte annimmt, und damit nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle von P existiert. (Dies werden wir später beweisen.) Seit jeher ist man aber an Lösungsverfahren interessiert, die es erlauben, Lösungen von Gleichungen explizit auffinden zu können. Im besten Fall erhält man Lösungsformeln, die aus den vier Grundrechenarten und einfachen Funktionen aufgebaut sind. Daneben sind Rechenverfahren von Interesse, die Lösungen näherungsweise bestimmen und dabei in kurzer Zeit sehr genaue Approximationen berechnen. Die Entwicklung derartiger Verfahren fällt in das Aufgabengebiet der numerischen Mathematik, während die Suche nach Lösungsformeln ein klassisches Thema der Algebra ist. Wir wollen hier lediglich die einfachsten algebraischen Gleichungen bis zum Grad 2 genauer untersuchen und in $\mathbb{C}$ mit Hilfe der vier Grundrechenarten und der reellen Quadratwurzelfunktion lösen.

Lösen quadratischer Gleichungen

In jedem Körper hat eine algebraische Gleichung

$$az + b = 0$$

vom Grad 1 genau die Lösung $z = -b/a$. Dagegen sind algebraische Gleichungen

$$az^2 + bz + c = 0$$

vom Grad 2 – auch *quadratische Gleichungen* genannt – schon weitaus anspruchsvoller. Eine Lösungsformel ist hier nicht mehr offensichtlich. Durch die Methode der *quadratischen Ergänzung* lassen sich quadratische Gleichungen aber vereinfachen. Zunächst dürfen wir annehmen, dass $a = 1$ gilt (sonst dividieren wir durch a , ohne die Lösungen zu verändern). Unsere Gleichung lautet nun also

$$z^2 + bz + c = 0.$$

Wegen $(z + b/2)^2 = z^2 + bz + b^2/4$ („quadratische Ergänzung“) ist diese Gleichung äquivalent zu

$$(z + b/2)^2 + (c - b^2/4) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(z + b/2)^2 = (b^2 - 4c)/4.$$

Sind wir also in der Lage, Gleichungen der Form $z^2 = d$ zu lösen – sog. *reinquadratische Gleichungen* –, so können wir auch unsere ursprüngliche Gleichung lösen. Genauer gilt: Die Lösungen w von $z^2 = d$ für $d = (b^2 - 4c)/4$ und die Lösungen w' von $z^2 + bz + c = 0$ entsprechen einander via $w' = w - b/2$.

Für den Körper der reellen Zahlen zeigen diese Berechnungen, wenn wir wie üblich x statt z als Unbestimmte verwenden, dass $x^2 + bx + c = 0$ übergeführt wird in das Lösungsproblem $x^2 = d$, mit $d = (b^2 - 4c)/4$. Zusammenfassend erhalten wir damit:

Satz (*Lösungsformel für quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$*)

Die reelle Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ zweiten Grades besitzt in $\mathbb{R}$ genau dann eine Lösung, wenn $b^2 - 4c \geq 0$ gilt. In diesem Fall sind genau

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})/2$$

die Lösungen der Gleichung.

Die Variante für nichtnormierte Gleichungen, d. h. für Leitkoeffizienten $a \neq 1$, erhalten wir, indem wir in der Formel des Satzes b/a für b und c/a für c substituieren. Dies ergibt nach Umformung die Lösungen

$$x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$$

und die Lösungsbedingung „ $b^2 - 4ac \geq 0$ “. Die Zahl $b^2 - 4ac$, die über die Lösbarkeit von $ax^2 + bx + c = 0$ entscheidet, heißt die *Diskriminante* der quadratischen Gleichung. Die Lösungsformel wird auch als *Mitternachtsformel* bezeichnet, weil man sie als Schüler (und Lehrer) zu jeder Tages- und Nachtzeit parat haben sollte.

Wir betrachten nun quadratische Gleichungen $az^2 + bz + c = 0$ in $\mathbb{C}$. Die Reduktion des Problems durch quadratische Ergänzung ist auch in $\mathbb{C}$ möglich (genauer in jedem Körper mit $1 + 1 \neq 0$). Es genügt damit, komplexe Gleichungen der Form

$$z^2 = d$$

zu lösen. Wie oben liefern die Lösungen dieser Gleichung dann die Lösungen von $az^2 + bz + c = 0$. Die Mitternachtsformel gilt, wenn wir unter dem für komplexe Zahlen a, b, c bislang nicht definierten Wurzelausdruck $\sqrt{b^2 - 4ac}$ einfach eine beliebige der beiden Lösungen der Gleichung $z^2 = b^2 - 4ac$ verstehen. Da ein $\pm$ -Zeichen vor der Wurzel in der Lösungsformel steht, und da mit w auch $-w$ die Gleichung $z^2 = b^2 - 4ac$ löst, spielt es keine Rolle, welche der beiden Lösungen wir wählen.

Ist der Imaginärteil von d gleich 0, so ist die Lösung von $z^2 = d$ einfach: Ist $\operatorname{Re}(d) \geq 0$, so sind $\pm \sqrt{\operatorname{Re}(d)}$ die Lösungen, und ist $\operatorname{Re}(d) < 0$, so sind $\pm \sqrt{|\operatorname{Re}(d)|} i$ die Lösungen der Gleichung.

Das etwas schwierigere Problem der Lösung von $z^2 = d$ mit $\operatorname{Im}(d) \neq 0$ behandeln wir wie folgt. Wir nehmen an, wir hätten eine Lösung w vorliegen. Wir zeigen, dass der Real- und Imaginärteil von w eine gewisse Form haben müssen. Einsetzen zeigt dann, dass wir durch diese Form die beiden Lösungen definieren können.

Sei also $w = (x, y)$ eine komplexe Lösung von $z^2 = d$ für eine gegebene komplexe Zahl d mit $\operatorname{Im}(d) \neq 0$. Wegen $z^2 = d$ gilt $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(d)$ und $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(d)$, also

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(d),$$

$$2xy = \operatorname{Im}(d).$$

Weiter ist $|z|^2 = |d|$, also $x^2 + y^2 = |d|$. Damit haben wir

$$2x^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 - y^2) = |d| + \operatorname{Re}(d) \quad \text{und}$$

$$2y^2 = (x^2 + y^2) - (x^2 - y^2) = |d| - \operatorname{Re}(d).$$

Wegen $|\operatorname{Re}(d)| \leq |d|$ können wir reelle Wurzeln ziehen und erhalten

$$x = \pm \sqrt{(|d| + \operatorname{Re}(d))/2}, \quad y = \pm \sqrt{(|d| - \operatorname{Re}(d))/2}.$$

Ist $\operatorname{Im}(d) > 0$, so ist wegen $2xy = \operatorname{Im}(d)$ in diesen Ausdrücken entweder zweimal „+“ oder zweimal „-“ als Wahl von $\pm$ möglich. Ist $\operatorname{Im}(d) < 0$, so ist nur eine gemischte Wahl von „+“ und „-“ möglich.

Wir haben also in Abhängigkeit des Vorzeichens von $\operatorname{Im}(d)$ je zwei Lösungskandidaten vorliegen. Einsetzen in $z^2 = d$ zeigt nun, dass diese Kandidaten tatsächlich Lösungen sind. (Der Leser führe dies durch). Damit erhalten wir:

Satz *(die komplexen Lösungen reinquadratischer Gleichungen)*

Sei $d \in \mathbb{C}$. Dann hat die Gleichung $z^2 = d$ die beiden Lösungen

$$w_1 = \left(\sqrt{(|d| + \operatorname{Re}(d))/2}, \quad \sigma \sqrt{(|d| - \operatorname{Re}(d))/2} \right),$$

$$w_2 = -w_1,$$

wobei $\sigma = 1$, falls $\operatorname{Im}(d) \geq 0$ und $\sigma = -1$, falls $\operatorname{Im}(d) < 0$.

Damit ist die Aufgabe der Lösung quadratischer Gleichungen in $\mathbb{C}$ befriedigend gelöst.

Lösungen von Gleichungen höheren Grades

Mit Hilfe der Lösungstheorie für quadratische Gleichungen und dem Abspalten von Nullstellen lassen sich leicht z. B. die Lösungen von $z^3 = 1$ und $z^4 = 1$ angeben. Wir führen dies unten für die Gleichung $z^3 = 1$ explizit durch. Allgemeiner gibt es Lösungsformeln für Gleichungen dritten und vierten Grades. Diese wurden bereits im 16. Jahrhundert durch Nicolo Tartaglia und Scipione del Ferro entdeckt. Die Suche nach einer Lösungsformel für Gleichungen fünften Grades blieb aber erfolglos. Nils Henrik Abel bewies 1824, dass es für Gleichungen fünften Grades keine allgemeine Lösungsformel geben kann, die neben den Grundrechenarten nur Wurzelausdrücke enthält. Evariste Galois konnte um 1830 dieses Ergebnis mit allgemeinen gruppentheoretischen Methoden klar beleuchten, die weiter auch die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines Winkels und der Verdoppelung eines Würfels mit Zirkel und Lineal aufzeigten. Demgegenüber steht der Fundamentalsatz der Algebra, demzufolge algebraische Gleichungen vom Grad größer gleich 1 stets Lösungen in $\mathbb{C}$ besitzen. Der Beweis dieser grundlegenden Ergebnisse ist, was die Theorie von Galois betrifft, Aufgabe der Algebra, und, was den Fundamentalsatz betrifft, Aufgabe der höheren Analysis.

Bestimmung der dritten Einheitswurzeln

Zur Illustration berechnen wir noch die komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 1$.

Diese Lösungen heißen auch die *dritten Einheitswurzeln*. Eine offensichtliche Lösung ist $w_1 = 1$. Die im Beweis oben gefundene Formel

$$P(z) = (z - w_1)(a_k Q_k(z) + a_{k-1} Q_{k-1}(z) + \dots + a_1 Q_1(z))$$

liefert für $P(z) = z^3 - 1$ und $a_3 = 1, a_2 = a_1 = 0$:

$$z^3 - 1 = (z - w_1) Q_3(z) = (z - w_1)(z^2 + zw_1 + w_1^2) = (z - 1)(z^2 + z + 1).$$

Die Lösungen von $z^2 + z + 1$ lauten nach obigen Ergebnissen

$$w_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{1 - 4})/2 = (-1 \pm \sqrt{-3})/2.$$

wobei wieder $\sqrt{-3}$ eine der beiden Lösungen der komplexen Gleichung $z^2 = -3$ ist. Eine solche Lösung ist aber $i\sqrt{3}$. Damit sind die Lösungen von $z^3 = 1$ genau die drei folgenden komplexen Zahlen w_1, w_2 und w_3 :

$$w_1 = 1, \quad w_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2, \quad w_3 = \overline{w_2} = (-1 - i\sqrt{3})/2.$$

Nach der Produktregel gilt $|w^3| = |w|^3$ für alle komplexen Zahlen w , und damit haben alle Lösungen den Betrag 1. Zudem gilt

$$|w_1 - w_2| = |(3 - i\sqrt{3})/2| = \sqrt{3},$$

$$|w_1 - w_3| = |(3 + i\sqrt{3})/2| = \sqrt{3},$$

$$|w_2 - w_3| = |i\sqrt{3}| = \sqrt{3}.$$

Damit haben die drei komplexen Zahlen w_1, w_2, w_3 paarweise denselben Abstand voneinander. Zusammenfassend haben wir also bewiesen:

Satz (die dritten Einheitswurzeln)

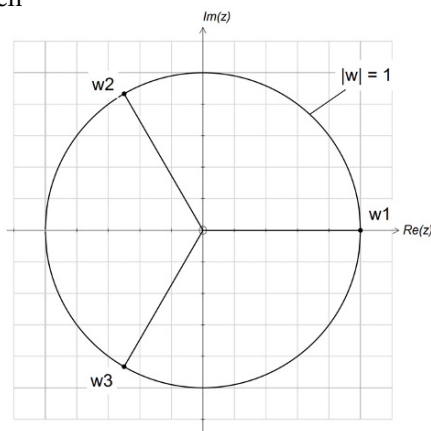
Die Lösungen von

$$z^3 = 1$$

sind die Ecken des gleichseitigen Dreiecks im $\mathbb{R}^2$, das in den Einheitskreis

$$K = \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| = 1 \}$$

einbeschrieben ist und dem die Ecke $1 = (1, 0)$ angehört.



In den Ergänzungen werden wir durch geometrische Argumentation ein analoges Ergebnis für die n -ten Einheitswurzeln, also die Lösungen von $z^n = 1$, für alle $n \geq 4$ beweisen können.

Übungen

1.3.1 Eine Multiplikation für die Ebene

Übung 1

Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen einen Körper bilden.

Übung 2

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

$$i^{17}, (i+1)/(i-1), (i-1)/(i+1), (4-3i)/(3i-1).$$

Übung 3

Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (a) $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$, $\bar{\bar{z}} = z$, $\bar{2 \operatorname{Re}(z)} = 2 \operatorname{Re}(z)$, $\bar{-z} = -\bar{z}$,
- (b) $\operatorname{Re}(1/z) = \operatorname{Re}(z)/|z|^2$, $\operatorname{Im}(1/z) = -\operatorname{Im}(z)/|z|^2$, falls $z \neq 0$,
- (c) $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$.

Berechnen und identifizieren Sie weiter die Größe $\operatorname{Re}(z\bar{w})$, indem Sie z und w als Vektoren der Ebene betrachten. Folgern Sie, dass die Vektoren z und wz (mit $z, w \neq 0$) genau dann aufeinander senkrecht stehen, wenn w rein imaginär ist.

Übung 4

Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (a) $z\bar{z} = |z|^2$, $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$ für $z \neq 0$,
- (b) $|z + w| \leq |z| + |w|$, $|zw| = |z| |w|$,
- (c) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$,
 $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2 \operatorname{Re}(z\bar{w})$,
 $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.

Deuten Sie die letzte Aussage geometrisch.

- (d) Verwenden Sie die Produktregel $|zw| = |z| |w|$ aus (b), um zu zeigen, dass für alle reellen Zahlen a, b, c, d gilt:
 $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.

Übung 5

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine Lösung einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass auch $\bar{z}$ eine Lösung der Gleichung ist.

Übung 6

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $z, w \in \mathbb{C}$ äquivalent sind:

- (a) Es gibt $x, y \in \mathbb{R}$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ und $xz + yw = 0$.
- (b) $z\bar{w} \in \mathbb{R}$.

Übung 7

Wir definieren eine Multiplikation $*$ auf $\mathbb{C}$ durch

$$z * w = z \cdot \bar{w} \quad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C}.$$

Welche der Körperaxiome gelten für die Struktur $(\mathbb{C}, +, *)$ und welche gelten nicht?

Übung 8

Zeigen Sie, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{\bar{w}/w \mid w \in \mathbb{C}, w \neq 0\}$.

1.3.2 Die Lösungen einfacher algebraischer Gleichungen

Übung 1

Bestimmen Sie die komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

- (a) $z^4 = 1$,
- (b) $z^6 = 1$.

Übung 2

Sei $z^2 + bz + c = 0$ eine algebraische Gleichung zweiten Grades in einem Körper K mit den Lösungen w_1 und w_2 . Zeigen Sie:

$$w_1 + w_2 = -b, \quad w_1 w_2 = c. \quad (\text{Vietasche Regeln})$$

Übung 3

Formulieren und beweisen Sie eine Verallgemeinerung der Vietaschen Regeln für Gleichungen k -ten Grades in K , $k \geq 1$, die die Lösungen $w_1, \dots, w_k$ besitzen.

Übung 4

Seien z_1, z_2, z_3 komplexe Zahlen mit den Eigenschaften:

- (a) $|\zeta_1| = |z_2| = |z_3| = 1$,
- (b) $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Zeigen Sie, dass z_1, z_2, z_3 die Ecken eines gleichseitigen in den Einheitskreis eingeschriebenen Dreiecks sind.

[Zeigen und verwenden Sie $|z_i - z_j|^2 = 2 - 2 \operatorname{Re}(z_i \bar{z}_j)$ für $1 \leq i < j \leq 3$.

Dritte Ergänzungen:

Die geometrische Deutung der komplexen Multiplikation

Wir entwickeln mit Hilfe elementarer geometrischer Argumentation eine anschauliche Interpretation der Multiplikation in $\mathbb{C}$ und diskutieren einige Anwendungen.

Wir beginnen mit einer Charakterisierung der komplexen Multiplikation:

Ergänzungsübung 1

Sei $(\mathbb{R}^2, +, *)$ ein Körper, wobei $+$ die Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$ sei. Für die Multiplikation $*$ des Körpers gelte:

- (i) $(x, 0) * (x_1, y_1) = (x x_1, x y_1)$ für alle $x, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$,
- (ii) $(0, 1) * (0, 1) = (-1, 0)$.

Dann ist $*$ die komplexe Multiplikation, d. h. $(\mathbb{R}^2, +, *)$ ist der Körper der komplexen Zahlen.

Mit Hilfe dieser Charakterisierung können wir nun eine einfache geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation geben. Hierzu gestatten wir uns, in „naiver“ Weise vom Winkel zu sprechen, den ein Vektor in der Ebene relativ zur positiven x-Achse besitzt. Wir definieren hiermit:

Definition (*Argument einer komplexen Zahl*)

Das *Argument* $\arg(z)$ einer komplexen Zahl $z \neq 0$ ist der im Gegenuhrzeigersinn gemessene Winkel des Vektors z zur positiven x-Achse.

Mit Hilfe von „Länge“ und „Argument“ können wir nun folgende geometrische Multiplikation definieren:

Definition (*geometrische Multiplikation zweier Vektoren der Ebene*)

Für alle $v, w \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ definieren wir $v * w$ als den eindeutigen Vektor z mit den beiden Eigenschaften:

- (a) Die Länge von z ist das Produkt der Längen von v und w .
- (b) Das Argument von z ist die Summe der Argumente von v und w .

Weiter setzen wir $v * 0 = 0 * v = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$.

Als einfache Regel formuliert lautet die Multiplikation $*$ also:

„Multipliziere die Längen der beiden Vektoren und addiere ihre Argumente.“

Nun zeigen wir, dass die Multiplikation $*$ nichts anderes ist als die komplexe Multiplikation:

Ergänzungsübung 2

$(\mathbb{R}^2, +, *)$ ist der Körper der komplexen Zahlen.

[Hinweis: Nach den obigen Ergebnissen genügt es, die folgenden Aussagen zu beweisen:

- (a) $(\mathbb{R}^2, +, *)$ ist ein Körper.
- (b) $(x, 0) * (x_1, y_1) = (x x_1, x y_1)$ für alle $x, x_1, y_1 \in \mathbb{R}$,
- (c) $(0, 1) * (0, 1) = (-1, 0).$

Damit hat die Multiplikation in $\mathbb{C}$ eine überraschend einfache und anschauliche Interpretation.

Ergänzungsübung 3

Formulieren Sie in Analogie zur Multiplikationsregel eine Divisionsregel für komplexe Zahlen.

Ergänzungsübung 4

Zeigen Sie durch geometrische Argumentation:

$$2 \operatorname{Re}(z) = z + \bar{z}, \quad 2 \operatorname{Im}(z) = z - \bar{z},$$

$$1/z = \bar{z}/|z|^2 \text{ für alle } z \in \mathbb{C}, z \neq 0,$$

$$(x z) \cdot (y \bar{z}) \in \mathbb{R} \text{ für alle } z \in \mathbb{C} \text{ und alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Weiter kann man mit Hilfe der geometrischen Interpretation auch einfache algebraische Gleichungen lösen:

Ergänzungsübung 5

Sei $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie (in geometrischer Weise) die komplexen Lösungen der Gleichung $z^k = 1$ und allgemeiner der Gleichung $(z - w)^k = 1$ für ein beliebiges $w \in \mathbb{C}$.

Die komplexen Lösungen der Gleichung $z^k = 1$ heißen wieder die *k-ten Einheitswurzeln*.

Insbesondere haben wir also die früher explizit berechneten dritten Einheitswurzeln ganz ohne Rechnung wiedergefunden.

Wenn wir die reelle Sinus- und Cosinusfunktion als bekannt voraussetzen, gelangen wir zu einer wichtigen Darstellung für komplexe Zahlen:

Ergänzungsübung 6

- (a) Seien $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Weiter sei $r = |z|$ und φ das Argument von z . Stellen Sie z^n in den „Koordinaten“ r und φ mit Hilfe der Sinus- und Cosinusfunktion dar.
- (b) Sei $n \geq 3$. Schreiben Sie die n -ten Einheitswurzeln $w_1, \dots, w_n$ in der Darstellung aus Teil (a).

2. Abschnitt

Folgen und Reihen

1. Konvergente Folgen

In diesem Kapitel betrachten wir Folgen $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ reeller Zahlen, die gegen einen gewissen reellen Grenzwert x streben. Wir geben eine genaue Definition des Grenzwerts einer Folge und wir präzisieren, wann die Glieder einer Folge sich immer weiter verdichten. Dadurch gelangen wir zu einer neuen Formulierung der Vollständigkeit der reellen Zahlen, die später in der Theorie der allgemeinen metrischen Räume eine wichtige Rolle spielt. Folgen erlauben es zudem, auch unendliche Reihen $x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots$ zu definieren, die wir dann in den beiden folgenden Kapiteln genauer untersuchen werden.

Folgen und ihre Grenzwerte

Wir haben bisher schon informal über unendliche Folgen $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$, gesprochen, etwa bei der Diskussion der Dezimaldarstellung. Formal ist eine *Folge* $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ die Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und $x_n = f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist x_n lediglich eine andere Schreibweise für $f(n)$. Wir notieren Folgen neben der Pünktchennotation vor allem in den Formen

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(x_n)_{n \geq 0}$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt x_n das n -te *Glied* der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine Folge *in einer Menge* M , falls $x_n \in M$ für alle n gilt. Für $M = \mathbb{R}$ spricht man auch von einer *reellwertigen* und für $M = \mathbb{C}$ von einer *komplexwertigen* Folge.

Oft werden Varianten wie $(x_n)_{n \geq 1}$ verwendet. Allgemein können wir für jede Teilmenge A von $\mathbb{N}$ eine Folge $(x_n)_{n \in A}$ erklären als diejenige Funktion f mit dem Definitionsbereich A , für die $f(n) = x_n$ für alle $n \in A$ gilt.

Einige Beispiele für Folgen sind:

$(c, c, c, \dots)$, d.h. $x_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$, für ein gewisses $c \in \mathbb{C}$,
(konstante Folge mit Wert c)

$(1, 1/2, 1/3, \dots)$, d.h. $x_n = 1/(n+1)$ für alle n ,

$(1, 1, 2, 3, 5, \dots)$, d.h. $x_0 = x_1 = 1$, $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ für alle n ,
(Folge der Fibonacci-Zahlen)

$(x^0, x^1, x^2, \dots)$, d.h. $x_n = x^n$ für alle n , für ein gewisses $x \in \mathbb{R}$,

$(i^0, i^1, i^2, \dots)$, d.h. $x_n = i^n$ für alle n , mit der imaginären Einheit $i \in \mathbb{C}$.

Informale Notationen wie auf der linken Seite sind allgemein üblich und aufgrund ihrer guten Lesbarkeit auch nicht verwerflich. Genauer ist es jedoch, die Glieder x_n explizit zu definieren. So ist ja dem Ausdruck $(1, 1/2, 1/3, \dots)$ nicht anzusehen, ob wir $x_n = 1/(n+1)$ für alle $n \geq 0$ oder $x_n = 1/n$ für alle $n \geq 1$ definieren wollen. Im ersten Fall ist x_0 definiert, im zweiten nicht. Ebenso ist das Bildungsgesetz der Fibonacci-Folge vielleicht nicht eindeutig ersichtlich, wenn man zum ersten Mal mit 1, 1, 2, 3, 5, ... in Berührung kommt.

Natürliche Wachstumsbegriffe für Folgen sind:

Definition (*monoton steigend, monoton fallend, monoton, beschränkt*)

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *monoton steigend (fallend)*, falls $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, *streng monoton steigend (fallend)*, falls $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} < x_n$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, *monoton*, falls sie monoton steigend oder monoton fallend ist, *beschränkt (nach oben, unten)*, falls $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt (nach oben, unten) ist.

Die Folge $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ ist streng monoton fallend und beschränkt. Anschaulich „nähert“ sie sich der Null an oder „strebt“ gegen Null, dem Infimum der Menge $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Ebenso nähert sich die streng monoton steigende Folge $(1 - 1/(n+1))_{n \in \mathbb{N}}$ anschaulich der Zahl 1 an, dem Supremum der Menge $\{1 - 1/(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für eine beschränkte monotone Folge können wir in der Tat einen eindeutig bestimmten Grenzwert oder Limes einfach definieren:

Definition (*Grenzwert für monotone und beschränkte Folgen*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte monotone Folge in $\mathbb{R}$. Dann setzen wir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \begin{cases} \sup(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}), & \text{falls } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton steigt,} \\ \inf(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}), & \text{falls } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ monoton fällt.} \end{cases}$$

Die Zahl $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ heißt der (*monotone*) Grenzwert oder Limes von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Bei der Einführung der unendlichen Dezimaldarstellung einer reellen Zahl sind wir ja bereits so vorgegangen, indem wir definiert haben:

$$n, a_1 a_2 \dots = \sup(\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\}).$$

Der Grenzwertbegriff für beschränkte monotone Folgen ist aber zu eng, da durch ihn Folgen wie zum Beispiel

$$1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, 1/4, -1/4, \dots,$$

die anschaulich in einer Pendelbewegung gegen 0 streben, nicht eingefangen werden. Eine Variante des Supremums- und Infimumsbegriffs, die die endlichen Anfangsstücke einer Folge als unwesentlich ansieht, führt zum Ziel, ist aber begrifflich für den Anfänger nicht einfach zu verdauen. Zudem ist dieser Ansatz für komplexwertige Folgen nicht direkt anwendbar, denn auch in $\mathbb{C}$ strebt die Folge $(i^n/n)_{n \geq 1}$ anschaulich gegen Null. In jeder Hinsicht geeignet ist aber die folgende im 19. Jahrhundert etablierte Grenzwertdefinition, die den Abstand $|x - y|$

zweier reeller Zahlen x und y ins Zentrum rückt, und die, wie sich zeigen wird, für beschränkte monotone Folgen mit der obigen Grenzwertdefinition übereinstimmt. Sie zählt zu den wichtigsten Begriffsbildungen der Analysis:

Definition (*Konvergenz von Folgen, Grenzwert, Limes, konvergent, divergent*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $x \in \mathbb{R}$. Dann *konvergiert* die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gegen* x , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \mid x_n - x \mid < \varepsilon. \quad (\text{Konvergenzbedingung für } x)$$

Die Zahl x heißt dann ein *Grenzwert* oder *Limes* der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und die Folge heißt *konvergent* in $\mathbb{R}$. Eine nicht konvergente Folge heißt *divergent*.

Umgangssprachlich können wir die Konvergenzbedingung so ausdrücken: Die Folge der x_n konvergiert gegen x , wenn die Folgenglieder schließlich beliebig nahe bei x liegen. Der Ausdruck „beliebig nahe“ greift den Allquantor über ε auf, das „schließlich“ den Existenzquantor für n_0 und den Allquantor für n , und das „nahe liegen bei“ den durch den Betrag definierten Abstand. Die logische Anordnung der Quantoren ist in der formalen Fassung aber besonders klar, und diese Fassung bewährt sich auch im Umgang mit dem Begriff. Die Verneinungsregeln für Quantoren liefern zum Beispiel, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genau dann divergent ist, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n \geq n_0 \mid x_n - x \mid \geq \varepsilon. \quad (\text{Divergenzbedingung für } x)$$

Umgangssprachlich bedeutet dies, dass für jedes beliebige x die Glieder der Folge immer wieder um einen gewissen Betrag von x abweichen.

Damit ist nach unserer Definition in der Tat die Zahl 0 ein Grenzwert der oben betrachteten Folge $1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3, \dots$, während z. B. die Folge $1, -1, 1, -1, \dots$, die zwischen 1 und -1 hin und her pendelt, divergiert. Leicht zu sehen ist auch, dass die Grenzwertdefinition für allgemeine Folgen die Grenzwertdefinition für beschränkte monotone Folgen fortsetzt: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton und beschränkt, so ist der monotone Grenzwert $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ein Grenzwert der Folge im Sinne der obigen Definition. Der genaue Nachweis dieser Aussagen ist gut geeignet, um mit der Konvergenzbedingung vertraut zu werden.

Obige Definition können wir wörtlich für Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Grenzwerte z in $\mathbb{C}$ übernehmen, da auch hier ein Abstand $\mid z_n - z \mid$ erklärt ist. Im Folgenden bleiben wir der Einfachheit halber bei $\mathbb{R}$ und fügen am Ende einige Bemerkungen über komplexe Grenzwerte hinzu.

Dem aufmerksamen Leser wird vielleicht aufgefallen sein, dass wir bislang von *einem* Grenzwert gesprochen haben, und nicht vom *dem* Grenzwert einer Folge. Wenn es auch anschaulich klar sein mag, dass ein Grenzwert eindeutig bestimmt ist, so müssen wir es doch beweisen. Der Beweis ist zudem ein Paradebeispiel für die Anwendung der Definition:

Satz (*Eindeutigkeit des Grenzwerts*)

Seien x und y Grenzwerte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist $x = y$.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_0 \quad \text{und} \quad |x_n - y| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Sei $n_2 \geq n_0, n_1$, also etwa das Maximum $\max(n_0, n_1)$ von n_0 und n_1 .

Dann gilt:

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \quad \text{und} \quad |x_n - y| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_2.$$

Insbesondere gilt diese Aussage für n_2 . Nach der Dreiecksungleichung ist dann aber

$$|x - y| = |x - x_{n_2} + x_{n_2} - y| \leq |x - x_{n_2}| + |x_{n_2} - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

– Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt $x = y$.

Diese Form der Argumentation taucht häufiger auf und wird in mathematischen Kreisen als $\varepsilon/2$ -Argument bezeichnet. Wir werden auch $\varepsilon/3$ -Argumente kennenlernen, bei denen drei Abschätzungen zu einer ε -Abschätzung zusammengeführt werden. Die Dreiecksungleichung ist hier pausenlos in Einsatz.

Wir haben obigen Beweis ausführlich präsentiert. In Zukunft werden wir insbesondere die „Einsatzstellen“ n_0 und n_1 freier verwenden. Wir hätten zum Beispiel ohne Einschränkung annehmen können, dass $n_1 \geq n_0$ ist. Dadurch wird dann die Einführung von n_2 überflüssig, da $n_2 = \max(n_1, n_0) = n_1$. Der Leser wird, wenn er noch einmal auf die Konvergenzbedingung blickt, sofort sehen, dass mit jedem für ein $\varepsilon > 0$ geeigneten n_0 auch jedes $n_0' > n_0$ für ε geeignet ist. Diese Vergrößerungseigenschaft des „ab jetzt“-Index n_0 wird oft stillschweigend verwendet.

Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts können wir die Limesnotation, die wir oben schon für beschränkte monotone Folgen eingeführt hatten, für alle konvergenten Folgen erklären:

Definition (*Limes- und Pfeilnotation für konvergente Folgen*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$. Dann schreiben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \quad \text{oder} \quad \lim_n x_n \quad (\text{Limesnotation})$$

für den Grenzwert von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Gleichbedeutend zu „ $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ “ ist weiter auch die Schreibweise

$$„x_n \rightarrow x \text{ für } n \rightarrow \infty“, \quad (\text{Pfeilnotation der Konvergenz})$$

gelesen: „ x_n konvergiert oder strebt gegen x für n gegen unendlich“.

Die Folgennotation erlaubt es, arithmetische Operationen mit Folgen einfach und suggestiv zu notieren. Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen, so ist z. B.

$(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $z_n = x_n + y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Folge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt die *Summe* der Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Analog ist das Produkt $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert. Die Limesbildung respektiert diese arithmetischen Operationen:

Satz (*Limesregeln für die Folgenarithmetik*)

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

- (a) $\lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n$,
- (b) $\lim_n (x_n \cdot y_n) = \lim_n x_n \cdot \lim_n y_n$,
- (c) $\lim_n (a x_n) = a \lim_n x_n$ für alle $a \in \mathbb{R}$,
- (d) $\lim_n (x_n - y_n) = \lim_n x_n - \lim_n y_n$,
- (e) $\lim_n (x_n / y_n) = \lim_n x_n / \lim_n y_n$, falls $y_n \neq 0$ für alle n und $\lim_n y_n \neq 0$.

Beweis

Seien $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

zu (a):

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_0 \leq n_1$ mit

$$|x_n - x| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_0, \quad |y_n - y| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Für alle $n \geq n_1$ gilt dann aber

$$|x_n + y_n - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

zu (b):

Aufgrund der Beschränktheit konvergenter Folgen gibt es ein $r > 0$ mit $|x_n|, |y_n|, |x|, |y| < r$ für alle n . Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_0 \leq n_1$ mit

$$|x_n - x| < \varepsilon/(2r) \quad \text{für alle } n \geq n_0, \quad |y_n - y| < \varepsilon/(2r) \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Für alle $n \geq n_1$ gilt dann aber

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| = |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \leq \\ &|x_n - x| |y_n| + |x| |y_n - y| < \varepsilon/(2r) \cdot r + r \cdot \varepsilon/(2r) = \varepsilon. \end{aligned}$$

zu (c):

Die Aussage folgt aus Teil (b), da die konstante Folge $(a, a, a, \dots)$ den Grenzwert a besitzt.

zu (d):

Nach Teil (a) und (c) für den Faktor $a = -1$ gilt

$$\lim_n (x_n - y_n) = \lim_n x_n + \lim_n -y_n = \lim_n x_n - \lim_n y_n.$$

zu (e):

Aufgrund von Teil (b) genügt es zu zeigen, dass $\lim_n 1/y_n = 1/y$ gilt. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_0 \leq n_1$ mit

$$|y_n| \geq |y|/2 \quad \text{für alle } n \geq n_0, \quad |y_n - y| < \varepsilon/2 \cdot |y|^2 \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Für alle $n \geq n_1$ gilt dann aber

$$- \quad |1/y_n - 1/y| = |(y - y_n)/(y_n y)| < \varepsilon/2 \cdot |y|^2 \cdot 2/|y| \cdot 1/|y| = \varepsilon.$$

Wurzeln

Durch Induktion folgt aus der Produktregel für konvergente Folgen: Gilt $\lim_k x_k = x$, so gilt $\lim_k x_k^n = x^n$ für alle $n \geq 1$. Damit können wir nun die Existenz von Wurzeln in $\mathbb{R}$ sehr einfach beweisen.

Satz (Existenz von Wurzeln)

Für alle $n \geq 1$ und alle $x \geq 0$ existiert ein eindeutiges $y \geq 0$ mit $y^n = x$.

Beweis

Sei $n \geq 1$. Die Aussage ist trivial für $x = 0$ (mit $y = 0$). Sei also $x > 0$.

Die Eindeutigkeit ist klar, denn ist $0 \leq y_1 < y_2$, so ist $y_1^n < y_2^n$.

Zum Beweis der Existenz betrachten wir

$$Y = \{y \geq 0 \mid y^n \leq x\}.$$

Dann ist $0 \in Y$ und $Y \leq \max(x, 1)$, also existiert

$$y = \sup(Y).$$

Wegen $x > 0$ ist $y > 0$. Sei also $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Nullfolge mit $\varepsilon_0 < y$. Dann ist $y - \varepsilon_k \in Y$ und $y + \varepsilon_k \notin Y$ für alle k , und damit gilt:

$$x \leq \lim_k (y + \varepsilon_k)^n = (\lim_k y + \varepsilon_k)^n = y^n = (\lim_k y - \varepsilon_k)^n = \lim_k (y - \varepsilon_k)^n \leq x.$$

— Also ist $y^n = x$.

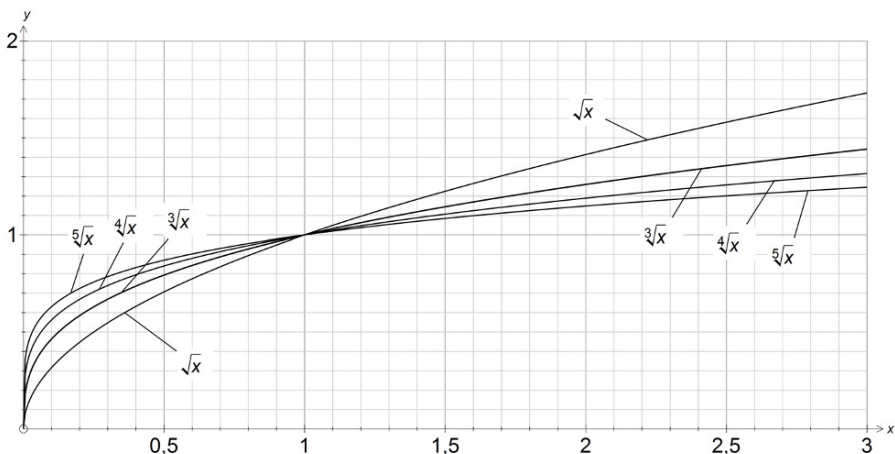
Wir definieren:

Definition (n -te Wurzel)

Für alle $n \geq 1$ und alle $x \geq 0$ heißt das eindeutige $y \geq 0$ mit $y^n = x$ die n -te Wurzel von x , in Zeichen

$$y = \sqrt[n]{x}.$$

Im Fall $n = 2$ heißt y auch die (positive) *Quadratwurzel* von x .



Aus theoretischer wie praktischer Sicht ist eine alternative exponentielle Notation für die Wurzeln angemessen. Da für die Quadratwurzel y einer reellen Zahl $x > 0$ die Gleichung $y \cdot y = x$ gilt, bietet sich die Potenzschreibweise $y = x^{1/2}$ an. Dann ist

$$x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^1 = x^{1/2 + 1/2},$$

mit der vertrauten Behandlung der Exponenten. Bezeichnen wir analog die dritte Wurzel aus x mit $x^{1/3}$, und setzen wir weiter $x^{2/3} = (x^{1/3})^2$, so gilt

$$x^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot x^{1/3} = x^1 = x^{1/3 + 1/3 + 1/3}, \quad x^{1/3} \cdot x^{1/3} = x^{1/3 + 1/3} = x^{2/3}, \quad \text{usw.}$$

Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition:

Definition (*Exponentiation für rationale Exponenten*)

Für alle $x > 0$ und $q = m/n \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, setzen wir:

$$x^q = \sqrt[n]{x^m}.$$

Für alle $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ setzen wir weiter $0^q = 0$.

Diese Exponentiation ist wohldefiniert, d.h. gilt $m/n = m'/n'$, so ist $x^{m/n} = x^{m'/n'}$. Für den Fall $n = 1$ geht die neue Exponentiation in die alte Exponentiation für ganzzahlige Exponenten und nichtnegative Basen über. Die Rechengesetze gelten wie erwünscht nun allgemeiner:

Satz (*Rechengesetze für Wurzeln*)

Für alle $x, y > 0$ und alle $p, q \in \mathbb{Q}$ gilt:

$$(xy)^p = x^p y^p, \quad x^p x^q = x^{p+q}, \quad (x^p)^q = x^{p \cdot q} = (x^q)^p.$$

Gilt $p, q > 0$, so gelten diese Aussagen für alle $x, y \geq 0$.

Der Beweis kann dem Leser zur Übung überlassen bleiben.

Für einige rationale Exponenten wäre auch noch eine Definition x^q für $x < 0$ möglich, etwa für $q = 1/3$. Mit negativen Basen lässt sich aber nicht mehr frei rechnen. So gilt für $x < 0$ zum Beispiel nicht mehr, dass $(x^{1/3})^{1/2} = (x^{1/2})^{1/3}$, da $x^{1/2}$ für $x < 0$ nicht definiert ist.

Im weiteren Verlauf werden wir die Exponentiation x^q für $x > 0$ und $q \in \mathbb{Q}$ noch einmal erweitern, nämlich zu einer Exponentiation x^y für $x > 0$ und beliebige reelle Exponenten y .

Teilfolgen und Häufungspunkte

Zuweilen ist es von Interesse, von einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nur jedes zweite Glied zu betrachten. Allgemeiner können wir unendlich viele „interessante“ Indizes vorgeben und dann die Folge auf diese Indizes reduzieren. Formal können wir diese Ausdünnung wie folgt fassen:

Definition (*Teilfolge einer Folge*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, und sei $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$. Dann heißt die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$y_n = x_{i_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

die durch die *Indexfolge* $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definierte *Teilfolge* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Die durch eine streng monoton steigende Indexfolge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definierte Teilfolge können wir einfach notieren als $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Üblich ist daneben auch die Notation $(x_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, die aus Gründen der besseren Lesbarkeit einen doppelten Index vermeidet.

So ist z. B. $(1, 1, 1, \dots)$ eine Teilfolge von $(1, -1, 1, -1, \dots)$, wobei es unendlich viele definierende Indexfolgen gibt. Weiter ist $(1, 1/2, 1/3, \dots)$ eine Teilfolge von $(1, 1/2, 1, 1/3, 1, 1/4, 1, \dots)$, und in diesem Fall ist die Indexfolge eindeutig bestimmt. In diesen beiden Beispielen konvergiert die Teilfolge in $\mathbb{R}$, während die ursprüngliche Folge divergiert. Der Grenzwert der Teilfolge ist ein Punkt, in dessen Nähe die Folge immer wieder zurückkehrt. Diese Anschauung motiviert die folgende allgemeine Definition:

Definition (*Häufungspunkt einer Folge*)

Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Die Folge $(0, 1, 2, 3, \dots)$ hat keinen Häufungspunkt. Dagegen erzeugen Folgen, deren Glieder sich in einem beschränkten Bereich von $\mathbb{R}$ tummeln, immer wenigstens einen Häufungspunkt:

Satz (*Satz von Bolzano-Weierstraß*)

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis

Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine durch $r > 0$ beschränkte Folge. Durch iterierte Halbierung des Intervalls $I_0 = [-r, r]$ können wir rekursiv abgeschlossene Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren, sodass für alle n gilt:

- (a) $I_{n+1} \subseteq I_n$,
- (b) die Länge $|I_n|$ von I_n ist gleich $2r/2^n$,
- (c) $x_i \in I_n$ für unendlich viele i .

Zur rekursiven Konstruktion:

Ist $I_n = [a_n, b_n]$ konstruiert, so seien $c_n = (a_n + b_n)/2$, $L = [a_n, c_n]$, $R = [c_n, b_n]$. Da unendlich viele Folgenglieder in I_n liegen, liegen unendlich viele Folgenglieder in L oder unendlich viele Folgenglieder in R . Wir setzen also $I_{n+1} = L$, falls L unendlich ist, und $I_{n+1} = R$ andernfalls. Dann ist I_{n+1} wie gewünscht.

Nach dem Prinzip der Intervallschachtelung ist der Durchschnitt aller I_n die Menge $\{x^*\}$ mit $x^* = \sup(\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}) = \inf(\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\})$. Wir zeigen, dass x^* ein Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Hierzu definieren wir rekursiv:

$i_0 = 0$, $i_{n+1} = \text{„das kleinste } i > i_n \text{ mit } x_i \in I_{n+1} \text{“}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Ein i wie in der Definition von i_{n+1} existiert nach (c). Nach Konstruktion ist die Folge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton steigend und es gilt $x_{i_n} \in I_n$ für alle n . Wir zeigen schließlich:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n} = x^*.$$

Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein n_0 mit $|I_{n_0}| < \varepsilon$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$- x_{i_n}, x^* \in I_{n_0} \text{ (da } x_{i_n} \in I_n \subseteq I_{n_0} \text{). Also ist } |x_{i_n} - x^*| \leq |I_{n_0}| < \varepsilon \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Häufungspunkte für Mengen

Der Begriff eines Häufungspunktes ist nicht nur für Folgen, sondern auch für Mengen von Interesse. Wir definieren hierzu und für viele andere Zwecke:

Definition (*ε -Umgebung eines Punktes*)

Sei $x \in \mathbb{R}$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann heißt

$$U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - x| < \varepsilon\}$$

die (offene) ε -Umgebung von x .

In Intervallnotation ist also $U_\varepsilon(x) =]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$. Damit können wir nun definieren:

Definition (*Häufungspunkt einer Menge*)

Ein $x \in \mathbb{R}$ heißt ein *Häufungspunkt* einer Teilmenge X von $\mathbb{R}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$U_\varepsilon(x) \cap X \text{ ist unendlich.}$$

Häufungspunkte können zu X gehören oder nicht. So ist z. B. 0 ein Häufungspunkt von $]0, 1[$ und von $[0, 1[$. Weiter ist jedes $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$ und weiter auch ein Häufungspunkt von $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Der Zusammenhang der beiden Begriffe „Häufungspunkt einer Folge“ und „Häufungspunkt einer Menge“ ist eng, aber es ist etwas Vorsicht geboten. Die Zahl 1 ist z. B. ein Häufungspunkt der konstanten Folge $(1, 1, 1, \dots)$, nicht aber der Menge $\{1\}$. Andererseits kann ein $X \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar sein und somit nicht als Wertebereich einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dargestellt werden. Es gilt aber der folgende Satz, dessen Beweis wir dem Leser überlassen:

Satz (*Häufungspunkte für Mengen und Folgen*)

- (a) Sei x ein Häufungspunkt von X . Dann existiert eine injektive Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X (d. h. $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$), die x als Häufungspunkt besitzt.
- (b) Sei x ein Häufungspunkt der injektiven Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann ist x ein Häufungspunkt von $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Hieraus oder durch Anpassung des Beweises für Folgen ergibt sich:

Satz (*Satz von Bolzano-Weierstraß für Mengen*)

Jede unendliche beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Die durch Punktmengen motivierten ε -Umgebungen sind auch in der Welt der Folgen nützlich und erlauben sehr kompakte Sprechweisen. Wir vereinbaren hierzu auch noch, dass ein Ausdruck „fast alle“ bedeuten soll: „alle bis auf endlich viele“. Dann gilt offenbar:

Umgebungsformulierung von Grenzwert und Häufungspunkt einer Folge

Ein Punkt ist genau dann der Limes einer Folge, wenn in jeder ε -Umgebung des Punktes fast alle Glieder der Folge liegen. Und:

Ein Punkt ist genau dann ein Häufungspunkt einer Folge, wenn in jeder ε -Umgebung des Punktes unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Konvergenz in $\mathbb{C}$

Die entwickelte Theorie der Konvergenz von Folgen lässt sich leicht auf die komplexen Zahlen übertragen: In der Definition der Konvergenz und in vielen Beweisen benutzen wir nur elementare Eigenschaften der Betragsfunktion, wie etwa die Dreiecksungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$. Damit sind Grenzwerte für Folgen in $\mathbb{C}$ definiert und wieder eindeutig bestimmt. Der Satz über Summen und Produkte von Folgen gilt ebenfalls, und beschränkte Folgen in $\mathbb{C}$ besitzen immer einen Häufungspunkt, wobei nun eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ beschränkt heißt, falls es ein reelles $r \geq 0$ gibt mit $|z_n| \leq r$ für alle n . Auch Häufungspunkte für Teilmengen von $\mathbb{C}$ lassen sich wie oben einführen, wenn wir unter der ε -Umgebung der komplexen Zahl z nun die Menge $\{w \in \mathbb{C} \mid |z - w| < \varepsilon\}$ verstehen, also die offene Kreisscheibe der Ebene mit Mittelpunkt z und Radius ε .

Explizit halten wir noch fest:

Satz (*komponentenweise Konvergenz für Folgen in $\mathbb{C}$*)

Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ konvergiert genau dann gegen ein $z \in \mathbb{C}$, wenn die Folge $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Re}(z)$ und die Folge $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\operatorname{Im}(z)$ konvergieren.

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich beispielsweise eine komplexwertige Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß durch Rückführung auf den reellen Fall beweisen (siehe Übungen).

Uneigentliche Konvergenz

Sei $x_n = 2^n$ und $y_n = (-2)^n$ für alle n . Die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergieren, weisen aber ein unterschiedliches anschauliches Divergenzverhalten auf: Die Folge der x_n „strebt gegen plus unendlich“, die Folge der y_n nicht. Dies wollen wir nun noch präzisieren. Generell ist es in der Analysis oft nützlich, die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ um zwei symbolische Werte ∞ und $-\infty$ zu erweitern. Man vereinbart dann einige Konventionen wie etwa

$$-\infty < x < \infty, \quad x + \infty = \infty, \quad x - \infty = -\infty \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$\sup(X) = \infty \quad \text{für alle nach oben unbeschränkten } X \subseteq \mathbb{R},$$

$$\inf(X) = -\infty \quad \text{für alle nach unten unbeschränkten } X \subseteq \mathbb{R}.$$

Beim Rechnen mit den Unendlichkeitssymbolen ∞ und $-\infty$ ist aber Vorsicht geboten, und speziell ist $\infty - \infty$ nicht definiert.

Wir definieren:

Definition (uneigentliche Konvergenz, bestimmte Divergenz)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Die Folge heißt *uneigentlich konvergent* oder *bestimmt divergent gegen ∞* , falls gilt:

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad x_n \geq k.$$

Wir schreiben dann $\lim_n x_n = \infty$. Gilt

$$\forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad x_n \leq -k,$$

so heißt die Folge *uneigentlich konvergent* oder *bestimmt divergent gegen $-\infty$* , und wir schreiben $\lim_n x_n = -\infty$.

Damit gilt also $\lim_n 2^n = \infty$ und $\lim_n -2^n = -\infty$, während ein Limes von $(-2)^n$ in $\mathbb{R}$ weder eigentlich noch uneigentlich existiert.

Leicht zu sehen ist: Gilt $\lim_n x_n = \infty$ mit $x_n \neq 0$ für alle n , so ist $\lim_n 1/x_n = 0$; ist umgekehrt $\lim_n y_n = 0$ mit $y_n > 0$ für alle n , so gilt $\lim_n 1/y_n = \infty$.

Für die komplexen Zahlen ist eine Unterscheidung in ∞ und $-\infty$ nicht mehr sinnvoll. Man betrachtet hier nur noch einen symbolischen Wert ∞ und definiert

$$\lim_n z_n = \infty, \quad \text{falls} \quad \forall k \in \mathbb{N} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \quad |z_n| \geq k$$

für eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$. So gilt etwa $\lim_n (2i)^n = \infty$ und $\lim_n (-2)^n = \infty$ in $\mathbb{C}$. Die für $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ unterschiedliche Bewertung der Folge $((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ führt aber in der Regel nicht zu Fehlern.

Cauchy-Folgen und ihre Konvergenz

Ist eine vermutlich konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben, so ist ein Kandidat für einen Grenzwert oft nicht ersichtlich. In diesem Fall ist es nützlich, die Konvergenz der Folge beweisen zu können, ohne dabei auf einen Grenzwert zurückzugreifen. Das wichtigste derartige Konvergenzkriterium ist, dass sich die Glieder der Folge immer weiter verdichten. Präzisiert wird die Verdichtung der Folgenglieder wie folgt:

Definition (*Cauchy-Folge*)

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt eine *Cauchy-Folge*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \quad |x_n - x_m| < \varepsilon. \quad (\text{Cauchy-Bedingung})$$

Es ist leicht zu sehen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß können wir leicht die Umkehrung zeigen:

Satz (*Konvergenz von Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$*)

Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis

Sei also $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Aus der Cauchy-Bedingung folgt leicht, dass die Folge beschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert also eine konvergente Teilfolge $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir setzen

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n}.$$

Wir zeigen, dass x auch der Grenzwert der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Nach der Cauchy-Bedingung gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Wegen $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{i_n}$ existiert weiter ein $n_1 \geq n_0$ mit

$$|x - x_{i_n}| < \varepsilon/2 \quad \text{für alle } n \geq n_1.$$

Die Indexfolge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend, also gilt $i_n \geq n$ für alle n . Dann gilt aber für alle $n \geq n_1$:

$$\text{---} \quad |x - x_n| \leq |x - x_{i_n}| + |x_{i_n} - x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Damit spielt die Cauchy-Bedingung im Reich aller Folgen die gleiche Rolle, die die Beschränktheit innerhalb der monotonen Folgen einnimmt: Sie ist hinreichend und notwendig für Konvergenz.

Die Definition einer Cauchy-Folge und der Konvergenzsatz für Cauchy-Folgen übertragen sich wieder nach $\mathbb{C}$. Der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt ja auch für komplexe Folgen, und damit ist der obige Beweis auch für $\mathbb{C}$ geeignet. Alter-

nativ kann man die Konvergenz von Cauchy-Folgen in $\mathbb{C}$ auch wieder auf die Konvergenz von Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$ durch Übergang auf Real- und Imaginärteil zurückführen.

Wir haben die Konvergenz von Cauchy-Folgen aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß gewonnen. Zum Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß haben wir das Prinzip der Intervallschachtelung verwendet, das wir mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms bewiesen haben. Wir geben nun noch einen zweiten Beweis der Konvergenz von Cauchy-Folgen, der das Vollständigkeitsaxiom in direkter Weise verwendet. Hierzu entwickeln wir vorab einen für sich interessanten und auch andernorts nützlichen Supremums- und Infimumsbegriff für Folgen.

Die Konvergenz einer Folge hängt offensichtlich nicht von den endlichen Anfangsstücken der Folge ab: Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen und gibt es ein n_0 mit $x_n = y_n$ für alle $n \geq n_0$, so haben die beiden Folgen dasselbe Konvergenzverhalten und im Falle der Konvergenz denselben Grenzwert. Dagegen kann das Supremum der Mengen $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ verschieden sein, und das gleiche gilt für das Infimum. Diese Betrachtung legt die Definition eines „essentiellen“, von endlichen Anfangsstücken unabhängigen Supremums und Infimums für Folgen nahe. Zur Vereinfachung der Notation vereinbaren wir vorab noch die Schreibweisen

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sup(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}), \quad \inf_{n \geq m} x_n = \inf(\{x_n \mid n \geq m\}), \quad \text{usw.}$$

Hiermit definieren wir dann:

Definition (*Limes Superior und Limes Inferior*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann definieren wir:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{m \geq n} x_m,$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} x_m.$$

Die Zahl $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ heißt der *Limes Superior* oder das *essentielle Supremum* der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Analog heißt die Zahl $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ der *Limes Inferior* oder das *essentielle Infimum* der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Wir schreiben oft wieder kurz $\limsup_n$ statt $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ und $\liminf_n$ statt $\liminf_{n \rightarrow \infty}$. Mit den oben eingeführten Konventionen für die Werte $\pm \infty$ können wir weiter den Limes Superior und Inferior sogar für alle Folgen in $\mathbb{R}$ in natürlicher Weise definieren.

Anschaulich erhalten wir den Limes Superior einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wie folgt. Wir bilden zuerst das Supremum $s_0 = \sup(\{x_m \mid m \geq 0\})$ der Folge. Nun streichen wir x_0 und senken das Supremum zu $s_1 \leq s_0$ ab mit

$$s_1 = \sup(\{x_m \mid m \geq 1\}).$$

Dieses Streichen von Folgengliedern und Absenken des Supremums wiederholen wir unendlich oft. Das Infimum aller gebildeten Suprema

$$s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots$$

dieses Prozesses ist dann der Limes Superior der Folge. (Das Infimum existiert, da die s_n durch jede untere Schranke der Folge nach unten beschränkt sind.) Analog erhalten wir den Limes Inferior durch Streichen von Folgengliedern und schrittweises Anheben von Infima. Nach diesen Überlegungen ist die folgende Charakterisierung, deren Beweis wir dem Leser überlassen, vielleicht nicht mehr überraschend:

Satz (*Charakterisierung des Limes Inferior und Limes Superior*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist $\liminf_n x_n$ der kleinste und $\limsup_n x_n$ der größte Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist ein unmittelbares Korollar dieser Charakterisierung, sodass wir also einen zweiten Beweis für diesen Satz gefunden haben.

Die Folge $1, -1, 1, -1/2, 1, -1/4, 1, -1/8, \dots$ hat den Limes Superior 1 und den Limes Inferior 0. Allgemein gilt $\liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n$, und die Gleichheit der beiden Werte ist äquivalent zur Konvergenz:

Satz (*Konvergenz und Limes Superior und Inferior*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- (b) $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n$.

In diesem Fall gilt dann $\lim_n x_n = \liminf_n x_n = \limsup_n x_n$.

Der Beweis sei wieder dem Leser überlassen.

Wir können nun wie angekündigt durchführen:

Zweiter Beweis der Konvergenz von Cauchy-Folgen

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also existieren

$$y_0 = \liminf_n x_n,$$

$$y_1 = \limsup_n x_n.$$

Wir zeigen, dass $y_0 = y_1$. Dies genügt nach dem obigen Satz.

Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Nach der Cauchy-Bedingung existiert ein n_0 mit

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/3 \quad \text{für alle } n, m \geq n_0.$$

Da y_0 und y_1 Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind, gibt es $m_0, m_1 \geq n_0$ mit

$$|x_{m_0} - y_0| < \varepsilon/3 \quad \text{und} \quad |x_{m_1} - y_1| < \varepsilon/3.$$

Dann gilt aber

$$|y_0 - y_1| \leq |y_0 - x_{m_0}| + |x_{m_0} - x_{m_1}| + |x_{m_1} - y_1| <$$

$$\varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

In vielen Darstellungen der Analysis wird die Konvergenz von Cauchy-Folgen sogar zum Axiom für die reellen Zahlen erhoben und als *metrisches Vollständigkeitsaxiom* bezeichnet. Weiter kann man dann das lineare Vollständigkeitsaxiom streichen, wenn man dafür die archimedische Anordnung zum Axiom erhebt. Denn mit Hilfe der metrischen Vollständigkeit und der archimedischen Anordnung lässt sich die Existenz von Suprema und Infima für nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ beweisen, also unser lineares Vollständigkeitsaxiom (V). Kurz: „linear vollständig“ ist äquivalent zu „metrisch vollständig und archimedisch angeordnet“.

Auf die axiomatische Forderung der archimedischen Anordnung kann bei metrischer statt linearer Vollständigkeit nicht verzichtet werden. Der in den Übungen in Abschnitt 1 diskutierte angeordnete Körper K der (gekürzten) rationalen Funktionen ist nicht archimedisch, und er besitzt eine natürliche metrische Vervollständigung, in der jede Cauchy-Folge konvergiert, das archimedische Axiom aber immer noch verletzt ist.

Übungen

2.1.1 Folgen und ihre Grenzwerte

Übung 1

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent zur Konvergenz der Folge gegen x sind:

- (a) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n - x| \leq \varepsilon$.
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n - x| < 2\varepsilon$.
- (c) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_{2n} - x| < \varepsilon$.
- (d) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 |x_n - x| < \varepsilon$.
- (e) $\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n > n_0 |x_n - x| < \varepsilon$.
- (f) $\forall k \in \mathbb{N}^* \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n - x| < 1/k$.

Übung 2

- (a) Wir setzen $x_{2n} = 1$ und $x_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.
- (b) Seien $I = [a, b]$ und $J = [c, d]$ reelle Intervalle mit $a < b < c < d$. Weiter sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ derart, dass die Mengen

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I\} \text{ und } B = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in J\}$$
unendlich sind. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert.

Übung 3

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton steigende und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie die Konvergenzbedingung für $x = \sup(\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\})$.

Übung 4

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n - y_n| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie: Konvergiert eine der beiden Folgen, so konvergiert auch die andere, und dann gilt $\lim_n x_n = \lim_n y_n$.

Übung 5

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$, und seien $x = \lim_n x_n$ und $y = \lim_n y_n$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) Gilt $x_n \leq y_n$ für alle n , so gilt $x \leq y$.
- (b) Gilt $x_n < y_n$ für alle n , so gilt $x < y$.

Übung 6

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz ihrer Grenzwert:

- (a) $x_n = (1 + (-1)^n)/n$,
- (b) $x_n = (-1)^n (1 - 1/n)$,
- (c) $x_n = (c + 1/n)^2$, mit einem festen $c \in \mathbb{R}$,
- (d) $x_n = n^2/(n^2 + 1)$,
- (e) $x_n = (n + 1)^2 - n^2$,
- (f) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
- (g) $x_n = \sqrt{n} / \sqrt{n+1}$.

Übung 7

Sei $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und dass für den Grenzwert x der Folge $x = (x + 1)/x$ gilt. In welchem Verhältnis steht also x zur Zahl 1?

Übung 8

Sei $m \in \mathbb{N}^*$. Zeigen Sie, dass $\lim_n ({}^m\sqrt{n})^{-1} = 1$.

Übung 9

Sei $x > 0$. Zeigen Sie, dass $\lim_n {}^n\sqrt{x} = 1$.

Übung 10

Zeigen oder widerlegen Sie: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver Zahlen mit $\lim_n x_n = 0$, so gilt $\lim_n {}^n\sqrt{x_n} = 1$.

Übung 11

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, und sei $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $\lim_n x_n = x$.
- (b) x ist der einzige Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Übung 12

Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, und sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $\lim_n z_n = z$,
- (b) $\lim_n \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z)$ und $\lim_n \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$.

Übung 13

- (a) Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, und sei x ein Häufungspunkt von X . Zeigen Sie, dass eine injektive Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X existiert, die x als Häufungspunkt besitzt.
- (b) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq x_m$ für alle $n \neq m$. Weiter sei x ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass x ein Häufungspunkt der Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist.

Übung 14

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine beschränkte nichtleere Menge von Häufungspunkten von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass $\sup(A)$ ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Übung 15

Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\} = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass jedes $x \in [0, 1]$ ein Häufungspunkt von $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Übung 16

Beweisen Sie den Satz von Bolzano-Weierstraß für beschränkte Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit den beiden folgenden Methoden:

- (a) Iterierte Viertelung des Quadrats $Q_0 = [-r, r] \times [-r, r] \subseteq \mathbb{C}$, wobei $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Q_0$.
- (b) Übergang zu Real- und Imaginärteil und Verwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen.

2.1.2 Cauchy-Folgen und ihre Konvergenz

Übung 1

- (a) Zeigen Sie, dass jede konvergente Folge beschränkt ist.
- (b) Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge beschränkt ist (ohne den Satz über die Konvergenz von Cauchy-Folgen zu verwenden).
- (c) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 |x_n - x_{n_0}| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Übung 2

Sei $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen größergleich 0. Weiter sei $s \in \mathbb{R}$ mit $d_0 + \dots + d_n \leq s$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $|x_n - x_{n+1}| \leq d_n$ für alle n , so konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Übung 3

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\liminf_n x_n$ der kleinste und $\limsup_n x_n$ der größte Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

Übung 4

Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen für alle beschränkten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ äquivalent sind:

- (a) $\lim_n x_n = x$.
- (b) $\liminf_n x_n = \limsup_n x_n = x$.

Übung 5

Zeigen Sie, dass jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ eine monoton fallende oder monoton steigende Teilfolge besitzt. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Aussage die Konvergenz von Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$.

Übung 6

Zeigen Sie, dass in den Axiomen für die reellen Zahlen das Vollständigkeitsaxiom (V) durch die beiden folgenden Axiome ersetzt werden kann:

- (V*) Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.
- (Ar) Die Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$ ist archimedisch.

Vierte Ergänzungen: Visualisierungen von Folgen und Grenzwerten

Durch die Einführung des exakten Grenzwertbegriffs für Folgen reeller und komplexer Zahlen haben wir die Grundlage für den Aufbau der Differential- und Integralrechnung geschaffen. An keiner Stelle werden wir vage von „unendlich kleinen“ Größen sprechen müssen, denn unsere Ableitungen und Integrale können in der Sprache der Grenzwerte formuliert und untersucht werden. Die erzielte axiomatische Charakterisierung von $\mathbb{R}$, die Darstellung der imaginären Zahlen durch $\mathbb{R}^2$ und der „ ε -Kalkül“ der Grenzwerttheorie darf, wenn man auf die modernen Theorien blickt, die auf diesem Fundament ruhen, als Triumph der Mathematik bezeichnet werden. Zu nennen sind hier neben der reellen Analysis die Funktionentheorie, die Theorie der Differentialgleichungen, die Funktionalanalysis und die Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie. Logischer Aufbau und formale Exaktheit der Begriffe sind unerlässlich für ihre angestrebte Tragkraft, stellen aber gerade für den Anfänger oft große Hürden dar. Doch auch abstrakte Grundlagen lassen sich mit Hilfe von Diagrammen, Skizzen und suggestiven informalen Sprechweisen veranschaulichen, und sie erscheinen dadurch einfacher und gewinnen an Sympathie. Diese Veranschaulichung, der ja generell eine wichtige Funktion bei der Wahrung der Kontinuität zwischen Schule und Universität zukommt, ist das Thema dieser Ergänzungen.

Ergänzungsübung 1

Zeichnen Sie verschiedene Diagramme für Folgen in $\mathbb{R}$ und in $\mathbb{C}$. Stellen Sie dabei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere auch als Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ dar. Interpretieren Sie die Indizes auch als Zeitpunkte. Diskutieren Sie verschiedene mathematische und physikalische Szenarien, die zur Definition von Folgen Anlass geben.

Ergänzungsübung 2

Wir betrachten die Konvergenzbedingung, die Cauchy-Bedingung und die Negationen dieser beiden Bedingungen.

- (a) Formulieren Sie die vier Bedingungen mit Hilfe der Sprechweisen „fast alle“ (d. h. „alle bis auf endlich viele“) und „unendlich oft“.
- (b) Visualisieren Sie die vier Bedingungen mit Hilfe von Diagrammen. Verwenden Sie dabei Ihre Darstellungen von Folgen aus der vorhergehenden Übung.

Ergänzungsübung 3

Geben Sie eine anschauliche und durch Diagramme unterstützte Zusammenfassung des Beweises des Satzes von Bolzano-Weierstraß.

Ergänzungsübung 4

Zeichnen Sie Diagramme zur Visualisierung des Limes Superior und des Limes Inferior einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Erläutern Sie anhand Ihrer Diagramme die Aussagen der obigen Übungen zu den beiden Begriffen.

Ergänzungsübung 5

Betrachten Sie eine Kugel, die auf dem Nullpunkt der Ebene $\mathbb{R}^2$ liegt. Bilden Sie die Punkte der Kugeloberfläche auf die Punkte der Ebene mit Hilfe von Geradenstücken ab, die im Nordpol der Kugel beginnen und auf der Ebene enden (stereographische Projektion). Betrachten Sie nun Folgen in $\mathbb{C}$, die uneigentlich gegen ∞ konvergieren. Durch welche Bedingung sind die zugehörigen Folgen auf der Kugeloberfläche gekennzeichnet? Wie lautet ein Analogon dieses Modells für $\mathbb{R}$? Wie kann man an diesem Modell für $\mathbb{R}$ die uneigentliche Konvergenz gegen ∞ bzw. $-\infty$ erläutern?

Ergänzungsübung 6

Diskutieren Sie Möglichkeiten, eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe von zwei (statt drei) und eine Funktion $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe von drei (statt vier) Dimensionen zu visualisieren. Wie lässt sich eine Funktion $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit Hilfe von nur zwei Dimensionen noch relativ gut visualisieren? Wie sieht in Ihrer Visualisierung eine kreisförmige Bewegung eines Punktes in der Ebene aus? Wie eine spiralförmige Bewegung? Wie der Graph der Funktion $z^3 - 1$?

[Hinweis: Verwenden Sie Farben.]

2. Konvergente Reihen

Mit Hilfe des Konvergenzbegriffs für Folgen können wir auch unendliche Summen der Form $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$ definieren, sog. unendliche Reihen. Ihre Theorie ist vielfältig, subtil und reich an überraschenden Beispielen. Nach den ersten Schritten und Beobachtungen in dieser ganz eigenen Welt stehen zunächst Konvergenzkriterien im Zentrum des Interesses. Im folgenden Kapitel werden wir dann sowohl die allgemeine Theorie der Reihen als auch spezielle Beispiele weiter untersuchen. Dabei ist die explizite Berechnung von unendlichen Summen eher die Ausnahme denn die Regel. Erst mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung werden wir in der Lage sein, die Summen einiger hier betrachteter Reihen tatsächlich anzugeben.

Unendliche Reihen

Betrachten wir von einem naiven Standpunkt aus die unendliche Summe

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

so kommen vielleicht die Zahlen 1, 0 und ihr arithmetisches Mittel $1/2$ als Werte in Frage, oder es entsteht der Eindruck, dass eine unendliche Summation nicht durchführbar ist. Wie immer ist es eine Frage der Definition, welche Antwort korrekt ist. Die folgende Begriffsbildung stellt, gegeben eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Summanden, die Summen ihrer Anfangsstücke

$$s_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n$$

in den Vordergrund. Die Werte s_n tauchen ja in natürlicher Weise auf, wenn man die unendliche Summe $x_0 + x_1 + \dots + x_n + \dots$ von links nach rechts schrittweise berechnet, und es liegt dann nahe, das Ergebnis der unendlichen Summation über den Grenzwert aller so berechneten Teilsummen zu definieren. Wir führen diesen Ansatz nun schrittweise durch.

Definition (*Partialsumme, unendliche Reihe*)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$s_n = \sum_{i \leq n} x_i$$

und nennen s_n die n -te *Partialsumme* der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Weiter heißt die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die durch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definierte (*unendliche*) *Reihe* in $\mathbb{R}$. Die Zahlen x_n , $n \in \mathbb{N}$, heißen auch die *Summanden* oder *Glieder* der Reihe.

Eine unendliche Reihe ist also die unendliche Folge der Partialsummen einer beliebigen Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Formal können wir diese unendliche Reihe schreiben als $(\sum_{i \leq n} x_i)_{n \in \mathbb{N}}$. Ist z. B. $x_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist

0, 1, 3, 6, 10, 15, ...

die zugehörige unendliche Reihe. Explizit lautet diese Reihe $(n(n+1)/2)_{n \in \mathbb{N}}$.

Obige Folge 1, -1, 1, -1, 1, -1, ... besitzt die Partialsummen

1, 1 - 1, 1 - 1 + 1, 1 - 1 + 1 - 1, ...,

und damit ist (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) die zugehörige unendliche Reihe.

Da eine unendliche Reihe eine gewisse unendliche Folge ist, ist die Konvergenz oder Divergenz einer unendlichen Reihe bereits definiert, und gleiches gilt für die uneigentliche Konvergenz gegen ∞ oder $-\infty$. Wir führen lediglich noch eine suggestive Notation ein.

Definition (unendliche Summe)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die durch $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definierte unendliche Reihe. Konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so setzen wir

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

Die Zahl $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ heißt die (unendliche) Summe von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Statt $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ schreiben wir auch $\sum_n x_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ oder $x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$. Varianten wie $\sum_{n \geq 1} x_n$ sind wieder selbsterklärend.

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben, so ist die Notation $(\sum_{i \leq n} x_i)_{n \in \mathbb{N}}$ der zugehörigen Reihe etwas umständlich. Wir vereinbaren deswegen:

Konvention

Wir verwenden die Notation $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ auch zur Bezeichnung der durch die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definierten Reihe.

Damit bedeutet $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ also zweierlei: Im Fall der Konvergenz den Grenzwert der Partialsummen von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und in jedem Fall die Folge dieser Partialsummen. Diese Doppelbedeutung ist aber in der Regel ungefährlich.

Unsere Regeln für die Konvergenz von Folgen führen zu Regeln für die Konvergenz von Reihen. So gilt zum Beispiel:

Satz (Addition, Subtraktion und Skalierung von unendlichen Reihen)

Seien $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(a) \sum_n (x_n + y_n) = \sum_n x_n + \sum_n y_n,$$

$$(b) \sum_n a x_n = a \sum_n x_n \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R},$$

$$(c) \sum_n (x_n - y_n) = \sum_n x_n - \sum_n y_n.$$

Beweis

Für alle n gilt $\sum_{i \leq n} (x_i + y_i) = \sum_{i \leq n} x_i + \sum_{i \leq n} y_i$. Also ist

$$\begin{aligned} \sum_n (x_n + y_n) &= \lim_n \sum_{i \leq n} (x_i + y_i) = \lim_n (\sum_{i \leq n} x_i + \sum_{i \leq n} y_i) = \\ &= \lim_n \sum_{i \leq n} x_i + \lim_n \sum_{i \leq n} y_i = \sum_n x_n + \sum_n y_n. \end{aligned}$$

– Die Aussage (b) wird ähnlich bewiesen, und (c) folgt aus (a) und (b) mit $a = -1$.

Das Produkt $\sum_n x_n \cdot \sum_n y_n$ zweier Reihen hat bei einem naiven distributiven Ausmultiplizieren die Gestalt $\sum_{n,m \in \mathbb{N}} x_n \cdot y_m$. In dieser Darstellung ist aber nicht angegeben, in welcher Reihenfolge die abzählbar vielen Paare (n, m) der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aufsummiert werden, und es ist keineswegs klar, dass bei einer unendlichen Summation die Reihenfolge der Summanden keine Rolle spielt. Wir werden derartige Summationsfragen und weiter auch Produkte von Reihen später noch ausführlich untersuchen.

Unendliche Reihen lassen sich nur in wenigen Fällen elementar berechnen. Wir diskutieren einige Beispiele, für die eine Berechnung in einfacher Weise tatsächlich möglich ist.

Vorgegebene Partialsummen

Zu einer gegebenen Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann man durch Differenzenbildung immer eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ finden, die $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Folge der Partialsummen besitzt. Damit ist also jede Folge auch eine Reihe. Man setzt hierzu einfach $x_0 = s_0$ und weiter $x_n = s_n - s_{n-1}$ für alle $n \geq 1$. Dann gilt

$$\sum_{i \leq n} x_i = x_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} x_i = s_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} (s_i - s_{i-1}) = s_0 + (s_n - s_0) = s_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. (Summen des Typs $\sum_{1 \leq i \leq n} (s_i - s_{i-1})$, die sich durch die gegenseitige Auslöschung ihrer Summanden zu $s_n - s_0$ reduzieren, sind auch als *Teleskopsummen* bekannt.)

Ist nun der Limes s der Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bekannt, so gilt

$$\sum_n x_n = \lim_n s_n = s.$$

Ein Beispiel für diese „indirekte Methode“, bei der die Glieder der Summe zu einem gegebenen Grenzwert s erst konstruiert werden, liefert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = n/(n+1)$ für alle n . Ihr Limes ist 1 und für die Differenzen gilt

$$s_n - s_{n-1} = n/(n+1) - (n-1)/n = 1/(n(n+1)) \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Setzen wir also $x_0 = s_0 = 0$ und $x_n = 1/(n(n+1))$ für alle $n \geq 1$, so gilt

$$\sum_n x_n = \lim_n s_n = 1.$$

Damit haben wir also gezeigt:

Satz (Konvergenz von $\sum_{n \geq 1} 1/(n(n+1))$)

$$1/(1 \cdot 2) + 1/(2 \cdot 3) + 1/(3 \cdot 4) + 1/(4 \cdot 5) + \dots = 1.$$

Berechnung der Partialsummen

Oben stand eine Summe am Anfang, und eine unendliche Reihe mit dieser Summe wurde gefunden. Üblicherweise sind aber Reihen gegeben, deren Summe man berechnen möchte. Manchmal ist dies durch explizite Berechnung der Partialsummen und Ablesen ihres Grenzwerts möglich.

Interessieren wir uns zum Beispiel für obige Summanden $x_n = 1/(n(n+1))$ für $n \geq 1$, so lassen sich die Partialsummen s_n wie folgt finden. Es gilt

$$1/(n(n+1)) = 1/n - 1/(n+1) \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

und damit ist

$$s_n = \sum_{1 \leq i \leq n} 1/(i(i+1)) = \sum_{1 \leq i \leq n} (1/i - 1/(i+1)) = 1 - 1/(n+1) = n/(n+1).$$

Mit ähnlichen Überlegungen kann man die Partialsummen für die Summanden $x_n = 1/(n(n+1)(n+2))$, $n \geq 1$, finden und damit zeigen, dass

$$\sum_{n \geq 1} 1/(n(n+1)(n+2)) = 1/4.$$

Wir überlassen dies dem Leser zur Übung.

Völlig legitim ist es auch, zu gegebenen Summanden x_n einige Partialsummen experimentell zu berechnen, und dann die allgemeine Form für die Partialsummen s_n zu raten. Mit Hilfe von Induktion lässt sich die Vermutung dann oft leicht verifizieren. Ist wieder $x_n = 1/(n(n+1))$ für $n \geq 1$, so berechnen wir

$$s_1 = 1/2, \quad s_2 = 1/2 + 1/6 = 2/3, \quad s_3 = 2/3 + 1/12 = 3/4,$$

$$s_4 = 3/4 + 1/20 = 4/5, \quad s_5 = 4/5 + 1/30 = 5/6,$$

was die Vermutung $s_n = n/(n+1)$ nahelegt, die durch vollständige Induktion bewiesen wird.

Sehr wichtige Beispiele für eine Berechnung der Partialsummen liefert für jedes $x \in \mathbb{R}$ die sog. *geometrische Reihe für x* , deren Glieder durch $x_n = x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert sind. Diese Reihe divergiert offenbar für alle x mit $|x| \geq 1$. Umgekehrt gilt:

Satz (Konvergenz der geometrischen Reihe für x mit $|x| < 1$)

Sei $x \in]-1, 1[$. Dann gilt $\sum_n x^n = 1/(1-x)$ und $\sum_{n \geq 1} x^n = x/(1-x)$.

Beweis

Sei $s_n = \sum_{i \leq n} x^i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$(1 - x^{n+1}) = (1-x) \cdot (x^0 + \dots + x^n)$$

gilt $s_n = (1 - x^{n+1})/(1-x)$. Wegen $|x| < 1$ ist $\lim_n x^{n+1} = 0$, und damit ist

$$\sum_n x^n = \lim_n s_n = \lim_n (1 - x^{n+1})/(1-x) = 1/(1-x).$$

Schließlich ist dann

$$- \sum_{n \geq 1} x^n = 1/(1-x) - x^0 = 1/(1-x) - 1 = x/(1-x).$$

Dem Leser wird vielleicht aufgefallen sein, dass die Faktorisierung

$$(1 - x^{n+1}) = (1 - x) \cdot (x^0 + \dots + x^n)$$

ein Spezialfall der Faktorisierung

$$y^{n+1} - x^{n+1} = (y - x) \cdot (y^n x^0 + y^{n-1} x^1 + \dots + y^1 x^{n-1} + y^0 x^n)$$

ist, die wir im Beweis des Satzes über die Abspaltung der Nullstellen eines Polynoms verwendet haben. In der Tat ist ja 1 eine Nullstelle von $1 - x^{n+1}$. Diese rein algebraisch begründete Faktorisierung gehört wohl zu den wirkungsvollsten Miniaturen der Mathematik, denn die geometrische Reihe ist wie die Abspaltung von Nullstellen ein an vielen Stellen unverzichtbares Hilfsmittel.

Wir betrachten einige Beispiele für die geometrische Reihe. Für $x = 1/2$ erhalten wir

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = 1/2 \cdot 1/(1 - 1/2) = 1.$$

Dieses Ergebnis lässt sich mit Hilfe eines Kuchens veranschaulichen, der nach der Regel „der Nächste erhält die Hälfte von dem, was noch übrig ist“ verteilt wird. Dagegen ergibt die Wahl von $x = -1/3$ die unendliche Summe

$$1 - 1/3 + 1/9 - 1/27 + 1/81 - \dots = 1/(1 - (-1/3)) = 3/4,$$

die sich vielleicht nicht mehr so leicht untermalen lässt.

Die harmonische Reihe

Ist $\sum_n x_n$ eine Reihe und $\varepsilon > 0$ derart, dass $|x_n| > \varepsilon$ für unendlich viele n gilt, so divergiert die Reihe, da für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Partialsummen aus jeder offenen $\varepsilon/2$ -Umgebung von x immer wieder ausbrechen (oder, etwas anders argumentierend: da die Partialsummen dann keine Cauchy-Folge bilden). Ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz von $\sum_n x_n$ ist also, dass die Summanden eine *Nullfolge* bilden, d. h. es gilt $\lim_n x_n = 0$. Es stellt sich die Frage, ob dieses Kriterium auch hinreichend ist. In der Tat bilden ja $\sum_{n \geq 1} 1/(n(n+1))$ und die geometrischen Reihen für x mit $|x| < 1$ konvergente Reihen mit gegen Null strebenden Summanden. Hier konvergieren aber die Nenner quadratisch oder sogar exponentiell schnell gegen Unendlich. Langsamer wachsende Nenner tauchen in der sog. *harmonischen Reihe*

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots$$

auf, die wir formal definieren als die Reihe

$$\sum_{n \geq 1} x_n \text{ mit } x_n = 1/n \text{ für alle } n \geq 1.$$

Die Partialsummen $s_1, s_2, s_3, \dots$ dieser Reihe steigen streng monoton, aber in einer sehr langsamen Art und Weise. Eine Computerberechnung zeigt zum Beispiel, dass die Partialsumme s_{10000} immer noch kleiner als 10 ist. Dieses sehr langsame Wachstum legt die Existenz eines Supremums der s_n nahe. Dass der Schein trügt, zeigt eine bestechend schöne Anwendung des Assoziativgesetzes:

Satz (*Divergenz der harmonischen Reihe*)

Es gilt $\sum_{n \geq 1} 1/n = \infty$.

Beweis

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n \geq 2^k$:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{1 \leq i \leq n} 1/i \geq \sum_{1 \leq i \leq 2^k} 1/i = \\ &1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) + \dots + \\ &\quad (1/(2^{k-1} + 1) + \dots + 1/2^k) \geq \\ &1 + 1/2 + 2/4 + 4/8 + \dots + 2^{k-1}/2^k = \\ - &1 + 2^0/2 + 2^1/4 + 2^2/8 + \dots + 2^{k-1}/2^k = 1 + k/2. \end{aligned}$$

Positive Glieder können also eine unendliche Summe besitzen, obwohl sie gegen Null konvergieren.

Auch viele Ausdünnungen der harmonischen Reihe divergieren, etwa die Reihen $\sum_{n \geq 1} 1/(2n)$ oder $\sum_{n \geq 1} 1/(2n+1)$. Mit Methoden der analytischen Zahlentheorie kann man sogar zeigen, dass die Ausdünnung

$$1/2 + 1/3 + 1/5 + 1/7 + 1/11 + 1/13 + \dots$$

der harmonischen Reihe, in der die Nenner alle Primzahlen durchlaufen, immer noch divergiert.

Auch spielerische Varianten bergen Überraschungen. Streichen wir zum Beispiel alle Summanden $1/n$ der Reihe, in deren Nenner in Dezimaldarstellung die Ziffer 9 vorkommt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &1/1 + 1/2 + \dots + 1/8 + 1/10 + \dots + 1/18 + 1/20 + \dots + \dots + \\ &1/87 + 1/88 + 1/100 + 1/101 + \dots \end{aligned}$$

Es lässt sich nun zeigen, dass die Summe dieser Ausdünnung existiert (siehe Übungen).

Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Wir stellen zunächst einige (zum Teil schon verwendete) elementare Beobachtungen über die Konvergenz von Reihen zusammen.

Satz (*elementare Konvergenzkriterien für unendliche Reihen*)

Sei $\sum_n x_n$ eine unendliche Reihe in $\mathbb{R}$, und sei $s_n = \sum_{i \leq n} x_i$ für alle n .

Dann gilt:

- (a) Die Reihe $\sum_n x_n$ konvergiert genau dann, wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, d. h. wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq m \geq n_0 \quad |\sum_{m \leq i \leq n} x_i| < \varepsilon. \quad (\text{Cauchy-Bedingung für Reihen})$$
- (b) Ist $x_n \geq 0$ für alle n , so konvergiert $\sum_n x_n$ genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt ist. In diesem Fall ist $\sum_n x_n = \sup_n s_n$. Eine analoge Aussage gilt für Summanden x_n mit $x_n \leq 0$ für alle n .
- (c) Konvergiert $\sum_n x_n$, so gilt $\lim_n x_n = 0$.
- (d) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_n x_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n \geq k} x_n$ konvergiert.
- (e) Ist $\sum_n y_n$ eine unendliche Reihe und gilt $x_n = y_n$ für alle n größer-gleich einem n_0 , so konvergiert die Reihe $\sum_n x_n$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_n y_n$ konvergiert.

Wir betrachten nun einige über diese Beobachtungen hinausgehende Konvergenzkriterien.

Konvergente Majoranten

Wir definieren zunächst:

Definition (*Majorante*)

Seien $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ Reihen in $\mathbb{R}$. Dann heißt $\sum_n y_n$ eine *Majorante* von $\sum_n x_n$, falls gilt:

$$|x_n| \leq y_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $y_n \geq 0$ für alle Glieder einer Majorante gilt.

Damit können wir die Mutter aller weiteren Konvergenzkriterien formulieren:

Satz (*Majorantenkriterium*)

Sei $\sum_n y_n$ eine konvergente Majorante von $\sum_n x_n$. Dann konvergiert $\sum_n x_n$ und es gilt $\sum_n x_n \leq \sum_n y_n$.

Beweis

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es aufgrund der Cauchy-Bedingung für Reihen ein n_0 , sodass $\sum_{m \leq i \leq n} y_i < \varepsilon$ für alle $n \geq m \geq n_0$ gilt. Dann ist aber auch

$$|\sum_{m \leq i \leq n} x_i| \leq \sum_{m \leq i \leq n} |x_i| \leq \sum_{m \leq i \leq n} y_i < \varepsilon,$$

und damit folgt die Konvergenz von $\sum_n x_n$ wieder nach der Cauchy-Bedingung für Reihen. Die Ungleichung $\sum_n x_n \leq \sum_n y_n$ ist klar, da

$$- \sum_{i \leq n} x_i \leq \sum_{i \leq n} y_i \text{ für alle } n \text{ gilt.}$$

Als Anwendung des Majorantenkriteriums zeigen wir:

Korollar (Konvergenz der Reihe der reziproken k -ten Potenzen für $k \geq 2$)

Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ konvergiert die Reihe $\sum_{n \geq 1} 1/n^k$ und es gilt $\sum_{n \geq 1} 1/n^k \leq 2$.

Beweis

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + n = n(n+1),$$

d.h. $2/(n(n+1)) \geq 1/n^2$. Damit gilt dann für alle $k \geq 2$ und alle $n \geq 1$:

$$1/n^k \leq 1/n^2 \leq 2/(n(n+1)).$$

Nach unseren früheren Ergebnissen ist aber $\sum_{n \geq 1} 2/(n(n+1)) = 2$, also ist

$$- \text{die Reihe } \sum_{n \geq 1} 2/(n(n+1)) \text{ eine konvergente Majorante von } \sum_{n \geq 1} 1/n^k.$$

Speziell konvergiert die Summe $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ der reziproken Quadrate. Euler konnte bereits 1735 zeigen, dass

$$\sum_{n \geq 1} 1/n^2 = 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + \dots = \pi^2/6.$$

Allgemeiner sind die Summen $\sum_{n \geq 1} 1/n^k$ für alle geraden Exponenten k seit Euler bekannt, und alle diese Summen involvieren die Potenzen π^k . Dagegen weiß man bis heute noch sehr wenig über diese Summen für ungerade Exponenten. Von der Summe $\sum_{n \geq 1} 1/n^3$ ist zum Beispiel die Irrationalität bekannt.

Die Summen $\sum_{n \geq 1} 1/n^k$, $k \geq 2$, spielen in der Mathematik eine wichtige Rolle. In der komplexen Analysis untersucht man die berühmte *Riemannsche Zeta-Funktion* $\zeta: \mathbb{C} - \{1\} \rightarrow \mathbb{C}$, die durch die Eigenschaft $\zeta(z) = \sum_{n \geq 1} 1/n^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > 1$ ausgezeichnet ist. Zwischen der Zeta-Funktion und den Primzahlen besteht ein enger Zusammenhang, den wir hier durch Zitieren der auf der geometrischen Reihe und der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung basierenden *Eulerschen Produktdarstellung*

$$\zeta(z) = ((1 - 1/2^z) \cdot (1 - 1/3^z) \cdot (1 - 1/5^z) \cdot \dots \cdot (1 - 1/p^z) \cdot \dots)^{-1}, \operatorname{Re}(z) > 1,$$

in der p alle Primzahlen durchläuft, lediglich andeuten können. Von Interesse ist hier vor allem die bis heute offene *Riemannsche Vermutung*, die besagt, dass alle komplexen Nullstellen der Zeta-Funktion den Realteil $1/2$ besitzen. Diese Aussage erlaubt eine Feinanalyse der Verteilung der Primzahlen.

Geometrische Reihen als Majoranten

Das Majorantenkriterium und die Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_n x^n$ für $|x| < 1$ liefern sofort:

Satz (*Majorisierung durch eine geometrische Reihe*)

Sei $\sum_n x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$. Weiter seien $x \in [0, 1[$ und $a \geq 0$ mit $|x_n| \leq a x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_n x_n$, und es gilt $\sum_n x_n \leq a/(1-x)$.

Die Bedingung „ $|x_n| \leq a x^n$ “ können wir auch als „ $\sqrt[n]{|x_n|} \leq \sqrt[n]{a} x$ “ schreiben. Für alle $a > 0$ gilt zudem $\lim_n \sqrt[n]{a} = 1$. Diese Überlegungen führen zu:

Satz (*Wurzelkriterium*)

Sei $\sum_n x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$, und sei $w = \limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} \leq \infty$. Dann gilt:

- (a) Ist $w < 1$, so konvergiert $\sum_n x_n$.
- (b) Ist $w > 1$, so divergiert $\sum_n x_n$.

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

In der Fallunterscheidung (a) und (b) ist das Fehlen von „ $w = 1$ “ augenfällig. Die Reihen $\sum_{n \geq 1} 1/n$ und $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ zeigen aber, dass im Fall $w = 1$ sowohl Konvergenz als auch Divergenz vorliegen kann. Hier ist also keine allgemeine Aussage möglich.

Auch das folgende schwächere, aber oft einfach überprüfbare Kriterium nutzt die Majorisierung durch eine geometrische Reihe:

Satz (*Quotientenkriterium*)

Sei $\sum_n x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$ für alle n . Weiter sei $x \in [0, 1[$ mit

$$|x_{n+1}/x_n| \leq x \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert $\sum_n x_n$, und es gilt $\sum_n x_n \leq |x_0|/(1-x)$.

Genauer gilt für jede Reihe $\sum_n x_n$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$ für alle n :

- (a) Ist $\limsup_n |x_{n+1}/x_n| < 1$, so konvergiert $\sum_n x_n$.
- (b) Existiert ein n_0 mit $|x_{n+1}/x_n| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, so divergiert $\sum_n x_n$.

Beweis

Nach Voraussetzung gilt $|x_1| \leq x |x_0|$ und weiter $|x_2| \leq x |x_1| \leq x^2 |x_0|$. Allgemein zeigt eine einfache Induktion nach n , dass

$$|x_n| \leq x^n |x_0| \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also ist $\sum_n (x^n |x_0|)$ eine Majorante von $\sum_n x_n$, und aus

$$\sum_n (x^n |x_0|) = |x_0| \sum_n x^n = |x_0|/(1-x)$$

folgt die Konvergenz und die Abschätzung.

– Der Beweis des Zusatzes kann wieder dem Leser überlassen bleiben.

Die Bedingung „ $|x_{n+1}/x_n| \leq x$ “ führt also zur Majorisierung der Reihe $\sum_n x_n$ durch eine (um $|x_0|$ skalierte) geometrische Reihe. Diese Majorisierung ist aber nicht äquivalent zu „ $|x_{n+1}/x_n| \leq x$ “, da sie ja zum Beispiel für Reihen erfüllt sein kann, für die $x_n = x_{n+1}$ für unendlich viele n gilt. Damit nutzt das Quotientenkriterium das Potential der geometrischen Majorisierung nicht voll aus.

Die schon oben betrachteten Reihen $\sum_{n \geq 1} 1/n$ und $\sum_{n \geq 1} 1/n^2$ zeigen wieder, dass im Fall „ $\limsup_n |x_{n+1}/x_n| = 1$ “ keine allgemeine Konvergenzaussage möglich ist. Dem Leser wird darüber hinaus vielleicht auch aufgefallen sein, dass das Divergenzkriterium (b) im Quotientenkriterium anders aussieht als im Wurzelkriterium. In der Tat ist die Bedingung „ $\limsup_n |x_{n+1}/x_n| > 1$ “ nicht hinreichend für die Divergenz. Als Beispiel betrachten wir die Reihe

$$1/2^1 + 1/2^0 + 1/2^3 + 1/2^2 + 1/2^5 + 1/2^4 + \dots,$$

die aus der geometrischen Reihe

$$1/2^0 + 1/2^1 + 1/2^2 + 1/2^3 + 1/2^4 + 1/2^5 + \dots$$

durch paarweises Vertauschen der Glieder hervorgeht. Hier gilt

$$\limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} = 1/2 < 1, \text{ aber}$$

$$\limsup_n |x_{n+1}/x_n| = 2 > 1.$$

Alternierende Reihen

Wechselt in einer Reihe Glied für Glied das Vorzeichen, so nennt man die Reihe *alternierend*. Alternierende Reihen haben also, wenn wir den ersten Summanden der Einfachheit halber als nichtnegativ annehmen, die Form

$$x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \dots$$

mit $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Partialsummen solcher Reihen oszillieren: Ausgehend von x_0 nehmen sie um x_1 ab, dann um x_2 zu, dann um x_3 ab, usw. Das folgende klassische Konvergenzkriterium besagt, dass eine alternierende Reihe konvergiert, wenn die Ausschläge dieser Oszillation monoton gegen Null konvergieren:

Satz (Leibniz-Kriterium)

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

(a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Dann existiert $x = \sum_n (-1)^n x_n$, und für die Partialsummen $s_n = \sum_{i \leq n} (-1)^i x_i$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: x liegt zwischen s_n und s_{n+1} und $|x - s_n| \leq x_{n+1}$.

Beweis

Für die Partialsummen s_n der Reihe gilt nach (a):

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \dots \leq s_4 \leq s_2 \leq s_0.$$

Also existieren

$$x_u = \sup_{k \in \mathbb{N}} s_{2k+1}, \quad x_g = \inf_{k \in \mathbb{N}} s_{2k}.$$

Dann gilt $x_u \leq x_g$. Aber nach (b) gilt

$$x_g - x_u = \lim_k (s_{2k} - s_{2k+1}) = \lim_k x_{2k+1} = 0.$$

Also ist $x_u = x_g$. Für alle $\varepsilon > 0$ existiert aber nach Definition von x_u und x_g ein k_0 , sodass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$x_u - s_{2k+1} < \varepsilon, \quad s_{2k} - x_g < \varepsilon.$$

Für $x = x_u = x_g$ gilt also $|x - s_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq 2k_0$. Dies zeigt, dass

$$x = \lim_n s_n = \sum_n (-1)^n x_n.$$

Für alle n liegt x zwischen s_n und s_{n+1} , und es gilt $|s_n - s_{n+1}| = x_{n+1}$.

— Folglich ist $|x - s_n| \leq x_{n+1}$ für alle n .

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert also zum Beispiel die *alternierende harmonische Reihe*

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - \dots,$$

also die Reihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n$. Die Summe ist nicht einfach zu bestimmen. Wir werden später aber zeigen können, dass die alternierende harmonische Reihe gegen den Logarithmus der Zahl 2 konvergiert. Dieser Wert ist zudem der Limes der „zweiten Hälften“ der Partialsummen der harmonischen Reihe, denn es gilt

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} 1/n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/(n+1) + \dots + 1/(2n)).$$

Ebenso werden wir zeigen, dass die *Leibnizsche Reihe*

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \dots,$$

also die Reihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/(2n-1)$, gegen $\pi/4$ konvergiert.

Abelsche Summation und Summen über Produkte

Wir beweisen noch ein Konvergenzkriterium für Reihen der Form $\sum_n x_n y_n$, das das Leibniz-Kriterium als Spezialfall enthält. Den Ausgangspunkt bildet eine algebraische Umformung:

Satz (*Abelsche Summation*)

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Weiter sei $s_{-1} = 0$ und $s_n = \sum_{i \leq n} x_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $n_0 \leq n_1$:

$$\sum_{n_0 \leq n \leq n_1} x_n y_n = \sum_{n_0 \leq n < n_1} (s_n (y_n - y_{n+1})) + s_{n_1} y_{n_1} - s_{n_0-1} y_{n_0}.$$

Speziell gilt für alle n_1 :

$$\sum_{n \leq n_1} x_n y_n = \sum_{n < n_1} (s_n (y_n - y_{n+1})) + s_{n_1} y_{n_1}.$$

Beweis

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n = s_n - s_{n-1}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{n_0 \leq n \leq n_1} x_n y_n &= \sum_{n_0 \leq n \leq n_1} (s_n - s_{n-1}) y_n = \\ \sum_{n_0 \leq n \leq n_1} s_n y_n - \sum_{n_0 \leq n \leq n_1} s_{n-1} y_n &= \\ \sum_{n_0 \leq n \leq n_1} s_n y_n - \sum_{n_0-1 \leq n < n_1} s_n y_{n+1} &= \\ - \sum_{n_0 \leq n < n_1} (s_n (y_n - y_{n+1})) + s_{n_1} y_{n_1} - s_{n_0-1} y_{n_0}. \end{aligned}$$

In der rechten Seite der Abelschen Summation tauchen nur noch die Partialsummen der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf, nicht mehr die Folgenglieder selbst. Dies lässt sich zur Gewinnung von Konvergenzaussagen verwenden. Hierzu notieren wir zunächst:

Korollar (*Abelsche Ungleichung*)

Gilt $y_0 \geq y_1 \geq \dots \geq y_n \geq \dots \geq 0$ in der Situation des Satzes über die Abelsche Summation, so gilt für alle $n_0 \leq n_1$:

$$\begin{aligned} |\sum_{n_0 \leq n \leq n_1} x_n y_n| &\leq 2 \cdot y_{n_0} \cdot \max_{n_0-1 \leq n \leq n_1} |s_n|, \\ |\sum_{n \leq n_1} x_n y_n| &\leq y_0 \cdot \max_{n \leq n_1} |s_n|. \end{aligned}$$

Beweis

Sei $s = \max_{n_0-1 \leq n \leq n_1} |s_n|$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\sum_{n_0 \leq n \leq n_1} x_n y_n| &\leq |\sum_{n_0 \leq n < n_1} (s_n (y_n - y_{n+1}))| + |s_{n_1} y_{n_1}| + |s_{n_0-1} y_{n_0}| \leq \\ s \cdot (\sum_{n_0 \leq n < n_1} (y_n - y_{n+1}) + y_{n_1} + y_{n_0}) &= s \cdot 2 \cdot y_{n_0}. \end{aligned}$$

– Die Abschätzung für $n_0 = 0$ ergibt aus $s_{-1} = 0$ (und $|s_{-1} y_0| = 0$).

Hieraus folgt nun:

Satz (*Konvergenzsatz für Produktsummen*)

Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- Die Partialsummen $s_n = \sum_{i \leq n} x_i$ sind beschränkt, d. h. es existiert $s^* = \sup(\{|s_n| \mid n \in \mathbb{N}\})$.
- $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert monoton fallend gegen 0.

Dann konvergiert $\sum_n x_n y_n$.

Beweis

Ist $s^* = 0$, so ist die Aussage klar. Sei also $s^* > 0$. Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_n x_n y_n$ die Cauchy-Bedingung erfüllt. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung (b) existiert ein n^* mit $y_{n^*} \leq \varepsilon/(2 s^*)$. Dann gilt nach der Abelschen Ungleichung für alle n_0, n_1 mit $n^* \leq n_0 \leq n_1$:

$$- |\sum_{n_0 \leq n \leq n_1} x_n y_n| \leq 2 \cdot y_{n_0} \cdot s^* \leq 2 \cdot y_{n^*} \cdot s^* \leq \varepsilon.$$

Wir erhalten:

Zweiter Beweis des Leibniz-Kriteriums für alternierende Reihen

Ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert $\sum_n (-1)^n y_n$,
 – denn die Partialsummen von $\sum_n (-1)^n$ sind beschränkt.

Eine weitere Anwendung des Konvergenzsatzes werden wir bei der Diskussion der komplexen Potenzreihen kennenlernen.

Absolute Konvergenz

Die alternierende harmonische Reihe zeigt, dass eine Reihe $\sum_n x_n$ konvergieren kann, während $\sum_n |x_n|$ divergiert. Wir definieren hierzu:

Definition (absolute Konvergenz)

Eine Reihe $\sum_n x_n$ in $\mathbb{R}$ *konvergiert absolut*, falls $\sum_n |x_n|$ konvergiert.

Aus der Konvergenz folgt also nicht in allen Fällen die absolute Konvergenz. Umgekehrt ist leicht zu sehen, dass die absolute Konvergenz die Konvergenz einer Reihe nach sich zieht.

Alle obigen durch Majorisierung gewonnenen Kriterien liefern absolute Konvergenz, da in den Konvergenzbedingungen (etwa in „ $|x_{n+1}|/|x_n| < x$ “) lediglich die Beträge der Folgenglieder verwendet werden, d. h. diese Kriterien gelten automatisch für $\sum_n |x_n|$, wenn sie für $\sum_n x_n$ gelten.

Im nächsten Kapitel werden wir die besonderen Eigenschaften absolut konvergenter Reihen genauer untersuchen.

Reihen komplexer Zahlen

Obige Definitionen übertragen sich wieder in der offensichtlichen Weise nach $\mathbb{C}$. Ist also $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, so bezeichnet $\sum_n z_n$ die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – und im Falle der Existenz auch ihren Grenzwert – der Partialsummen $s_n = \sum_{k \leq n} z_k$. (Der Index i ist im Umfeld von $\mathbb{C}$ ungeeignet, da das Zeichen i hier für die imaginäre Einheit vergeben ist.)

Die geometrische Reihe $\sum_n z^n$ konvergiert in $\mathbb{C}$ gegen $1/(1 - z)$ für alle z mit $|z| < 1$. Der Beweis bleibt gleich. Ebenso gelten die Konvergenzkriterien auch für komplexe Reihen, ohne dass wir neue Beweise führen müssten. Der Abelsche Summationssatz gilt in jedem Körper K und damit insbesondere auch in $\mathbb{C}$. Weiter bleiben die Abelsche Ungleichung und der Konvergenzsatz für Produktsummen für Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ (und monoton fallende Nullfolgen $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$) richtig.

Übungen

2.2.1 Unendliche Reihen

Übung 1

- (a) Sei $\sum_n x_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Wir setzen

$$y_n = (x_n + x_{n+1})/2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_n x_n = x_0/2 + \sum_n y_n$.

- (b) Wenden Sie die Methode aus (a) auf die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n$ an und zeigen Sie dadurch:

$$1 + \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} 1/(n(n+1)) = 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n.$$

- (c) Zeigen Sie durch eine ähnliche Zusammenfassung von Folgengliedern, dass

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n = \sum_{k \geq 1} 1/((2k-1)(2k)).$$

Übung 2

Zeigen Sie, dass $\sum_{n \geq 1} 1/(n(n+1)(n+2)) = 1/4$.

[Stellen Sie $1/(n(n+1)(n+2))$ als $a/n + b/(n+1) + c/(n+2)$ für geeignete $a, b, c \in \mathbb{Q}$ dar und berechnen Sie damit die Partialsummen der Reihe.]

Übung 3

Sei $x \in]-1, 1[$. Zeigen Sie, dass $\sum_n n x^n = x/(1-x)^2$.

Übung 4

Seien $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ die natürlichen Zahlen größergleich 1, in deren Dezimaldarstellung keine 9 vorkommt. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} 1/k_n$ konvergiert.

[Hinweis: Zählen Sie die Summanden der Reihe, die sich in den Intervallen $[1, 10[$, $[10, 100[$, $[100, 1000[$, ... befinden. Benutzen Sie die geometrische Reihe zur Abschätzung.]

Übung 5

Zeigen Sie:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} 1/n = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/(n+1) + \dots + 1/(2n)).$$

[Hinweis: Zeigen Sie, dass die endlichen Summen $1/(n+1) + \dots + 1/(2n)$ der rechten Seite Partialsummen der alternierenden Reihe sind.]

Übung 6

Sei $\sum_{n \geq 1} x_n$ eine gegen s konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die arithmetischen Mittel der Partialsummen $s_n = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i$ der Reihe ebenfalls gegen s konvergieren, d. h. dass gilt:

$$\lim_{n \geq 1} (s_1 + \dots + s_n)/n = s.$$

Übung 7

Sei $\sum_n x_n$ eine gegen s konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ mit $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n \geq \dots \geq 0$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gelte

$$x_k \leq \sum_{n > k} x_n.$$

Zeigen Sie, dass für alle $t \in]0, s]$ eine streng monoton steigende Folge $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen existiert mit $\sum_n x_{i_n} = t$.

2.2.2 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen*Übung 1*

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

(a) $\sum_n x_n$ konvergiert genau dann, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq m \geq n_0 \mid \sum_{m \leq i \leq n} x_i \mid < \varepsilon.$$

(b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_n x_n$ konvergiert genau dann, wenn $\sum_{n \geq k} x_n$ konvergiert.

Übung 2

Seien $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ zwei Reihen mit $0 \leq x_n \leq y_n$ für alle n , und die Reihe $\sum_n x_n$ sei divergent. Zeigen Sie, dass auch $\sum_n y_n$ divergent ist.

Übung 3

Sei $\sum_n x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$, und sei $w = \limsup_n \sqrt[n]{|x_n|} \leq \infty$. Zeigen Sie:

(a) Ist $w < 1$, so konvergiert $\sum_n x_n$.

(b) Ist $w > 1$, so divergiert $\sum_n x_n$.

Übung 4

Sei $\sum_n x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ mit $x_n \neq 0$ für alle n . Zeigen Sie:

(a) Ist $\limsup_n |x_{n+1}/x_n| < 1$, so konvergiert $\sum_n x_n$.

(b) Existiert ein n_0 mit $|x_{n+1}/x_n| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$, so divergiert $\sum_n x_n$.

Übung 5

Zeigen Sie:

- (a) $\sum_{n \geq 0} 1/n!$ konvergiert.
- (b) $\sum_{n \geq 1} 1/\sqrt{n(n+1)}$ divergiert.
- (c) $\sum_{n \geq 1} n!/n^n$ konvergiert.
- (d) $\sum_{n \geq 1} n^2/2^n$ konvergiert.

*Übung 6*Sei $\sum_n x_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$\sum_n x_n = \sum_k x_{2k} + \sum_k x_{2k+1}.$$

Gilt diese Aussage für alle konvergenten Reihen $\sum_n x_n$?*Übung 7*Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 0$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $\sum_n x_n$ konvergiert.
- (b) $\sum_n 2^n x_{2^n}$ konvergiert.

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Äquivalenz, dass $\sum_{n \geq 1} 1/\sqrt{n^3}$ konvergiert.*Übung 8*Sei $\sum_n x_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$, und sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monotone und beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\sum_n x_n y_n$ konvergiert.*Übung 9*Sei $\sum_n x_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ derart, dass $(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Zeigen Sie, dass $\lim_n n x_n = 0$.

Kann hier „absolut konvergent“ zu „konvergent“ abgeschwächt werden?

*Übung 10*Seien $\sum_n x_n^2$ und $\sum_n y_n^2$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:Die Reihe $\sum_n x_n y_n$ ist absolut konvergent.*Übung 11*

Zeigen Sie:

- (a) $\sum_{n \geq 0} x^{(2n+1)} = x/(1-x^2)$ für alle $x \in]-1, 1[$.
- (b) $\sum_{n \geq 1} 1/(2n-1)^2 = 3/4 \sum_{n \geq 1} 1/n^2$.

Fünfte Ergänzungen: Die Dezimaldarstellung reeller Zahlen, II

Mit Hilfe des Begriffs der unendlichen Reihe wollen wir nun die in den Ergänzungen von Kapitel 1.2 eingeführten Dezimalbrüche noch genauer untersuchen. Dort hatten wir einen unendlichen Dezimalbruch $n, a_1 a_2 \dots$ mit einer natürlichen Zahl n und Dezimalziffern $a_1, a_2, \dots \in \{0, \dots, 9\}$ als das Supremum der Menge seiner endlichen Approximationen definiert:

$$n, a_1 a_2 \dots = \sup(\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\}).$$

Nach Definition gilt dabei

$$n, a_1 \dots a_k = n + \sum_{1 \leq i \leq k} a_i / 10^i.$$

für die Näherungsbrüche. Mit Hilfe des Begriffs der unendlichen Reihe lässt sich diese Summenform auf die unendlichen Dezimalbrüche übertragen:

Ergänzungsübung 1

Zeigen Sie, dass für alle unendlichen Dezimalbrüche $n, a_1 a_2 \dots$ gilt:

$$n, a_1 a_2 \dots = n + \sum_{k \geq 1} a_k / 10^k.$$

Die Aussage der Übung wird oft auch zur Definition unendlicher Dezimalbrüche verwendet. In diesem Fall ist ein unendlicher Dezimalbruch dann die konvergente Reihe $n + \sum_{k \geq 1} a_k / 10^k$ und bezeichnet also wie üblich sowohl eine bestimmte Folge als auch eine bestimmte reelle Zahl. (Bei der Definition über Suprema ist die Notation $n, a_1 a_2 \dots$ ebenfalls zweideutig: Als formaler Ausdruck kann $n, a_1 a_2 \dots$ als die Folge $(n, a_1, a_2, \dots)$ aufgefasst werden, und daneben bezeichnet $n, a_1 a_2 \dots$ die reelle Zahl $\sup(\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\})$.)

In jedem Falle sind unendliche Dezimalbrüche im Umfeld des Grenzwertbegriffs einzuordnen:

$$n, a_1 a_2 \dots = \sup(\{n, a_1 \dots a_k \mid k \geq 1\}) = \lim_k n, a_1 \dots a_k = n + \sum_{k \geq 1} a_k / 10^k.$$

Die reelle Zahl $n, a_1 a_2 \dots$ ist ein Supremum einer gewissen Menge rationaler Zahlen oder ein Grenzwert einer gewissen Folge rationaler Zahlen. Eine genauere Erklärung, warum $0,999\dots = 1$ ist und nicht noch „immer etwas fehlt“, kommt um den Supremums- oder Grenzwertbegriff letztendlich nicht herum. Dabei lässt sich die Gleichheit von $0,999\dots = 1$ bereits innerhalb der rationalen Zahlen diskutieren. Endliche Dezimalbrüche (oder allgemeiner endliche b -adische Brüche) lassen sich in jedem angeordneten Körper definieren. Die Vollständigkeit der reellen Zahlen führt dazu, dass in $\mathbb{R}$ jeder unendliche Dezimalbruch $n, a_1 a_2 \dots$ existiert. Aber auch in $\mathbb{Q}$ existieren gewisse unendliche Dezimalbrüche $n, a_1 a_2 \dots$. Ein Beispiel ist gerade $0,999\dots$. Wir wollen uns dies noch einmal explizit überlegen:

Ergänzungsübung 2

Für alle $k \geq 1$ sei $x_k = 0,9 \dots 9$ mit k Neunen. Zeigen Sie unter Verwendung der Supremums- oder Reihendefinition, dass $0,999\dots = 1$.

Isolieren Sie dabei die Kernpunkte Ihrer Argumentation.

Offen sind an dieser Stelle noch die beiden folgenden Fragen:

Welche unendlichen Dezimalbrüche $n, a_1 a_2 \dots$ sind rationale Zahlen?

Welche reellen Zahlen besitzen mehr als eine Dezimaldarstellung?

Wir beginnen mit der Untersuchung der ersten der beiden Fragen. Einige einfache Berechnungen suggerieren, dass bei der Dezimaldarstellung rationaler Zahlen Nachkommaziffern, die sich periodisch wiederholen, eine wichtige Rolle spielen. Wir nennen einen unendlichen Dezimalbruch *periodisch* mit der *Periode* $c_1 \dots c_m$ der *Länge* m , falls er von der Form

$$n, a_1 \dots a_k c_1 \dots c_m c_1 \dots c_m c_1 \dots c_m \dots$$

ist, also in der unendlichen Wiederholung des Ziffernblocks $c_1 \dots c_m$ endet. (Hierbei ist $k = 0$, also die Form $n, c_1 \dots c_m c_1 \dots c_m c_1 \dots c_m \dots$, möglich.) Wir schreiben dann auch

$$n, a_1 \dots a_k \overline{c_1 \dots c_m}$$

für diesen Dezimalbruch. So gilt beispielsweise

$$0,999\dots = 0,\overline{9}; \quad 1/7 = 0,\overline{142857}; \quad 0,67121212\dots = 0,67\overline{12} = 0,67\overline{1212};$$

und auch

$$2,5 = 2,5\overline{0} = 2,5\overline{00}.$$

Eine Periode $c_1 \dots c_m$ heißt *echt*, falls sie nicht nur aus Nullen besteht. Weiter heißt sie *minimal*, falls sie nicht von der Form $d_1 \dots d_j d_1 \dots d_j \dots d_1 \dots d_j$ ist, d.h. nicht aus endlich vielen Wiederholungen eines kürzeren Ziffernblocks besteht. So gilt zum Beispiel $0,1\overline{3} = 0,1\overline{33}$ mit den Perioden 3 und 33, aber nur die Periode 3 ist minimal. Minimale Perioden sind im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, da zum Beispiel 12 und 21 minimale Perioden von $0,1\overline{2}$ und $0,1\overline{21}$ sind.

Es gilt nun die folgende ansprechende Äquivalenz:

Ergänzungsübung 3

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für alle $x \in \mathbb{R}$ äquivalent sind:

- (a) x ist rational.
- (b) x besitzt eine periodische Dezimaldarstellung.

[Hinweis: Verwenden Sie die geometrische Reihe für „(b) impliziert (a)“.]

Die zweite Frage nach der Eindeutigkeit der Darstellung können wir ebenfalls vollständig beantworten:

Ergänzungsübung 4

Zeigen Sie:

- (a) Jede reelle Zahl x besitzt höchstens eine endliche Dezimaldarstellung, die nicht in der Ziffer 0 endet. Besitzt $x \neq 0$ eine endliche Dezimaldarstellung, so besitzt x auch eine unendliche Dezimaldarstellung mit der Periode 9.
- (b) Jede reelle Zahl x besitzt höchstens zwei verschiedene unendliche Dezimaldarstellungen. Besitzt x zwei verschiedene unendliche Dezimaldarstellungen, so hat die eine die Periode 0 und die andere die Periode 9. Insbesondere ist dann x eine rationale Zahl.
- (c) Ist $x = n/m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}^*$, ein gekürzter Bruch, so besitzt x genau dann eine endliche Dezimaldarstellung, wenn m von der Form $2^a 5^b$ für $a, b \in \mathbb{N}$ ist.

Analoge Aussagen gelten für b -adische Darstellungen. Für $b = 2$ sind zum Beispiel 1,000... und 0,111... die beiden unendlichen Dualdarstellungen der Zahl 1, und genau die rationalen Zahlen $m/2^a$ besitzen eine endliche Dualdarstellung.

Dezimaldarstellungen lassen sich noch vielfältig weiter studieren. Eine interessante Beobachtung ist zum Beispiel:

- (a) Die Zahl 7 ist kein Teiler von 9, 99, 999, 9999, 99999.
- (b) Die Zahl 7 ist ein Teiler von 999999.
- (c) Die Länge jeder minimalen Periode von $1/7$ ist 6.

Ebenso ist 11 kein Teiler von 9, aber ein Teiler von 99, und die Länge der minimalen Perioden von $1/11 = 0,090909\ldots$ ist 2. Allgemein gilt:

Ergänzungsübung 5

Sei $p \geq 3$ eine natürliche Zahl, die nicht durch 2 und nicht durch 5 teilbar ist. Sei k_1 die Länge einer minimalen Periode der Dezimaldarstellung von $1/p$, und sei k_2 die kleinste natürliche Zahl $k \geq 1$ mit der Eigenschaft:

p ist ein Teiler von $9 \dots 9$, mit k Neunen.

Dann gilt $k_1 = k_2$.

[zu $k_2 \leq k_1$: Ist k die Länge einer Periode von $1/p$, so gilt für ein geeignetes m $10^m/p = n + 0, \overline{a_1 \dots a_k} = n + a/(10^k - 1)$, wobei a die aus den Ziffern $a_1 \dots a_k$ gebildete Dezimalzahl ist. Hieraus lässt sich folgern, dass p ein Teiler von $10^k - 1$ ist.]

Es ist ein offenes Problem, ob es unendlich viele Primzahlen $p \geq 2$ gibt derart, dass die Länge jeder minimalen Periode von $1/p$ in Dezimaldarstellung gleich $p - 1$ ist (wie etwa bei $1/7$, nicht aber bei $1/11$). Dies folgt aus der sog. *Artinschen Vermutung* von 1927, die bislang nur Hilfe einer Verstärkung der Riemannschen Vermutung bewiesen werden konnte.

3. Zur Theorie der Reihen

In diesem Kapitel setzen wir die Untersuchung der unendlichen Reihen fort. Dabei betrachten wir neben allgemeinen Sätzen wieder wichtige spezielle Beispiele.

Umordnungen und Produkte

Für unendliche Summen gelten viele, aber nicht alle aus dem Endlichen vertrauten Rechengesetze. Wir dürfen zum Beispiel in einer konvergenten Reihe die geraden mit den ungeraden Gliedern vertauschen, ohne die Summe der Reihe zu verändern:

$$\begin{aligned}x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2n} + x_{2n+1} + \dots &= \\x_1 + x_0 + x_3 + x_2 + \dots + x_{2n+1} + x_{2n} + \dots &\end{aligned}$$

Weiter dürfen wir in einer konvergenten Reihe Blöcke aus endlich vielen Gliedern zusammenfassen:

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots = (x_0 + x_1) + (x_2 + \dots + x_9) + \dots + (x_n + \dots + x_m) + \dots$$

Formal: Ist $\sum_n x_n$ eine konvergente Reihe und ist $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen mit $i_0 = 0$, so gilt

$$\sum_n x_n = \sum_n (\sum_{i_n \leq i < i_{n+1}} x_i).$$

Dagegen kann eine derartige Gruppierung konvergieren, ohne dass die Ausgangsreihe konvergiert: $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ divergiert, aber $(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$ konvergiert.

Von besonderem Interesse ist das Kommutativgesetz im Unendlichen, das uns im vorherigen Kapitel bereits davon abgehalten hat, das Produkt $(\sum_n x_n)(\sum_n y_n)$ zweier Reihen als $\sum_{n,m} x_n y_m$ zu definieren; letztere Notation wäre nur dann eindeutig, wenn das Ergebnis der Summation nicht von der Reihenfolge abhängt, in der die Zahlenpaare (n, m) bei der Summation durchlaufen werden. In der Tat reagieren manche unendliche Summen aber empfindlich auf Umordnungen ihrer Summanden. Anhand der alternierenden harmonischen Reihe

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

lässt sich dies gut illustrieren. Wir können hier zuerst viele positive Glieder aufsummieren, dann $1/2$ abziehen, dann wieder viele positive Glieder aufsummieren, dann $1/4$ abziehen, usw. Aufgrund der Divergenz der „halben“ harmoni-

schen Reihen $1 + 1/3 + 1/5 + \dots$ und $1/2 + 1/4 + 1/6 + \dots$ ist leicht einzusehen, dass wir mit derartigen Methoden eine andere Summe oder sogar eine divergente Reihe erzeugen können. So gilt zum Beispiel (siehe Übungen):

$$1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + 1/5 - 1/10 - 1/12 + \dots = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

$$1 - 1/2 + 1/3 + 1/5 - 1/4 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 - 1/6 + \dots = \infty,$$

wobei in der ersten Reihe stets zwei negative auf ein positives Glied folgen, während in der zweiten Reihe ein negatives Glied nach 1, 2, 4, 8, 16, ... positiven Gliedern erscheint. Alle Summanden der alternierenden harmonischen Reihe werden dabei beachtet, eines der beiden Vorzeichen wird aber bevorzugt behandelt und die Glieder mit dem anderen Vorzeichen werden verzögert in den Summationsprozess eingeflochten.

Wir definieren allgemein:

Definition (*Umordnung einer Reihe*)

Seien $\sum_n x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$ und $b: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt $\sum_n x_{b(n)}$ die durch b definierte *Umordnung* von $\sum_n x_n$.

Obige Umordnungen der alternierenden harmonischen Reihe nutzen implizit, dass die harmonische Reihe divergiert, sodass durch Gruppierung von hinreichend vielen positiven oder negativen Summanden das Konvergenzverhalten verändert werden kann. Damit haben wir des Pudels Kern schon entdeckt, denn für absolut konvergente Reihen gilt der folgende Satz:

Satz (*Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen*)

Seien $\sum_n x_n$ eine absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ und $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Dann konvergiert die Umordnung $\sum_n x_{g(n)}$ von $\sum_n x_n$ absolut und es gilt

$$\sum_n x_{g(n)} = \sum_n x_n.$$

Beweis

Seien $s_n = \sum_{i \leq n} x_i$, $t_n = \sum_{i \leq n} x_{g(i)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, dass

$$\lim_n |s_n - t_n| = 0.$$

Damit ist $\sum_n x_{g(n)} = \lim_n t_n = \lim_n s_n = \sum_n x_n$, und die Konvergenz von $\sum_n |x_{g(n)}|$ ergibt sich durch Anwendung des Arguments auf die Reihe $\sum_n |x_n|$.

Sei also $\varepsilon > 0$. Da $\sum_n |x_n|$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n_0 < i \leq m} |x_i| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n_0.$$

Weiter fixieren wir ein $n_1 \geq n_0$ mit $\{0, \dots, n_0\} \subseteq \{g(0), \dots, g(n_1)\}$.

Sei nun $n \geq n_1$. Dann gibt es ein $m \geq n$ mit $\{g(0), \dots, g(n)\} \subseteq \{0, \dots, m\}$. Dann gilt aber

$$|s_n - t_n| \leq \sum_{n_0 < i \leq m} |x_i| < \varepsilon,$$

- denn in der Differenz $s_n - t_n = \sum_{i \leq n} (x_i - x_{g(i)})$ löschen sich mindestens alle x_i mit $i \leq n_0$ wegen $\{0, \dots, n_0\} \subseteq \{g(0), \dots, g(n_1)\} \subseteq \{g(0), \dots, g(n)\}$ aus, und alle nach der Auslöschung verbleibenden Summanden haben wegen
- $m \geq n$ und $\{g(0), \dots, g(n)\} \subseteq \{0, \dots, m\}$ die Form $\pm x_i$ mit $i \leq m$.

Es gilt folgende Umkehrung des Satzes, die wir in den Übungen diskutieren:

Satz (*Umordnungen nicht absolut konvergenter Reihen*)

Sei $\sum_n x_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Dann gibt es eine divergente Umordnung der Reihe. Weiter gibt es für jedes $s \in \mathbb{R}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen s konvergiert.

Für konvergente Reihen ist also die absolute Konvergenz gleichbedeutend mit einem „unendlichen Kommutativgesetz“.

Durch den Umordnungssatz können wir unendliche Summen über abzählbare Mengen definieren. Hierzu verwenden wir eine auch andernorts nützliche Verallgemeinerung des Folgenbegriffs und der Folgennotation $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Definition (*Folge, Familie mit Indexmenge*)

Sei I eine Menge. Eine Funktion f mit Definitionsbereich I nennen wir auch eine *Folge* oder *Familie* mit *Indexmenge* I oder auch eine *I-Folge*. Wir schreiben weiter $(x_i)_{i \in I}$ für die Folge f mit $f(i) = x_i$ für alle $i \in I$. Eine Folge $(x_i)_{i \in I}$ heißt *Folge in einer Menge* M , falls $x_i \in M$ für alle $i \in I$ gilt.

Damit können wir nun definieren:

Definition (*Summen über abzählbar unendliche Teilmengen von $\mathbb{R}$*)

Sei I eine abzählbar unendliche Menge, und sei $(x_i)_{i \in I}$ eine I -Folge in $\mathbb{R}$. Weiter sei $g: \mathbb{N} \rightarrow I$ bijektiv, und die Reihe $\sum_n x_{g(n)}$ sei absolut konvergent. Sei schließlich $s = \sum_n x_{g(n)}$. Dann setzen wir

$$\sum_{i \in I} x_i = s,$$

und nennen $\sum_{i \in I} x_i$ die *Summe* aller x_i mit $i \in I$.

Der Umordnungssatz zeigt, dass $\sum_{i \in I} x_i$ nicht von der Wahl der Aufzählung $g(0), g(1), g(2), \dots, g(n), \dots$ der Indexmenge I abhängt.

Für eine abzählbar unendliche Folge $(x_i)_{i \in I}$ in $\mathbb{R}$ schreiben wir $\sum_{i \in I} x_i = \infty$ bzw. $\sum_{i \in I} x_i = -\infty$, falls $\sum_n x_{g(n)} = \infty$ bzw. $\sum_n x_{g(n)} = -\infty$ für jede Bijektion $g: \mathbb{N} \rightarrow I$ gilt. Damit ist dann zum Beispiel $\sum_{i \in I} x_i$ immer definiert, wenn $(x_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Folge nichtnegativer Zahlen in $\mathbb{R}$ ist.

Schließlich verwenden wir suggestive Varianten der Notation. So bedeutet zum Beispiel $\sum_{n,m} x_{n,m}$ die Summe über eine Familie $(x_i)_{i \in \mathbb{N}^2}$ in $\mathbb{R}$, und ein Ausdruck $s = \sum_{n,m} x_{n,m}$ besagt, dass die reelle Zahl s die Summe $x_{g(0)} + \dots + x_{g(n)} + \dots$ ist, wenn die Folge $g(0), g(1), \dots, g(n), \dots$ in einer beliebigen Art und Weise alle Paare (n, m) natürlicher Zahlen durchläuft.

Damit können wir uns nun der Produktbildung zuwenden.

Produkte von Reihen

Sind $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$, so stellt sich die Frage nach der Existenz der Summe $\sum_{n,m} x_n y_m$. Auch hier spielt die absolute Konvergenz wieder die Schlüsselrolle:

Satz (*Produkt absolut konvergenter Reihen*)

Seien $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$.

Dann existiert $\sum_{n,m} x_n y_m$ und es gilt

$$\sum_{n,m} x_n y_m = \sum_n x_n \cdot \sum_n y_n.$$

Beweis

Sei $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$ bijektiv. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ sei

$$c_{n,m} = x_n y_m.$$

Wir setzen:

$$s_n = \sum_{i \leq n} x_i, \quad t_n = \sum_{i \leq n} y_i, \quad u_n = \sum_{i \leq n} c_{g(i)} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen, dass

$$\lim_n |s_n t_n - u_n| = 0.$$

Dann gilt

$$\sum_n c_{g(n)} = \lim_n u_n = \lim_n (s_n t_n) = \lim_n s_n \cdot \lim_n t_n = \sum_n x_n \cdot \sum_n y_n,$$

und die Konvergenz von $\sum_n |c_{g(n)}|$ folgt durch Anwendung des Arguments auf die Reihen $\sum_n |x_n|$ und $\sum_n |y_n|$.

Für alle n definieren wir noch

$$A(n) = \{ (i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i, j \leq n \},$$

und schließlich sei

$$D(n, m) = A(m) - A(n) \quad \text{für alle } m \geq n.$$

Sei nun also $\varepsilon > 0$. Da $(\sum_{i \leq n} |x_i| \cdot \sum_{i \leq n} |y_i|)_{n \in \mathbb{N}}$ eine (gegen das Produkt $\sum_n |x_n| \cdot \sum_n |y_n|$ konvergente) Cauchy-Folge ist, existiert ein n_0 mit

$$\sum_{(i,j) \in D(n_0, m)} |x_i y_j| < \varepsilon \quad \text{für alle } m \geq n_0.$$

(Die linke Seite dieser Ungleichung ist genau der Betrag der Differenz des m -ten und n_0 -ten Gliedes der genannten Cauchy-Folge.)

Weiter fixieren wir ein $n_1 \geq n_0$ mit

$$A(n_0) \subseteq \{ g(0), \dots, g(n_1) \}.$$

Sei nun $n \geq n_1$. Dann gibt es ein $m \geq n$ mit $\{ g(0), \dots, g(n) \} \subseteq A(m)$.

Dann gilt aber, wie im Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen:

$$- \quad |s_n t_n - u_n| \leq \sum_{(i,j) \in D(n_0, m)} |x_i y_j| < \varepsilon.$$

Als Anwendung des Produktsatzes notieren wir:

Korollar (*Produkt zweier geometrischer Reihen*)

Seien $x, y \in]-1, 1[$. Dann gilt $\sum_{n,m} x^n y^m = 1/((1-x)(1-y))$.

Beweis

– $\sum_n x^n$ und $\sum_n y^n$ konvergieren absolut gegen $1/(1-x)$ bzw. $1/(1-y)$.

Für $y = x$ ergibt sich

$$\sum_{n,m} x^{n+m} = \sum_{n,m} x^n x^m = 1/(1-x)^2$$

und für $y = -x$ erhalten wir

$$\sum_{n,m} (-1)^m x^{n+m} = 1/((1-x)(1+x)) = 1/(1-x^2) = \sum_n x^{2n}.$$

Induktiv zeigt man weiter leicht:

Korollar (*Produkt endlich vieler geometrischer Reihen*)

Seien $x_1, \dots, x_k \in]-1, 1[$ für ein $k \geq 1$. Dann gilt:

$$\sum_{n_1, \dots, n_k} (x_1^{n_1} \cdot \dots \cdot x_k^{n_k}) = 1/(1-x_1) \cdot \dots \cdot 1/(1-x_k).$$

Wir geben mit Hilfe dieses Korollars noch einen Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen. Für alle natürlichen Zahlen $a \geq 2$ gilt

$$\sum_n 1/a^n = 1/(1-1/a) = a/(a-1).$$

Sind also $p_1 < \dots < p_k$ Primzahlen, so gilt nach dem Korollar

$$\sum_{n_1, \dots, n_k} 1/(p_1^{n_1} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}) = p_1/(p_1-1) \cdot \dots \cdot p_k/(p_k-1).$$

Auf der linken Seite werden alle Brüche $1/n$ aufsummiert, deren Nenner aus den Primfaktoren $p_1, \dots, p_k$ zusammengesetzt ist. Gäbe es nun nur endlich viele Primzahlen $p_1 < \dots < p_k$, so würde $1/n$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$ in der Summe auftauchen. Aufgrund der Divergenz der harmonischen Reihe wäre die Summe dann unendlich, im Widerspruch zur Endlichkeit des Produkts der rechten Seite. Also muss es unendlich viele Primzahlen geben.

Sicher ist dieser Beweis wesentlich komplizierter als der klassische Beweis von Euklid für die Unendlichkeit der Primzahlen. In das Argument gehen die Existenz einer Primfaktorzerlegung von n , die Divergenz der harmonischen Reihe und der Produktsatz für absolut konvergente Reihen ein. Aber dennoch wird der Beweis von vielen Mathematikern als Praline empfunden, und er lässt sich letztendlich als Hinweis auf den „magischen“ Zusammenhang zwischen der Welt der Primzahlen und der Welt der Riemannschen Zetafunktion $\sum_{n \geq 1} 1/n^s$ auffassen. Die Unendlichkeit der Primzahlen entspricht der Definitionslücke dieser Funktion bei $s = 1$.

Aufzählungen von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Für absolut konvergente Reihen $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ liefert also jede Summation aller Produktterme $x_n y_m$ das gleiche Resultat. Wir betrachten nun noch zwei konkrete Organisationen einer derartigen Summation.

Die populärste Möglichkeit, alle Paare (n, m) natürlicher Zahlen zu durchlaufen, ist, die Diagonalen eines $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ -Gitters aneinanderzureihen. Wir erhalten dadurch die *Diagonal-Aufzählung*

$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), \dots$

von $\mathbb{N}^2$. Summieren wir hier längs der endlichen Diagonalen

$(0, 0),$

$(0, 1), (1, 0),$

$(0, 2), (1, 1), (2, 0),$

$(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0), \dots$

auf, so erhalten wir aus unserem allgemeinen Produktsatz sofort:

Korollar (*Cauchy-Produkt oder Diagonal-Produkt von Reihen*)

Seien $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Für alle n sei

$$d_n = \sum_{i \leq n} x_i y_{n-i}.$$

Dann ist $\sum_n d_n$ absolut konvergent und es gilt $\sum_n d_n = \sum_n x_n \cdot \sum_n y_n$.

Das Cauchy-Produkt ermöglicht unter anderem einen einfachen Beweis der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, die wir im folgenden Abschnitt kennenlernen werden.

Nicht unerwähnt lassen wollen wir eine andere natürliche Aufzählung aller Paare (n, m) natürlicher Zahlen, die zu einer konvergenten Produktbildung führt, die ohne die Voraussetzung der absoluten Konvergenz auskommt. Hierzu definieren wir die *Rechteck-Aufzählung* von $\mathbb{N}^2$ durch

$(0, 0),$

$(0, 1), (1, 0), (1, 1),$

$(0, 2), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2),$

$(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), \dots$

Hier wird das $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ -Gitter durch Aneinanderreihung rechtwinkliger Segmente ausgeschöpft, deren Spitzen auf der Diagonalen von $\mathbb{N}^2$ liegen. Als Mengen betrachtet lauten diese Segmente

$$D(n) = \{(i, n) \mid i < n\} \cup \{(n, i) \mid i < n\} \cup \{(n, n)\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die charakteristische Eigenschaft dieser Aufzählung ist, dass ein Paar (n_0, m_0) vor einem Paar (n_1, m_1) durchlaufen wird, falls das Maximum von n_0 und m_0 kleiner ist als das Maximum von n_1 und m_1 . (In der Diagonalaufzählung kommt da-

gegen (n_0, m_0) vor (n_1, m_1) , falls $n_0 + m_0 < n_1 + m_1$.) Die Produktregel für Grenzwerte von Folgen liefert nun:

Satz (*Rechteck-Produkt von Reihen*)

Seien $\sum_n x_n$ und $\sum_n y_n$ konvergente Reihen in $\mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$r_n = \sum_{i < n} x_i y_n + \sum_{i < n} x_n y_i + x_n y_n.$$

Dann ist $\sum_n r_n$ konvergent und es gilt $\sum_n r_n = \sum_n x_n \cdot \sum_n y_n$.

Beweis

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{i \leq n} r_i = \sum_{i, j \leq n} x_i y_j = \sum_{i \leq n} x_i \cdot \sum_{i \leq n} y_i,$$

also ist

$$\sum_n r_n = \lim_n \sum_{i \leq n} r_i = \lim_n (\sum_{i \leq n} x_i \cdot \sum_{i \leq n} y_i) =$$

$$- \lim_n \sum_{i \leq n} x_i \cdot \lim_n \sum_{i \leq n} y_i = \sum_n x_n \cdot \sum_n y_n.$$

Dagegen kann im Satz über das Cauchy-Produkt die absolute Konvergenz nicht ersatzlos fallengelassen werden (siehe Übungen).

Die Exponentialreihe und die binomischen Reihen

Die Konvergenz einer Reihe $\sum_n 1/k_n$ mit natürlichen Zahlen k_n können wir durch schnell wachsende Nenner k_n erreichen. So führen für ein festes k mit $k > 1$ die Nenner $k_n = k^n$ zu konvergenten geometrischen Reihen, und die Nenner $k_n = n^k$ für $k \geq 2$ zu den Werten $\zeta(2), \zeta(3), \dots$ der Zeta-Funktion. Weitere natürliche schnell wachsende Nenner erhalten wir durch die Fakultät, d. h. wir setzen $k_n = n!$ für alle n . Da $n!$ letztendlich viel schneller wächst als die Potenzen x^n einer reellen Zahl x , können wir sogar ein großes Wachstum in den Zählern in Betracht ziehen. Wir definieren dementsprechend:

Definition (*Exponentialreihe*)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ heißt die Reihe $\sum_n x^n/n!$ die *Exponentialreihe* für x .

Es gilt also

$$\sum_n x^n/n! = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$$

Wie erhofft konvergiert diese Reihe für alle x :

Satz (*absolute Konvergenz und Restgliedabschätzung der Exponentialreihe*)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $\sum_n x^n/n!$ absolut. Weiter gilt:

$$|\sum_{n \geq k} x^n/n!| \leq 2 |x|^k/k! \quad \text{für alle } k \text{ mit } k \geq 2 |x| - 1.$$

Beweis

Für $x = 0$ ist Exponentialreihe offenbar gleich 1. Sei also $x \neq 0$.

Dann gilt

$$|(x^{n+1}/(n+1)!)/(x^n/n!)| = |x|/(n+1) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt die absolute Konvergenz der Exponentialreihe für x aus dem Quotientenkriterium, da $|x|/(n+1) \leq 1/2$ für alle n mit $n+1 \geq 2|x|$.

Mit der Quotientenschranke $1/2$ gilt weiter nach unserer Abschätzung im Quotientenkriterium für alle k mit $k+1 \geq 2|x|$:

$$- \quad |\sum_{n \geq k} x^n/n!| \leq \sum_{n \geq k} |x^n/n!| \leq |x^k|/k! \cdot 1/(1-1/2) = 2|x|^k/k!.$$

Da das Quotientenkriterium auf der geometrischen Reihe beruht, ist es also letztendlich wieder diese fundamentale Reihe, die für die absolute Konvergenz und die Fehlerabschätzung der Exponentialreihe verantwortlich ist.

Wir definieren:

Definition (*Exponentialfunktion, Eulersche Zahl*)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ definieren wir die reelle Zahl $\exp(x)$ durch

$$\exp(x) = \sum_n x^n/n!.$$

Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die (*reelle*) *Exponentialfunktion*.

Weiter definieren wir

$$e = \exp(1) = \sum_n 1/n!.$$

Die Zahl e heißt die *Eulersche Zahl*.

Eine numerische Berechnung liefert

$$e = 2,718281828459045\dots$$

Man kann leicht einsehen, dass e irrational ist. Wir diskutieren dies in den Übungen. Mit weitergehenden Methoden kann man zeigen, dass e transzendent ist.

Die Restgliedabschätzung des Satzes zeigt, dass wir e sehr effektiv berechnen können. Setzen wir zum Beispiel $e_5 = \sum_{n \leq 5} 1/n!$, so gilt

$$|e - e_5| \leq 2/6! = 1/360 < 0,003.$$

Bereits der noch einfach per Hand zu berechnende Wert

$$e_5 = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 = 163/60 = 2,71666\dots$$

ist also schon eine recht gute Approximation an e . Weitere Rechnungen liefern für die auf 7 Nachkommastellen gerundeten Werte $e_k = \sum_{n \leq k} 1/n!$:

$$e_6 \sim 2.71805556, \quad e_7 \sim 2.71825397, \quad e_8 \sim 2.71827877.$$

Nach diesen numerischen Betrachtungen wollen wir nun die Struktureigenschaften der Exponentialfunktion ans Licht bringen. Das Cauchy-Produkt bringt die Untersuchung in Gang:

Satz (*Additionstheorem oder Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Beweis

Aufgrund der absoluten Konvergenz von $\sum_n x^n/n!$ und $\sum_n y^n/n!$ gilt

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_n d_n, \text{ mit}$$

$$d_n = \sum_{k \leq n} (x^k/k! \cdot y^{n-k}/(n-k)!) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt aber nach dem binomischen Lehrsatz

$$d_n = 1/n! \cdot \sum_{k \leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = 1/n! \cdot (x + y)^n,$$

– und damit ist $\sum_n d_n$ die Exponentialreihe für $x + y$.

Aus dem Additionstheorem fließen nun:

Korollar (*elementare Eigenschaften der Exponentialfunktion*)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (a) $\exp(0) = 1$,
- (b) $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = 1/\exp(x)$,
- (c) $\exp(x) > 1$ für $x > 0$, $0 < \exp(x) < 1$ für $x < 0$,
- (d) $\exp(ax) = \exp(x)^a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

Beweis

zu (a): Es gilt $\exp(0) = \sum_n 0^n/n! = 0^0/0! = 1$.

zu (b): Es gilt

$$1 = \exp(0) = \exp(x + (-x)) = \exp(x) \exp(-x).$$

Dies zeigt, dass $\exp(x) \neq 0$, und dass $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

zu (c): Ist $x > 0$, so ist

$$\exp(x) = \sum_n x^n/n! = 1 + \sum_{n \geq 1} x^n/n! > 1.$$

Aus (b) folgt dann die Behauptung für negative x .

zu (d): Dass $\exp(nx) = \exp(x)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt induktiv aus

$$\exp(0) = 1 \text{ und } \exp((n+1)x) = \exp(nx + x) = \exp(nx) \exp(x).$$

– Aus (b) folgt dann $\exp(-nx) = 1/\exp(x)^n = \exp(x)^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Das Additionstheorem samt Folgerungen rechtfertigt folgende Notation:

Definition (*die Notation e^x*)

Wir schreiben auch e^x anstelle von $\exp(x)$.

Es gelten dann die üblichen Rechenregeln für die Exponentiation.

Die komplexe Exponentialfunktion

Die reelle Exponentialfunktion lässt sich ohne Schwierigkeiten auf die komplexen Zahlen fortsetzen:

Definition (*komplexe Exponentialfunktion*)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ setzen wir $\exp(z) = e^z = \sum_n z^n/n!$.

Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die *komplexe Exponentialfunktion*.

Die Beweise der absoluten Konvergenz, der Restgliedabschätzung und des Additionstheorems bleiben auch für die komplexen Zahlen gültig. Lediglich die die reelle Ordnung betreffenden Eigenschaften wie „ $\exp(x) > 0$ für alle x “ fallen weg. Es gilt $\exp(z) \neq 0$ für alle z , und in der Tat kann man zeigen, dass die komplexe Exponentialfunktion jeden komplexen Wert mit Ausnahme der Null annimmt. Wir werden mit Hilfe der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$ später die reellen trigonometrischen Funktionen einführen. Aus den guten Eigenschaften der Exponentialfunktion folgen dann in einfacher Weise die sonst nur mühsam zu zeigenden Formeln für diese Funktionen.

Die binomischen Reihen

Der Beweis des Additionstheorems der Exponentialfunktion wurde durch ein Zusammenspiel des Cauchy-Produkts und des binomischen Lehrsatzes getragen. Wir geben nun noch ein weiteres Beispiel für dieses Zusammenspiel. Hierzu verallgemeinern wir zuerst die Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = n!/(k!(n-k)!) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)/k!,$$

indem wir statt n eine beliebige reelle Zahl s zulassen. Wir definieren hierzu:

Definition (*fallende Potenz, allgemeine Binomialkoeffizienten*)

Seien $s \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir:

$$s^{[k]} = \prod_{j < k} (s-j) = s \cdot (s-1) \cdot \dots \cdot (s-k+1).$$

Die Zahl $s^{[k]}$ heißt die *fallende Potenz* von s mit k *Faktoren*.

Hiermit definieren wir nun:

$$\binom{s}{k} = s^{[k]}/k!.$$

Die Zahl $\binom{s}{k}$ heißt der *Binomialkoeffizient* s über k .

Nach den Konventionen über das leere Produkt ist $s^{[0]} = 1$ und damit $\binom{s}{0} = 1$ für alle s . Weiter ist $\binom{s}{k} = 0$ für alle $s \in \mathbb{N}$ und $k > s$, denn in diesem Fall ist einer der Faktoren der fallenden Potenz $s^{[k]}$ gleich 0. Es gilt:

Satz (*Additionstheorem für Binomialkoeffizienten*)

Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k \leq n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} = \binom{s+t}{n}.$$

Das Additionstheorem lässt sich in die Form des binomischen Lehrsatzes

$$(s+t)^n = \sum_{k \leq n} \binom{n}{k} s^k t^{n-k}$$

bringen, wenn wir die Binomialkoeffizienten $\binom{s}{k}$ in der Form $s^{[k]}/k!$ schreiben. Die Aussage des Additionstheorems lautet dann

$$\sum_{k \leq n} s^{[k]}/k! \cdot t^{[n-k]}/(n-k)! = (s+t)^{[n]}/n!,$$

und die Multiplikation mit $n!$ liefert

$$\sum_{k \leq n} \binom{n}{k} s^{[k]} t^{[n-k]} = (s+t)^{[n]}.$$

Der Beweis kann nun wie für den Binomischen Lehrsatz durch Induktion nach n geführt werden.

Mit den verallgemeinerten Binomialkoeffizienten definieren wir nun:

Definition (*Binomische Reihe oder Binomialreihe*)

Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann heißt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $B_s(x) = \sum_n \binom{s}{n} x^n$ die (*reelle*) *binomische Reihe* oder *Binomialreihe* zum *Exponenten* s im Punkt x .

Zur Begründung der Wahl des Wortes „Exponent“ betrachten wir die binomischen Reihen für die natürlichen Zahlen $s = 1, 2, 3, \dots$. Dann gilt $\binom{s}{n} = 0$ für alle $n > s$. Damit ist nach dem binomischen Lehrsatz

$$B_s(x) = \sum_{n \leq s} \binom{s}{n} x^n = \sum_{n \leq s} \binom{s}{n} x^n 1^{s-n} = (x+1)^s \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für $s = 0$ gilt

$$B_0(x) = \sum_n \binom{0}{n} x^n = \binom{0}{0} x^0 = 1 = (1+x)^0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Für den Exponenten $s = -1$ gilt weiter:

$$B_{-1}(x) = \sum_n \binom{-1}{n} x^n = \sum_n (-1)^{[n]}/n! \cdot x^n = \sum_n (-1)^n n!/n! \cdot x^n = \sum_n (-x)^n.$$

Damit ist also die binomische Reihe für den Exponenten -1 und den Punkt x nichts anderes als die geometrische Reihe für $-x$. Folglich ist

$$B_{-1}(x) = (1+x)^{-1} \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

Die Darstellung $B_s(x) = (1+x)^s$ gilt, wie wir gleich sehen werden, auch für viele andere x und s . Zunächst halten wir fest:

Satz (*Konvergenz der binomischen Reihen*)

Sei $s \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die binomische Reihe $B_s(x)$ absolut für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Der Beweis ist mit Hilfe des Quotientenkriteriums leicht zu führen und sei dem Leser zur Übung überlassen.

Entscheidend für die weitere Untersuchung ist wieder, dass auch die binomischen Reihen ein Additionstheorem erfüllen:

Satz (*Additionstheorem für die binomischen Reihen*)

Seien $s, t \in \mathbb{R}$. Dann gilt $B_s(x) \cdot B_t(x) = B_{s+t}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Beweis

Sei also $x \in]-1, 1[$. Aufgrund der absoluten Konvergenz der Reihen $B_s(x)$ und $B_t(x)$ gilt nach dem Satz über das Cauchy-Produkt

$$B_s(x) \cdot B_t(x) = \sum_n d_n x^n, \quad \text{mit}$$

$$d_n = \sum_{k \leq n} \binom{s}{k} \binom{t}{n-k} \quad \text{für alle } n.$$

Nach dem Additionstheorem für Binomialkoeffizienten gilt also

$$d_n = \binom{s+t}{n} \quad \text{für alle } n,$$

– und damit ist $B_s(x) \cdot B_t(x) = \sum_n \binom{s+t}{n} x^n = B_{s+t}(x)$.

Wir stellen wieder einige elementare Eigenschaften zusammen, die sich mit dem Additionstheorem leicht beweisen lassen:

Korollar (*elementare Eigenschaften der binomischen Reihen*)

Für alle $s \in \mathbb{R}$ und $x \in]-1, 1[$ gilt:

- (a) $B_s(0) = 1, B_0(x) = 1,$
- (b) $B_s(x) \neq 0$ und $B_{-s}(x) = 1/B_s(x),$
- (c) $B_{n/2}(x) \cdot B_{n/2}(x) = B_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, und allgemeiner
- (d) $(B_{n/m}(x))^m = B_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*.$

Nach (c) ist also

$$B_{n/2}(x) = \sqrt{B_n(x)} = \sqrt{(1+x)^n} \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

und nach (b) und (d) gilt allgemeiner

$$B_{n/m}(x) = \sqrt[m]{(1+x)^n} = (1+x)^{n/m} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}^*, x \in]-1, 1[.$$

Mit Hilfe der Exponentialfunktion werden wir später $(1+x)^s$ für alle $s \in \mathbb{R}$ einführen, und dann auch zeigen, dass $B_s(x) = (1+x)^s$ für alle $x \in]-1, 1[$ gilt.

Komplexe binomische Reihen

Die binomischen Reihen lassen sich auch für komplexe Exponenten und Argumente einführen. Hierzu erweitern wir die fallenden Potenzen $s^{[n]}$ auf die komplexen Zahlen, d. h. wir setzen $s^{[n]} = \prod_{j < n} (s - j)$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Damit ist dann wieder $\binom{s}{n} = s^{[n]}/n!$ für alle $s \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, und für alle $s, z \in \mathbb{C}$ heißt

$$B_s(z) = \sum_n \binom{s}{n} z^n$$

die (*komplexe*) *binomische Reihe* oder *Binomialreihe* zum *Exponenten* s im Punkt z . Für alle Exponenten $s \in \mathbb{C}$ konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$, also in der offenen Einheitskreisscheibe. Das Additionstheorem gilt unverändert.

Übungen

2.3.1 Umordnungen und Produkte

Übung 1

Seien $\sum_n x_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$ und $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen mit $i_0 = 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$y_n = \sum_{i_n \leq i < i_{n+1}} x_i.$$

Zeigen Sie, dass $\sum_n x_n = \sum_n y_n$.

Übung 2

Zeigen Sie:

$$(a) \quad 1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + \dots = 1/2 \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} 1/n,$$

wobei immer zwei negative Glieder auf ein positives Glied folgen.

$$(b) \quad 1 - 1/2 + 1/3 + 1/5 - 1/4 + 1/7 + 1/9 + 1/11 + 1/13 - 1/6 + \dots = \infty,$$

wobei 1, 2, 4, 8, 16, ... positive Glieder durch ein negatives Glied getrennt werden.

[Hinweis zu (a): Setzen Sie in der unendlichen Summe auf der linken Seite zunächst geeignete Klammern, die zur Reihe $1/2 - 1/4 + 1/6 - 1/8 + 1/10 - \dots$ auf der rechten Seite führen.]

Übung 3

Sei $x_n = (-1)^n / \sqrt{n+1}$ für alle n . Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_n x_n$ konvergiert, während das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_n x_n$ und $\sum_n x_n$ divergiert, d.h. die Reihe $\sum_n d_n$ mit $d_n = \sum_{i \leq n} x_i x_{n-i}$ für alle n ist divergent.

Übung 4

Zeigen Sie, dass für alle $x \in]-1, 1[$ gilt:

$$\sum_n (n+1)x^n = 1/(1-x)^2, \quad \sum_n nx^n = x/(1-x)^2.$$

Übung 5

Sei $\sum_n x_n$ eine Reihe in $\mathbb{R}$, und seien $P = \{n \mid x_n \geq 0\}$ und $N = \{n \mid x_n < 0\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\sum_n x_n$ ist absolut konvergent.

(b) Die Reihen $\sum_{n \in P} x_n$ und $\sum_{n \in N} -x_n$ konvergieren.

Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall gilt:

$$\sum_n x_n = \sum_{n \in P} x_n - \sum_{n \in N} -x_n.$$

Übung 6

Sei $\sum_n x_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Summe der positiven Glieder der Reihe gegen ∞ und die Summe der negativen Glieder der Reihe gegen $-\infty$ konvergiert.

Übung 7

Sei $\sum_n x_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Weiter sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass eine Umordnung $\sum_n x_{g(n)}$ von $\sum_n x_n$ existiert mit $s = \sum_n x_{g(n)}$. Zeigen Sie weiter, dass jeweils eine Umordnung der Reihe existiert, die (a) uneigentlich gegen ∞ konvergiert, (b) uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert, (c) divergiert und dabei nicht uneigentlich konvergiert.

[Hinweis: Verwenden Sie die vorangehende Übung. Erzeugen Sie dann s als Summe, indem Sie abwechselnd positive und negative Glieder immer solange addieren, bis s über- bzw. unterschritten wird.]

Übung 8

Sei $(x_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{N}^2$ -Folge in $\mathbb{R}$ mit $x_{n,m} \geq 0$ für alle n, m . Weiter existiere $s = \sup(\{\sum_{(n,m) \in E} x_{n,m} \mid E \text{ ist eine endliche Teilmenge von } \mathbb{N}^2\})$. Zeigen Sie, dass sich die Folge spalten- und zeilenweise zu $\sum_{n,m} x_{n,m} = s$ aufsummiert, d. h. dass gilt

$$\sum_n \sum_m x_{n,m} = \sum_m \sum_n x_{n,m} = \sum_{n,m} x_{n,m} = s.$$

Übung 9

Sei $(x_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ eine $\mathbb{N}^2$ -Folge in $\mathbb{R}$, und es existiere

$$\sup(\{\sum_{(n,m) \in E} |x_{n,m}| \mid E \text{ ist eine endliche Teilmenge von } \mathbb{N}^2\}).$$

Zeigen Sie, dass $\sum_{n,m} x_{n,m}$ konvergiert und dass

$$\sum_n \sum_m x_{n,m} = \sum_m \sum_n x_{n,m} = \sum_{n,m} x_{n,m}.$$

2.3.2 Die Exponentialreihe und die binomischen Reihen

Übung 1

Zeigen Sie:

- (a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gilt

$$\exp((x+y)/2) < (\exp(x) + \exp(y))/2.$$
- (b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) \geq 1 + x$.
- (c) Für alle $x < 1$ gilt $\exp(x) \leq 1/(1-x)$.
- (d) Für alle $x < y$ gilt $\exp(x) < \exp(y)$.

Übung 2

Zeigen Sie:

(a) $\lim_n \exp(n) = \infty, \lim_n \exp(-n) = 0.$

(b) $\lim_n \exp(n)/n^k = \infty, \lim_n \exp(-n)/n^{-k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

*Übung 3*Zeigen Sie, dass die Eulersche Zahl $e = \sum_n 1/n!$ irrational ist.[Hinweis: Nehmen Sie $e = n/m$ an und betrachten Sie $r = m! (e - \sum_{0 \leq k \leq m} 1/k!)$.Zeigen Sie $r \geq 1$ mit Hilfe der Annahme und $r < 1$ mit Hilfe einer Abschätzung durch eine geometrische Reihe – ein Widerspruch.]*Übung 4*Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_n (n+1)x^n/n! = (1+x) \exp(x).$$

*Übung 5*Zeigen Sie: $\lim_n n (\exp(1/n) - 1) = 1.$ *Übung 6*Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 4n^2$ gilt:

$$\exp(x) > x^n.$$

*Übung 7*Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie:

(a) $|\exp(z) - (1+z)| \leq |z|^2.$

(b) Ist $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim_n z_n = 0$ und $z_n \neq 0$ für alle n , so gilt

$$\lim_n (\exp(z_n) - 1)/z_n = 1.$$

Übung 8(a) Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die binomische Reihe $B_s(x)$ für alle x mit $|x| < 1$ konvergiert.(b) Sei $s \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die binomische Reihe $B_s(x)$ für alle x mit $|x| > 1$ divergiert.(c) Sei $s \in]-1, 0[$. Zeigen Sie, dass $B_s(1)$ konvergiert und $B_s(-1)$ divergiert.

Sechste Ergänzungen: Untersuchung einiger spezieller Reihen

Umordnungen und Cauchy-Produkt

Wir betrachten die folgende Reihe:

$$\sum_n n/2^n = 1/2 + 2/4 + 3/8 + 4/16 + 5/32 + \dots$$

Ergänzungsübung 1

Beweisen Sie, dass diese Reihe konvergiert. Berechnen Sie weiter einige Partialsummen und vermuten Sie, welchen Wert die Reihe besitzt.

Die Reihe $\sum_n n/2^n$ wurde bereits im Mittelalter von Nicolas Oresme studiert. Oresme konnte durch ein „geometrisches Umordnungsargument“ die Summe dieser Reihe bestimmen. Die folgende Übung lässt sich als Variante seiner Argumentation ansehen.

Ergänzungsübung 2

(a) Ordnen Sie die Zahlen

$$1/2, 1/4, 1/4, 1/8, 1/8, 1/8, 1/16, 1/16, 1/16, 1/16, \dots$$

in einem $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ -Schema so an, dass Sie die zeilenweisen Summen und weiter die Summe der zeilenweisen Summen des Schemas bestimmen können. Diskutieren Sie den Zusammenhang Ihres Schemas mit der Reihe $\sum_n n/2^n$.

(b) Geben Sie einen strengen Beweis für Ihre Berechnung von $\sum_n n/2^n$, indem Sie Ihr Schema gegebenenfalls noch derart modifizieren, dass Sie $\sum_n n/2^n$ als Cauchy-Produkt zweier absolut konvergenter Reihen erkennen können.

Der Leser vergleiche in diesem Zusammenhang auch die Übungen zu 2.3.1 mit doppelt indizierten Folgen $(x_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$ nichtnegativer Zahlen. Diese allgemeinen Vertauschungs- und Summationssätze müssen wir hier aber gar nicht bemühen, wenn wir wie in (b) argumentieren.

Die Idee lässt sich nun spielerisch weiter variieren:

Ergänzungsübung 3

$$\text{Bestimmen Sie } \sum_n (n+1)/3^n = 1 + 2/3 + 3/9 + 4/27 + \dots$$

Ergänzungsübung 4

$$\text{Bestimmen Sie } \sum_n (2^{n+1} - 1)/4^n = 1 + 3/4 + 7/16 + 15/64 + \dots$$

Binomische Reihen für spezielle Exponenten

Unsere Untersuchung der binomischen Reihen

$$B_s(x) = \sum_n \binom{s}{n} x^n$$

hat ergeben, dass

$$B_s(x) = (1+x)^s \quad \text{für alle } s \in \mathbb{Q} \text{ und alle } x \in]-1, 1[.$$

Wir wollen dieses Ergebnis nun noch für einige konkrete rationale Exponenten genauer betrachten.

Ergänzungsübung 5

Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der folgenden binomischen Reihen:

$$(a) \quad B_{1/2}(x) = \sum_n \binom{1/2}{n} x^n,$$

$$(b) \quad B_{1/3}(x) = \sum_n \binom{1/3}{n} x^n,$$

$$(c) \quad B_{1/4}(x) = \sum_n \binom{1/4}{n} x^n,$$

$$(d) \quad B_{-1/2}(x) = \sum_n \binom{-1/2}{n} x^n.$$

Wegen

$$B_{1/2}(x) = (1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[$$

können wir die Berechnung der ersten Glieder der Reihe $B_{1/2}(x)$ zur approximativen Berechnung von Quadratwurzeln verwenden:

Ergänzungsübung 6

Berechnen Sie Approximationen von $\sqrt{1/2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{5}$ mit Hilfe der binomischen Reihe $B_{1/2}(x)$. Zeigen Sie weiter, dass diese approximative Berechnung von $\sqrt{x}$ für alle reellen Zahlen $x > 1$ möglich ist.

Von besonderem Interesse in der Physik ist die binomische Reihe für den Exponenten $-1/2$. Hier gilt

$$B_{-1/2}(x) = (1+x)^{-1/2} = 1/\sqrt{1+x} \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

Der Term $(1+x)^{-1/2}$ spielt in der Relativitätstheorie eine wichtige Rolle. Hat ein Teilchen die Ruhemasse $m_0 > 0$, so besitzt es, wenn es sich mit der Geschwindigkeit v bewegt, eine größere Masse m , die sich nach der Formel

$$m = m_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (\text{relativistische Masse})$$

berechnet, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ist. Da für ein Teilchen mit einer positiven Ruhemasse immer $v < c$ gilt, lässt sich die binomische Reihe einsetzen, um die relativistische Masse als Reihe darzustellen. Dies liefert die Möglichkeit, die klassische kinetische Energie zu isolieren:

Ergänzungsübung 7

- (a) Geben Sie mit Hilfe der binomischen Reihe $B_{-1/2}(x)$ eine Reihendarstellung der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} = mc^2 - m_0 c^2$$

eines Teilchens der Ruhemasse $m_0 > 0$, das sich mit der Geschwindigkeit $v < c$ bewegt.

- (b) Verwenden Sie weiter die oben berechneten ersten Glieder der Reihe $B_{-1/2}(x)$ für eine Approximation der kinetischen Energie.
- (c) Diskutieren Sie, warum die klassische kinetische Energie $1/2 m_0 v^2$ für kleine Geschwindigkeiten eine gute Näherung an die relativistische kinetische Energie darstellt.

3. Abschnitt

Stetige Funktionen

1. Der Stetigkeitsbegriff

In diesem Kapitel präzisieren wir den intuitiven Begriff der Stetigkeit einer Funktion. Wir diskutieren zwei anschauliche Formulierungen und gewinnen daraus die Begriffe der Limesstetigkeit und der Umgebungs- oder ε - δ -Stetigkeit einer Funktion, die sich aber als äquivalent erweisen. Weiter diskutieren wir instruktive Beispiele und verschaffen uns einen ersten Überblick über den Umfang und den Charakter der stetigen Funktionen.

Die Limesstetigkeit

Im Folgenden betrachten wir Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $P \subseteq \mathbb{R}$. Später lassen sich unsere Überlegungen dann wieder leicht auf Funktionen $g: P \rightarrow \mathbb{C}$ mit $P \subseteq \mathbb{C}$ übertragen.

In unseren Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ kann der Definitionsbereich P von f eine beliebige Teilmenge von $\mathbb{R}$ sein, eine „Punktmenge“. Der Leser denke aber in erster Linie an Definitionsbereiche P , die reelle Intervalle der Form

$$]a, b[, [a, b], [a, b[,]a, b], \\]a, \infty[, [a, \infty[,]-\infty, b],]-\infty, b],]-\infty, \infty[$$

sind, oder die aus Vereinigungen derartiger Intervalle bestehen, wie zum Beispiel $[a, b[\cup]b, c] = [a, c] - \{b\}$ oder $]-\infty, b[\cup]b, \infty[= \mathbb{R} - \{b\}$.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir uns nun der Frage zuwenden, was die Stetigkeit einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ bedeuten soll. Zwei anschauliche Beschreibungen sind:

Die Funktion macht keine Sprünge.

Die Funktionswerte ändern sich wenig, wenn sich die Argumente wenig ändern.

Diese Anschauungen wollen wir nun präzisieren. Weiter werden wir zeigen, dass die beiden sich aus den Anschauungen ergebenden mathematischen Begriffsbildungen äquivalent sind.

Unsere anschaulichen Beschreibungen beziehen sich auf eine Funktion als Ganzes. Die Stetigkeit ist aber zunächst eine „lokale“ oder „punktweise“ Eigenschaft einer Funktion. Sei also $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$ ein Punkt ihres Definitionsbereichs. Dann ist die Funktion f anschaulich stetig im Punkt p , falls gilt:

Die Funktion springt an der Stelle p nicht.

Der Funktionswert $f(x)$ liegt nahe bei $f(p)$, wenn x nahe bei p liegt.

Das Nichtspringen der Funktion f an der Stelle p können wir noch genauer formulieren:

Nähern wir uns dem Punkt p in beliebiger Weise an, so nähern sich die diesem Annäherungsprozess entsprechenden Funktionswerte dem Funktionswert $f(p)$ an.

Diese schon recht genaue Beschreibung lässt sich nun mit Hilfe unserer Konvergenztheorie für Folgen in eine exakte mathematische Definition übersetzen:

Definition (*Limesdefinition der Stetigkeit in einem Punkt*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$. Dann heißt f *stetig in p* , falls für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P gilt:

Gilt $\lim_n x_n = p$, so gilt $\lim_n f(x_n) = f(p)$.

Für gegen p konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P gilt im Stetigkeitsfall also

$$\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n),$$

d. h. die Grenzwertbildung und die Funktionsauswertung sind vertauschbare Operationen.

Die Stetigkeit einer Funktion lässt sich problemlos einführen:

Definition (*Stetigkeit einer Funktion*)

Eine Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig*, falls f in jedem Punkt $p \in P$ stetig ist.

Damit ist also eine Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann stetig, wenn für alle konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P , deren Grenzwert ein Element der Menge P ist, gilt, dass $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

Bevor wir uns der Präzisierung der zweiten anschaulichen Formulierung zuwenden, betrachten wir noch einige Beispiele, die wir mit Hilfe der Limesdefinition auf Stetigkeit und Unstetigkeit leicht untersuchen können.

Konstante Funktionen und die Identität

Zunächst ist für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $P \subseteq \mathbb{R}$ die konstante Funktion $f_c : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_c(x) = c$ für alle $x \in P$ stetig. Ist nämlich $p \in P$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen p konvergente Folge in P , so gilt

$$\lim_n f_c(x_n) = \lim_n c = c = f_c(p).$$

Weiter ist die Identität auf $\mathbb{R}$, also die Funktion $\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{id}(x) = x$ für alle x stetig, denn für alle gegen ein $p \in \mathbb{R}$ konvergente Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_n \text{id}(x_n) = \lim_n x_n = p = \text{id}(p).$$

Allgemeiner ist für alle $c \in \mathbb{R}$ die Funktion f mit $f(x) = x + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stetig.

Sprünge

Als nächstes betrachten wir einen einfachen Sprung, der zu einer Unstetigkeitsstelle führt. Sei hierzu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$. Wir zeigen, dass f im Punkt 0 unstetig ist. Hierzu genügt es, eine einzige gegen 0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu finden mit

$$0 = f(0) \neq \lim_n f(x_n).$$

Jede gegen 0 konvergente Folge positiver Zahlen ist hierzu geeignet (z. B. $x_n = 1/2^n$ für alle n), da unsere Funktion f für positive Zahlen immer den Wert 1 annimmt. Also ist f nicht stetig im Punkt 0. Wie für die konstanten Funktionen kann man aber zeigen, dass f in jedem anderen Punkt $p \in \mathbb{R}$ stetig ist. Die Funktion f hat also eine eindeutige Unstetigkeitsstelle.

Der Leser wird sich anhand dieser Überlegungen leicht davon überzeugen, dass die Treppenfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

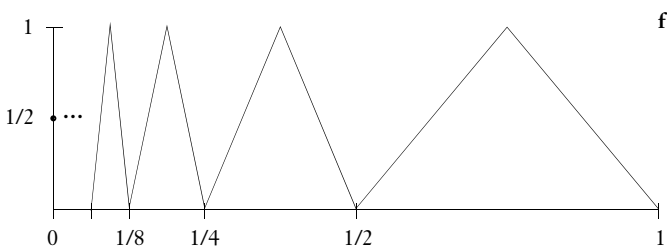
$$f(x) = a \quad \text{für alle } x \in [a, a + 1[\text{ und alle } a \in \mathbb{Z}$$

genau die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ als Menge der Unstetigkeitsstellen besitzt.

Eine Funktion, die „überall“ springt, ist die Indikatorfunktion der rationalen Zahlen, also die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Diese Funktion ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ unstetig. Wir diskutieren dies in den Übungen in allgemeiner Form.

Verdichtungen der Funktionswerte

Wir definieren $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f(0) = 1/2$ und die im folgenden Diagramm visualisierten immer schmäler werdenden Zacken:



Dann gibt es für alle $c \in [0, 1]$ eine gegen 0 konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, 1]$ mit $f(x_n) = c$ für alle n , und dann gilt $\lim_n f(x_n) = c$. Damit ist die Funktion unstetig im Nullpunkt, obwohl sie anschaulich dort nicht unbedingt springt, sondern eher wie eine breite Welle auf das Intervall $[0, 1]$ der y -Achse zuläuft. Diese Form der Verdichtung von Funktionswerten führt aber – gemäß unserer Limesdefinition – zu einer Unstetigkeitsstelle, ganz egal, wie wir f an der Stelle 0 definieren würden.

Abgeschlossenheitseigenschaften

Aus unserem Satz für die Grenzwerte der Folgenarithmetik ergibt sich leicht, dass die stetigen Funktionen abgeschlossen unter punktweiser Arithmetik sind. Wir definieren hierzu:

Definition (*punktweise arithmetische Operationen für Funktionen*)

Seien f, g Funktionen auf P , und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir die Funktionen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und af auf P durch

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\text{punktweise Addition})$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \quad (\text{punktweise Subtraktion})$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad (\text{punktweise Multiplikation})$$

$$(af)(x) = a \cdot f(x) \quad \text{für alle } x \in P. \quad (\text{punktweise Skalierung})$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in P$, so definieren wir die Funktion f/g auf P durch

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad \text{für alle } x \in P. \quad (\text{punktweise Division})$$

Der Leser überzeugt sich leicht von der Gültigkeit des folgenden Satzes:

Satz (*Stetigkeit der punktweisen Operationen*)

Seien f, g stetige Funktionen auf P , und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und af stetig. Ist f/g definiert, so ist auch f/g stetig.

Durch iterierte Anwendung der punktweisen Operationen auf die konstanten Funktionen und die Identität lassen sich alle Polynome auf $\mathbb{R}$ erzeugen, und durch punktweise Division zweier Polynomfunktionen entstehen dann die *rationalen Funktionen* (die an den Nullstellen des Nennerpolynoms nicht definiert sind). Damit erhalten wir:

Korollar (*Stetigkeit der Polynomfunktionen und der rationalen Funktionen*)

Jedes Polynom f auf $\mathbb{R}$ ist stetig. Sind weiter f und g Polynome auf $\mathbb{R}$, so ist die rationale Funktion f/g stetig auf $P = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

Weiter führt auch die Komposition nicht zu Unstetigkeitsstellen:

Satz (*Komposition stetiger Funktionen*)

Seien $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $Q \supseteq \{f(x) \mid x \in P\}$. Dann ist auch die Komposition $g \circ f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis

Gilt $p = \lim_n x_n$ in P , so gilt $f(p) = \lim_n f(x_n)$, da f stetig in p ist.

Da nun aber g stetig in $f(p)$ ist und alle $f(x_n) \in Q$ sind, gilt

$$- \quad (g \circ f)(p) = g(f(p)) = g(\lim_n f(x_n)) = \lim_n g(f(x_n)) = \lim_n (g \circ f)(x_n).$$

Der Identitätssatz für stetige Funktionen

Die Approximierbarkeit jeder reellen Zahl durch eine Folge rationaler Zahlen führt dazu, dass eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ bereits eindeutig bestimmt ist. Allgemeiner gilt:

Satz (*Identitätssatz für stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$*)

Seien f, g stetige Funktionen auf P . Weiter sei $Q \subseteq P$ mit:

- (a) $f(q) = g(q)$ für alle $q \in Q$.
- (b) Für alle $p \in P$ existiert eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Q mit $\lim_n q_n = p$.

Dann gilt $f = g$.

Beweis

Sei $p \in P$. Nach Voraussetzung existiert eine gegen p konvergente Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Q . Da f und g auf Q übereinstimmen, gilt aufgrund der Stetigkeit von f und g :

$$- \quad f(p) = \lim_n f(q_n) = \lim_n g(q_n) = g(p).$$

Da Q die Voraussetzung (b) des Satzes für den Fall $P = \mathbb{R}$ erfüllt, gilt:

Korollar (*Bestimmtheit stetiger Funktionen durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$*)

Seien $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und für alle $q \in \mathbb{Q}$ gelte $f(q) = g(q)$. Dann ist $f = g$.

Als Anwendung zeigen wir, dass die Exponentialfunktion durch ihre Stetigkeit, das Additionstheorem und ihren Wert an der Stelle 1 eindeutig bestimmt ist:

Korollar (*Charakterisierung der Exponentialfunktion*)

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften:

- (a) $f(1) = e$,
- (b) $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Dann gilt $f(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

Wie für die Exponentialfunktion folgt aus der Eigenschaft (b), dass $f(n) = f(1)^n$ und weiter $f(n/m) = \sqrt[m]{f(1)^n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$.

Nach (a) gilt $f(1) = \exp(1)$, und damit gilt $f(q) = \exp(q)$ für alle $q \in \mathbb{Q}$. Aus

– der Stetigkeit von f und $\exp$ folgt dann die Behauptung.

Im nächsten Kapitel werden wir eine Exponentiation a^x für eine beliebige reelle Basis $a > 0$ und einen beliebigen reellen Exponenten x einführen. Für eine feste Basis a ist diese Exponentiation dann eine stetige Funktion in x und durch die Eigenschaften $a^1 = a$ und $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ charakterisiert.

Stetige Fortsetzung

Manchmal sind durch gewisse Konstruktionen stetige Funktionen für gewisse Punkte nicht definiert, obwohl sich ein Funktionswert für f für diese Punkte aufdrängt. Dividieren wir zum Beispiel das Polynom $f(x) = x^2 - 1$ durch $g(x) = x - 1$, so ist die Funktion f/g für die Nullstelle 1 von g nicht definiert. Der Definitionsbereich von f/g ist die Menge $P = \mathbb{R} - \{1\}$. Wegen

$$f(x) = (x+1)(x-1)$$

gilt aber $(f/g)(x) = x+1$ für alle $x \in P$, und damit erlaubt die Funktion f/g eine natürliche Fortsetzung nach ganz $\mathbb{R}$. Allgemein definieren wir:

Definition (*stetige Fortsetzung, stetig fortsetzbar*)

Eine stetige Funktion $h: Q \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine *stetige Fortsetzung* einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, falls $h|_P = f$ ist, d. h. es gilt $P \subseteq Q$ und $f(x) = h(x)$ für alle $x \in P$. Eine stetige Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig fortsetzbar* nach Q , falls eine stetige Fortsetzung $h: Q \rightarrow \mathbb{R}$ von f existiert.

Die einfachsten Fortsetzungsfragen betreffen einen einzelnen Punkt, an dem eine Funktion nicht definiert ist. Hierunter fallen neben einer divisionsbedingten Definitionslücke beispielsweise auch der linke oder rechte Randpunkt eines offenen Intervalls, auf dem eine Funktion definiert ist. Offensichtlich gilt hier:

Satz (*stetige Einpunktfortsetzungen*)

Ist $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und ist $p^* \notin P$, so ist die Funktion f genau dann nach $P \cup \{p^*\}$ stetig fortsetzbar, wenn ein $y \in \mathbb{R}$ existiert mit:

Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen p^* konvergente Folge in P , so gilt $\lim_n f(x_n) = y$.

In diesem Fall definiert „ $h(x) = f(x)$ für alle $x \in P$, $h(p^*) = y$ “ eine stetige Fortsetzung h von f nach $P \cup \{p^*\}$. Ist p^* ein Häufungspunkt von P , so ist diese stetige Fortsetzung eindeutig.

So ist zum Beispiel für obige rationale Funktion f/g mit

$$(f/g)(x) = (x^2 - 1)/(x - 1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = x+1$ für alle x die eindeutige stetige Fortsetzung von f/g , die die Definitionslücke 1 von f/g schließt. Die Funktion $f: \mathbb{R} - \{0\}$ mit $f(x) = 0$ für $x < 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ lässt sich dagegen nicht stetig nach $\mathbb{R}$ fortsetzen. Der Leser beachte aber, dass diese Funktion für sich genommen stetig ist, d. h. sie ist stetig in allen Punkten p ihres Definitionsbereichs $\mathbb{R} - \{0\}$.

Ein schwierigeres Fortsetzungsproblem betrifft den Übergang von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$: Wann ist eine Funktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig nach $\mathbb{R}$ fortsetzbar? Die Stetigkeit von f auf $\mathbb{Q}$ ist hier eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung. Ist zum Beispiel p eine irrationale Zahl, so ist die Sprungfunktion $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(q) = 0 \quad \text{für alle } q < p, \quad f(q) = 1 \quad \text{für alle } q > p$$

stetig auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{Q}$, erlaubt aber keine stetige Fortsetzung nach $\mathbb{R}$. Die stetige Fortsetzung scheitert ebenso anschaulich wie formal an der Lücke zwischen 0 und 1 im Wertebereich von f . Gewisse stetige und monotone Funktionen auf den rationalen Zahlen lassen sich aber stetig fortsetzen. Hierzu definieren wir allgemein:

Definition (*monoton steigend, monoton fallend*)

Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton steigend* (*fallend*), falls für alle $x < x'$ in P gilt, dass $f(x) \leq f(x')$ ($f(x) \geq f(x')$). Sie heißt *streng monoton steigend* (*fallend*), falls für alle $x < x'$ in P gilt, dass $f(x) < f(x')$ ($f(x) > f(x')$). Schließlich heißt f (*streng*) *monoton*, falls f (*streng*) monoton steigend oder (*streng*) monoton fallend ist.

Der folgende Satz besagt nun, dass sich stetige und monotone Funktionen auf $\mathbb{Q}$, deren Wertebereich keine Sprünge aufweist, stetig nach $\mathbb{R}$ fortsetzen lassen:

Satz (*Fortsetzungssatz für monotone Funktionen auf $\mathbb{Q}$*)

Sei $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und monoton steigende Funktion. Weiter existiere für alle p, q mit $f(p) < f(q)$ ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $f(p) < f(r) < f(q)$.

Dann existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f , und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt dabei

$$h(x) = \sup(\{f(q) \mid q \in \mathbb{Q}, q < x\}) = \inf(\{f(q) \mid q \in \mathbb{Q}, x < q\}).$$

Eine analoge Aussage gilt für monoton fallende Funktionen.

Der Beweis sei dem interessierten Leser zur Übung überlassen. Eine Anwendung des Satzes werden wir bei der Diskussion der beiden verschiedenen Möglichkeiten der Einführung einer Exponentiation a^x kennenlernen.

Limesnotationen und Grenzwerte für Funktionen

Unsere anschauliche Formulierung der Stetigkeit von f im Punkt p lautete:

Nähern wir uns dem Punkt p in beliebiger Weise an, so nähern sich die diesem Annäherungsprozess entsprechenden Funktionswerte dem Funktionswert $f(p)$ an.

Wir haben diese Formulierung formal umgesetzt als:

(+) „Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$, so ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(p)$.“

Nachdem wir mit dieser Limesdefinition der Stetigkeit nun schon vertraut sind, wollen wir noch eine suggestive Notation einführen, die die Dinge in sehr kompakter Weise zum Ausdruck bringt. Statt (+) schreiben wir:

„ $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$ “ oder „ $f(x) \rightarrow f(p)$ für $x \rightarrow p$ “.

Anschaulich entspricht diesen Notationen die Kurzform:

„Wenn x gegen p strebt, so strebt $f(x)$ gegen $f(p)$.“

Wir wollen die neue Notation und einige nützliche Varianten nun noch genau erklären. Hierzu sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $p \in \mathbb{R}$ ein Punkt derart, dass mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P existiert, die gegen p konvergiert. (Diese Bedingung ist trivialerweise erfüllt, wenn p ein Element von P ist, aber sie gilt zum Beispiel auch für $P =]0, 1]$ und $p = 0$.) In dieser Situation führen wir nun für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle Teilmengen Q von P , für die immer noch eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Q mit $\lim_n x_n = p$ existiert, die folgenden Notationen ein:

$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$	<i>bedeutet</i>	für alle gegen p konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P gilt $\lim_n f(x_n) = y$,
$\lim_{x \rightarrow p, x \in Q} f(x) = y$	<i>bedeutet</i>	für alle gegen p konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Q gilt $\lim_n f(x_n) = y$,
$\lim_{x \rightarrow p, x \neq p} f(x) = y$	<i>bedeutet</i>	$\lim_{x \rightarrow p, x \in P - \{p\}} f(x) = y$,
$\lim_{x \downarrow p} f(x) = y$	<i>bedeutet</i>	$\lim_{x \rightarrow p, x \in P \cap]p, \infty[} f(x) = y$,
$\lim_{x \uparrow p} f(x) = y$	<i>bedeutet</i>	$\lim_{x \rightarrow p, x \in P \cap]-\infty, p[} f(x) = y$,
$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$	<i>bedeutet</i>	P ist nach oben unbeschränkt und für alle uneigentlich gegen ∞ konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P gilt $\lim_n f(x_n) = y$,
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$	<i>bedeutet</i>	P ist nach unten unbeschränkt und für alle uneigentlich gegen $-\infty$ konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in P gilt $\lim_n f(x_n) = y$.

Damit können wir nun auch den Grenzwert einer Funktion unter einer bestimmten Annäherungsbedingung definieren:

Definition (*Grenzwert einer Funktion*)

Gilt $\lim_{x \rightarrow p, x \in Q} f(x) = y$, so sagen wir, dass f gegen y strebt, wenn x in Q gegen p strebt, oder dass f bei Annäherung an p in Q gegen y strebt. Weiter heißt y der Grenzwert von f an der Stelle p bei Annäherung an p in Q .

Gilt $\lim_{x \uparrow p} f(x) = y$, so heißt y der linksseitige Grenzwert von f an der Stelle p , und analog heißt y der rechtsseitige Grenzwert von f an der Stelle p , falls $\lim_{x \downarrow p} f(x) = y$.

Statt reeller Zahlen y können wir hier zudem die beiden symbolischen Werte ∞ und $-\infty$ zulassen. Damit gilt zum Beispiel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x \downarrow 0} 1/x = \infty, \quad \lim_{x \uparrow 0} 1/x = -\infty,$$

während $\lim_{x \rightarrow p} 1/x$ nicht existiert.

Gilt $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$ für einen Punkt p des Definitionsbereichs von f , so ist $y = f(p)$, denn die konstante Folge $(p)_n \in \mathbb{N}$ ist dann eine Folge in P und konvergiert trivialerweise gegen p . Damit gilt:

Satz (*Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in P$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig in p .
- (b) $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ existiert.
- (c) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$.

Hinweis

Ist $p \in P$, so ist bei unserer Konvention in „ $x \rightarrow p$ “ der Punkt p bei der Annäherung zugelassen. Weit verbreitet ist auch die Konvention, in „ $x \rightarrow p$ “ nur Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im punktierten Definitionsbereich $P - \{p\}$ zu betrachten. Bei dieser Konvention ist „ $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$ “ also gleichwertig mit unserem „ $\lim_{x \rightarrow p, x \neq p} f(x) = y$ “. Obiger Satz ist nicht mehr gültig, denn aus der Existenz des Limes folgt bei der zweiten Konvention nicht mehr automatisch seine Übereinstimmung mit dem Funktionswert $f(p)$.

Unter beiden Konventionen gilt dagegen:

Satz (*Stetigkeit durch links- und rechtsseitige Grenzwerte*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Weiter sei $p \in I$, und p sei kein Randpunkt von I . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig in p .
- (b) $\lim_{x \uparrow p} f(x) = \lim_{x \downarrow p} f(x) = f(p)$.

Analoge Äquivalenzen mit einseitigen Grenzwerten gelten für Randpunkte von I .

Unseren Satz über stetige Einpunktfortsetzungen können wir mit Hilfe der Grenzwertnotation für Funktionen so formulieren:

Satz (*stetige Einpunktfortsetzungen*)

Ist $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt $y = \lim_{x \rightarrow p^*} f(x)$ für ein $p^* \notin P$, so lässt sich die Funktion f durch „ $f(p^*) = y$ “ eindeutig auf $P \cup \{p^*\}$ stetig fortsetzen.

Der Leser beachte, dass die Gültigkeit von $y = \lim_{x \rightarrow p^*} f(x)$ beinhaltet, dass es eine Folge in P gibt, die gegen p^* konvergiert. Wegen $p^* \notin P$ ist dann p^* ein Häufungspunkt von P und die stetige Fortsetzung also eindeutig.

Analoge Notationen und Sprechweisen gelten für Folgen in $\mathbb{C}$, wobei wir hier nur ein Unendlichkeitssymbol zur Verfügung haben. Für ein $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und ein $w \in \mathbb{C}$ vereinbaren wir zum Beispiel:

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w$ bedeutet für alle Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lim_n |z_n| = \infty$ gilt $\lim_n f(z_n) = w$.

Die Umgebungsstetigkeit

Wir kehren nun zu unserer zweiten anschaulichen Formulierung der Stetigkeit zurück:

Die Funktionswerte liegen nahe bei $f(p)$, wenn die Argumente nahe bei p liegen.

Betrachten wir die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 10^{10} |x|$ für alle x , so hat f auch für sehr kleine Argumente ε sehr große Funktionswerte $f(\varepsilon)$. Die Funktion ist aber anschaulich und auch nach unserer Limesdefinition im Nullpunkt stetig. Obige Formulierung bedarf also einer kleinen, aber wichtigen Ergänzung:

Die Funktionswerte liegen nahe bei $f(p)$, wenn die Argumente hinreichend nahe bei p liegen.

Auch für den „scharfen Zacken“ f mit $f(x) = 10^{10} |x|$ für alle x liegen die Funktionswerte $f(x)$ beliebig nahe bei 0 , wenn x in einem Intervall $] - \delta, \delta[$ liegt, für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Damit ist die folgende mathematische Lesart unserer zweiten Formulierung keine Überraschung mehr:

Definition (*Umgebungsstetigkeit oder ε - δ -Stetigkeit*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$. Dann heißt f *umgebungsstetig* oder *ε - δ -stetig* im Punkt p , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P (|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon). \quad (\varepsilon\text{-}\delta\text{-Bedingung})$$

Weiter heißt $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ *umgebungsstetig*, falls f in jedem Punkt $p \in P$ umgebungsstetig ist.

Die Bezeichnung als Umgebungsstetigkeit wird besonders klar, wenn wir die ε - δ -Bedingung für den Punkt p in der folgenden äquivalenten Form schreiben:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \quad f[U_\delta(p) \cap P] \subseteq U_\varepsilon(f(p)). \quad (\text{Umgebungs-Bedingung})$$

Der Nachweis der Stetigkeit von f im Punkt p wird bei dieser Formulierung zur folgenden Aufgabe: Gegeben ist eine beliebig kleine ε -Umgebung $V = U_\varepsilon(f(p))$ des Funktionswerts $f(p)$. (Wir starten also mit einer Teilmenge des Wertevorrats der Funktion, nicht mit einer Teilmenge des Definitionsbereichs.) Gesucht ist nun eine δ -Umgebung $U = U_\delta(p)$ des Punktes p derart, dass f alle Punkte von $U \cap P$ in die Menge V abbildet.

Wir erhalten nun aber keinen konkurrierenden zweiten Stetigkeitsbegriff, denn es gilt:

Satz (*Äquivalenz der Limes- und der ε - δ -Stetigkeit*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in P$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist stetig in p .
- (b) f ist ε - δ -stetig in p .

Beweis*(a) impliziert (b):*

Wir zeigen, dass die ε - δ -Unstetigkeit der Funktion f im Punkt p die Limesunstetigkeit der Funktion f im Punkt p nach sich zieht.

Sei also $\varepsilon > 0$ derart, dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in P$ existiert mit $|x - p| < \delta$ und $|f(x) - f(p)| \geq \varepsilon$. Speziell gilt dies für die Werte $\delta_n = 1/2^n$, und damit gibt es für alle n ein $x_n \in P$ mit

$$|x_n - p| < 1/2^n \text{ und } |f(x_n) - f(p)| \geq \varepsilon.$$

Dann gilt $\lim_n x_n = p$, aber $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(p)$.

(b) impliziert (a):

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen p konvergente Folge in P . Wir zeigen:

$$\lim_n f(x_n) = f(p).$$

Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in P.$$

Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen p konvergiert, gibt es ein n_0 derart, dass

$$|x_n - p| < \delta \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

– Nach Wahl von δ gilt dann aber $|f(x_n) - f(p)| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

Ob man die Limesdefinition oder die Umgebungsdefinition der Stetigkeit als Ausgangspunkt wählt, ist letztendlich Geschmackssache. Bei Novizen ist die Anschauung des Nichtspringens aber eher anzutreffen als die Anschauung der „kleinen Wirkung bei kleiner Ursache“. Zudem erlauben die Limesregeln für die Folgenarithmetik einen einfachen Nachweis der Stetigkeit der Polynome. Die Umgebungsformulierung führt dagegen zum allgemeinen topologischen Stetigkeitsbegriff der modernen Mathematik.

Stetigkeit der Umkehrfunktion

Jede injektive Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} , die definiert ist als die Funktion $g: Q \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Q = f[P] = \{f(x) \mid x \in P\},$$

$$g(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in P.$$

Die Injektivität gilt zum Beispiel, wenn die Funktion f streng monoton ist.

Mit Hilfe der ε - δ -Formulierung zeigen wir nun, dass jede auf einem Intervall definierte streng monoton steigende Funktion eine stetige Umkehrfunktion besitzt. Das Intervall kann dabei offen, abgeschlossen oder halboffen und auch unbeschränkt sein.

Satz (*Stetigkeit der Umkehrfunktion*)

Sei P ein Intervall, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton steigend.

Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} von f streng monoton steigend und stetig. Eine analoge Aussage gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Beweis

Ist $f(x) < f(x')$ für $x, x' \in P$, so ist $x < x'$ wegen der strengen Monotonie von f . Aber $x = f^{-1}(f(x))$ und $x' = f^{-1}(f(x'))$. Also ist f^{-1} streng monoton steigend.

Sei $Q = \{ f(x) \mid x \in P \}$, und sei $q = f(p) \in Q$ beliebig. Wir zeigen, dass $f^{-1}: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in q ist. Sei hierzu $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $\delta > 0$ mit

$$\forall y \in Q (|y - q| < \delta \rightarrow |f^{-1}(y) - p| < \varepsilon).$$

Wir unterscheiden drei Fälle.

1. Fall: p ist kein Randpunkt des Intervalls P .

Durch etwaige Verkleinerung von ε können wir annehmen, dass $[p - \varepsilon, p + \varepsilon] \subseteq P$. Sei nun $\delta > 0$ so klein, dass

$$]q - \delta, q + \delta[\subseteq]f(p - \varepsilon), f(p + \varepsilon)[.$$

Dann ist δ wie gewünscht. Denn sei $y \in Q$ mit $|y - q| < \delta$. Dann gilt $f(p - \varepsilon) < y < f(p + \varepsilon)$.

Wegen f^{-1} streng monoton ist dann aber $p - \varepsilon < f^{-1}(y) < p + \varepsilon$.

2. Fall: p ist der linke Randpunkt des Intervalls P , d. h. $q = \min(Q)$.

Wir können $P \neq \{p\}$ und $[p, p + \varepsilon] \subseteq P$ annehmen. Sei $\delta > 0$ mit

$$[q, q + \delta[\subseteq [q, f(p + \varepsilon)[.$$

Ist nun $y \in Q$ mit $|y - q| < \delta$, so ist $y \geq q$ und $f(p) \leq y < f(p + \varepsilon)$.

Wegen f^{-1} streng monoton ist dann $p \leq f^{-1}(y) < p + \varepsilon$.

3. Fall: p ist der rechte Randpunkt des Intervalls P , d. h. $q = \max(Q)$.

— Analog zum zweiten Fall.

Im Satz wird nicht vorausgesetzt, dass die Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Als beliebige streng monotone Funktion kann f sehr wilde Sprünge machen, aber diese Sprünge führen zu zerklüfteten Definitionsbereichen der Umkehrfunktion und nicht zu Unstetigkeitsstellen.

Dagegen ist die Aussage des Satzes für Definitionsbereiche, die keine Intervalle sind, im allgemeinen nicht mehr richtig. Wir betrachten hierzu die Menge $P = [0, 1] \cup]2, 3]$ und definieren $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{falls } x \in [0, 1], \\ x - 1, & \text{falls } x \in]2, 3]. \end{cases}$$

Dann ist f streng monoton steigend (und zudem stetig), aber die Umkehrfunktion $f^{-1}: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Unstetigkeitsstelle bei 1.

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass der Definitionsbereich der Umkehrfunktion in der Situation des Satzes wieder ein Intervall ist, falls f eine stetige Funktion ist. Damit bilden also streng monoton steigende oder streng monoton fallende stetige Funktionen Intervalle auf Intervalle ab, und sie besitzen eine stetige Umkehrfunktion.

Gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit

Wir führen noch zwei natürliche Verstärkungen der Stetigkeit ein, die in der weiteren Entwicklung der Analysis eine wichtige Rolle spielen. Hierzu betrachten wir noch einmal die Stetigkeit einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ in der Umgebungsformulierung:

$$\forall p \in P \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P (|x - p| < \delta \rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon).$$

Ein Wert δ hängt hier im Allgemeinen sowohl von p als auch von ε ab. Ist das Wachstumsverhalten von f beschränkt, so kann die Abhängigkeit von p eliminiert werden, d. h. der Allquantor über p kann über den Existenzquantor über δ nach rechts versetzt werden. Wir definieren:

Definition (*gleichmäßige Stetigkeit*)

Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in P (|x' - x| < \delta \rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon).$$

Die gleichmäßige Stetigkeit ist ihrer Natur nach kein punktweises, sondern ein globales Stetigkeitskonzept. Wir werden im folgenden Kapitel zeigen, dass sich die Stetigkeit einer Funktion zur gleichmäßigen Stetigkeit verstärkt, falls der Definitionsbereich von f ein Intervall der Form $[a, b]$ ist. In der Integrationstheorie werden wir dieses Ergebnis dann verwenden, um zu zeigen, dass jede stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

Aber auch jenseits der gleichmäßigen Stetigkeit lassen sich noch schärfere Stetigkeitseigenschaften finden. Der folgende Begriff spielt unter anderem in der Theorie der Differentialgleichungen eine wichtige Rolle:

Definition (*Lipschitz-Stetigkeit*)

Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls ein $L \geq 0$ existiert mit

$$\forall x, x' \in P \quad |f(x') - f(x)| \leq L |x' - x|.$$

Die Zahl L heißt dann eine *Lipschitz-Konstante* für f .

Ist f Lipschitz-stetig, so ist die Änderung der Funktionswerte also linear beschränkt in der Änderung der Argumente, und zwar uniform über den gesamten Definitionsbereich der Funktion. Es ist leicht zu sehen, dass eine Lipschitz-stetige Funktion gleichmäßig stetig ist. Dagegen sind nicht alle gleichmäßig stetigen Funktionen auch Lipschitz-stetig. Wir diskutieren dies in den Übungen. In den Ergänzungen entwickeln wir zudem die Anschauung dieses wichtigen Begriffs.

Stetigkeit in $\mathbb{C}$

Sowohl die Limesdefinition als auch die Umgebungsdefinition der Stetigkeit übertragen sich ohne Schwierigkeiten nach $\mathbb{C}$. Damit ist also die Stetigkeit einer komplexen Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{C}$, $P \subseteq \mathbb{C}$, in einem Punkt $p \in \mathbb{C}$ und weiter dann die Stetigkeit von ganz f definiert. Für die Umgebungsformulierung betrachten wir

$$U_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} \mid |p - z| < \varepsilon\},$$

also die offene Kreisscheibe in der Ebene $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt p und Radius ε . Eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann stetig in einem Punkt $p \in P$, falls für jede Kreisscheibe $U_\varepsilon(f(p))$ eine Kreisscheibe $U_\delta(p)$ existiert, deren in P liegende Punkte durch die Funktion f in die Kreisscheibe $U_\varepsilon(f(p))$ abgebildet werden.

Auch die globalen Konzepte der gleichmäßigen Stetigkeit und der Lipschitz-Stetigkeit können wir unverändert für komplexe Funktionen übernehmen.

Die elementaren Sätze über stetige Funktionen gelten auch in $\mathbb{C}$, und insbesondere ist die Komposition zweier stetiger komplexer Funktionen wieder stetig. Alle komplexen Polynomfunktionen sind stetig. Die Funktionen $\operatorname{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\operatorname{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die aus einer komplexen Zahl ihren Real- bzw. Imaginärteil extrahieren, sind stetig. Weiter ist die komplexe Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_n z^n/n!$, stetig. Dies kann man wie im Reellen mit Hilfe der Restgliedabschätzung der Exponentialreihe beweisen (vgl. Übungen).

Übungen

3.1.1 Die Limesstetigkeit

Übung 1

- (a) Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f + g$ stetig ist.
- (b) Seien $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\{f(x) \mid x \in P\} \subseteq Q$.
Beweisen Sie mit Hilfe der ε - δ -Formulierung der Stetigkeit, dass die Komposition $g \circ f : P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.
- (c) Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $|f| : P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $|f|(x) = |f(x)|$ für alle $x \in P$.

Übung 2

Zeigen oder widerlegen Sie, dass für alle $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $p \in P$ gilt:

- (a) Ist $|f|$ stetig in p , so ist f stetig in p .
- (b) Sind $f \cdot g$ stetig in p , so sind f und g stetig in p .
- (c) Ist $f \circ f$ stetig in p , so ist f stetig in p .

Übung 3

Geben Sie Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ an mit den Eigenschaften:

- (a) f_n ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $f(x) = \lim_n f_n(x)$ existiert für alle $x \in [0, 1]$.
- (c) Die durch (b) definierte Funktion f auf $[0, 1]$ ist nicht stetig.

Übung 4

- (a) Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow 0} \exp(x) = 1$.
- (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion, dass $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

Übung 5

Ein $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *dicht*, falls es für alle $a < b$ in $\mathbb{R}$ ein $d \in D$ gibt mit $a < d < b$.

- (a) Geben Sie Beispiele für Mengen $D \subseteq \mathbb{R}$ an mit der Eigenschaft:
Die Mengen D und $\mathbb{R} - D$ sind dicht.
- (b) Sei nun $D \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass D und $\mathbb{R} - D$ dicht sind. Weiter sei $1_D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Indikatorfunktion von D , d. h. es gilt $1_D(x) = 1$, falls $x \in D$, und $1_D(x) = 0$, falls $x \notin D$. Zeigen Sie, dass die Funktion 1_D in jedem Punkt $p \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Übung 6

- (a) Geben Sie eine stetige Funktion $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ an derart, dass für alle $s \in \mathbb{R}$ eine Nullfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert mit $s = \lim_n f(x_n)$.
- (b) Geben Sie eine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ an, die im Punkt 0 stetig und in allen Punkten $p \in]0, 1]$ unstetig ist.

Übung 7

Sei $f: [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass sich f stetig nach $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt.

Übung 8

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge $A = \{ p \in P \mid f \text{ ist unstetig im Punkt } p \}$ abzählbar ist.

Übung 9

Sei $a \in \mathbb{R}$ irrational, und sei $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit $f(q) = 0$ für $q < a$ und $f(q) = 1$ für $q > a$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

Übung 10

Geben Sie ein $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an derart, dass f in allen Punkten unstetig ist, dagegen aber $|f|$ stetig ist.

[Unterscheiden Sie „ x ist rational“ und „ x ist irrational“ zur Definition.]

Übung 11

Geben Sie eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die im Nullpunkt stetig, in allen anderen Punkten aber unstetig ist.

[Unterscheiden Sie wieder „ x ist rational“ und „ x ist irrational“ zur Definition.]

Übung 12

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

Gilt $\lim_{x \rightarrow 0} (f(p+x) - f(p-x)) = 0$, so ist f stetig im Punkt 0.

Übung 13

Wir definieren $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{falls } x = m/n \text{ mit } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*, \text{ gekürzt,} \\ 0, & \text{falls } x \text{ irrational.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $p \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist stetig in p .
 (b) p ist irrational.

Übung 14

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

- (a) f ist ungerade, d. h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Ist f stetig im Punkt 0, so ist f stetig.

Übung 15

Wir setzen im Folgenden voraus, dass der Leser mit dem Begriff „Basis eines Vektorraumes“ vertraut ist. Sei V der $\mathbb{Q}$ -Vektorraum $\mathbb{R}$, d. h. die Menge der Vektoren ist $\mathbb{R}$, aber als Skalare werden nur rationale Zahlen betrachtet. Nach einem Satz der Vektorraumtheorie existiert eine Basis B von V . Konstruieren Sie mit Hilfe von B eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- (a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,
- (b) f ist nicht stetig.

[Betrachten Sie zur Definition von $f(x)$ die Koeffizienten der eindeutigen Darstellung $x = q_1 x_1 + \dots + q_k x_k$, $q_i \in \mathbb{Q}$, $x_i \in B$.

Damit lässt sich sogar ein $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit den gewünschten Eigenschaften konstruieren.]

3.1.2 Die Umgebungsstetigkeit

Übung 1

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, und seien $p, c \in \mathbb{R}$ mit $f(p) > c$. Weiter sei f stetig in p . Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert mit:

$$f(x) > c \text{ für alle } x \in U_\varepsilon(p).$$

Übung 2

Ein $W \subseteq \mathbb{R}$ heißt eine *Umgebung* eines Punktes $p \in \mathbb{R}$, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(p) \subseteq W$. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $p \in \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist stetig in p .
- (b) Für alle Umgebungen W von $f(p)$ ist $f^{-1}[W] = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in W\}$ eine Umgebung von p .

Übung 3

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion, und sei P beschränkt. Zeigen Sie, dass $f[P] = \{f(x) \mid x \in P\}$ beschränkt ist.

Übung 4

Geben Sie Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an mit den Eigenschaften:

- (a) f und g sind gleichmäßig stetig.
- (b) fg ist nicht gleichmäßig stetig.

Übung 5

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass ein $L \geq 0$ gibt mit

$$|f(x)| \leq L(1 + |x|) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Übung 6

Seien $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit $\{f(x) \mid x \in P\} \subseteq Q$. Zeigen Sie, dass $g \circ f$ Lipschitz-stetig ist.

Übung 7

- (a) Geben Sie eine stetige Funktion $f :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ an, die nicht gleichmäßig stetig ist. Beweisen Sie, dass die gleichmäßige Stetigkeit nicht gilt.
- (b) Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.
- (c) Geben Sie eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ an, die nicht Lipschitz-stetig ist. Beweisen Sie, dass die Lipschitz-Stetigkeit nicht gilt.

Übung 8

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(cx) = cf(x)$ für alle $c, x \in \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie:

- (a) f ist stetig, (b) f ist gleichmäßig stetig, (c) f ist Lipschitz-stetig.

Siebte Ergänzungen: Visualisierungen stetiger Funktionen, I

Das Thema der folgenden Übungen ist die Diskussion und Illustration des Funktionsbegriffs und der Stetigkeitseigenschaften einer Funktion. Dabei spielen graphische Darstellungen von Funktionen eine wichtige Rolle.

Ergänzungsübung 1

Diskutieren Sie mit Hilfe von Diagrammen, wie aus dem Graphen einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ die Graphen der folgenden Funktionen hervorgehen:

- (a) $f_1(x) = f(x - c) + d$ für alle $x \in P$ und gewisse $c, d \in \mathbb{R}$,
- (b) $f_2(x) = f(cx)$ für alle $x \in P$ und ein gewisses $c \in \mathbb{R}$,
- (c) $f_3(x) = c f(x)$ für alle $x \in P$ und ein gewisses $c \in \mathbb{R}$,
- (d) $f_4(x) = |f(x)|$ für alle $x \in P$,
- (e) $f_5(x) = f^{-1}(x)$ für alle $x \in P$, falls f injektiv ist.

Geben Sie jeweils die Definitions- und Wertebereiche von $f_1, \dots, f_5$ an, in Abhängigkeit vom Definitionsbereich P und Wertebereich W von f .

Ergänzungsübung 2

Diskutieren Sie verschiedene Beispiele aus dem Alltag oder den Naturwissenschaften, die (idealisiert) zu stetigen Funktionen Anlass geben. Welche Beispiele haben besonders viele Knicke und welche nicht? Überprüfen Sie die beiden Anschauungen des „Nichtspringens“ und der „kleinen Änderung“ an Ihren Beispielen.

Ergänzungsübung 3

Beantworten Sie folgende Frage eines Schülers der 11. Klasse:

„Bedeutet die Stetigkeit einer Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, dass man den Graphen von f ohne abzusetzen zeichnen kann, wobei Knicke erlaubt sind?“

Ergänzungsübung 4

Zeichnen Sie Diagramme zur Visualisierung der Stetigkeit und der gleichmäßigen Stetigkeit.

Ergänzungsübung 5

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$. Definieren Sie

„ f ist linksseitig stetig im Punkt p “ und „ f ist rechtsseitig stetig im Punkt p “

mit Hilfe von Folgen und Umgebungen. Diskutieren Sie diese Begriffe und untersuchen Sie dabei insbesondere ihren Zusammenhang mit der Stetigkeit von f in p .

Ergänzungsübung 6

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$. Definieren Sie eine lokale Version der Lipschitz-Stetigkeit:

„ f ist Lipschitz-stetig im Punkt p , falls ...“.

Zeichnen Sie Diagramme zur Visualisierung der Lipschitz-Stetigkeit in einem Punkt p . Geben Sie darauf aufbauend eine anschauliche Erklärung der Bedeutung der globalen Lipschitz-Stetigkeit einer Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für die Lipschitz-Konstanten 1, $1/2$ und 2.

[Betrachten Sie Geraden mit der Steigung $(f(p) - f(x))/(p - x)$.]

Ergänzungsübung 7

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten L . Was können Sie über die Lipschitz-Stetigkeit der Funktionen $f_1, \dots, f_5$ der ersten Übung sagen? Zeichnen Sie wieder Diagramme zur Illustration.

Ergänzungsübung 8

Zeichnen Sie Diagramme zur Visualisierung der stetigen Fortsetzbarkeit oder Nichtfortsetzbarkeit einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ in einem Punkt $p^* \notin P$. Betrachten Sie dabei verschiedene Fälle der Lage von p^* zu P .

Ergänzungsübung 9

Definieren und erläutern Sie in Analogie zum eindimensionalen Fall, was die Stetigkeit einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ in einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ bedeutet, für beliebige natürliche Zahlen $n, m \geq 1$. Diskutieren Sie Beispiele für stetige Operationen in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und im Raum $\mathbb{R}^3$, etwa Bewegungen oder Verformungen eines Kreises oder einer Kugel.

Ergänzungsübung 10

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine injektive Funktion. Illustrieren Sie mit Hilfe von Diagrammen den Zusammenhang zwischen Definitionslücken von f und Unstetigkeitsstellen der Umkehrfunktion f^{-1} .

2. Zur Theorie der Stetigkeit

Wir beweisen in diesem Kapitel die wichtigsten Hauptsätze der elementaren Theorie der stetigen Funktionen: den Nullstellen- und Zwischenwertsatz, den Fixpunktsatz und den Satz über die Annahme von Maximum und Minimum. Bei diesen Sätzen stehen die kompakten reellen Intervalle der Form $[a, b]$ als Definitionsbereich im Mittelpunkt. Weiter betrachten wir dann Folgen von stetigen Funktionen, die gegen eine Grenzfunktion konvergieren. In der gleichmäßigen Konvergenz finden wir eine Bedingung, die sicherstellt, dass die Grenzfunktion stetiger Funktionen stetig ist. Die wichtigsten Beispiele hierfür liefern uns Reihen der Form $\sum_n a_n x^n$, sogenannte Potenzreihen.

Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Beschränkte oder unbeschränkte Intervalle sind besonders natürliche Definitionsbereiche für stetige Funktionen. Es zeigt sich nun, dass den beschränkten und abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$ eine ausgezeichnete Bedeutung zukommt. Wie substantiell der Unterschied zwischen stetigen Funktionen auf $]0, 1[$ und $[0, 1]$ zum Beispiel ist, wird der Leser sehen, wenn er versucht, stetige Funktionen auf diesen Intervallen zu zeichnen, deren Wertebereich ganz $\mathbb{R}$ ist. Während das für das Intervall $]0, 1[$ gelingt, scheint es für $[0, 1]$ unmöglich zu sein. Wir werden im Folgenden in der Tat beweisen, dass jede stetige Funktion f auf $[0, 1]$ *beschränkt* ist, d. h. ihr Wertebereich ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Wir definieren:

Definition (*kompaktes Intervall*)

Reelle Intervalle der Form $[a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, heißen *kompakt*.

Der Zwischenwertsatz

Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so ist anschaulich klar, dass die Funktion eine Nullstelle besitzt. Denn andernfalls müsste sie vom negativen Bereich, in dem sie beginnt, auf dem Weg von a nach b irgendwann in den positiven Bereich, in dem sie endet, springen, und stetige Funktionen haben keine Sprungstellen. Diese Anschauung ist richtig, aber ihre Umsetzung in ein mathematisches Argument ist keineswegs trivial. Wir beobachten hierzu:

Satz (*positive Umgebungen*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei $p \in P$ mit $f(p) > 0$. Dann ist f in einer offenen Umgebung von p positiv, d. h. es gibt ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft:

Für alle $x \in]p - \delta, p + \delta[\cap P$ gilt $f(x) > 0$.

Beweis

Die Existenz von δ folgt unmittelbar aus der ε - δ -Charakterisierung der

– Stetigkeit für die Wahl von $\varepsilon = f(p)/2 > 0$.

Ein analoger Satz gilt für die negativen Werte stetiger Funktionen.

Diese einfache Beobachtung trägt nun die folgende Argumentation.

Satz (*Nullstellensatz*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es gelte $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann existiert eine Nullstelle von f . Gleiches gilt, falls $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$.

Beweis

Sei also $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Die Menge $X = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq 0\}$ ist als Teilmenge von $[a, b]$ beschränkt und wegen $f(b) > 0$ nichtleer. Also existiert

$p = \inf(X)$.

Wir zeigen, dass $f(p) = 0$ gilt. Zunächst gilt $f(p) \leq 0$, denn für $f(p) > 0$ wäre $p \in]a, b]$ wegen $f(a) < 0$, also wäre $p - \delta \in X$ für ein $\delta > 0$ nach unserer Beobachtung, im Widerspruch zu $p = \inf(X)$.

Wegen $p = \inf(X)$ existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X mit $p = \lim_n x_n$.

Wegen $x_n \in X$ ist $f(x_n) \geq 0$ für alle n . Aufgrund der Stetigkeit von f ist dann

$f(p) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) \geq 0$.

Insgesamt ist also $f(p) \leq 0$ und $f(p) \geq 0$, d. h. $f(p) = 0$.

– Der Fall $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ wird analog behandelt.

Die in diesem Beweis gefundene Nullstelle p ist offenbar die kleinste Nullstelle von f . Analog ist $\sup(\{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\})$ die größte Nullstelle von f .

Der Nullstellensatz ruht auf der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$. So ist zum Beispiel die Funktion $f: [0, 2] \cap \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit $f(x) = x^2 - 2$ für alle $x \in [0, 2] \cap \mathbb{Q}$ stetig und erfüllt $f(0) < 0$ und $f(2) > 0$, besitzt aber aufgrund der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 keine Nullstelle.

Explizit notieren wir:

Satz (*Nullstellensatz, Umformulierung*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und seien $a, b \in P$ mit $a < b$. Haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen und ist $[a, b] \subseteq P$, so liegt zwischen a und b eine Nullstelle von f .

Damit erhalten wir:

Korollar (*Existenz von Nullstellen von Polynomen ungeraden Grades*)

Sei f ein reelles Polynom ungeraden Grades, d.h. es gelte

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

mit $a_i \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, n ungerade. Dann existiert eine Nullstelle von f .

Beweis

- Ist $x > 0$ genügend groß, so haben $f(-x)$ und $f(x)$ verschiedene Vorzeichen.

Aus dem Nullstellensatz folgt weiter stärker:

Satz (*Zwischenwertsatz*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Seien $c, d \in [a, b]$ und $y \in \mathbb{R}$ derart, dass y zwischen $f(c)$ und $f(d)$ liegt. Dann existiert ein p zwischen c und d mit $f(p) = y$.

Beweis

Wir setzen $I = [c, d]$, falls $c < d$, und $I = [d, c]$, falls $d < c$, und wenden den

- Nullstellensatz auf die Funktion $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - y$ an.

Eine hübsche Anwendung des Zwischenwertsatzes ist:

Korollar (*Existenz von Wurzeln*)

Seien $y \in [0, \infty[$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dann existiert genau eine positive n -te Wurzel von y , d.h. genau ein $p \in [0, \infty[$ mit $p^n = y$.

Beweis

Wir betrachten die Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n$ für alle $x \in [0, \infty[$.

Dann ist f stetig und nimmt beliebig große Werte an. Nach dem Zwischenwertsatz wird also auch der Wert y angenommen, d.h. es gibt ein $p \in [0, \infty[$

- mit $f(p) = y$. Die Eindeutigkeit folgt aus der Injektivität von f .

Der Fixpunktsatz

Wir betrachten das Quadrat $E = [0, 1] \times [0, 1]$. Ziehen wir von irgendeinem Punkt a der linken Kante von E eine stetige Linie zu irgendeinem Punkt b der rechten Kante von E , so ist anschaulich klar, dass wir irgendwann die Diagonale $D = \{(x, x) \mid x \in [0, 1]\}$ des Quadrats treffen müssen. In der Tat gilt für alle stetigen Funktionen:

Satz (*Fixpunktsatz*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein Fixpunkt von f , d.h. es gibt ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = p$.

Beweis

Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, so ist a oder b ein Fixpunkt der Funktion f .

Wir nehmen also an, dass $f(a) > a$ und $f(b) < b$ gilt.

Sei $g = f - \text{id}_{[a,b]}$, d.h. es gilt

$$g(x) = f(x) - x \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann ist g stetig, und es gilt $g(a) = f(a) - a > 0$ und $g(b) = f(b) - b < 0$.

Nach dem Nullstellensatz gibt es also ein $p \in [a, b]$ mit

$$g(p) = f(p) - p = 0.$$

– Dann ist aber $f(p) = p$.

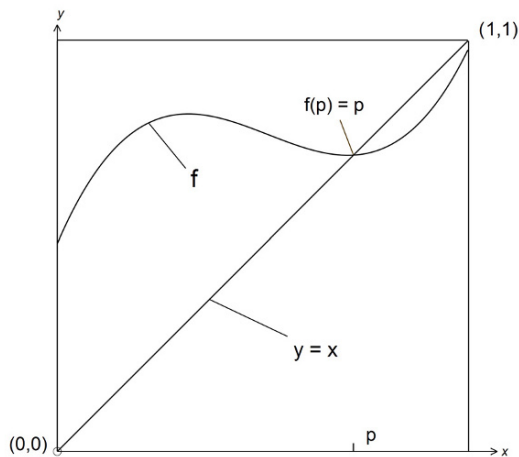


Diagramm zum Fixpunktsatz für ein stetiges $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

Annahme von Maximum und Minimum

Als nächstes zeigen wir mit Hilfe des Satzes von Bolzano-Weierstraß, dass eine auf einem kompakten Intervall definierte stetige Funktion Extremwerte annehmen muss. Damit beweisen wir insbesondere auch die obige Vermutung, dass eine stetige Funktion auf $[0, 1]$ einen beschränkten Wertebereich hat.

Satz (*Annahme von Maximum und Minimum, Satz von Weierstraß*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $p, q \in [a, b]$ mit

- (a) $f(p)$ ist das Maximum des Wertebereichs von f , d.h. es gilt $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in [a, b]$,
- (b) $f(q)$ ist das Minimum des Wertebereichs von f , d.h. es gilt $f(q) \leq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis

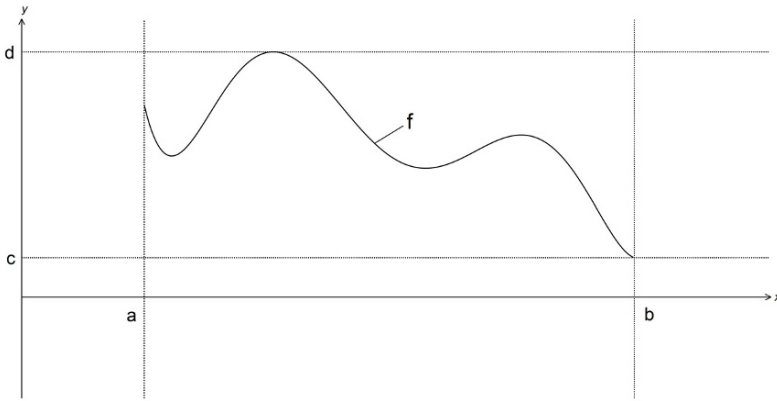
Wir finden ein p wie in (a). Die Minimumsbehauptung wird analog gezeigt. Sei $Y = \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$ der Wertebereich von f . Dann gibt es (Beweis als Übung) eine monoton steigende Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Y mit:

(+) Für alle $y \in Y$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \leq y_n$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei x_n ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y_n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine gegen ein $p \in [a, b]$ konvergente Teilfolge $(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von f

$$f(p) = f(\lim_n x_{i_n}) = \lim_n f(x_{i_n}) = \lim_n y_{i_n}.$$

Aus (+) und der Monotonie der Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt nun, dass $f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in [a, b]$.



Die stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt einen kleinsten Funktionswert c und einen größten Funktionswert d . Der Wertebereich von f ist das kompakte Intervall $[c, d]$.

Das Maximum und das Minimum kann mehrfach angenommen werden. Die Nullfunktion auf $[a, b]$ nimmt z. B. überall ihr Minimum und ihr Maximum an.

Die stetigen Funktionen $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x$ für alle x und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x$ für alle x illustrieren, dass die Aussage des Satzes von Weierstraß für viele andere Definitionsbereiche nicht richtig sein muss.

Unsere Ergebnisse über das Werteverhalten stetiger Funktionen lassen sich elegant zusammenfassen:

Satz (Wertebereich stetiger Funktionen auf kompakten Intervallen)

Der Wertebereich einer stetigen Funktion, die auf einem kompakten Intervall definiert ist, ist ein kompaktes Intervall.

Dieser Satz enthält sowohl den Nullstellen- und Zwischenwertsatz als auch den Satz über die Annahme von Maximum und Minimum. Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist der Wertebereich $Y = \{ f(x) \mid x \in [a, b] \}$ der Funktion von der Form $[c, d]$ für gewisse reelle Zahlen $c \leq d$. Die Zahl c ist das Minimum und die Zahl d das Maximum des Wertebereichs. Ist $c < 0$ und $d > 0$, so ist $0 \in [c, d]$, d. h. f besitzt eine Nullstelle. Und allgemeiner existiert zu jedem „Zwischenwert“ y mit $c \leq y \leq d$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

Der Wertebereich der stetigen Funktion $1/x$ auf $]0, 1]$ ist $[1, \infty[$, also nicht mehr kompakt. Allgemein gilt aber noch:

Satz (*Wertebereich stetiger Funktionen auf Intervallen, Intervallsatz*)

Der Wertebereich einer stetigen Funktion, die auf einem Intervall definiert ist, ist ein Intervall.

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen. (Unangenehme Fallunterscheidungen können hier vermieden werden, wenn man folgende Eigenschaft heranzieht: Ein $P \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn für alle $a < b$ in P gilt, dass $[a, b] \subseteq P$.)

Gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen

Als weiteres Beispiel für die Güte kompakter Intervalle zeigen wir schließlich noch, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen automatisch gleichmäßig stetig sind.

Satz (*gleichmäßige Stetigkeit auf kompakten Intervallen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis

Annahme nicht. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass gilt:

$$\forall \delta > 0 \exists x, x' \in [a, b] (|x' - x| < \delta \wedge |f(x') - f(x)| \geq \varepsilon).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren dann x_n, x_n' mit

$$|x_n' - x_n| < 1/2^n \text{ und } |f(x_n') - f(x_n)| \geq \varepsilon.$$

Durch Übergang zu einer nach Bolzano-Weierstraß existierenden Teilfolge können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen ein $p \in [a, b]$ konvergiert. Wegen $|x_n' - x_n| < 1/2^n$ für alle n konvergiert dann auch $(x_n')_{n \in \mathbb{N}}$ gegen p . Dann ist aber

$$0 = f(p) - f(p) = f(\lim_n x_n) - f(\lim_n x_n') = \lim_n (f(x_n) - f(x_n')),$$

– im Widerspruch zu $|f(x_n') - f(x_n)| \geq \varepsilon$ für alle n .

Dagegen sind stetige Funktionen auf offenen Intervallen $]a, b[$ im Allgemeinen nicht mehr gleichmäßig stetig. Wir diskutieren dies in den Übungen.

Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen

Für Funktionen $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ hatten wir durch punktweise Anwendung der arithmetischen Operationen die Funktionen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und f/g gewonnen. Die Grenzwertbildung gibt nun Anlass zu einer weiteren punktweisen Konstruktion:

Definition (*punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf P , und für alle $x \in P$ existiere $\lim_n f_n(x)$. Dann heißt die Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \lim_n f_n(x) \quad \text{für alle } x \in P$$

der (*punktweise*) Grenzwert oder *Limes* der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, und die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt (*punktweise*) konvergent gegen f . In Zeichen schreiben wir

$$f = \lim_n \rightarrow \infty f_n \quad (\text{punktweise}).$$

Konvergiert $(|f_n(x)|)_{n \in \mathbb{N}}$ für alle $x \in P$, so heißt die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (*punktweise*) absolut konvergent.

Definieren wir für jede natürliche Zahl n die „Stufenfunktion“ $s_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $s_n(x) = 0$ für alle $x < n$ und $s_n(x) = 1$ für alle $x \geq n$, so konvergiert die Funktionenfolge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion auf $\mathbb{R}$. Ebenso konvergieren die Potenzfunktionen $g_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $g_n(x) = x^n$ für alle $x \in [0, 1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$ punktweise gegen die Funktion g mit $g(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1[$ und $g(1) = 1$. Dieses Beispiel zeigt auch, dass die Stetigkeit bei einem punktwisen Grenzübergang verloren gehen kann.

Ausgeschrieben bedeutet „ $\lim_n f_n = f$ “:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in P \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Die natürliche Zahl n_0 hängt hier im Allgemeinen sowohl von ε als auch von x ab. So, wie wir die Stetigkeit einer Funktion zur gleichmäßigen Stetigkeit verstärkt haben, können wir nun auch die punktweise Konvergenz einer Funktionenfolge verstärken, indem wir den Allquantor $\forall x \in P$ nach rechts bewegen:

Definition (*gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf P , und sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gleichmäßig* gegen f , falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in P \quad |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

In Zeichen schreiben wir:

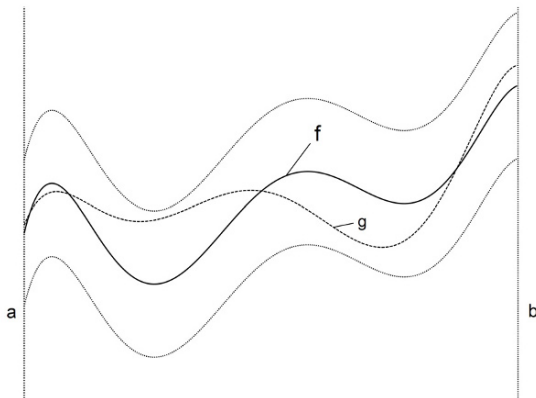
$$f = \lim_n \rightarrow \infty f_n \quad (\text{gleichmäßig}).$$

Offenbar impliziert die gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz.

Die gleichmäßige Konvergenz besitzt eine sehr sympathische Visualisierung. Ist $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $\varepsilon > 0$, so ist die Menge

$$U_\varepsilon(f) = \{ (x, y) \in P \times \mathbb{R} \mid |f(x) - y| < \varepsilon \}$$

ein offener „ ε -Schlauch“ um die Funktion f . Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf P konvergiert nun genau dann gleichmäßig gegen f , wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein n_0 existiert mit $\{ (x, f_n(x)) \mid x \in P, n \geq n_0 \} \subseteq U_\varepsilon(f)$, d. h. ab der Stelle n_0 bewegt sich die Funktionenfolge vollständig innerhalb des offenen ε -Schlauches von f . Insbesondere kann eine Funktionenfolge, deren Glieder alle irgendwo den Wert 1 annehmen, nicht gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergieren.



$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ im ε -Schlauch von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz illustriert der folgende Satz, der besagt, dass die gleichmäßige Konvergenz die Stetigkeit erhält. Der Beweis ist ein klassisches $\varepsilon/3$ -Argument.

Satz (*Stetigkeitssatz für gleichmäßige Konvergenz*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen auf P , die gleichmäßig gegen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

Beweis

Sei $p \in P$. Wir zeigen, dass die Funktion f im Punkt p stetig ist.

Hierzu sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Folge gibt es ein n , sodass die Funktion f_n im offenen $\varepsilon/3$ -Schlauch um f liegt, d. h. für alle $x \in P$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f_n existiert weiter ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in P$ mit $|x - p| < \delta$ gilt:

$$|f_n(p) - f_n(x)| < \varepsilon/3.$$

Dann gilt aber für alle $x \in P$ mit $|x - p| < \delta$:

$$|f(p) - f(x)| \leq |f(p) - f_n(p)| + |f_n(p) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| <$$

$$\varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Der Beweis geht von $f(p)$ „zurück“ zu einer Approximation $f_n(p)$, dann mittels der Stetigkeit dieser Approximation „zur Seite“ nach $f_n(x)$, und dann wieder nach „vorne“ zu $f(x)$. Die gleichmäßige Stetigkeit liefert $\varepsilon/3$ -Approximationen ab einer Stelle n_0 , für den Beweis genügt eine einzige derartige Approximation.

Für Funktionen $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, die einen beschränkten Wertebereich besitzen, lässt sich die gleichmäßige Konvergenz auf die Konvergenz einer gewissen Folge reeller Zahlen zurückführen. Wir definieren hierzu:

Definition (*Supremumsnorm*)

Sei $P \neq \emptyset$, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann setzen wir:

$$\|f\| = \sup(\{|f(x)| \mid x \in P\}).$$

Die reelle Zahl $\|f\|$ heißt die *Supremumsnorm* von f .

Für unbeschränkte Funktionen ist zuweilen wieder die Notation $\|f\| = \infty$ nützlich. Damit ist dann z. B. $\|f\| < \infty$ nur eine andere Ausdrucksweise für die Beschränktheit der Funktion f .

Leicht zu sehen ist:

Satz (*Eigenschaften der Supremumsnorm*)

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, $P \neq \emptyset$. Dann gilt für alle beschränkten $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$ und alle $a \in \mathbb{R}$:

- (a) $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in P$,
- (b) $\|af\| = |a| \|f\|$,
- (c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. (*Dreiecksungleichung*)

Die gleichmäßige Konvergenz lässt sich nun wie folgt ausdrücken:

Satz (*Normformulierung der gleichmäßigen Konvergenz*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Funktionen auf $P \neq \emptyset$, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f .
- (b) $\lim_n \|f_n - f\| = 0$.

Beweis

Die gleichmäßige Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in P \mid f(x) - f_n(x) \mid \leq \varepsilon,$$

und damit äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \sup(\{|f(x) - f_n(x)| \mid x \in P\}) \leq \varepsilon.$$

Letztere Aussage ist aber äquivalent zu

$$\lim_n \|f_n - f\| = 0.$$

Der Satz von Dini

Es stellt sich die Frage, unter welchen Bedingungen eine Funktionenfolge gleichmäßig konvergiert. Obige Folge $g_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $g_n(x) = x^n$ zeigt, dass die Konvergenz im Allgemeinen selbst dann nicht gleichmäßig ist, wenn die Glieder der Funktionenfolge stetig und auf einem kompakten Intervall definiert sind. Auch eine stetige Grenzfunktion garantiert, wie wir in den Übungen sehen werden, immer noch nicht die gleichmäßige Konvergenz. Erst die Vierfachkombination „stetige Funktionen, stetige Grenzfunktion, kompaktes Intervall als Definitionsbereich, punktweise monoton fallende (oder alternativ monoton steigende) Konvergenz“ ist stark genug, die gleichmäßige Konvergenz zu erzwingen. Dies ist die Aussage des folgenden Satzes von Dini. Zu seinem Beweis ziehen wir nach einer elementaren Umformung der Problemstellung zwei wichtige Sätze der Theorie heran, nämlich den Satz von Bolzano-Weierstraß über die Existenz von Häufungspunkten und den Satz über die Annahme von Extremwerten.

Satz (*Satz von Dini*)

Seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und f Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ mit den Eigenschaften:

- (a) f und alle f_n sind stetig.
- (b) $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ (punktweise).
- (c) Für alle $x \in [a, b]$ ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ monoton steigend.

Dann gilt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \quad (\text{gleichmäßig}).$$

Eine analoge Aussage gilt für punktweise monoton fallende Funktionen.

Beweis

Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann ist jedes g_n stetig, und $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise monoton fallend gegen die Nullfunktion auf $[a, b]$. Es genügt zu zeigen, dass diese Konvergenz gleichmäßig ist. Nach dem Satz über die Annahme des Maximums gibt es für alle n ein $x_n \in [a, b]$ mit

$$g_n(x_n) = \max(\{g_n(x) \mid x \in [a, b]\}).$$

Sei $y_n = g_n(x_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt also $g_n(x) \in [0, y_n]$ für alle x und n . Es genügt zu zeigen, dass $\lim_n y_n = 0$. Wegen der monoton steigenden Konvergenz von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend, und daher existiert

$$y^* = \lim_n y_n = \inf_n y_n.$$

Annahme, $y^* > 0$. Zum Erzielen eines Widerspruchs sei p ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wegen $\lim_n g_n(p) = 0$ gibt es ein n_0 mit $g_{n_0}(p) < y^*$.

Aufgrund der Stetigkeit von g_{n_0} im Punkt p gibt es dann aber ein $\delta > 0$ mit $g_{n_0}(x) < y^*$ für alle $x \in]p - \delta, p + \delta[$.

Da p ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist, gibt es ein $n_1 \geq n_0$ mit $|x_{n_1} - p| < \delta$. Aber $(g_n(x_{n_1}))_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton fallend, und damit gilt

$$y_{n_1} = g_{n_1}(x_{n_1}) \leq g_{n_0}(x_{n_1}) < y^* \leq y_{n_1},$$

– *Widerspruch!*

Der Konvergenzsatz von Weierstraß

Weiter beweisen wir noch einen Satz von Weierstraß, der in vielen wichtigen Spezialfällen die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge liefert. Er betrifft Reihen $\sum_n f_n$ von Funktionen. Eine solche Reihe ist per Definition wieder die Funktionenfolge $(\sum_{k \leq n} f_k)_{n \in \mathbb{N}}$, und damit sind die punktweise und die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe $\sum_n f_n$ definierte Begriffe. Der Satz von Weierstraß lautet nun:

Satz (*Konvergenzsatz von Weierstraß*)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von beschränkten Funktionen auf P derart, dass $\sum_n \|f_n\|$ konvergiert. Dann konvergiert $\sum_n f_n$ absolut und gleichmäßig gegen eine Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis

Für alle $x \in P$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n(x)| \leq \|f_n\|$. Nach dem Majorantenkriterium existiert also

$$f(x) = \sum_n f_n(x) \quad \text{für alle } x \in P,$$

d.h. $\sum_n f_n$ konvergiert punktweise gegen f , und die Konvergenz ist absolut. Wir zeigen nun, dass die Konvergenz gleichmäßig ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen der Konvergenz von $\sum_n \|f_n\|$ gibt es ein n_0 derart, dass

$$\sum_{k > n_0} \|f_k\| < \varepsilon.$$

Dann gilt für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in P$:

$$- \quad |f(x) - \sum_{k \leq n} f_k(x)| = |\sum_{k > n} f_k(x)| \leq \sum_{k > n} \|f_k\| \leq \sum_{k > n_0} \|f_k\| < \varepsilon.$$

Die Funktionen f_n sind hier nicht als stetig vorausgesetzt. Sind sie stetig, so ist ihr Limes f aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz ebenfalls stetig.

Der Satz von Weierstraß lässt sich zum Beispiel für alle $R \geq 0$ auf die Funktionen $f_n:]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = x^n/n!$ für alle x und n anwenden. Er zeigt dann, dass die Exponentialreihe $\sum_n x^n/n!$ auf $]-R, R[$ absolut und gleichmäßig gegen die Exponentialfunktion konvergiert. Da alle f_n stetig sind, ergibt sich damit noch einmal die Stetigkeit der Exponentialfunktion. Allgemeiner spielt der Satz von Weierstraß bei der Untersuchung von Potenzreihen der Form $\sum_n a_n x^n$ eine wichtige Rolle, denen wir uns später zuwenden werden.

Gleichmäßige Approximation durch Polynome

Von Weierstraß stammt auch der folgende fundamentale Satz zur gleichmäßigen Konvergenz: Ist f eine stetige Funktion, die auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ definiert ist, so existieren Polynome $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen f konvergieren. Mit der Visualisierung über ε -Schläuche lässt sich dieses Ergebnis sehr anschaulich auch so formulieren: Zeichnen wir den Graphen der Funktion f mit einem endlich spitzen Stift (was ja in der Realität immer der Fall ist), so gibt es ein Polynom, das ganz innerhalb des gezeichneten Graphen verläuft.

Während die ersten Beweise von Weierstraß recht verwickelt waren, kennt man heute sehr kurze abstrakte Beweise von allgemeineren Approximationssätzen. Von hohem Interesse für den klassischen Fall einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist aber die konkrete Konstruktion von möglichst einfachen Polynomen f_n , die gleichmäßig gegen f konvergieren. Eine ruhmreiche derartige Konstruktion geht auf den russischen Mathematiker Sergei Bernstein zurück.

Wir beginnen mit einer Reduktion des Problems. Sei hierzu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten dann die „affine Transformation“ $h : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, die das Intervall $[0, 1]$ um den Faktor $b - a$ dehnt und um den Wert a nach rechts verschiebt, d. h. es gilt

$$h(x) = (b - a)x + a \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

Dann ist $g = f \circ h$ eine stetige Funktion auf $[0, 1]$. Konvergieren nun Polynome g_n gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen g , so konvergieren die Polynome $f_n = g_n \circ h^{-1}$ gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f . Es genügt also, den Definitionsbereich $[0, 1]$ zu betrachten.

Sei also $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ein natürlicher Ansatz zur Konstruktion eines n -ten approximierenden Polynoms $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist, die Werte $f(k/(n+1))$ für alle $0 \leq k \leq n+1$ zu verwenden. Wie genau, ist die Kunst. Bernsteins Konstruktion verwendet neben diesen Werten die folgenden von f unabhängigen Polynome:

Definition (*Basispolynome*)

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \leq n$ definieren wir:

$$b_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

$b_{0,n}, \dots, b_{n,n} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ heißen die *Basispolynome* vom Grad n .

Die ersten Basispolynome lauten

$$b_{0,0}(x) = 1,$$

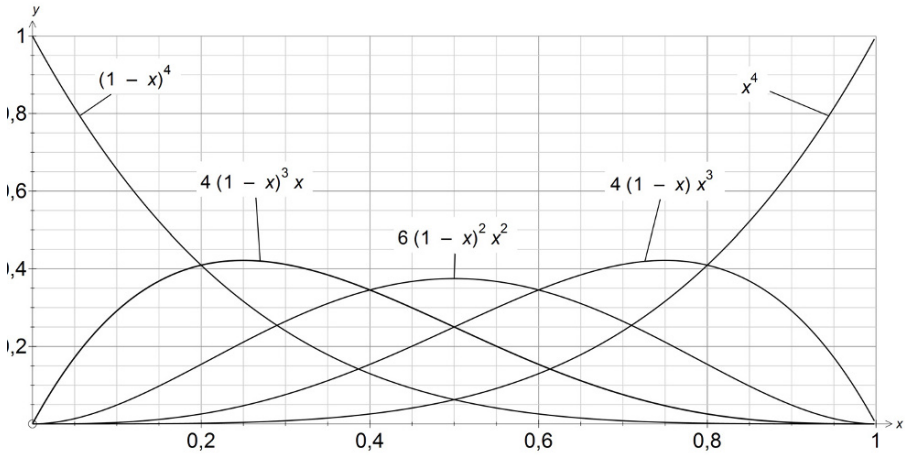
$$b_{0,1}(x) = 1-x, \quad b_{1,1}(x) = x,$$

$$b_{0,2}(x) = (1-x)^2, \quad b_{1,2}(x) = 2(1-x)x, \quad b_{2,2}(x) = x^2,$$

$$b_{0,3}(x) = (1-x)^3, \quad b_{1,3}(x) = 3(1-x)^2x, \quad b_{2,3}(x) = 3(1-x)x^2, \quad b_{3,3}(x) = x^3,$$

$$b_{0,4}(x) = (1-x)^4, \quad b_{1,4}(x) = 4(1-x)^3x, \quad b_{2,4}(x) = 6(1-x)^2x^2, \quad b_{3,4}(x) = 4(1-x)x^3,$$

$$b_{4,4}(x) = x^4.$$



die Basispolynome $b_{0,4}, b_{1,4}, b_{2,4}, b_{3,4}, b_{4,4}$

Die Basispolynome tauchen im binomischen Lehrsatz

$$(x + y)^n = \sum_{k \leq n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

für die Wahl von

$$y = 1 - x$$

auf. Damit gilt

$$\sum_{k \leq n} b_{k,n}(x) = (x + (1 - x))^n = 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die $n + 1$ Basispolynome $b_{0,n}, \dots, b_{n,n}$ eine Zerlegung der Eins-Funktion auf $[0, 1]$. Sehen wir die stetige Funktion f als verzerrte Eins-Funktion an, so fällt die folgende Definition nicht mehr vom Himmel:

Definition (Bernstein-Polynome für f)

Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann definieren wir:

$$B_0(x) = b_{0,0}(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

$$B_n(x) = \sum_{k \leq n} f(k/n) b_{k,n}(x) \quad \text{für alle } n \geq 1 \text{ und alle } x \in [0, 1].$$

Die Funktion $B_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt das *Bernstein-Polynom* für f vom Grad n .

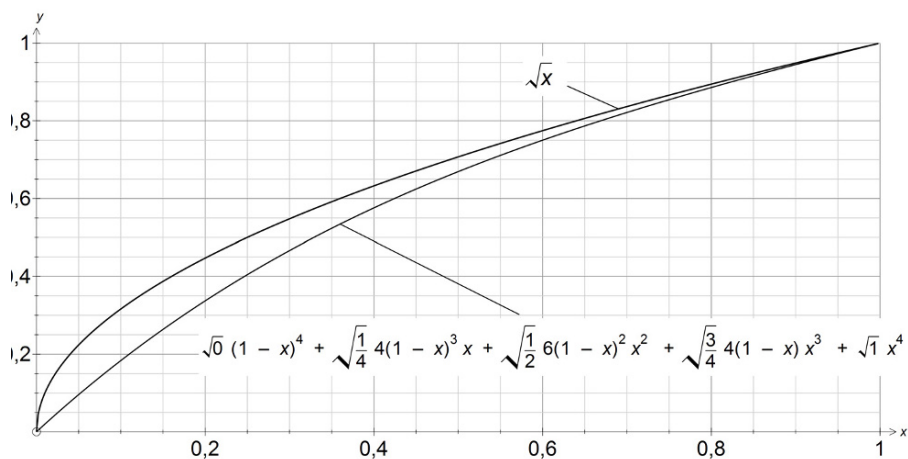
Ohne Beweis geben wir an:

Satz (Approximationssatz von Weierstraß-Bernstein)

Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Bernstein-Polynome für f . Dann gilt

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \quad (\text{gleichmäßig}).$$

Das folgende Diagramm zeigt das Bernstein-Polynom vierten Grades für die Quadratwurzelfunktion auf $[0, 1]$:



Bernstein-Polynom B_4 für $f(x) = \sqrt{x}$

Die Konvergenz ist im Allgemeinen sehr langsam, weshalb die Bernstein-Polynome für effektive Approximationen keine wichtige Rolle spielen.

Funktionenfolgen in $\mathbb{C}$

Unsere Definitionen und Sätze zur punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz übertragen sich wieder auf Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n : P \rightarrow \mathbb{C}$, für ein beliebiges $P \subseteq \mathbb{C}$. Die Visualisierung der gleichmäßigen Konvergenz durch „ ε -Schläuche“ lässt sich noch aufrechterhalten, wenn wir zu Real- und Imaginärteil übergehen. Denn eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, wie leicht zu sehen ist, in $\mathbb{C}$ genau dann gleichmäßig gegen f , wenn $(\operatorname{Re}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(f_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig in $\mathbb{R}$ gegen $\operatorname{Re}(f)$ bzw. $\operatorname{Im}(f)$ konvergieren.

Der Konvergenzsatz von Weierstraß bleibt auch für Reihen von komplexwertigen Funktionen $f_n : P \rightarrow \mathbb{C}$, $P \subseteq \mathbb{R}$, richtig.

Übungen

3.2.1 Stetige Funktionen auf kompakten Intervallen

Übung 1

Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind (1) immer richtig, (2) immer falsch, (3) für manche f richtig und für manche f falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

- (a) $\{x \in [0, 1] \mid f(x) = 0\} =]1/4, 3/4[$.
- (b) $\{x \in [0, 1] \mid f(x) = 0\} = [0, 1/4] \cup [3/4, 1]$.
- (c) Ist der Punkt 0 die einzige Nullstelle von f , so sind alle anderen Funktionswerte entweder alle positiv oder alle negativ.
- (d) Es gibt ein $\delta > 0$, sodass für alle Nullstellen x von f gilt:
Ist $x' \in [0, 1]$ und $|x - x'| < \delta$, so ist $|f(x')| < 1$.

Übung 2

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass der Wertebereich $Q = \{f(x) \mid x \in P\}$ von f ein Intervall ist. Folgern Sie, dass jede stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ konstant ist.

Übung 3

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x \neq y$ gelte $f(x) \neq f(y)$ (d. h. f ist injektiv). Zeigen Sie, dass eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

- (a) f ist streng monoton steigend.
- (b) f ist streng monoton fallend.

Übung 4

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Wertebereich $[c, d]$, $c < d$. Weiter sei $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) = c\}$ und $B = \{x \in [a, b] \mid f(x) = d\}$. Zwischen zwei Maxima liege immer mindestens ein Minimum und umgekehrt, d. h. es gelte:

Für alle $x < y$ in A existiert ein $z \in B$ mit $x < z < y$ und für alle $x < y$ in B existiert ein $z \in A$ mit $x < z < y$.

Zeigen Sie, dass A und B endlich sind. Skizzieren Sie zudem eine „typische“ derartige Funktion f .

Übung 5

Sei $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $f(0) = f(1)$. Zeigen Sie, dass es ein $p \in [0, 1/2]$ gibt mit $f(p) = f(p + 1/2)$. Zeigen Sie allgemeiner, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ein p existiert mit $p, p + 1/n \in [0, 1]$ und $f(p) = f(p + 1/n)$.

Übung 6

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Es existiere die Umkehrfunktion f^{-1} von f und es gelte $f^{-1} = f$. Zeigen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $f(x) = x$.

Übung 7

Beweisen Sie den Nullstellensatz durch Intervallschachtelung, indem Sie $[a, b]$ iteriert halbieren, und immer ein Teilintervall wählen, an dessen Grenzen eine Nullstelle vorliegt oder aber die Funktionswerte verschiedene Vorzeichen haben.

Übung 8

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es existieren $c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = d.$$

Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

3.2.2 Gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen

Übung 1

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass für alle beschränkten Funktionen $f, g, f_0, f_1, \dots$ auf P und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f(x) = 0$ für alle $x \in P$,
- (b) $\|af\| = |a| \|f\|$,
- (c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$,
- (d) $\|f \cdot g\| = \|f\| \cdot \|g\|$,
- (e) $\lim_n \|f_n - f\| = 0$ impliziert $\lim_n \|f_n\| = \|f\|$,
- (f) $\lim_n \|f_n\| = \|f\|$ impliziert $\lim_n \|f_n - f\| = 0$.

Übung 2

Sei $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen auf P . Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf P .
- (b) $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \forall x \in P |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Formulieren Sie weiter ein Cauchy-Kriterium wie in (b) für die gleichmäßige Konvergenz einer Reihe $\sum_n g_n$ von Funktionen g_n auf P .

Übung 3

Geben Sie Funktionen $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ an mit den Eigenschaften:

- (a) f_n ist stetig für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion.
- (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $x \in [0, 1]$ mit $f_n(x) = 1$.

Übung 4

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gleichmäßig gegen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergente Folge von Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiere $c_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$. Zeigen Sie:

$$\lim_n c_n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Übung 5

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von Funktionen auf $\mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Für alle Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gelte:

Ist $\lim_n x_n = x$, so ist $\lim_n f_n(x_n) = f(x)$.

Zeigen Sie:

- (a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f .
- (b) f ist stetig.

Übung 6

Seien $f_n : P \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die durch ein $s \in \mathbb{R}$ beschränkt sind, d. h. es gilt $|f(x)| \leq s$ für alle $x \in P$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\sum_n a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\sum_n a_n f_n$ gleichmäßig konvergiert.

Achte Ergänzungen: Visualisierungen stetiger Funktionen, II

Ergänzungsübung 1

Konstruieren Sie ausgehend von der Identität f_0 auf $[-1, 1]$ mit Hilfe der Betragsfunktion rekursiv Funktionen $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ auf $[-1, 1]$, die eine immer dichtere stückweise lineare Zick-Zack-Bewegung zwischen den Werten 1 und 0 beschreiben.

Skizzieren Sie die Funktionen f_n . Geben Sie weiter eine explizite Darstellung der Funktionen f_n .

[Hinweis: Definieren Sie $f_{n+1}(x) = a |f_n(x) - b|$ für geeignete a, b .]

Ergänzungsübung 2

Geben Sie anschauliche Beispiele für die Aussage des Fixpunktsatzes.

Ergänzungsübung 3

Geben Sie mit Hilfe von Diagrammen eine anschauliche Zusammenfassung der Beweise des Zwischenwertsatzes und des Satzes, dass jede stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ihr Maximum annimmt.

Ergänzungsübung 4

Diskutieren Sie graphische Beispiele für punktweise konvergente Funktionenfolgen auf $[0, 1]$ und $]0, 1[$. Geben Sie insbesondere punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen auf $]0, 1[$ an.

Ergänzungsübung 5

Bestimmen und zeichnen Sie einige Bernstein-Polynome für die Funktionen $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = |x - 1/2| \quad \text{für alle } x \in [0, 1],$$

$$g(x) = ||x - 1/2| - 1/2| \quad \text{für alle } x \in [0, 1].$$

3. Elementare stetige Funktionen

Die Exponentialfunktion steht im Zentrum dieses Kapitels. Zusammen mit ihrer Umkehrfunktion – dem natürlichen Logarithmus $\log$ – liefert uns die reelle Exponentialfunktion die Möglichkeit, die Potenz a^x für beliebige $a > 0$ und Exponenten $x \in \mathbb{R}$ einzuführen. Als eine noch reichere Quelle erweist sich dann die Exponentialfunktion im Komplexen. Es zeigt sich, dass der Übergang von $x \in \mathbb{R}$ zu $\exp(ix) \in \mathbb{C}$ das gleichmäßige Aufrollen der x -Achse auf einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 beschreibt. Wir gewinnen hieraus die Kreiszahl π und die trigonometrischen Funktionen samt ihren Reihenentwicklungen.

Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

Wir stellen noch einmal die wichtigsten Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zusammen, die wir durch

$$\exp(x) = \sum_n x^n/n! \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

definiert haben. Dabei schreiben wir oft auch wieder e^x anstelle von $\exp(x)$.

Satz (*Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion*)

Für die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

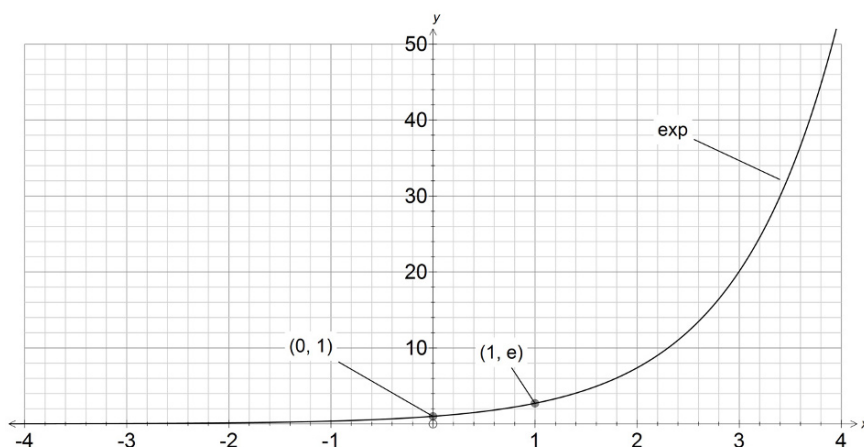
- (a) $\exp$ ist stetig und streng monoton steigend.
- (b) $e^{x+y} = e^x e^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (*Additionstheorem*)
- (c) Der Wertebereich von $\exp$ ist $]0, \infty[$. Dabei gilt:
 $0 < e^x < 1$ für alle $x < 0$, $e^0 = 1$, $1 < e^x$ für alle $x > 0$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (e^x - 1)/x = 1$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x^k = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k/e^x = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Die Eigenschaft (d) kann man sich gut merken, wenn man in
 $e^x = 1 + x + x^2/2 + \dots + x^n/n! + \dots$

auf beiden Seiten die Zahl 1 subtrahiert und dann durch x dividiert:

$$(e^x - 1)/x = 1 + x/2 + \dots + x^{n-1}/n! + \dots$$

Die rechte Seite konvergiert für jede Nullfolge gegen 1 (wie man beweisen muss).



die Exponentialfunktion $exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Als streng monoton steigende Funktion besitzt die Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion. Ihr Definitionsbereich ist der Wertebereich von exp , also das Intervall $]0, \infty[$. Wir definieren:

Definition (*natürlicher Logarithmus*)

Die Umkehrfunktion $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ der Exponentialfunktion heißt der *natürliche Logarithmus* oder der *Logarithmus zur Basis e*.

Neben „log“ wird häufig auch die Bezeichnung „ln“ verwendet, die durch den lateinischen Namen „logarithmus naturalis“ motiviert ist.

Die obigen Eigenschaften der Exponentialfunktion entsprechen den folgenden Eigenschaften für den Logarithmus:

Satz (*Eigenschaften des natürlichen Logarithmus*)

Für die Funktion $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\log$ ist stetig und streng monoton steigend.
- (b) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ für alle $x, y > 0$. (*Multiplikationstheorem*)
- (c) Der Wertebereich von $\log$ ist $\mathbb{R}$. Dabei gilt:
 $\log(x) < 0$ für alle $x \in]0, 1[$, $\log(1) = 0$, $\log(x) > 0$ für alle $x > 1$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \log(1+x)/x = 1$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x)/\sqrt[k]{x} = 0$, und
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x}/\log(x) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis*zu (a):*

Die Stetigkeit und strenge Monotonie folgen aus dem Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion.

zu (b):

Seien $x, y > 0$. Dann gilt:

$$\exp(\log(x) + \log(y)) = \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(y)) = x \cdot y.$$

Anwendung des Logarithmus auf beiden Seiten liefert, dass

$$\log(x) + \log(y) = \log(xy).$$

zu (c):

Der Wertebereich von $\log$ ist der Definitionsbereich von $\exp$ und damit gleich $\mathbb{R}$. Die Verlaufeigenschaften folgen aus den entsprechenden Eigenschaften für $\exp$.

zu (d):

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $] -1, \infty[- \{0\}$ mit $\lim_n x_n = 0$. Wegen $\log(1) = 0$ und der Stetigkeit von $\log$ in 1 gilt dann

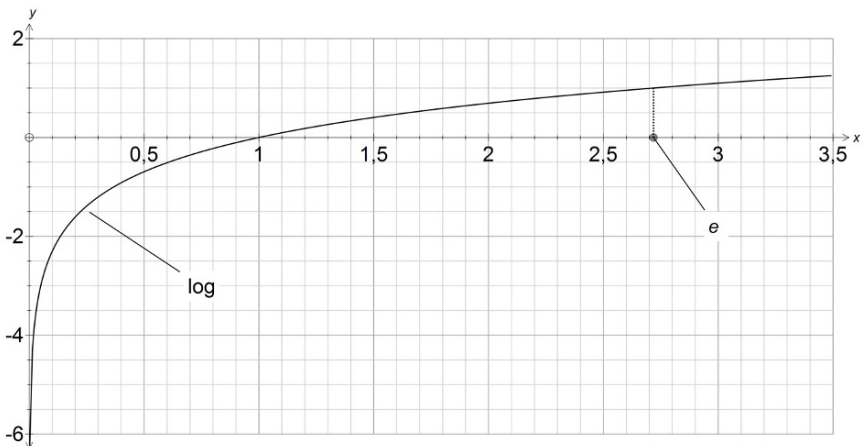
$$\lim_n \log(1 + x_n) = 0.$$

Aus $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} x/(\exp(x) - 1) = 1$ folgt dann aber

$$\lim_n \log(1 + x_n)/x_n = \lim_n \log(1 + x_n)/(\exp(\log(1 + x_n)) - 1) = 1.$$

zu (e):

— Folgt aus der Eigenschaft (e) für die Exponentialfunktion.



der natürliche Logarithmus $\log :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Aus dem Multiplikationstheorem für den Logarithmus fließen weiter die folgenden leicht zu beweisenden Eigenschaften:

Korollar (Folgerungen aus dem Multiplikationstheorem)

Für alle $x, y > 0$ und alle $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$ gilt:

$$(a) \log(x/y) = \log(x) - \log(y),$$

$$(b) \log(\sqrt[m]{x^n}) = n/m \cdot \log(x).$$

Speziell gilt also für alle $x > 0$ und alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$\log(1/x) = -\log(x) \text{ und } \log(x^n) = n \log(x).$$

Als Anwendung der Limeseigenschaft (d) beweisen wir noch die folgende fundamentale Darstellung der Exponentialfunktion:

Satz (die Darstellung $e^x = \lim_{n \geq 1} (1 + x/n)^n$)

Sei $x \in \mathbb{R}$, und sei $(x_n)_{n \geq 1}$ eine gegen x konvergente Folge in $\mathbb{R}$.

Dann gilt:

$$e^x = \lim_{n \geq 1} (1 + x_n/n)^n.$$

Insbesondere ist also

$$e^x = \lim_{n \geq 1} (1 + x/n)^n \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis

Wir zeigen die Aussage zuerst für Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$.

Ohne Einschränkung sei $x_n/n \in]-1, \infty[$ für alle $n \geq 1$. Nach (d) gilt dann:

$$\begin{aligned} x &= (\lim_{n \geq 1} x_n) \cdot 1 = \lim_{n \geq 1} x_n \cdot \lim_{n \geq 1} \log(1 + x_n/n)/(x_n/n) = \\ &\lim_{n \geq 1} n \log(1 + x_n/n) = \lim_{n \geq 1} \log((1 + x_n/n)^n). \end{aligned}$$

Also ist

$$\exp(x) = \lim_{n \geq 1} \exp(\log((1 + x_n/n)^n)) = \lim_{n \geq 1} (1 + x_n/n)^n.$$

Wir behandeln schließlich noch Folgen, deren Glieder Null sein können.

Ist $x \neq 0$, so ist die Annahme „ $x_n \neq 0$ für alle $n \geq 1$ “ keine Einschränkung.

Ist $x = 0$ und $x_n = 0$ für alle $n \geq n_0$, so ist die Aussage trivial. Andernfalls gilt aber $\lim_{n \geq 1, x_n \neq 0} (1 + x_n/n)^n = e^0 = 1$ nach dem Gezeigten, und wegen

$$- (1 + 0/n)^n = 1 \text{ gilt dann auch } \lim_{n \geq 1} (1 + x_n/n)^n = 1 = e^0.$$

Die Folge $((1 + x/n)^n)_{n \geq 1}$ kann man in einem alternativen Aufbau der Theorie zur Definition der Exponentialfunktion verwenden. Motivieren lässt sich das Interesse am Grenzwert dieser Folge durch die Frage der Modellierung einer „ste-tigen Verzinsung“, die wir in den Ergänzungen behandeln. Mit elementaren Methoden lässt sich zeigen, dass

$$\lim_{n \geq 1} (1 + x/n)^n = \sum_n x^n/n!$$

für alle gegen x konvergenten Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt. Damit steht die Reihendarstellung zur Verfügung, die wir zur Definition verwendet haben. Viele Eigen-

schaften der Exponentialfunktion lassen sich aber auch direkt aus der Limesdarstellung einfach herleiten. Ein wichtiges Beispiel ist:

Zweiter Beweis des Additionstheorems

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x \cdot e^y = \lim_{n \geq 1} (1 + x/n)^n \cdot (1 + y/n)^n = \\ \lim_{n \geq 1} (1 + (x + y + xy/n)/n)^n = e^{x+y},$$

– da $\lim_{n \geq 1} (x + y + xy/n) = x + y$.

Exponentiation und Logarithmus zu einer positiven Basis

Mit Hilfe der Logarithmusfunktion können wir nun eine Exponentialfunktion für eine beliebige positive Basis a einführen. Zur Motivation der Definition stellen wir einige Überlegungen voran.

Ziel ist die Definition einer Exponentiation a^x für möglichst viele reelle Zahlen a und x . Sollen die üblichen Rechengesetze gelten, so ist

$$a = a^1 = a^{1/2} \cdot a^{1/2} = (a^{1/2})^2 \geq 0.$$

Weiter werden wir $0^0 = 1$ und $0^x = 0$ für alle $x > 0$ definieren wollen, sodass das Problem sich auf die Definition von a^x für eine Basis $a > 0$ und einen beliebigen Exponenten $x \in \mathbb{R}$ konzentriert. Sei also $a > 0$. Dann gibt es ein $b \in \mathbb{R}$ mit $e^b = a$. Dann ist aber $a^x = (e^b)^x = e^{xb}$, wenn wir wieder die üblichen Rechengesetze unterstellen. Wegen $e^b = a$ ist aber $b = \log(a)$, und damit ist notwendig $a^x = e^{x \log(a)}$.

Auf die Form $a^x = e^{x \log(a)}$ kommt man auch durch folgende Überlegung. Es gilt $\log(a^n) = n \log(a)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wollen wir, dass $\log(a^x) = x \log(a)$ für alle x gilt, so ist notwendig $a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x \log(a)}$.

Damit ist folgende Definition keine Überraschung mehr:

Definition (*Exponentialfunktion zu einer positiven Basis, $\exp_a, a^x$*)

Sei $a > 0$. Dann definieren wir:

$$\exp_a(x) = e^{x \log(a)} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die *Exponentialfunktion zur Basis a* .

Wir schreiben auch a^x anstelle von $\exp_a(x)$.

Offenbar ist $\exp_e = \exp$. Weiter gilt für alle $a > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$\exp_a(n) = \exp(n \log(a)) = \exp(\log(a^n)) = a^n,$$

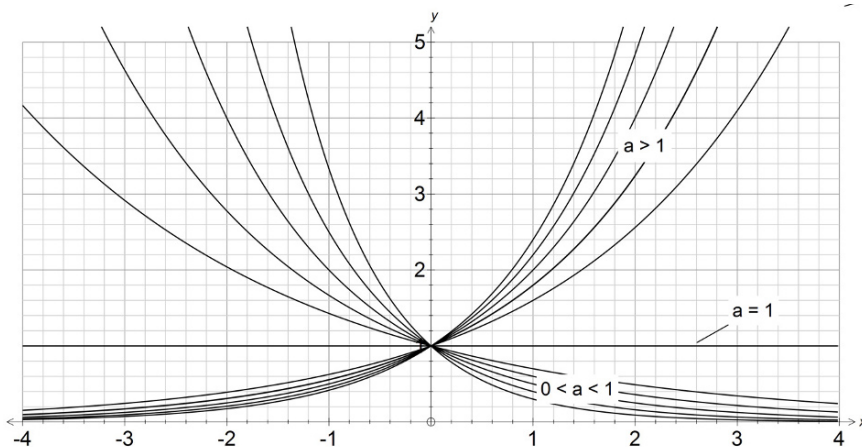
sodass die Notation a^x die aus den Körperaxiomen stammende Potenzierung a^n für ganzzahlige Exponenten n erweitert.

Unsere Sammlung von Eigenschaften lautet nun:

Satz (Eigenschaften der Exponentialfunktion $\exp_a$)

Sei $a > 0$. Dann gilt für die Funktion $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- (a) $\exp_a$ ist stetig. $\exp_1$ ist konstant gleich 1. $\exp_a$ ist streng monoton steigend, falls $a > 1$, und streng monoton fallend, falls $a < 1$.
- (b) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. (Additionstheorem)
- (c) Der Wertebereich von $\exp_1$ ist $\{1\}$, und der Wertebereich von $\exp_a$ ist $]0, \infty[$, falls $a \neq 1$. Dabei gilt
 $0 < a^x < 1$ für alle $x < 0$, $a^0 = 1$, $a^x > 1$ für alle $x > 0$, falls $a > 1$,
 $a^x > 1$ für alle $x < 0$, $a^0 = 1$, $0 < a^x < 1$ für alle $x > 0$, falls $a < 1$.
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (a^x - 1)/x = \log(a)$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x/x^k = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k/a^x = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, falls $a > 1$,
 $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x/x^k = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k/a^x = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$, falls $a < 1$.



die Exponentialfunktionen $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Die allgemeine Exponentiation lässt sich für rationale Exponenten durch Wurzelausdrücke darstellen, und für alle Exponenten gelten die vertrauten Regeln:

Satz (Rechenregeln für die Exponentiation)

Für alle $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 0$, gilt:

- (a) $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$,
- (b) $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = 1/(a^x)$, $a^x b^x = (ab)^x$,
- (c) $\log(a^x) = x \log(a)$, $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$.

Damit können wir nun die binomischen Reihen identifizieren:

Korollar (*Identifizierung der binomischen Reihen*)

Für alle $x \in]-1, 1[$ und alle $s \in \mathbb{R}$ gilt $B_s(x) = \sum_n \binom{s}{n} x^n = (1+x)^s$.

Beweis

Sei $x \in]-1, 1[$, und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(s) = B_s(x)$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Wir wissen bereits, dass $f(q) = (1+x)^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt. Es genügt also zu zeigen, dass f stetig ist. Zunächst ist f stetig im Nullpunkt:

$$(+)\quad \lim_{s \rightarrow 0} f(s) = 1.$$

Beweis von (+)

Für $s \in [-1, 1]$ und $n \geq 1$ gilt

$$|\binom{s}{n}| = |s|/1 \cdot |s-1|/2 \cdot \dots \cdot |s-n+1|/n \leq |s|.$$

Damit ist $|f(s) - 1| \leq |s| \cdot \sum_{n \geq 1} |x|^n$ für $s \in [-1, 1]$, und die rechte Seite konvergiert gegen 0, wenn s gegen 0 konvergiert.

Aber f erfüllt, wie wir früher gezeigt haben, das Additionstheorem. Also gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$-\quad \lim_{s \rightarrow 0} f(t+s) = \lim_{s \rightarrow 0} f(t) \cdot f(s) = f(t) \cdot 1 = f(t).$$

Damit haben wir mit Hilfe der Exponentialfunktion eine allgemeine Exponentiation a^x eingeführt. Eine alternative Methode der Definition von a^x ist, die bereits definierte Exponentiation für rationale Exponenten durch stetige Fortsetzung auf reelle Exponenten zu erweitern. Man weist hierzu nach, dass für jedes $a > 0$ die Funktion $f_a: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_a(q) = a^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ die Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes für stetige monotone Funktionen auf $\mathbb{Q}$ erfüllt. Der Satz liefert dann eine eindeutige stetige Fortsetzung von f_a zu einer Funktion h_a auf $\mathbb{R}$. Wir setzen dann $a^x = h_a(x)$ für alle x , und unsere Konstruktion lautet damit insgesamt

$$a^x = \lim_{q \rightarrow x, q \in \mathbb{Q}} a^q \quad \text{für alle } a > 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Stetigkeitsargumente zeigen schließlich, dass die Exponentiationsregeln gelten. Bei diesem Vorgehen kann man zudem die Eulersche Zahl durch

$$e = \lim_{n \geq 1} (1 + 1/n)^n$$

definieren, und dann die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ via $\exp(x) = e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ einführen, d. h. als Exponentiation zur Basis e . Die Reihendarstellung $\exp(x) = \sum_n x^n/n!$ wird a posteriori bewiesen.

In einem Aufbau der Analysis wird heute zumeist die Definition $a^x = e^{x \log(a)}$ verwendet. Die Exponentialfunktion steht im Zentrum und wird konsequent als „Generator“ für weitere Funktionen eingesetzt. In jedem Fall ist die Definition der Exponentiation a^x frei von Willkür, denn es gilt der folgende Charakterisierungssatz, der obige Überlegungen zur Motivation von $a^x = e^{x \log(a)}$ noch einmal präzisiert:

Satz (*Charakterisierung der Funktionen mit Additionstheorem*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $f(1) \geq 0$. Ist $f(1) = 0$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Ist andernfalls $a = f(1) > 0$, so gilt $f = \exp_a$, d.h. es gilt $f(x) = a^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

Wegen $f(1) = f(1/2 + 1/2) = f(1/2) \cdot f(1/2)$ ist $f(1) \geq 0$.

Ist $f(1) = 0$, so gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(1 + x - 1) = f(1) \cdot f(x - 1) = 0 \cdot f(x - 1) = 0.$$

Sei also $a = f(1) > 0$. Aus der Eigenschaft „ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ “ folgt wie früher, dass

$$f(n/m) = {}^m\sqrt{a^n} = \exp_a(n/m) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und } m \in \mathbb{N}, m \neq 0.$$

Also stimmen f und $\exp_a$ auf $\mathbb{Q}$ überein, und aus der Stetigkeit der beiden

– Funktionen folgt dann, dass $f(x) = \exp_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Stetigkeit lässt sich in diesem Satz durch eine Beschränktheitsbedingung ersetzen (siehe Übungen).

Schließlich betrachten wir noch die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen $\exp_a$. Für jede von 1 verschiedene positive Basis a ist die Funktion $\exp_a$ injektiv und besitzt eine auf ihrem Wertebereich $]0, \infty[$ definierte Umkehrfunktion:

Definition (*Logarithmus zu einer positiven Basis $a \neq 1$*)

Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Dann heißt die Umkehrfunktion $\log_a:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ der Exponentialfunktion $\exp_a$ der *Logarithmus zur Basis a* .

Die Eigenschaftsliste für die Funktionen $\log_a$ ist die übliche. Weiter gilt:

Satz (*Logarithmen zu verschiedenen Basen*)

Seien $a, b > 0$, $a, b \neq 1$. Dann gilt für alle $x > 0$:

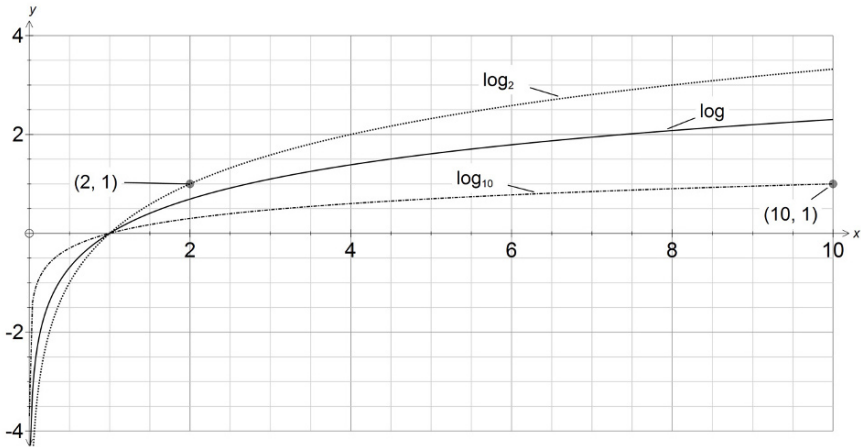
$$(a) \quad \log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a) = \log(x)/\log(a),$$

$$(b) \quad \log_a(b) \log_b(a) = 1,$$

$$(c) \quad 1/c \cdot \log_a(x) = \log_{a^c}(x) \quad \text{für alle } c \neq 0,$$

$$(d) \quad \log_a(x) = -\log_{1/a}(x).$$

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.



die Logarithmusfunktionen $\log_2, \log, \log_{10} :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Potenzfunktionen mit reellem Exponenten

Wir haben $a^x = \exp_a(x)$ als Funktion im Exponenten x zu einer gegebenen positiven Basis a betrachtet. Wir können aber auch umgekehrt einen reellen Exponenten a vorgeben und die Potenzbildung x^a als Funktion in x betrachten. Der Definitionsbereich dieser Funktionen ist $]0, \infty[$, wobei für manche Exponenten auch ein größerer Definitionsbereich möglich ist, etwa $\mathbb{R}$ für $a = 0, 1, 2, \dots$, $\mathbb{R} - \{0\}$ für $a = -1, -2, -3, \dots$ und $\mathbb{R}$ für $a = 1/3, 1/5, 1/7, \dots$

Zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir den Term x^a mit der Funktion $f_a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = x^a$ für alle x . Dann gilt:

Satz (*Eigenschaften der Potenzfunktionen*)

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für die auf $]0, \infty[$ definierte Funktion x^a :

(a) x^a ist stetig. x^0 ist konstant gleich 1. x^a ist streng monoton steigend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$.

(b) $x^a \cdot y^a = (xy)^a$ für alle $x, y > 0$.

(c) Der Wertebereich von x^0 ist $\{1\}$, und der Wertebereich von x^a ist $]0, \infty[$, falls $a \neq 0$. Dabei gilt:

$0 < x^a < 1$ für $0 < x < 1$, $1^a = 1$, $x^a > 1$ für alle $x > 1$, falls $a > 0$,

$x^a > 1$ für $0 < x < 1$, $1^a = 1$, $0 < x^a < 1$ für alle $x > 1$, falls $a < 0$.

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \infty$, $\lim_{x \downarrow 0} x^a = 0$ falls $a > 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = 0$, $\lim_{x \downarrow 0} x^a = \infty$ falls $a < 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x^a = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a/e^x = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x)/x^a = 0$, $\lim_{x \downarrow 0} \log(x) x^a = 0$, falls $a > 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x)/x^a = \infty$, $\lim_{x \downarrow 0} \log(x) x^a = -\infty$, falls $a < 0$.

Beweis

Wir zeigen, dass $\lim_{x \downarrow 0} \log(x)x^a = 0$ für $a > 0$. Die anderen Aussagen sind einfach zu beweisen. Es gilt aber

$$\lim_{x \downarrow 0} \log(x)x^a = \lim_{x \downarrow 0} -\log(1/x)/(1/x)^a = 0,$$

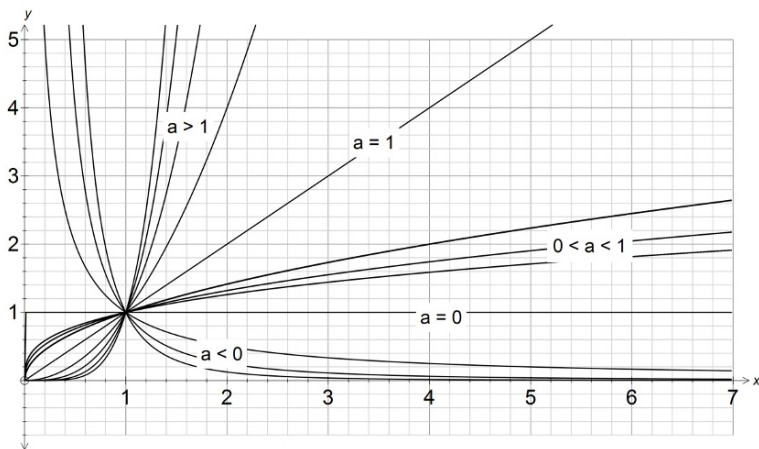
– da $\lim_{y \rightarrow \infty} \log(y)/y^a = 0$ für $a > 0$.

Wegen $x^a = e^{a \log(x)} = (e^a)^{\log(x)}$ ist die Potenzfunktion x^a die Funktion $\exp_b \circ \log$ mit $b = e^a$. Potenzfunktionen sind also Exponentialfunktionen mit einem vorge-schalteten Logarithmus.

Nach (d) können wir für alle $a > 0$ die Potenzfunktion x^a durch

$$0^a = 0 \quad \text{für alle } a > 0$$

stetig nach 0 fortsetzen. Wie früher ist zudem $0^0 = 1$. Dagegen ist 0^a für negative Exponenten a nicht definiert.



die Potenzfunktionen $x^a :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

Wir zeigen schließlich, dass die Potenzfunktionen durch die Multiplikations-eigenschaft $x^a \cdot y^a = (xy)^a$ charakterisiert sind. Zum Beweis verwenden wir den Charakterisierungssatz für die Exponentialfunktion.

Satz (Charakterisierung der Potenzfunktionen)

Sei $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft:

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Besitzt f eine Nullstelle, so gilt $f(x) = 0$ für alle x .

Andernfalls ist f die Potenzfunktion x^a mit $a = \log(f(e))$.

Beweis

Ist $f(y) = 0$ für ein $y > 0$, so ist $f(x) = f(y \cdot x/y) = 0 \cdot f(x/y) = 0$ für alle x .

Andernfalls definieren wir $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = f(e^x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist g stetig und es gilt

$$g(x + y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x) \cdot f(e^y) = g(x) \cdot g(y) \quad \text{für alle } x, y.$$

Nach dem obigen Charakterisierungssatz ist also $g = \exp_b$ mit $b = g(1) = f(e)$.

Dann gilt aber für alle $x > 0$:

$$\text{— } f(x) = f(e^{\log(x)}) = g(\log(x)) = b^{\log(x)} = x^{\log(b)} = x^a.$$

Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen

Wir untersuchen im Folgenden das Verhalten der komplexen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die wir durch

$$\exp(z) = \sum_n z^n/n! \text{ für alle } z \in \mathbb{C}$$

eingeführt hatten, genauer. Im Komplexen wird das aus dem Reellen bekannte exponentielle Wachstum mit einem gänzlich neuen zweiten Phänomen verwoben, das sich als „Kreisaufwicklung“ beschreiben lässt. Grob gesprochen wird sich Folgendes ergeben: Eine Waagrechte der Ebene wird durch die komplexe Exponentialfunktion in eine Halbgerade transformiert, die am Nullpunkt beginnt, aber diesen nicht enthält. Eine Senkrechte der Ebene wird unter der komplexen Exponentialfunktion dagegen zu einem unendlich oft durchlaufenen Kreis um den Nullpunkt mit positivem Radius. Die Feinheiten dieser Dynamik sind derart, dass wir die komplexe Exponentialfunktion zur Definition der trigonometrischen und der hyperbolischen Funktionen nutzen können. Wir erreichen eine elegante Etablierung dieser Funktionen, die uns die zum Teil recht subtilen Gesetze der Trigonometrie auf dem Silbertablett serviert, und seit der Schulzeit vertraute Gefilde erscheinen am Ende in einem klareren Licht. Wenn „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ irgendwo zutrifft, dann hier.

Wir beginnen mit einer einfachen, aber fruchtbaren Beobachtung.

Satz (*Konjugation der Exponentialfunktion*)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen. Für alle komplexen Zahlen z gilt $z\bar{z} = |z|^2$, und damit erhalten wir:

Korollar (*die Werte e^{ix}*)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}| = 1$.

Beweis

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt aufgrund des Satzes und des Additionstheorems:

$$|e^{ix}|^2 = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{ix - ix} = e^0 = 1.$$

Die Bilder der rein imaginären Zahlen unter der komplexen Exponentialfunktion liegen also auf dem Einheitskreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Da eine beliebige komplexe Zahl z die Darstellung $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ besitzt, gilt

$$e^z = e^{\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)} = e^{\operatorname{Re}(z)} \cdot e^{i\operatorname{Im}(z)},$$

und damit können wir uns die Wirkung der komplexen Exponentialfunktion so vorstellen: Ein Vektor $z \in \mathbb{R}^2$ wird zuerst auf den Vektor $e^{i\operatorname{Im}(z)}$ des Einheitskrei-

ses bewegt und dann um den reellen positiven Faktor $e^{\operatorname{Re}(z)}$ gestreckt. Unbekannt ist bei dieser Beschreibung noch die genaue Lage von $e^{i\operatorname{Im}(z)}$ auf dem Kreis K . Für kleine positive x sind aber, wie eine Analyse der Reihe $\sum_n (ix)^n/n!$ zeigt, sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil von e^{ix} positiv. Dies legt zusammen mit der geometrischen Multiplikationsregel die Vermutung nahe, dass die Exponentialfunktion die rein imaginäre Achse $\{ix \mid x \in \mathbb{R}\}$ auf den Einheitskreis aufwickelt, startend im Punkt $e^{i0} = 1$, gegen den Uhrzeigersinn auf dem Weg von 0 nach ∞ , im Uhrzeigersinn auf dem Weg von 0 nach $-\infty$. Im Hinblick auf die geometrische Multiplikationsregel besagt das Additionstheorem $e^{i(x_1+x_2)} = e^{ix_1} \cdot e^{ix_2}$, dass dieses Aufwickeln gleichmäßig verläuft und daher eine gewisse reelle Periode p besitzt, d.h. es gilt $e^{ix} = e^{i(x+p)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Vermutung lässt sich in der Tat verifizieren, und es gilt eine noch bessere Eigenschaft: Das Aufwickeln der rein imaginären Achse auf den Kreis K erhält die Länge, sodass also unter Verwendung der mit geometrischen Methoden definierten Kreiszahl π gilt:

$$e^0 = 1, \quad e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i3\pi/2} = -i, \quad e^{i2\pi} = 1, \quad e^{i(\pi/2+2\pi)} = i, \quad \dots$$

Mit anderen Worten: Die Periode p , mit der sich die Werte e^{ix} reproduzieren, ist nichts anderes als der Umfang 2π des Einheitskreises K . Und mit der oben diskutierten Streckung folgt dann, dass die komplexe Exponentialfunktion für jedes reelle y den waagrechten Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid y \leq \operatorname{Im}(z) < y + 2\pi\}$ der Ebene bijektiv auf die punktierte Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ abbildet.

Der Nachweis der gleichmäßigen längentreuen Aufwicklung der y -Achse auf K ist nun aber keineswegs selbstverständlich. In der modernen Analysis geht man dabei heute oft so vor, dass man ausgehend von der obigen elementaren Beobachtung

„ e^{ix} liegt auf dem Einheitskreis für alle reellen x “

die reelle Sinus- und Kosinusfunktion einführt und die Eigenschaften dieser Funktionen aus denen der komplexen Exponentialfunktion gewinnt. Auch die Zahl π wird im Laufe dieser Untersuchung erst definiert. A posteriori bringt man dann den geometrischen Gehalt der Zahl π ans Licht. Und die geometrische Multiplikationsregel und die Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten haben in der rein analytischen Entwicklung der Dinge erst jetzt ihren Platz. Die folgende Darstellung will diesen Ansatz vorführen. Dabei schadet es beim Lesen wohl nicht, bereits am Anfang ein Gefühl dafür zu haben, was am Ende ganz ohne geometrische Anleihen bewiesen sein wird.

Wir definieren:

Definition (*Sinus, Kosinus*)

Wir definieren den *Sinus* $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und den *Kosinus* $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix}), \quad \cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zur Verbesserung der Lesbarkeit schreiben wir oft auch $\sin x$ statt $\sin(x)$ und $\cos x$ statt $\cos(x)$. Weiter ist $\sin^2 x = \sin(x)^2$, $\cos^2 x = \cos(x)^2$, usw.

Aus der Definition fließen viele elementare Eigenschaften der beiden Funktionen. Wir stellen sie tabellarisch zusammen.

Satz (*elementare Eigenschaften des Sinus und Kosinus*)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a) \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad (\text{Eulersche Formel})$$

$$\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/(2i),$$

$$\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2,$$

$$(b) \quad \sin x = \sum_n (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!,$$

$$\cos x = \sum_n (-1)^n x^{2n}/(2n)!,$$

$$(c) \quad \sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ sind stetig,}$$

$$(d) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$|\sin x| \leq 1, \quad |\cos x| \leq 1,$$

$$(e) \quad \sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x,$$

$$(f) \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (\text{Additionstheoreme})$$

$$(g) \quad \sin x - \sin y = 2 \sin s \cos t,$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin s \sin t,$$

$$\text{wobei } s = (x-y)/2 \text{ und } t = (x+y)/2.$$

Beweis

zu (a): Es gilt $e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i \operatorname{Im}(e^{ix}) = \cos x + i \sin x$.

Die anderen Aussagen folgen aus $\operatorname{Re}(z) = (z + \bar{z})/2$, $\operatorname{Im}(z) = (z - \bar{z})/(2i)$ und obigem Satz über die Konjugation der Exponentialfunktion.

zu (b): Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Damit gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x + i \sin x = e^{ix} = \sum_n i^n x^n/n! =$$

$$\sum_n (-1)^n x^{2n}/(2n)! + i \sum_n (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!.$$

Im letzten Schritt wird verwendet, dass in $\mathbb{C}$ $\lim_n z_n = z$ genau dann gilt, wenn $\lim_n \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z)$ und $\lim_n \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$.

zu (c): Die Stetigkeit von Sinus und Kosinus folgt aus der Stetigkeit der komplexen Exponentialfunktion und der Stetigkeit der Real- und Imaginärteildfunktion. Alternativ kann man die Reihendarstellungen in (b) und eine Restgliedabschätzung nach dem Leibniz-Kriterium heranziehen.

zu (d): Es gilt

$$\sin^2 x + \cos^2 x = \operatorname{Im}(e^{ix})^2 + \operatorname{Re}(e^{ix})^2 = |e^{ix}|^2 = 1.$$

Hieraus folgen auch die Ungleichungen $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$.

zu (e): Es gilt

$$\cos(-x) + i \sin(-x) = e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \cos x - i \sin x.$$

zu (f): Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) + i \sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy} = \\ (\cos x + i \sin x) (\cos y + i \sin y) &= \\ \cos x \cos y - \sin x \sin y + i (\sin x \cos y + \cos x \sin y). \end{aligned}$$

– zu (g): Übung.

Sinus und Kosinus liefern nun wie gewohnt den Tangens und Kotangens:

Definition (*Tangens und Kotangens*)

Seien $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x = 0\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x = 0\}$.

Dann definieren wir den *Tangens* $\tan: \mathbb{R} - A \rightarrow \mathbb{R}$ und den *Kotangens* $\cot: \mathbb{R} - B \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\tan x = \sin x / \cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} - A,$$

$$\cot x = \cos x / \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} - B.$$

Die Nullstellenmengen A und B des Kosinus und Sinus werden wir gleich noch bestimmen. Die Tangens- und Kotangensfunktion sind stetig auf ihren Definitionsbereichen. Aus den Eigenschaften des Sinus und Kosinus folgt leicht:

Satz (*elementare Eigenschaften des Tangens und Kotangens*)

Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt unter der Voraussetzung der Definiertheit:

$$(a) \quad \tan(-x) = -\tan x, \quad \cot(-x) = -\cot x,$$

$$(b) \quad \tan x = 1/\cot x, \quad \cot x = 1/\tan x,$$

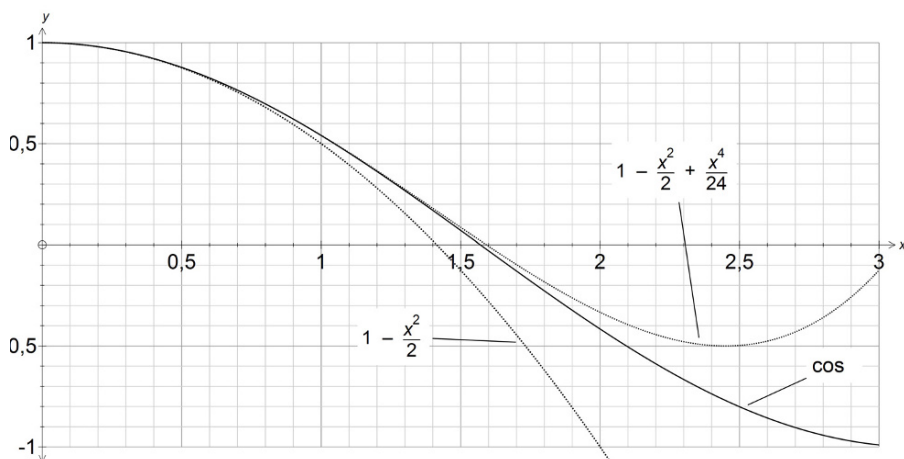
$$(c) \quad \tan(x+y) = (\tan x + \tan y)/(1 - \tan x \tan y),$$

$$\cot(x+y) = (\cot x \cot y - 1)/(\cot x + \cot y). \quad (\text{Additionstheoreme})$$

Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben.

Bestimmung der Perioden und Nullstellen

Offensichtlich sind an dieser Stelle nur die Werte $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$, die unmittelbar aus $e^0 = 1$ folgen. Die Eruierung des Werteverhaltens lässt sich aber durch eine technische Analyse der Reihendarstellungen in Gang bringen.



Einschließung des Kosinus

Satz (Verlaufsanalyse des Kosinus)

Der Kosinus ist im Intervall $[0, 2]$ streng monoton fallend und besitzt dort genau eine Nullstelle x^* . Der Sinus ist im Intervall $[0, x^*]$ streng monoton steigend und es gilt $\sin(x^*) = 1$.

Beweis

Die Reihen $\sin x = \sum_n (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ und $\cos x = \sum_n (-1)^n x^{2n}/(2n)!$ sind alternierend. Aus dem Leibniz-Kriterium erhalten wir:

$$x - x^3/3! < \sin x < x - x^3/3! + x^5/5! \quad \text{und}$$

$$1 - x^2/2! < \cos x < 1 - x^2/2! + x^4/4! \quad \text{für alle } 0 < x < 3,$$

denn für $x \in]0, 3[$ gilt

$$x^n/n! > x^{n+1}/(n+1)! \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Damit gilt:

$$(a) \quad \sin x > x(1 - x^2/6) > 0 \quad \text{für alle } x \in]0, 2],$$

$$(b) \quad \cos 2 < 1 - 2^2/2! + 2^4/4! = 1 - 2 + 2/3 = -1/3 < 0.$$

Aus $\cos 0 = 1$, (b) und dem Zwischenwertsatz folgt, dass der Kosinus in $[0, 2]$ eine Nullstelle besitzt. Es bleibt zu zeigen, dass der Kosinus in $[0, 2]$ streng monoton fällt. Die Nullstelle in $[0, 2]$ ist dann eindeutig und die Behauptungen über den Sinus folgen aus $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.

Nach (g) in obiger Eigenschaftstabelle gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$, dass

$$\cos y - \cos x = 2 \sin s \sin t,$$

mit $s = (x - y)/2$ und $t = (x + y)/2$. Ist nun $0 \leq y < x \leq 2$, so gilt $s, t \in]0, 2]$, und nach (a) sind daher $\sin s$ und $\sin t$ positiv. Folglich ist die Differenz

– $\cos y - \cos x$ positiv, und damit ist $\cos$ streng monoton fallend in $[0, 2]$.

Der Satz erlaubt uns die folgende Definition:

Definition (*analytische Definition der Zahl π*)

Wir definieren die reelle Zahl π durch

$\pi/2 =$ „die kleinste positive Nullstelle des Kosinus.“

Es gilt also $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 1$. Aus der Sicht der Exponentialfunktion ist wegen $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ also $\pi/2$ die kleinste positive reelle Zahl, für die e^{ix} den Wert i annimmt. Damit gilt

$$e^{i\pi} = e^{i\pi/2} \cdot e^{i\pi/2} = i \cdot i = -1,$$

und wir erhalten:

Satz (*Eulersche Identität*)

Es gilt $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Obwohl dem Sinus und dem Kosinus per Definition eine trigonometrische Bedeutung zukommt, ist noch nicht klar, dass die gerade definierte Zahl π und die geometrisch definierte Kreiszahl ein und dasselbe sind. Wir wissen noch nicht, dass in „ $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$ “ und „ $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ “ das Argument x ein Winkel im Bogenmaß ist. Wir stellen den Bau dieser Brücke zwischen Analysis und Geometrie noch etwas zurück, bis wir den Verlauf des Sinus und Kosinus befriedigend geklärt haben. Erst durch diese Brücke wird die Eulersche Identität mit ihrer einzigartigen Verbindung der fünf fundamentalen Größen $e, i, \pi, 0$ und 1 zur wahren Schönheitskönigin der Mathematik.

Ohne weitere Arbeit erhalten wir aus unserer elementaren Verlaufsanalyse:

Korollar (*Werte für Vielfache von $\pi/2$*)

$$\begin{array}{llll} e^{i\pi/2} = i, & e^{i\pi} = -1, & e^{i3\pi/2} = -i, & e^{i2\pi} = 1, \\ \cos(\pi/2) = 0, & \cos(\pi) = -1, & \cos(3\pi/2) = 0, & \cos(2\pi) = 1, \\ \sin(\pi/2) = 1, & \sin(\pi) = 0, & \sin(3\pi/2) = -1, & \sin(2\pi) = 0. \end{array}$$

Beweis

Wir wissen schon, dass $e^{i\pi/2} = i$. Die anderen Werte der ersten Zeile der Tabelle folgen aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion.

Die zweite und dritte Zeile ergeben sich aus der ersten durch Anwendung

– der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Auch die Periodizität, die Nullstellen und das Monotonieverhalten der trigonometrischen Funktionen lassen sich ohne große Mühe aus unserer elementaren Verlaufsanalyse gewinnen. Wir beginnen mit:

Korollar (*Periodizität der Exponentialfunktion und des Sinus und Kosinus*)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$e^{z+i\pi/2} = i e^z, \quad e^{z+i\pi} = -e^z, \quad e^{z+i3\pi/2} = -i e^z, \quad e^{z+i2\pi} = e^z,$$

$$\cos(x + \pi/2) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x,$$

$$\cos(x + 3\pi/2) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x,$$

$$\sin(x + \pi/2) = \cos x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x,$$

$$\sin(x + 3\pi/2) = -\cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x,$$

$$\sin x = \cos(\pi/2 - x), \quad \cos x = \sin(\pi/2 - x).$$

Beweis

Die erste Zeile ergibt sich aus den Werten von $e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi}$, $e^{i3\pi/2}$, $e^{i2\pi}$ und dem Additionstheorem, und die zweite und dritte Zeile folgen dann aus der Eulerschen Formel für die Wahl von $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$. Für die vierte Zeile beobachten wir schließlich, dass

$$\sin x = \sin(x - \pi/2 + \pi/2) = \cos(x - \pi/2) = \cos(\pi/2 - x),$$

sowie

$$-\cos x = \cos(x - \pi/2 + \pi/2) = -\sin(x - \pi/2) = \sin(\pi/2 - x).$$

Die Graphen von Sinus und Kosinus gehen also durch eine Verschiebung entlang der x -Achse auseinander hervor. Verschieben wir den Sinus um $\pi/2$ nach links oder $3\pi/2$ nach rechts, so erhalten wir den Kosinus. Umgekehrt liefert eine Verschiebung des Kosinus um $\pi/2$ nach rechts oder $3\pi/2$ nach links den Sinus.

Als nächstes bestimmen wir die Nullstellen des Sinus und Kosinus.

Korollar (*Nullstellen des Sinus und Kosinus*)

Es gilt $\cos(\pi/2 + k\pi) = \sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, und die Funktionen haben keine weiteren Nullstellen.

Beweis

Dass die angegebenen Zahlen Nullstellen des Kosinus sind, folgt aus $\cos(\pi/2) = 0$ und der Periodizitätsformel $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$. Da der Kosinus wegen $\cos(-x) = \cos(x)$ keine Nullstelle in $] -\pi/2, \pi/2 [$ besitzt, folgt erneut aus $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$, dass keine weiteren Nullstellen existieren. Aus $\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$ folgen die Behauptungen für den Sinus.

Mit den Nullstellen des Sinus und Kosinus haben wir auch die Definitionsbereiche und Nullstellen des Kotangens und des Tangens bestimmt.

Schließlich vervollständigen wir noch unsere Analyse des Wachstumsverhaltens der Funktionen.

Korollar (*Monotonieverhalten des Sinus und Kosinus*)

Der Kosinus ist streng monoton fallend in $[0, \pi]$ und streng monoton steigend in $[\pi, 2\pi]$. Der Sinus ist streng monoton steigend in $[0, \pi/2]$ und $[3\pi/2, 2\pi]$ und streng monoton fallend in $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Beweis

Wir wissen, dass der Kosinus in $[0, \pi/2]$ streng monoton von 1 nach 0 fällt. Wegen $\cos(x + \pi/2) = -\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x}$ ist der Kosinus aber auch noch streng monoton fallend in $[\pi/2, \pi]$ (von 0 nach -1). Mit $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ sind dann die Monotoniebehauptungen für den Kosinus bewiesen, und die

– Aussagen für den Sinus folgen aus $\sin x = -\cos(x + \pi/2)$.

Damit haben wir viele anschauliche Eigenschaften der bekannten graphischen Darstellungen des Sinus und Kosinus nachgewiesen: Nullstellen, Extremwerte, Monotonieverhalten, Periodizität, Translationseigenschaften, Parität. Auch die Schnittpunkte x mit der Eigenschaft „ $\sin x = \cos x$ “ können wir leicht ermitteln, denn aus $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$ erhalten wir, dass

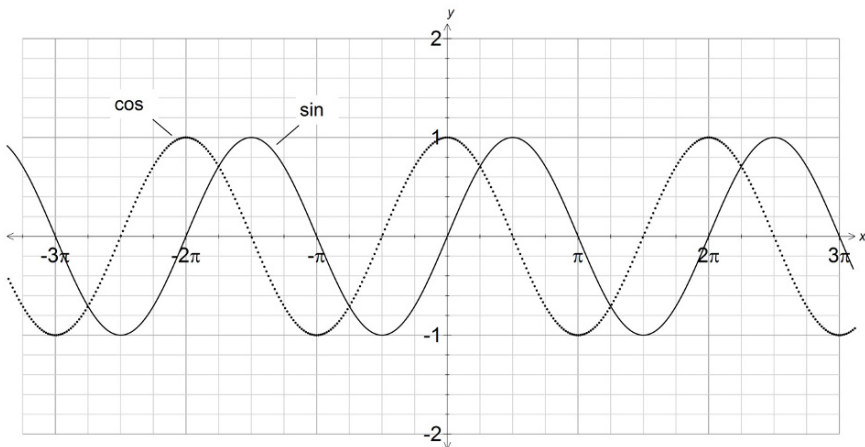
$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/2 - \pi/4) = \cos(\pi/4), \text{ und}$$

$$\sin(\pi/4 + \pi) = -\sin(\pi/4) = -\cos(\pi/4) = \cos(\pi/4 + \pi).$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) > 0$ ist weiter

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \text{ und } \sin(5\pi/4) = \cos(5\pi/4) = -\sqrt{2}/2.$$

Durch das Monotonieverhalten sind andere Stellen x in $[0, 2\pi]$ mit der Eigenschaft $\sin x = \cos x$ ausgeschlossen.



Sinus und Kosinus

Für den Tangens und Kotangens gilt:

Satz (*Werteverhalten des Tangens und Kotangens*)

Tangens und Kotangens besitzen die Periode π , d. h. es gilt

$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} - \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \},$$

$$\cot x = \cot(x + \pi) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} - \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}.$$

Der Tangens ist streng monoton steigend im Intervall $] -\pi/2, \pi/2 [$ und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab. Analog ist der Kotangens streng monoton fallend in $] 0, \pi [$ und bildet dieses Intervall bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab.

Beweis

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $\cos x \neq 0$ gilt

$$\tan x = \sin x / \cos x = -(-\sin(x + \pi)) / \cos(x + \pi) = \tan(x + \pi).$$

Weiter gilt:

Ist $0 \leq x < y < \pi/2$, so ist $0 < \sin x < \sin y$ und $\cos x > \cos y > 0$.

Also ist $\tan x = \sin x / \cos x < \sin y / \cos y = \tan y$ für alle $0 \leq x < y < \pi/2$.

Also ist $\tan$ streng monoton wachsend im Intervall $[0, \pi/2 [$. Wegen $\tan(-x) = -\tan(x)$ ist dann aber $\tan$ auch streng monoton wachsend in $] -\pi/2, \pi/2 [$. Weiter gilt

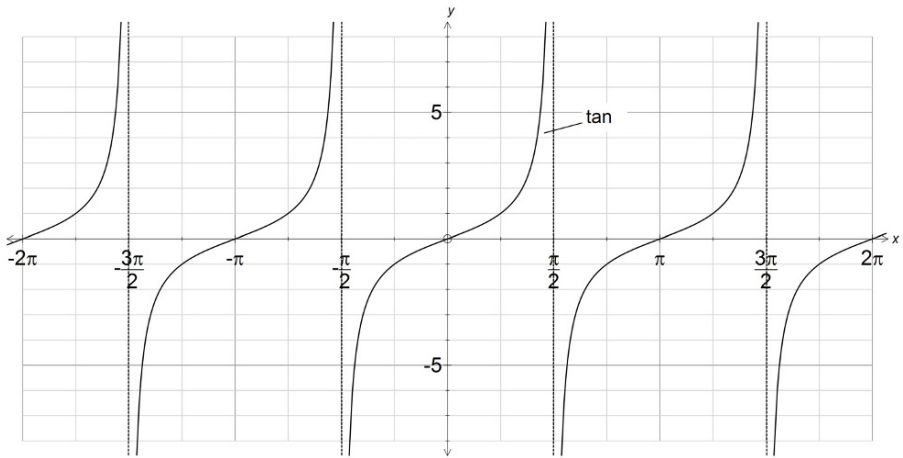
$$\lim_{x \uparrow \pi/2} \tan x = \lim_{x \uparrow \pi/2} \sin x / \cos x = \infty, \text{ und damit}$$

$$\lim_{x \downarrow -\pi/2} \tan x = -\lim_{x \uparrow \pi/2} \tan x = -\infty.$$

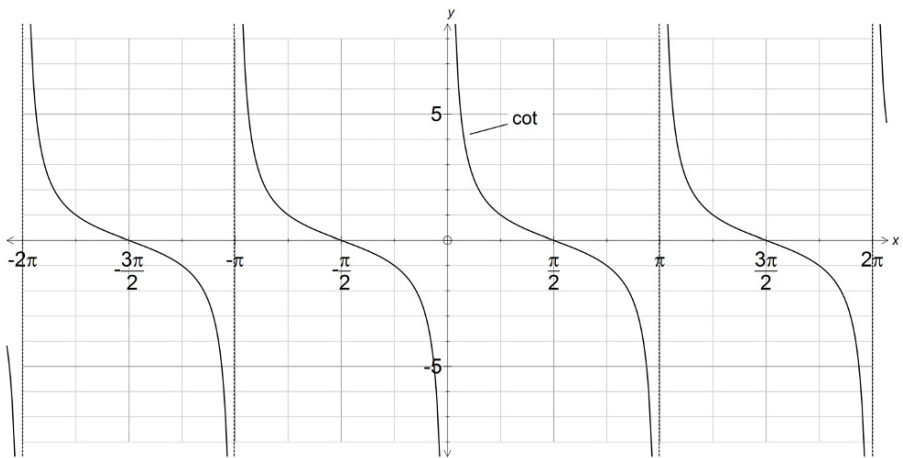
Dies zeigt zusammen mit der Stetigkeit und strengen Monotonie, dass der Tangens das Intervall $] -\pi/2, \pi/2 [$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ abbildet.

– Die Aussagen über den Kotangens werden analog bewiesen.

Damit haben wir auch die bekannten graphischen Darstellungen des Tangens und Kotangens in vielen wichtigen Eigenschaften gerechtfertigt. Neben $\tan(0) = 0$ sind noch die Werte $\tan(\pi/4) = 1$ und $\tan(-\pi/4) = -1$ zu erwähnen, die sich aus $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$ und $\tan(-x) = -\tan(x)$ ergeben.



Tangens



Kotangens

Das Verhalten der komplexen Exponentialfunktion

Wir wollen das Werteverhalten der Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ noch einmal zusammenfassend beschreiben. Zunächst gilt:

Satz (*Kreisauwicklung*)

Die Funktion $\exp$ bildet das senkrechte Geradenstück $\{ix \mid 0 \leq x < 2\pi\}$ bijektiv auf den Einheitskreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ab.

Beweis

Die Aussage folgt aus dem analysierten Verlaufsverhalten der stetigen

– Funktionen $\cos(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})$ und $\sin(x) = \operatorname{Im}(e^{ix})$ und dem Zwischenwertsatz.

Allgemeiner gilt:

Satz (*Bilder von Waagrechten und Senkrechten unter der Exponentialfunktion*)

Für alle komplexen Zahlen $z_0 = (x_0, y_0)$ und alle $r > 0$ gilt:

- (a) $\exp$ bildet den senkrechten Geradenabschnitt $\{z_0 + ix \mid 0 \leq x < 2\pi\}$ bijektiv auf den Kreis $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = e^{x_0}\}$ ab.
- (b) $\exp$ bildet den waagrechten Geradenabschnitt $\{z_0 + x \mid 0 \leq x < r\}$ bijektiv auf den Geradenabschnitt $\{e^{z_0} + \alpha z_1 \mid 0 \leq \alpha < e^{x_0+r} - e^{x_0}\}$ ab, wobei z_1 der Vektor e^{iy_0} des Einheitskreises ist.

Beweis

Die Aussage (a) folgt aus $e^{z_0+ix} = e^{x_0+i(y_0+x)} = e^{x_0} \cdot e^{i(y_0+x)}$ und der minimalen Periode 2π von $\exp$. Die Aussage (b) folgt aus

$$e^{z_0+x} = e^{z_0} + (e^x - 1)e^{z_0} = e^{z_0} + (e^x - 1)e^{x_0} e^{iy_0}$$

– und der Tatsache, dass $\exp$ das Intervall $[0, r]$ bijektiv auf $[1, e^r]$ abbildet.

Ein Gitter in der Ebene wird durch die komplexe Exponentialfunktion also in y -Richtung kreisförmig aufgefächert und in x -Richtung exponentiell gestreckt.

Weiter halten wir fest:

Korollar (*Waagrechte Streifen der Breite 2π*)

Für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ gilt:

$\exp$ bildet den waagrechten Streifen $\{(x, y_0 + y) \mid x \in \mathbb{R}, 0 \leq y < 2\pi\}$ bijektiv auf die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ ab.

Dem Leser wird es an dieser Stelle vielleicht Vergnügen bereiten, das Verhalten der komplexen Exponentialfunktion anhand weiterer Beispiele zu verfolgen: Welche Bilder haben waagrechte Streifen der Breite $\pi/2$, π oder 4π ? Welche Bilder haben senkrechte Streifen? Welche Bilder haben Halbgeraden der Ebene, die im Nullpunkt beginnen?

Unser Analyse liefert die oft nützliche Darstellung komplexer Zahlen in Polarkoordinaten. Wir definieren:

Definition (*Polarkoordinaten, Argument*)

Ist $z \in \mathbb{C}$ und $z = r e^{ix}$ für $r, x \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, so heißen r, x *Polarkoordinaten* für z . Die Zahl x heißt ein *Argument* für z .

Unsere Untersuchung der komplexen Exponentialfunktion zeigt:

Satz (*Darstellung in Polarkoordinaten*)

Jede komplexe Zahl z besitzt Polarkoordinaten r, x . Dabei ist $r = |z|$, und für alle $z \neq 0$ ist das Argument x modulo 2π eindeutig bestimmt.

Beweis

– Für $z \neq 0$ gilt $z = |z| e^{ix}$ für das eindeutige $x \in [0, 2\pi[$ mit $e^{ix} = z/|z|$.

Definition (*Argumentfunktion*)

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ setzen wir

$\arg(z) =$ „das eindeutige $x \in [0, 2\pi[$ mit $z = |z| e^{ix}$ “.

Aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion folgt:

Satz (*Multiplikation komplexer Zahlen in Polarkoordinaten*)

Sind r_1, x_1 und r_2, x_2 Polarkoordinaten von z_1 bzw. z_2 , so sind $r_1 \cdot r_2, x_1 + x_2$ Polarkoordinaten von $z_1 \cdot z_2$. Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist also bestimmt durch die Multiplikation ihrer Längen und die Addition ihrer Argumente.

Wir zeigen im folgenden Abschnitt, dass das Argument x in $z = r e^{ix}$ ein Winkel im Bogenmaß ist, sodass also den Polarkoordinaten die übliche geometrische Bedeutung zukommt. Die geometrische Multiplikationsregel ist dann rein analytisch begründet.

Einheitswurzeln und Berechnung des Kreisumfangs

Mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion können wir die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ leicht notieren. Wir definieren hierzu:

Definition (*Einheitswurzeln*)

Für alle $n \geq 1$ definieren wir:

$$\zeta_{k,n} = e^{ik/n 2\pi} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \text{ mit } 0 \leq k < n.$$

Die Zahlen $\zeta_{0,n}, \dots, \zeta_{n-1,n}$ heißen die n -ten *Einheitswurzeln*.

Je zwei n -te Einheitswurzeln sind verschieden, da andernfalls $e^{ix} = 1$ für ein reelles $x \in]0, 2\pi[$ gelten würde, was nicht sein kann.

Wir zeigen nun (ohne Verwendung der geometrischen Multiplikationsregel), dass die n -ten Einheitswurzeln die Gleichung $z^n = 1$ lösen und auf dem Einheitskreis gleichmäßig verteilt sind:

Satz (*über die Einheitswurzeln*)

Für alle $n \geq 1$ sind die n -ten Einheitswurzeln die komplexen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Sie bilden die Ecken des gleichseitigen in den Einheitskreis $K = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ einbeschriebenen n -Ecks, dem der Punkt $1 = (1, 0)$ angehört. Der Umfang dieses n -Ecks ist zudem

$$n \cdot |e^{i2\pi/n} - 1| = 2n \sin(\pi/n).$$

Beweis

Sei $n \geq 1$. Für alle $k < n$ gilt $(\zeta_{k,n})^n = (e^{ik/n 2\pi})^n = e^{ik 2\pi} = 1$. Damit sind alle n -ten Einheitswurzeln Lösungen von $z^n = 1$. Da die n -ten Einheitswurzeln paarweise verschieden sind und $z^n = 1$ höchstens n Lösungen besitzt, existieren keine weiteren Lösungen. Weiter ist $\zeta_{0,n} = e^0 = 1$, und es gilt

$$|e^{i(k+1)/n 2\pi} - e^{ik/n 2\pi}| = |e^{ik/n 2\pi}| \cdot |e^{i2\pi/n} - 1| = |e^{i2\pi/n} - 1|$$

für alle k . Damit bilden die n -ten Einheitswurzeln ein gleichseitiges n -Eck in K , dem der Punkt 1 angehört. Schließlich ist

$$- \quad |e^{i2\pi/n} - 1| = |e^{i\pi/n}| |e^{i\pi/n} - e^{-i\pi/n}| = 2 |\operatorname{Im}(e^{i\pi/n})| = 2 \sin(\pi/n).$$

Die klassische geometrische Berechnung des Umfangs des Einheitskreises besteht nun aber gerade aus der Berechnung der Umfänge der einbeschriebenen regelmäßigen n -Ecke und der Durchführung des zugehörigen Grenzübergangs. Damit können wir nun die Brücke zwischen der analytischen Definition von π und der geometrischen Definition leicht errichten. Entscheidend ist der folgende Grenzwert:

Satz ($\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$)

Es gilt $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \sin x/x = 1$.

Beweis

Für $x \in]0, 3]$ gilt wie in obiger Verlaufsanalyse

$$x - x^3/3! < \sin x < x, \text{ also}$$

$$1 - x^2/6 < \sin x/x < 1.$$

Damit gilt $\lim_{x \downarrow 0} \sin x/x = 1$. Wegen $\sin(-x) = -\sin x$ ist dann aber auch

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \sin x/x = 1.$$

Damit erhalten wir aber sofort:

Satz (*Berechnung des Kreisumfangs*)

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin(\pi/n) = 2\pi$. Die Umfänge von regelmäßigen in den Einheitskreis einbeschriebenen n -Ecken konvergieren also gegen 2π .

Beweis

Nach dem Satz gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2n \sin(\pi/n) = 2\pi \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi/n)/(\pi/n) = 2\pi \cdot 1 = 2\pi.$$

Eine analoge Überlegung zeigt:

Satz (*x als Bogenmaß in e^{ix}*)

Sei $x \in \mathbb{R}$. Für alle $n \geq 1$ seien

$$p_k^n = e^{ik/nx} \quad \text{für alle } k \leq n,$$

$$b_n = \sum_{0 \leq k < n} |p_{k+1}^n - p_k^n|.$$

Dann gilt $b_n = 2n |\sin(x/(2n))|$ und $\lim_n b_n = x$.

Damit haben wir unser Ziel erreicht: Die Exponentialfunktion wickelt den positiven Teil der y -Achse gleichmäßig, längentreu und gegen den Uhrzeigersinn auf den Einheitskreis auf. Anders formuliert: Die Funktion $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cos t, \sin t) (= e^{it})$ beschreibt die gleichmäßige Bewegung eines Punktes auf dem Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn, der in der Zeit t die Strecke t zurücklegt.

In der Darstellung $z = r e^{ix}$ einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten ist das Argument x also ein Winkel im Bogenmaß. Und die Multiplikation zweier komplexer Zahlen erfolgt nach der geometrischen Multiplikationsregel: „Multipliziere die Längen und addiere die Winkel.“

Die Arkusfunktionen

Zur Bildung von Umkehrfunktionen betrachten wir die folgenden natürlichen Einschränkungen der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin_0 = \sin|[-\pi/2, \pi/2], \quad \cos_0 = \cos|[0, \pi],$$

$$\tan_0 = \tan|]-\pi/2, \pi/2[, \quad \cot_0 = \cot|[0, \pi[.$$

Unsere Analyse hat gezeigt:

Satz (*Wachstumsverhalten der eingeschränkten trigonometrischen Funktionen*)

Die Funktionen $\sin_0$ und $\tan_0$ sind streng monoton steigend, und die Funktionen $\cos_0$ und $\cot_0$ sind streng monoton fallend. Der Wertebereich von $\sin_0$ und $\cos_0$ ist $[-1, 1]$, und der Wertebereich von $\tan_0$ und $\cot_0$ ist $\mathbb{R}$.

Damit können wir die Umkehrfunktionen bilden:

Definition (*Arkusfunktionen*)

Wir definieren den *Arkussinus* $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, den *Arkuskosinus* $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, den *Arkustangens* $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und den *Arkuskotangens* $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\arcsin = \sin_0^{-1}, \quad \arccos = \cos_0^{-1}, \quad \arctan = \tan_0^{-1}, \quad \operatorname{arccot} = \cot_0^{-1}.$$

Gebräuchlich ist auch die Schreibweise $\sin^{-1} x$ für $\arcsin x$, wobei diese Notation aufgrund der möglichen Verwechslung mit $\sin(x)^{-1} = 1/\sin x$ nicht ungefährlich ist. Analoges gilt für die anderen Arkusfunktionen.

Alle Arkusfunktionen sind stetig und erben das Monotonieverhalten ihrer definierenden Funktionen. Es ergeben sich die folgenden Bijektionen:

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[, \quad \operatorname{arccot} : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[.$$

Der Leser beachte, dass $\sin \arcsin x = x$ für alle x im Definitionsbereich $[-1, 1]$ des Arkussinus gilt, während $\arcsin \sin x = x$ nur für $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ erfüllt ist, also für einen kleinen, wenn auch repräsentativen, Teil des Definitionsbereichs $\mathbb{R}$ des Sinus. Analoges gilt für die Verknüpfung von Kosinus und Arkuskosinus.

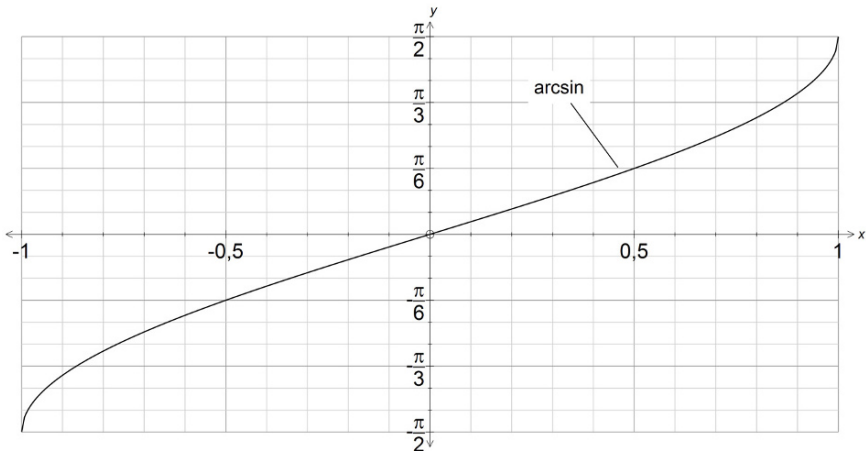
Der gemeinsame Wertebereich des Arkussinus und Arkuskosinus ist das Intervall $[0, \pi/2]$. Ist (x, y) ein Punkt des Einheitskreises im ersten Quadranten der Ebene, so ist $\arccos x = \arcsin y$, und der gemeinsame Wert ist der dem Punkt entsprechende Winkel. Denn dann existiert ein $t \in [0, \pi/2]$ mit $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ und es gilt $\arccos x = \arccos \cos t = t$ und $\arcsin y = \arcsin \sin t = t$. Der Leser überlege sich, welche Beziehungen zwischen $\arccos x$ und $\arcsin y$ für die anderen Punkte (x, y) des Einheitskreises bestehen.

Bemerkenswerte Eigenschaften sind weiter:

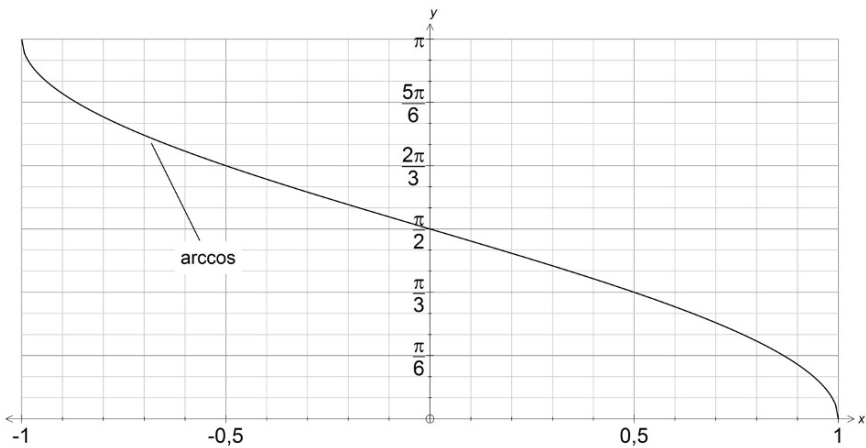
Satz (*elementare Eigenschaften der Arkusfunktionen*)Für alle x gilt unter der Voraussetzung der Definiertheit:

- (a) $\sin \arccos x = \cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$,
 (b) $\sin \operatorname{arccot} x = \cos \arctan x = 1/\sqrt{1 + x^2}$.

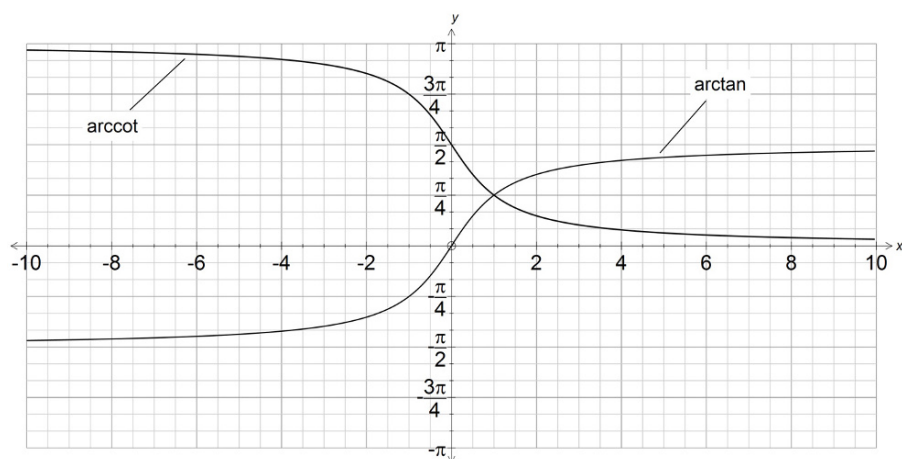
Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben.



Arkussinus



Arkuskosinus



Arkustangens und Arkuskotangens

Sekans und Kosekans

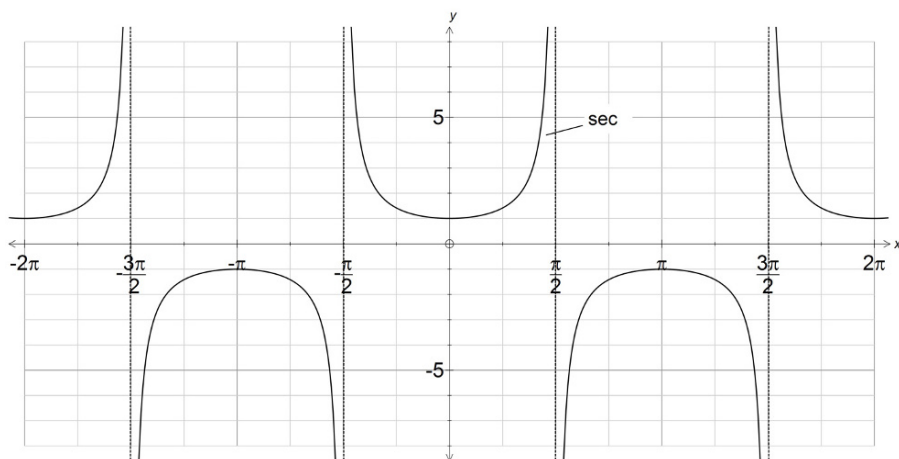
Kurz erwähnen möchten wir noch zwei weitere trigonometrische Funktionen:

Definition (*Sekans und Kosekans*)

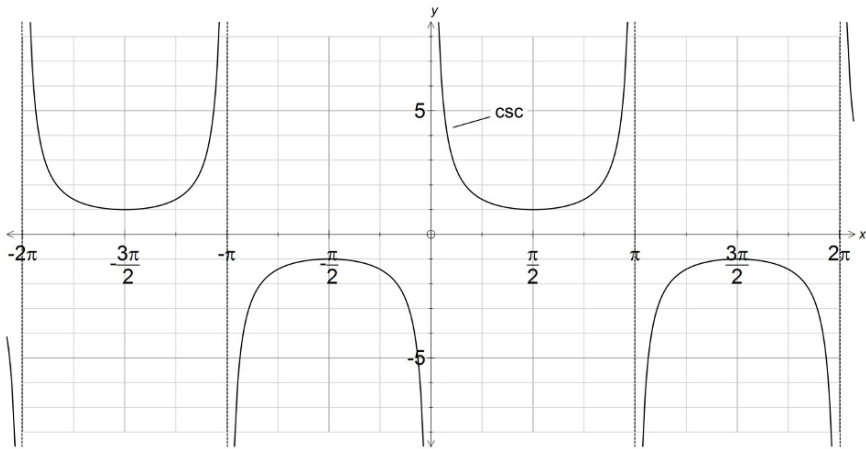
Seien $A = \{ \pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$, $B = \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$. Dann definieren wir den *Sekans* $\sec : \mathbb{R} - A \rightarrow \mathbb{R}$ und den *Kosekans* $\csc : \mathbb{R} - B \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\sec x = 1/\cos x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} - A,$$

$$\csc x = 1/\sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} - B.$$



Sekans



Kosekans

Sekans und Kosekans tauchen in natürlicher Weise bei der Untersuchung von Dreiecken auf. Wir besprechen dies in den Ergänzungen.

Beide Funktionen haben die Periode 2π . Zur Bildung von Umkehrfunktionen betrachten wir die Einschränkungen

$$\sec_0 = \sec|([0, \pi] - \{\pi/2\}), \quad \csc_0 = \csc|([- \pi/2, \pi/2] - \{0\}).$$

Dann ist $\sec_0$ eine auf $[0, \pi/2[$ und $] \pi/2, \pi]$ jeweils streng monoton wachsende Funktion, die $[0, \pi] - \{\pi/2\}$ bijektiv auf $\mathbb{R} -]-1, 1[$ abbildet. Analog ist $\csc_0$ streng monoton fallend auf $[- \pi/2, 0[$ und $]0, \pi/2]$ und bildet $[- \pi/2, \pi/2] - \{0\}$ bijektiv auf $\mathbb{R} -]-1, 1[$ ab. Wir können also definieren:

Definition (*Arkussekans und Arkuskosekans*)

Wir definieren den *Arkussekans* $\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} -]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ und den *Arkuskosekans* $\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} -]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{arcsec} = \sec_0^{-1}, \quad \operatorname{arccsc} = \csc_0^{-1}.$$

Die Arkusfunktionen erben wieder das Monotonieverhalten ihrer stetigen Ursprungsfunktionen. Wir erhalten die folgenden Bijektionen:

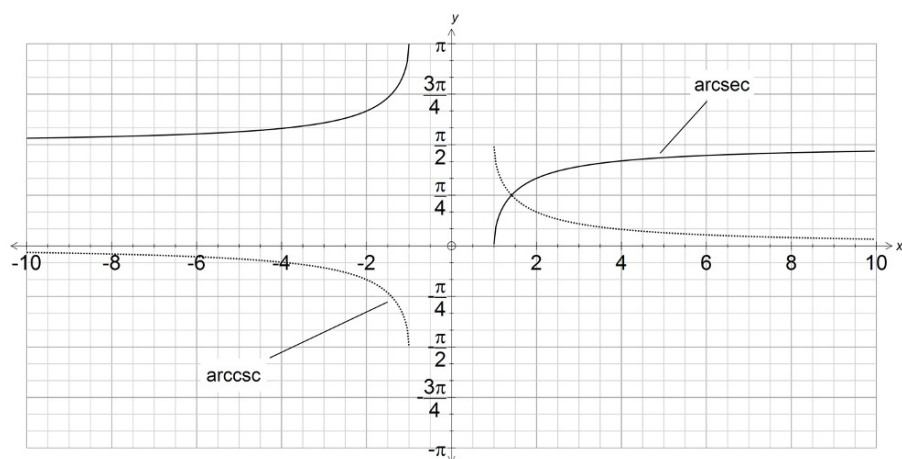
$$\operatorname{arcsec} : \mathbb{R} -]-1, 1[\rightarrow [0, \pi] - \{\pi/2\},$$

$$\operatorname{arccsc} : \mathbb{R} -]-1, 1[\rightarrow [- \pi/2, \pi/2] - \{0\}.$$

Weiter gilt

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcsec} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcsec} x = \pi/2 \quad \text{und}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccsc} x = \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccsc} x = 0.$$



Arkussekans und Arkuskosekans

Die Hyperbelfunktionen

Im Zoo der von der komplexen Exponentialfunktion abstammenden Funktionen betrachten wir noch ein letztes Gehege.

Definition (Hyperbelfunktionen)

Wir definieren den *Sinus Hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, den *Kosinus Hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und den *Tangens Hyperbolicus* $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2,$$

$$\cosh x = (e^x + e^{-x})/2,$$

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Weiter definieren wir den *Kotangens Hyperbolicus* $\coth : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$\coth x = \cosh x / \sinh x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

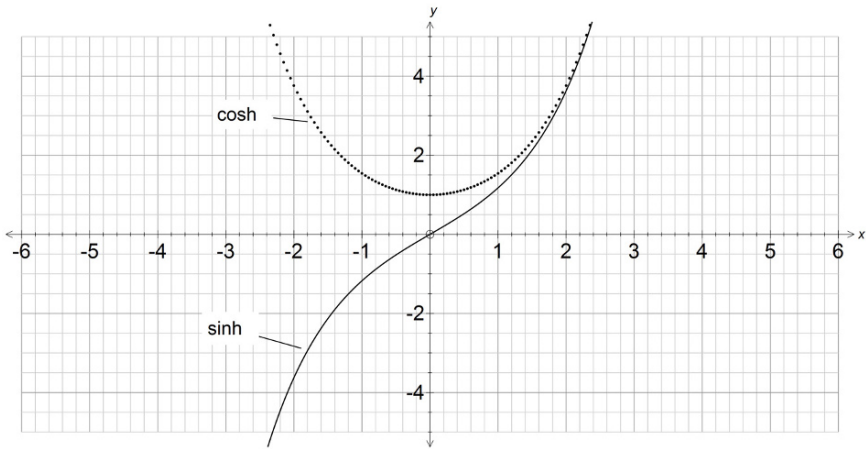
Alle Hyperbelfunktionen sind stetig und besitzen das folgende Monotonie- und Werteverhalten.

Satz (Verhalten der Hyperbelfunktionen)

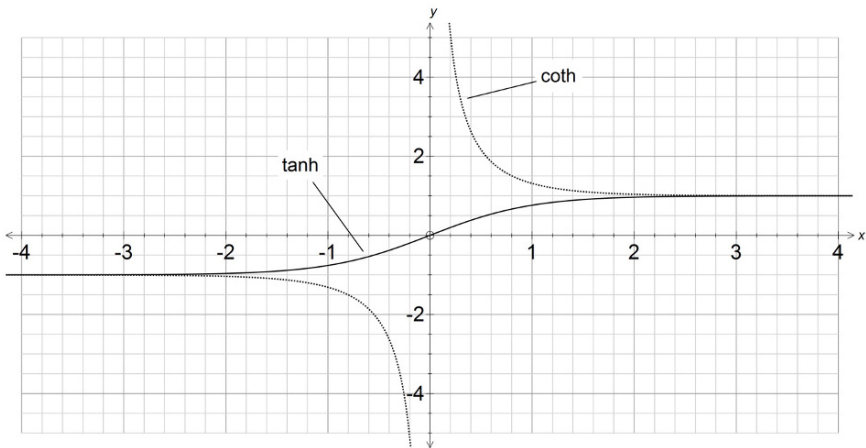
$\sinh$ ist streng monoton steigend und besitzt den Wertebereich $\mathbb{R}$.

$\cosh$ ist streng monoton fallend im Intervall $]-\infty, 0]$ und streng monoton steigend im Intervall $[0, \infty[$ mit Wertebereich $[1, \infty[$. $\tanh$ ist streng

monoton steigend mit Wertebereich $]-1, 1[$. $\coth$ ist streng monoton fallend im Intervall $]-\infty, 0[$ und streng monoton fallend im Intervall $]0, \infty[$ mit Wertebereich $\mathbb{R} - [-1, 1]$.



Sinus und Kosinus Hyperbolicus



Tangens und Kotangens Hyperbolicus

Wir überlassen den Nachweis dem Leser. Leicht zu sehen ist weiter:

Satz (*elementare Eigenschaften der Hyperbelfunktionen*)

Für alle x, y gilt:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$

(b) $\sinh x = \sum_n x^{2n+1}/(2n+1)!, \quad \cosh x = \sum_n x^{2n}/(2n)!,$

(c) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \quad (\text{Additionstheoreme})$

Die Eigenschaft (a) erklärt die Bezeichnung als „Hyperbelfunktionen“. So wie $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ in der Zeit $t \in \mathbb{R}$ eine Bewegung auf dem Einheitskreis K beschreibt, so beschreibt $g(t) = (\cosh(t), \sinh(t))$ in der Zeit $t \in \mathbb{R}$ eine Bewegung auf dem rechten Ast der Hyperbel $H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \}$.

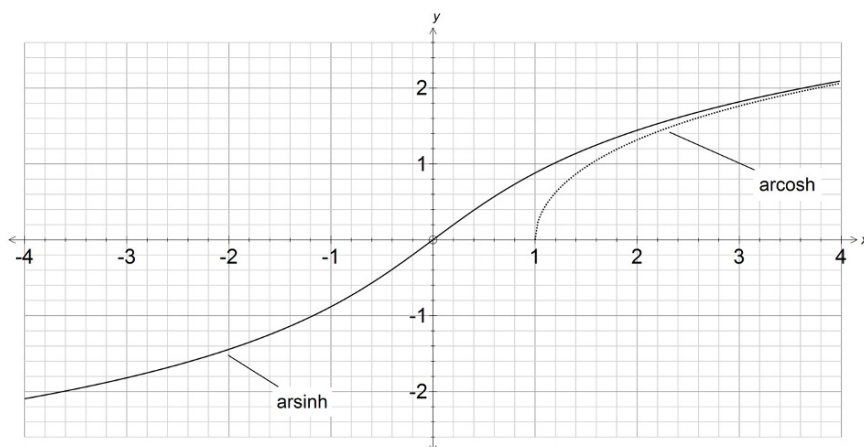
Auch für die Hyperbelfunktionen lassen sich Umkehrfunktionen einführen:

Definition (*Areafunktionen*)

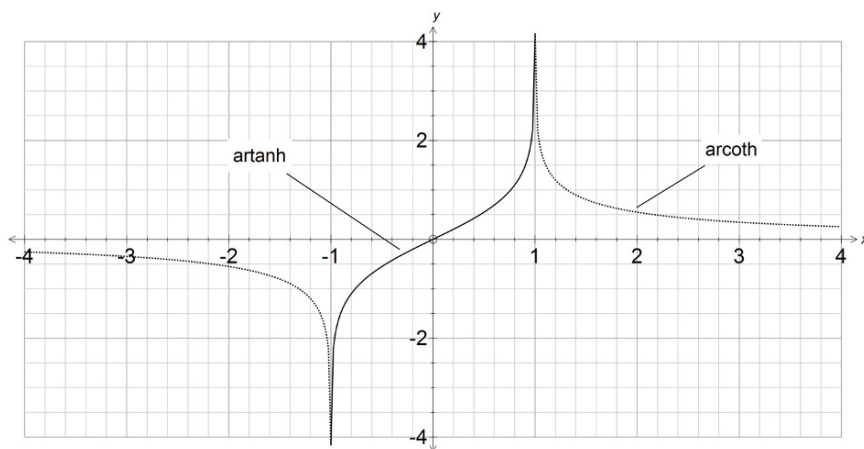
Wir definieren den *Areasinus Hyperbolicus* $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, den *Areakosinus Hyperbolicus* $\operatorname{arcosh} : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, den *Areatangens Hyperbolicus* $\operatorname{artanh} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ und den *Areakotangens Hyperbolicus* $\operatorname{arcoth} : \mathbb{R} - [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\operatorname{arsinh} = \sinh^{-1}, \quad \operatorname{arcosh} = (\cosh|_{[0, \infty[})^{-1},$$

$$\operatorname{artanh} = \tanh^{-1}, \quad \operatorname{arcoth} = \coth^{-1}.$$



Area Sinus und Kosinus Hyperbolicus



Area Tangens und Kotangens Hyperbolicus

Die Areafunktionen lassen sich mit Hilfe des natürlichen Logarithmus explizit darstellen:

Satz (*explizite Darstellung der Areafunktionen*)

Es gilt:

$$\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{für alle } x \geq 1,$$

$$\operatorname{artanh} x = \log((1+x)/(1-x))/2 \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| < 1,$$

$$\operatorname{arcoth} x = \log((x+1)/(x-1))/2 \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| > 1.$$

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

Übungen

3.3.1 Die Exponentialfunktion und der Logarithmus

Übung 1

Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $a^x a^y = a^{x+y}$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = 1/(a^x)$, $a^x b^x = (ab)^x$,
- (b) $\log(a^x) = x \log(a)$, $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$,
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (e^x - 1)/x = 1$,
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (a^x - 1)/x = \log(a)$.

Übung 2

Zeigen Sie, dass für alle $a, b > 0$, $a, b \neq 1$ und alle $x > 0$ gilt:

- (a) $\log_a(x) = \log_b(x)/\log_b(a) = \log(x)/\log(a)$,
- (b) $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$,
- (c) $1/c \cdot \log_a(x) = \log_{a^c}(x)$ für alle $c \neq 0$,
- (d) $\log_a(x) = -\log_{1/a}(x)$.

Übung 3

Finden Sie den Fehler im folgenden „Beweis“ von „ $1 = 1/4$ “:

„Für alle $a > 0$ ist $\log_a$ die Umkehrfunktion von $\exp_a$. Für alle $x > 0$ ist weiter $\exp_x(a)$ in der Variablen x die Potenzfunktion, die x auf x^a abbildet. Speziell ist $\exp_x(1/2)$ die Wurzelfunktion, die x auf $\sqrt{x}$ abbildet. Die Umkehrfunktion von $\exp_x(1/2)$ ist aber $\log_x(1/2)$, und damit ist $\log_x(1/2) = x^2$ für alle $x > 0$. Also ist $1 = \log_{1/2}(1/2) = (1/2)^2 = 1/4$.“

Übung 4

Zeigen Sie:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = 1$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\log(x)}/e^x = 0$.

Übung 5

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n \geq 1} \ln(n)/n^3$ konvergiert.

Übung 6

- (a) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen
- $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
- mit

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

Bestimmen Sie weiter alle Funktionen $g: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $0 \in P$ und

$$g(xy) = g(x) + g(y) \quad \text{für alle } x, y \in P.$$

- (b) Bestimmen Sie alle stetigen Funktionen
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- mit

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Übung 7

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Weiter sei f in einer Umgebung der Null nach oben beschränkt, d. h. es gebe ein $s \geq 0$ und ein $\delta > 0$ mit $f(x) < s$ für alle $x \in]-\delta, \delta[$.

Zeigen Sie, dass f stetig ist (und dass folglich der Charakterisierungssatz für Funktionen mit Additionstheorem für die Funktion f gilt).

3.3.2 Die trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen*Übung 1*

Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a) \quad \exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)},$$

$$(b) \quad \sin(x) - \sin(y) = 2 \sin(s) \cos(t),$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin(s) \sin(t),$$

$$\text{wobei } s = (x - y)/2 \text{ und } t = (x + y)/2.$$

$$(c) \quad \tan(x + y) = (\tan(x) + \tan(y)) / (1 - \tan(x)\tan(y)),$$

$$\text{falls } \cos(x), \cos(y), \cos(x + y) \neq 0.$$

$$(d) \quad \cot(x + y) = (\cot(x) \cot(y) - 1) / (\cot(x) + \cot(y)),$$

$$\text{falls } \sin(x), \sin(y), \sin(x + y) \neq 0.$$

Übung 2

Sei $p \in \mathbb{C} - \{0\}$ eine komplexe Periode der Exponentialfunktion, d. h. es gilt $\exp(z) = \exp(z + p)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass p ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ ist. Folgern Sie, dass $\{z \in \mathbb{C} \mid e^z = 1\} = \{k2\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Übung 3

Zeigen Sie:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} x \sin(1/x) = 0$,
 (b) $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (1 - \cos x)/x^2 = 1/2$.

*Übung 4*Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

- (a) $|\sin^n(x) - \sin^n(y)| \leq n |x - y|$,
 (b) $|\sin(nx)| \leq n |\sin(x)|$.

Übung 5

Zeigen Sie:

- (a) $\cos^2(x/2) = (1 + \cos x)/2$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
 (b) $\sin^2(x/2) = (1 - \cos x)/2$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
 (c) $\tan(x/2) = (1 - \cos x)/\sin x = \sin(x)/(1 + \cos x)$ für alle $x \in [0, \pi[$.

*Übung 6*Zeigen Sie, dass $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \tan(x)/x = 1$.*Übung 7*Zeigen Sie, dass für alle x unter der Voraussetzung der Definiertheit gilt:

- (a) $\sin \arccos x = \cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$,
 (b) $\sin \operatorname{arccot} x = \cos \arctan x = 1/\sqrt{1 + x^2}$.

*Übung 8*Zeigen Sie, dass für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$ gilt:

- (a) $\arg(z) = \arctan(y/x)$, falls $x > 0$ und $y \geq 0$,
 (b) $\arg(z) = \arctan(y/x) + 2\pi$, falls $x > 0$ und $y < 0$,
 (c) $\arg(z) = \arctan(y/x) + \pi$, falls $x < 0$,
 (d) $\arg(z) = \pi/2$, falls $x = 0$ und $y > 0$,
 (e) $\arg(z) = 3\pi/2$, falls $x = 0$ und $y < 0$.

*Übung 9*Wir definieren eine Relation $<$ auf $\mathbb{C}$ durch:

$$z < w, \text{ falls } |z| < |w| \text{ oder } (|z| = |w| > 0 \text{ und } \arg(z) < \arg(w)).$$

Untersuchen Sie, welche der Axiome (O1), (O2), (O3), (A1), (A2) eines angeordneten Körpers für diese Ordnung gelten und welche nicht.

Übung 10

Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(a) \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$(b) \sinh x = \sum_n x^{2n+1}/(2n+1)!, \quad \cosh x = \sum_n x^{2n}/(2n)!,$$

$$(c) \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \quad (\text{Additionstheoreme})$$

$$(d) \cosh^2(x/2) = (\cosh(x) + 1)/2,$$

$$\sinh^2(x/2) = (\cosh(x) - 1)/2.$$

Übung 11

Beweisen Sie den Satz über das Monotonie- und Werteverhalten der Hyperbelfunktionen.

Übung 12

Zeigen Sie:

$$(a) \operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$(b) \operatorname{arcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{für alle } x \geq 1,$$

$$(c) \operatorname{artanh} x = \log((1+x)/(1-x))/2 \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| < 1,$$

$$(d) \operatorname{arcoth} x = \log((x+1)/(x-1))/2 \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| > 1.$$

Neunte Ergänzungen: Die elementaren Funktionen in Natur und Geometrie

Ergänzungsübung 1

Jakob Bernoulli hat Ende des 17. Jahrhunderts das Problem der stetigen Verzinsung formuliert:

„Eine Summe Geldes sei auf Zinsen angelegt, dass in den einzelnen Augenblicken ein proportionaler Teil der Jahreszinsen zum Kapital geschlagen wird.“

Motivieren und diskutieren Sie die Limesdarstellung der Exponentialfunktion als mathematisches Modell einer stetigen Verzinsung.

Ergänzungsübung 2

Zeigen Sie mit elementaren Methoden, dass $\lim_n (1 + 1/n)^n$ existiert. Betrachten Sie hierzu die Folgen $(x_n)_{n \geq 1}$ und $(y_n)_{n \geq 1}$ mit

$$x_n = (1 + 1/n)^n, \quad y_n = (1 + 1/n)^{n+1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Ergänzungsübung 3

Eine „Größe“ oder ein „Bestand“ habe das folgende Wachstums- oder Abnahmeverhalten:

„Zu jedem Zeitpunkt nehmen alle Bestandteile der aktuellen Größe unabhängig voneinander zu oder ab, und diese Zu- oder Abnahme ist zeitunabhängig.“

Modellieren Sie einen derartigen Prozess und formulieren Sie die charakteristischen mathematischen Eigenschaften. Geben Sie weiter Beispiele für derartige Entwicklungsprozesse.

Ergänzungsübung 4

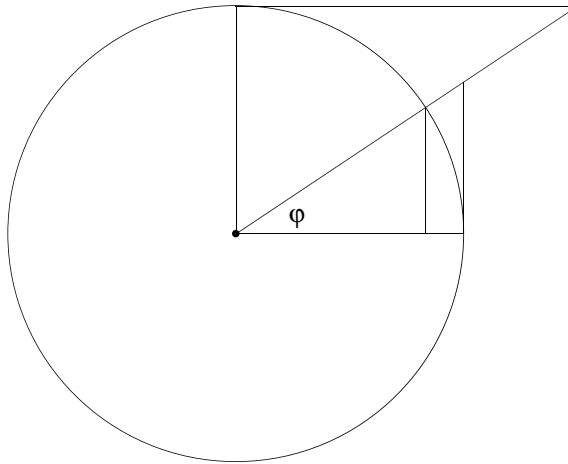
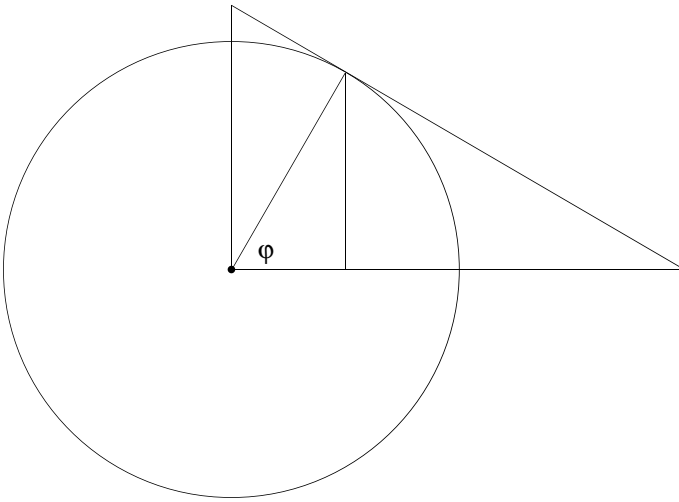
Eine Logarithmentafel zur Basis a ist eine Tabelle mit Approximationen an Werte $\log_a(x)$ für gewisse reelle Zahlen x . Diskutieren Sie, wie sich Logarithmentafeln zur Berechnung von Produkten $x \cdot y$, Quotienten x/y , Potenzen x^y und Wurzeln $\sqrt[m]{x}$ verwenden lassen.

Ergänzungsübung 5

Begründen Sie, warum in der Mathematik Winkel gegen und nicht im Uhrzeigersinn gemessen werden.

Ergänzungsübung 6

Identifizieren Sie den Sinus, Kosinus, Tangens, Kotangens, Sekans und Kosekans des Winkels φ in den folgenden Figuren. Der dargestellte Kreis ist dabei der Einheitskreis.



Trigonometrische Funktionen in geometrischen Figuren

4. Abschnitt

Differentiation

1. Differentialquotienten

Im Zentrum der Differentialrechnung steht die Beobachtung, dass sich viele Funktionen lokal durch eine Gerade approximieren lassen. Die Steigung der einer Funktion f und einem Punkt x zugeordneten Gerade ist als Ableitung von f im Punkt x bekannt. Alle Ableitungen zusammen ergeben eine neue Funktion f' , die viele interessante Informationen über die Funktion f enthält. Die Analyse von f lässt sich dann nicht selten noch durch die Bildung weiterer Ableitungen f'' , f''' , ... verfeinern. Es gelingt oft sogar, eine Funktion durch die Folge ihrer in einem bestimmten Entwicklungspunkt ausgewerteten iterierten Ableitungen darzustellen. Weiter ergibt sich ein neues Problem klassischer mathematischer Bauart, nämlich das Lösen von Differentialgleichungen: Welche Funktionen lösen zum Beispiel die Gleichung $f'' + f = 0$? Insgesamt eröffnet uns der Begriff der Differenzierbarkeit ein weites und für die wissenschaftliche Naturbeschreibung sehr wichtiges Feld. Wir erkunden es wie folgt: Zunächst definieren wir den Begriff der Differenzierbarkeit. Danach bestimmen wir die Ableitungen einiger einfacher Funktionen und stellen eine Reihe von allgemeinen Differentiationsregeln zusammen. Im nächsten Kapitel diskutieren wir dann erste Anwendungen der Differentiation, und wir illustrieren die Idee der Analyse von f mit Hilfe von f' . Die genauere Untersuchung der iterierten Ableitung ist schließlich das Thema des dritten Kapitels dieses Abschnitts, das zudem auch eine Einführung in die Theorie der Potenzreihen beinhaltet. Differentialgleichungen deuten wir im Laufe der Darstellung lediglich an, sie bilden dann einen eigenen Abschnitt der fortgeführten Analysis.

Die Ableitung einer Funktion

Wir beginnen mit einer einfachen Definition.

Definition (*Gerade durch einen Punkt mit einer bestimmten Steigung*)

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = ax + b \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

die Gerade der Steigung a durch den Punkt $(0, b)$.

Für alle $p, q \in \mathbb{R}$ mit $g(p) = q$ sagen wir, dass g durch $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ verläuft.

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ bezeichnen wir die eindeutig bestimmte Gerade $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Steigung a durch den Punkt (p, q) mit $g_{a,p,q}$.

Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ gilt also:

$$g_{a,p,q}(x) = ax + q - ap = q + a(x - p) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Unter „Gerade“ verstehen wir im Folgenden die funktionalen Geraden der Form $g_{a,p,q}$. Bis auf die Senkrechten der Ebene – die wir hier nicht benötigen – sind unsere Geraden genau die geometrischen Geraden der Ebene.

Für jede Gerade g mit $g(0) \neq g(1)$ bilden die Punkte $(0, g(0))$, $(1, g(0))$, $(1, g(1))$ ein rechtwinkliges Dreieck, und es gilt $g(1) = g(0) + a$ mit der Steigung a der Geraden. Damit ist die Steigung a der Tangens des Winkels, den die Gerade g mit der x -Achse einschließt.

Die Steigung einer Geraden können wir einfach berechnen, sobald wir zwei Punkte der Geraden kennen. Ist nämlich g eine Gerade, die durch zwei verschiedene Punkte (p, q) und (x, y) verläuft, so gilt $g = g_{a,p,q} = g_{a,x,y}$ mit der Steigung $a = (y - q)/(x - p) = (g(x) - g(p))/(x - p)$.

Wir wollen nun, wenn möglich, die Steigung einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $P \subseteq \mathbb{R}$, in einem Punkt $p \in P$ als denjenigen Wert a erklären, für den f in der Umgebung von p möglichst wenig von $g_{a,p,f(p)}$ abweicht. Anschaulich schmiegt sich dann die Gerade $g = g_{a,p,f(p)}$ an den Graphen der Funktion f im Punkt $(p, f(p))$ an, und wir machen nur kleine Fehler, wenn wir f in einer kleinen Umgebung von p durch die Gerade g ersetzen. Oder anders formuliert: Unter dem Mikroskop betrachtet sieht der Graph von f im Punkt $(p, f(p))$ aus wie g .

Kandidaten für die Steigung a von f im Punkt p sind die sog. *Differenzenquotienten*

$$(f(x) - f(p))/(x - p) \quad \text{für alle } x \in P - \{p\},$$

die die Steigung einer durch $(p, f(p))$ und $(x, f(x))$ verlaufenden Geraden angeben. Diese Kandidaten können desto stärkere Ansprüche erheben, als Steigung von f im Punkt p zu gelten, je näher x an p liegt. Ein Grenzübergang ist dann nur natürlich:

Definition (*Differenzierbarkeit in einem Punkt*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$ ein Häufungspunkt von P .

Dann heißt f *differenzierbar* im Punkt p , falls der Grenzwert

$$a = \lim_{x \rightarrow p, x \in P - \{p\}} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existiert. Die Zahl a heißt dann die *Ableitung* oder der *Differentialquotient* von f im Punkt p . Wir setzen

$$f'(p) = Df(p) = df/dx(p) = df(x)/dx|_{x=p} = a.$$

Weiter heißt die Gerade $g_{a,p,f(p)}$,

$$g_{a,p,f(p)}(x) = f(p) + a(x - p) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

die *Tangente* an f im Punkt $(p, f(p))$ oder die *Linearisierung* von f in p .

Die Häufungpunkt Voraussetzung sichert die Definiertheit des Limes. Sie ist immer erfüllt, wenn P ein reelles Intervall ist, das mehr als einen Punkt enthält.

Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir im Folgenden kurz

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

anstelle von „ $\lim_{x \rightarrow p, x \in P - \{p\}}$ “. Auch in ähnlichen Fällen sei immer vorausgesetzt, dass das „Streben der Variablen“ innerhalb des Definitionsbereichs der betrachteten Funktion stattfindet.

Suggestiv und oft nützlich ist die folgende Umformulierung der Differenzierbarkeit: Es gilt $f'(p) = a$ genau dann, wenn

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Dem Leser wird vielleicht aufgefallen sein, dass die Existenz des Differentialquotienten

$$a = \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p)$$

besagt, dass die Funktion $d : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$d(x) = (f(x) - f(p))/(x - p) \quad \text{für alle } x \in P - \{p\}, \quad d(p) = a$$

stetig im Punkt p ist. Die Differenzierbarkeit ist damit eine Stetigkeitseigenschaft, und es ist dann nicht mehr überraschend, dass die Stetigkeit von f in p notwendig für die Differenzierbarkeit von f in p ist:

Satz (*Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p . Dann ist f stetig in p .

Beweis

Sei $a = f'(p)$. Dann gilt

$$- \lim_{x \rightarrow p} f(x) - f(p) = \lim_{x \rightarrow p, x \neq p} ((x - p) (f(x) - f(p))/(x - p)) = 0 \cdot a = 0.$$

Umgekehrt ist nicht jede in einem Punkt p stetige Funktion differenzierbar. Anschaulich besitzt eine Funktion, die in p einen Knick aufweist, keine sich anschmiegende Gerade in diesem Punkt. Diese Anschauung lässt sich auch leicht formal verifizieren. Das Paradebeispiel für eine stetige Funktion mit Knick ist die Betragsfunktion $\text{abs} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{abs}(x) = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Funktion ist im Nullpunkt nicht differenzierbar. Zum Beweis können wir jede gegen Null konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ verwenden, die unendlich viele positive und unendlich viele negative Glieder besitzt. Denn dann gilt für alle n :

$$(\text{abs}(x_n) - \text{abs}(0))/(x_n - 0) = |x_n|/x_n = 1, \quad \text{falls } x_n > 0,$$

$$(\text{abs}(x_n) - \text{abs}(0))/(x_n - 0) = |x_n|/x_n = -1, \quad \text{falls } x_n < 0.$$

Damit existiert dann aber der Differentialquotient für den Punkt 0 nicht. Die Funktion abs besitzt aber im Nullpunkt immerhin noch einen links- und einen

rechtsseitigen Differentialquotienten. Wir besprechen diese Begriffe in den Ergänzungen genauer.

Insgesamt ist die Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Punkt p also eine echte Verstärkung der Stetigkeit von f in p .

Wir hatten oben die Differenzierbarkeit von f in p als Approximierbarkeit durch eine Gerade beschrieben und motiviert. Wir präzisieren diese Sichtweise nun noch durch einen einfachen, aber aussagekräftigen mathematischen Satz.

Satz (*Approximationssatz*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$ ein Häufungspunkt von P . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist differenzierbar in p .
- (b) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(p) + a(x - p) + r(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow p} r(x)/(x - p) = 0.$$

In diesem Fall gilt dann $f'(p) = a$ mit a wie in (b).

Beweis

(a) *impliziert* (b):

Wir setzen $a = f'(p)$ und definieren $r : P \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r(x) = f(x) - f(p) - a(x - p) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Dann sind $a \in \mathbb{R}$ und $r : P \rightarrow \mathbb{R}$ wie gewünscht, denn es gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} r(x)/(x - p) = \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) - a = f'(p) - a = 0.$$

(b) *impliziert* (a):

Ist $a \in \mathbb{R}$ und $r : P \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (b), so gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) = \lim_{x \rightarrow p} (a + r(x)/(x - p)) = a + 0 = a.$$

— Dies zeigt die Differenzierbarkeit von f in p und den Zusatz.

Bis auf einen „in erster Ordnung vernachlässigbar kleinen Fehler“ $r(x)$ ist also $f(x)$ in der Nähe von p die Gerade $g_{a,p,f(p)}$ mit $a = f'(p)$.

Der Satz zeigt noch einmal, dass eine in p differenzierbare Funktion dort auch stetig ist. Denn gilt (b), so gilt $\lim_{x \rightarrow p} r(x) = 0$ und damit

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} (f(p) + a(x - p) + r(x)) = f(p).$$

Die Darstellung von f in (b) notiert man auch oft in der Form

$$f(x) = f(p) + a(x - p) + o(x - p) \quad \text{für } x \rightarrow p,$$

wobei hier und andernorts das sog. *Landau-Symbol* $o(g)$ für eine Funktion r steht, die unter der betrachteten Konvergenz von x (hier $x \rightarrow p$) klein im Vergleich zur Funktion g ist, d. h. es gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x - p| < \delta \rightarrow |r(x)| \leq \varepsilon |g(x)|).$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle x , so ist diese Bedingung gleichwertig zu

$$\lim_{x \rightarrow p} r(x)/g(x) = 0.$$

Wir notieren schließlich noch eine Variante des Approximationssatzes, die anstelle der linearen Approximation mit Fehler zweiter Ordnung eine stetige „Verzerrung“ einer Geraden verwendet:

Satz (*Approximationssatz, II*)

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in P$ ein Häufungspunkt von P .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist differenzierbar in p .
- (b) Es gibt eine in p stetige Funktion $s : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(p) + s(x)(x - p) \quad \text{für alle } x \in P.$$

In diesem Fall gilt dann $s(p) = f'(p)$ mit s wie in (b).

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

Die beiden Approximationssätze werden wir insbesondere zum Beweis der Ableitungsregeln verwenden.

Differenzierbarkeit in allen Punkten

Wie üblich führt der punktweise Begriff der Differenzierbarkeit zu einer globalen Betrachtung:

Definition (*Differenzierbarkeit in jedem Punkt, Ableitung*)

Eine Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar*, falls f in jedem $p \in P$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : P \rightarrow \mathbb{R}$, die jedem $p \in P$ die Ableitung von f im Punkt p zuordnet, heißt die *Ableitung* von f .

Wir haben gesehen, dass eine differenzierbare Funktion stetig ist. Dagegen ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion nicht mehr notwendig stetig. Beispiele werden wir im Verlauf der Untersuchungen noch kennenlernen. Es schadet aber nicht, bereits jetzt zu definieren:

Definition (*stetige Differenzierbarkeit*)

Eine differenzierbare Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig differenzierbar*, falls f' stetig ist.

Eine Verstärkung der stetigen Differenzierbarkeit ist die zweifache Differenzierbarkeit, d. h. die Existenz von $f'' = (f')'$. Allgemeiner definieren wir:

Definition (*iterierte Ableitungen, glatte Funktion*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann definieren wir rekursiv, solange die Ableitungen existieren:

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(n+1)} = f^{(n)'} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

f heißt *n-mal differenzierbar*, falls $f^{(n)}$ existiert, und *n-mal stetig differenzierbar*, falls zusätzlich $f^{(n)}$ stetig ist. Die Funktion $f^{(n)}$ heißt die *n-te Ableitung* von f . Schließlich heißt f *glatt*, falls $f^{(n)}$ für alle n existiert.

Wir werden sehen, dass neben den Polynomen auch die Funktionen $\exp$, $\log$, $\sin$, $\cos$, ... glatt sind. Diese Funktionen haben also keine „verborgenen Knicke“, die erst durch mehrfache Ableitung ans Licht kommen.

Einfache Ableitungen

Nach dieser Rahmenbildung für die Theorie der Differenzierbarkeit bestimmen wir nun einige einfache Ableitungen.

Beispiel 1

Sei $c \in \mathbb{R}$. Für die konstante Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt für alle $p \in \mathbb{R}$:

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) = \lim_{x \rightarrow p} (c - c)/(x - p) = 0.$$

Also ist f' die Nullfunktion auf $\mathbb{R}$. Alternativ kann man dieses Ergebnis auch mit Hilfe des Approximationssatzes gewinnen, da

$$f(x) = c + 0 + 0 = f(p) + 0 \cdot (x - p) + 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 2

Für die Identität $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{id}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$, gilt für alle $p \in \mathbb{R}$:

$$\text{id}'(p) = \lim_{x \rightarrow p} (\text{id}(x) - \text{id}(p))/(x - p) = \lim_{x \rightarrow p} (x - p)/(x - p) = 1.$$

Also ist id' die konstante Funktion mit Wert 1. Auch der Approximationssatz liefert dieses Ergebnis, denn es gilt

$$\text{id}(x) = \text{id}(p) + 1 \cdot (x - p) + 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beispiel 3

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p , und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $g = cf$ differenzierbar in p mit $g'(p) = cf'(p)$, denn es gilt

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + r(x),$$

mit $\lim_{x \rightarrow p} r(x)/(x - p) = 0$. Dann gilt aber

$$g(x) = cf(x) = cf(p) + cf'(p)(x - p) + cr(x)$$

mit $\lim_{x \rightarrow p} cr(x)/(x - p) = 0$, und dies zeigt die Behauptung.

Beispiel 4

Sei $n \in \mathbb{N}^*$, und sei $f(x) = x^n$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) = \lim_{x \rightarrow p} (x^n - p^n)/(x - p) =$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (x^{n-1} + x^{n-2}p + \dots + xp^{n-2} + p^{n-1}) = np^{n-1}.$$

Also gilt $f'(x) = nx^{n-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, oder, in anderer Notation,

$$d/dx x^n = nx^{n-1}.$$

Beispiel 5

Sei $f(x) = 1/x$ für alle $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Dann gilt für alle $p \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) = \lim_{x \rightarrow p} (1/x - 1/p)/(x - p) =$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (p - x)/(xp(x - p)) = \lim_{x \rightarrow p} -1/(xp) = -1/p^2.$$

Also ist $f'(x) = -1/x^2$ für alle $x \neq 0$ oder $d/dx (1/x) = -1/x^2$.

Beispiel 6

Allgemeiner als im letzten Beispiel sei nun $n \geq 1$ und $f(x) = 1/x^n$ für alle von Null verschiedenen $x \in \mathbb{R}$. Dann zeigt eine Kombination der Elemente der Rechnungen aus den Beispielen 4 und 5, dass für alle $p \neq 0$ gilt:

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) = \lim_{x \rightarrow p} (1/x^n - 1/p^n)/(x - p) =$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (p^n - x^n)/(x^n p^n (x - p)) =$$

$$\lim_{x \rightarrow p} -(x^{n-1} + x^{n-2}p + \dots + xp^{n-2} + p^{n-1})/(x^n p^n) =$$

$$-n p^{n-1}/p^{2n} = -n/p^{n+1}.$$

Also ist $f'(x) = -n/x^{n+1}$ für alle $x \neq 0$, d.h. es gilt $d/dx (1/x^n) = -n/x^{n+1}$.

Damit haben wir bewiesen:

Satz (Ableitungen der Monome)

Für alle $c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ gilt $d/dx (cx^n) = ncx^{n-1}$.

Die Ableitungen von

$$\dots, x^{-3}, x^{-2}, x^{-1}, x, x^2, x^3, \dots$$

sind also

$$\dots, -3x^{-4}, -2x^{-3}, -x^{-2}, 1, 2x, 3x^2, \dots$$

Bemerkenswerterweise wird hier genau der Exponent -1 ausgelassen. Wir werden später sehen, dass $1/x$ für alle $x > 0$ die Ableitung von $\log(x)$ ist.

Die Ableitungsregeln für x^n , $n \geq 1$, zeigen, dass

$$d/dx (x^n/n!) = x^{n-1}/(n-1)!$$

Differenzieren wir also die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_n x^n/n!$ gliedweise, so ergibt sich

$$\sum_{n \geq 1} x^{n-1}/(n-1)! = \sum_n x^n/n! = \exp(x),$$

also wieder die ursprüngliche Funktion. In der Tat gilt $\exp' = \exp$, und wir werden später einen allgemeinen Satz kennenlernen, der besagt, dass wir in konvergenten Reihen der Form

$$f(x) = \sum_n a_n x^n,$$

den sogenannten Potenzreihen, gliedweise differenzieren dürfen, d. h. es gilt

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}.$$

Damit liefern die elementaren Ableitungsregeln also den Schlüssel zur einfachen Differentiation komplizierter Funktionen. Bis wir die Anwendung dieses Schlüssels gerechtfertigt haben, müssen wir uns mit elementaren Methoden begnügen. Diese führen aber für die Exponentialfunktion auch schnell zum Ziel:

Satz (*Ableitung der Exponentialfunktion*)

Es gilt $\exp' = \exp$.

Beweis

Wir haben schon bewiesen, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1.$$

Dieser Limes ist aber der Differentialquotient $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^0)/(x - 0)$, und damit gilt $\exp'(0) = 1$. Das Additionstheorem erledigt alles Weitere, denn für alle $p \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} (e^{p+h} - e^p)/h = \lim_{h \rightarrow 0} e^p (e^h - 1)/h = e^p \cdot 1 = e^p.$$

— Also gilt $\exp'(p) = \exp(p)$ für alle $p \in \mathbb{R}$.

Die Exponentialfunktion erfüllt also die Differentialgleichung „ $f' = f$ “. Wir werden später sehen, dass sie dadurch im Wesentlichen eindeutig charakterisiert ist: Alle Lösungen von „ $f' = f$ “ sind von der Form $f = c \exp$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Zusammen mit der gliedweisen Differentiation von Potenzreihen erhält so die Exponentialreihe $\sum_n x^n/n!$ ihre wohl beste Motivation. Denn müsste man eine Reihe $\sum_n a_n x^n$ konstruieren mit $\sum_n a_n x^n = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$, und $\sum_n a_n 0^n = 1$, so würde man schnell die Lösung $\sum_n x^n/n!$ ans Licht gebracht haben. Die Fakultäten der Terme $x^n/n!$ sind dazu da, die Faktoren auszugleichen, die beim Ableiten von x^n produziert werden.

Analog wie im eben geführten Beweis zeigt man, dass $\exp'(-x) = -\exp(-x)$ für alle reellen Zahlen x gilt. Damit ist also $1/\exp$ eine Lösung der Differentialgleichung „ $f' = -f$ “. Gleiches gilt auch für $c/\exp$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Die nächsten Funktionen, deren Ableitungen wir berechnen wollen, sind der Sinus und der Kosinus. (Die Ableitungen der anderen trigonometrischen Funktionen bestimmen wir dann mit den Differentiationsregeln des nächsten Abschnitts.) Die gliedweise Ableitung der Sinus-Reihe $\sum_n (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$ ergibt

$$\sum_n (-1)^n x^{2n}/(2n)! = \cos x,$$

und analog liefert die gliedweise Differentiation der Kosinusreihe

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n x^{2n-1}/(2n-1)! = -\sum_n (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! = -\sin x.$$

Auch hier reichen unsere bislang bestimmten Grenzwerte aber aus, um die Korrektheit dieser Ableitungen elementar zu beweisen:

Satz (*Ableitung von Sinus und Kosinus*)

Es gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

Beweis

Für alle $p \in \mathbb{R}$ gilt (nach Teil (g) im Satz über die elementaren Eigenschaften des Sinus und Kosinus):

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sin(p+h) - \sin p)/h = \lim_{h \rightarrow 0} 2 \sin(h/2) \cos(p+h/2)/h =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin(h/2)/(h/2) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \cos(p+h/2) = 1 \cdot \cos(p),$$

wobei wir im letzten Schritt die Stetigkeit des Kosinus und den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = 1$ verwenden. Damit gilt also $\sin'(p) = \cos p$ für alle p .

– Der Beweis von $\cos'(p) = -\sin p$ verläuft analog.

Es gilt also

$$\sin' = \cos, \quad \sin'' = -\sin, \quad \cos' = -\sin, \quad \cos'' = -\cos.$$

Sowohl der Sinus als auch der Kosinus sind damit Lösungen der Differentialgleichung „ $f'' + f = 0$ “. Die Differentialgleichung „ $f'' - f = 0$ “ wird dagegen von der Exponentialfunktion $\exp(x)$ und auch von $\exp(-x)$ gelöst. Aus den Regeln des nächsten Abschnitts wird folgen, dass auch alle Linearkombinationen

$$a \sin + b \cos, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

die Differentialgleichung „ $f'' + f = 0$ “ erfüllen, und alle Linearkombinationen

$$a \exp + b 1/\exp, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

die Differentialgleichung „ $f'' - f = 0$ “ (die Funktionen $\sinh$ und $\cosh$ sind solche Linearkombinationen!). Es lässt sich dann wieder zeigen, dass keine weiteren Lösungen der beiden betrachteten Differentialgleichungen existieren. Damit haben wir die fundamentale Stellung von $\exp$, $\sin$ und $\cos$ untermauert. Diese Funktionen beschreiben in natürlicher Weise die Lösungen der einfachsten Differentialgleichungen, die eine Funktion f mit ihrer ersten bzw. zweiten Ableitung in Beziehung bringen.

Da wir den Sinus und Kosinus über die komplexe Exponentialfunktion definiert haben, stellt sich die Frage, ob wir nicht die Ableitung der beiden Funktionen mit Hilfe der komplexen Exponentialfunktion einfach berechnen können. Dies ist in der Tat möglich. Wir diskutieren dies in den Übungen.

Differentiationsregeln

Wir stellen in diesem Zwischenabschnitt die wichtigsten allgemeinen Differentiationsregeln zusammen. Mit Hilfe dieser Regeln lässt sich eine Vielzahl von Ableitungen bestimmen.

Wir beginnen mit der anschaulich klaren Linearität des Differenzierens:

Satz (*Linearität der Ableitung*)

Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p , und seien $c, d \in \mathbb{R}$.

Dann ist $cf + dg$ differenzierbar in p und es gilt

$$(cf + dg)'(p) = cf'(p) + dg'(p).$$

Beweis

Nach dem Approximationssatz gilt für alle $x \in P$:

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + r(x), \quad g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + s(x),$$

mit Funktionen $r, s : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow p} r(x)/(x - p) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p} s(x)/(x - p) = 0.$$

Dann gilt aber für alle $x \in P$

$$(cf + dg)(x) = (cf + dg)(p) + (cf'(p) + dg'(p))(x - p) + cr(x) + ds(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (cr(x) + ds(x))/(x - p) = c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0.$$

Wieder nach dem Approximationssatz ist also

$$\text{— } (cf + dg)'(p) = cf'(p) + dg'(p).$$

Sind also $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so gilt für alle $c, d \in \mathbb{R}$:

$$(cf + dg)' = cf' + dg'.$$

Als nächstes behandeln wir die Ableitung des Produkts fg zweier differenzierbarer Funktionen. Hier könnte man vielleicht die Regel $(fg)' = f'g'$ vermuten. Ein Blick auf den Approximationssatz zeigt, dass die Ableitung komplizierter ist:

Satz (*Produktregel*)

Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p . Dann ist das Produkt $fg : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p und es gilt

$$(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).$$

Beweis

Wir betrachten wieder die Approximationsdarstellungen

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x - p) + r(x), \quad g(x) = g(p) + g'(p)(x - p) + s(x).$$

Dann gilt für alle $x \in P$:

$$(fg)(x) = f(p)g(p) + f(p)g'(p)(x - p) + g(p)f'(p)(x - p) + f'(p)g'(p)(x - p)^2 + h(x),$$

mit einer gewissen Funktion $h : P \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow p} h(x)/(x - p) = 0$.

- Aus $\lim_{x \rightarrow p} (f'(p)g'(p)(x - p)^2)/(x - p) = 0$ folgt die Behauptung.

Eine kleine aber hübsche Anwendung der Produktregel ist die induktive Bestimmung der Ableitungen $d/dx x^n$ für alle $n \geq 1$. Wir starten mit der offensichtlichen Ableitung $d/dx x^1 = 1$. Nun gilt aufgrund der Produktregel:

$$d/dx x^2 = d/dx (x \cdot x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

Induktiv erhalten wir für alle $n \geq 1$:

$$d/dx x^{n+1} = d/dx (x \cdot x^n) = 1 \cdot x^n + x \cdot n x^{n-1} = (n+1) x^n,$$

wobei wir $d/dx x^n = n x^{n-1}$ als Induktionsvoraussetzung verwenden. Damit haben wir das Ergebnis aus Beispiel 4 reproduziert.

An dieser Stelle bietet sich nun die Untersuchung der Ableitung des Quotienten f/g zweier differenzierbarer Funktionen f und g an. Hierzu beobachten wir, dass $f/g = f \cdot 1/g$ gilt. Da wir die Produktregel bereits zur Verfügung haben, genügt es, die Ableitung von $1/g$ zu bestimmen. Es zeigt sich, dass

$$d/dx 1/g = -g'/g^2. \quad (\text{Quotientenregel})$$

Ein direkter Beweis durch Berechnung des Differentialquotienten oder Anwendung des Approximationssatzes ist leicht möglich. Wir besprechen dies in den Übungen. Hier wollen wir einen anderen Weg vorführen, der strukturelle Gesichtspunkte in den Mittelpunkt rückt. In Beispiel 5 haben wir bereits gesehen, dass

$$d/dx 1/x = -1/x^2 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Ist nun $h(x) = 1/x$ für alle $x \neq 0$, so gilt $1/g = h \circ g$. In der Tat lässt sich die Quotientenregel aus einer Ableitungsregel für die Verknüpfung zweier Funktionen gewinnen. Hier gilt:

Satz (Kettenregel)

Seien $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $\{f(x) \mid x \in P\} \subseteq Q$.

Weiter sei $p \in P$, und f sei differenzierbar in p und g differenzierbar in $f(p)$.

Dann ist die Verknüpfung $g \circ f : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p und es gilt

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p) = (g' \circ f)(p) \cdot f'(p).$$

Beweis

Wir verwenden die zweite Form des Approximationssatzes. Seien also

$$f(x) = f(p) + s_1(x)(x - p) \quad \text{für alle } x \in P,$$

$$g(y) = g(f(p)) + s_2(y)(y - f(p)) \quad \text{für alle } y \in Q,$$

mit stetigen Funktionen $s_1 : P \rightarrow \mathbb{R}$ und $s_2 : Q \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$s_1(p) = f'(p) \text{ und } s_2(f(p)) = g'(f(p)),$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(p)) + s_2(f(x))(f(x) - f(p)) = \\ g(f(p)) + s_2(f(x))s_1(x)(x - p).$$

Die Funktion $s_3 = (s_2 \circ f) \cdot s_1$ ist stetig auf P . Also ist $g \circ f$ differenzierbar in p und es gilt

$$- \quad (g \circ f)'(p) = s_3(p) = s_2(f(p))s_1(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p).$$

Dass man bei der Bildung der Ableitung $(g \circ f)'(p)$ den Term $g'(f(p))$ noch mit der Ableitung $f'(p)$ multiplizieren muss, ist als *Nachdifferenzieren* bekannt.

Wir diskutieren einige beispielhafte Anwendungen der Kettenregel.

Beispiel 1

Für alle in $-x$ differenzierbaren Funktionen g gilt

$$d/dx g(-x) = g'(-x) \cdot (-1) = -g'(-x).$$

Speziell ist $d/dx (-x)^2 = 2(-x) \cdot (-1) = 2x$, wie es ja wegen $(-x)^2 = x^2$ ja auch nicht anders sein kann.

Beispiel 2

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$d/dx \exp(ax) = d/dx e^{ax} = e^{ax} \cdot d/dx (ax) = e^{ax} \cdot a = a \exp(ax).$$

Damit ist für alle $c \in \mathbb{R}$ die Funktion f mit $f(x) = c \exp(ax)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung „ $f' = af$ “.

Beispiel 3

Weiß man, dass $\sin' = \cos$ gilt, so kann man mit der Kettenregel und der Formel $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ die Ableitung des Kosinus berechnen:

$$d/dx \cos x = d/dx \sin(\pi/2 - x) = \cos(\pi/2 - x) \cdot d/dx (\pi/2 - x) = -\sin x.$$

Beispiel 4

Besitzt eine differenzierbare Funktion f eine Umkehrfunktion g , so gilt $g \circ f = \text{id}$, und damit sollte nach der Kettenregel gelten:

$$(g' \circ f) \cdot f' = d/dx (g \circ f) = d/dx \text{id} = 1, \text{ also}$$

$$g'(f(p)) = 1/f'(p) \text{ für alle } p \text{ mit } f'(p) \neq 0.$$

Wir werden unten zeigen, dass die Regel des vierten Beispiels in der Tat richtig ist. Die Kettenregel liefert aber noch keinen Beweis, da wir noch nicht wissen, dass mit einer Funktion f im Fall der Existenz auch ihre Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ differenzierbar ist. Das kurze Experiment ist in jedem Falle die Mühe wert, und es macht uns mit der notwendigen Form der Ableitung der Umkehrfunktion vertraut.

Die schon oben erwähnte Herleitung der Quotientenregel mit Hilfe der Kettenregel verdient eine besondere Hervorhebung:

Korollar (*Quotientenregel*)

Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p , und sei $g(p) \neq 0$. Dann ist die Funktion f/g differenzierbar in p , und es gilt

$$(f/g)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - g'(p)f(p)}{g^2(p)}.$$

Beweis

Sei zunächst $f(x) = 1$ für alle $x \in P$. Nach Beispiel 5 oben gilt

$$(1/x)' = -1/x^2 \quad \text{für alle } x \neq 0.$$

Nach der Kettenregel gilt also

$$(1/g)'(p) = -1/g^2(p) \cdot g'(p) = -g'(p)/g^2(p).$$

Der allgemeine Fall ergibt sich nun aus $f/g = f \cdot 1/g$ durch Anwendung der Produktregel:

$$\begin{aligned} (f/g)'(p) &= (f \cdot 1/g)'(p) = f'(p) \cdot 1/g(p) + f(p)(1/g)'(p) = \\ &= f'(p)/g(p) - f(p)g'(p)/g^2(p) = (f'(p)g(p) - g'(p)f(p))/g^2(p). \end{aligned}$$

Wir fassen unsere Ableitungsregeln für Funktionen, die überall differenzierbar und bei Division ungleich Null sind, noch einmal zusammen:

$$(cf + dg)' = cf' + dg', \quad (\text{Linearität})$$

$$(fg)' = f'g + fg', \quad (\text{Produktregel})$$

$$(f/g)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}, \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'. \quad (\text{Kettenregel})$$

Als nächstes zeigen wir die bei der Diskussion der Kettenregel schon angedeutete Ableitungsregel für die Umkehrfunktion.

Satz (*Ableitung der Umkehrfunktion*)

Sei P ein Intervall, und sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in einem Punkt $p \in P$ mit $f'(p) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ von f differenzierbar in $q = f(p)$, und es gilt

$$g'(q) = 1/f'(p) = 1/f'(g(q)).$$

Die Aussage des Satzes lässt sich geometrisch leicht einsehen: Die Umkehrfunktion g von f erhält man durch Spiegelung von f an der Hauptdiagonalen. Eine Gerade mit Steigung a wird durch diese Spiegelung zu einer Geraden mit Steigung $1/a$. Schmiegt sich also eine Gerade mit Steigung a an f im Punkt $(p, f(p))$ an, so schmiegt sich eine Gerade mit Steigung $1/a$ an g im Punkt $(f(p), p)$ an. Also ist $g'(f(p)) = 1/f'(p)$. Der folgende Beweis ist die formale Version dieses anschaulichen Arguments.

Beweis

Sei Q der Wertebereich von f . Da p ein Häufungspunkt von P ist, existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $P - \{p\}$, die gegen p konvergiert. Aber f ist injektiv und stetig in p , und daher konvergiert $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen q in $Q - \{q\}$. Also ist q ein Häufungspunkt von Q , dem Definitionsbereich von g . Es bleibt also zu zeigen:

$$\lim_{y \rightarrow q} (g(y) - g(q))/(y - q) = 1/f'(p).$$

Sei hierzu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $Q - \{q\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = q$. Weiter sei $x_n = g(y_n)$ für alle n , d. h. es gilt $f(x_n) = y_n$ für alle n . Nach dem Satz über die Stetigkeit der Umkehrfunktion ist g stetig auf Q , und damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n) = g(q) = p.$$

Dann gilt aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (g(y_n) - g(q))/(y_n - q) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - p)/(f(x_n) - f(p)) = 1/f'(p).$$

– Damit ist also g differenzierbar in q und es gilt $g'(q) = 1/f'(p) = 1/f'(g(q))$.

Mit dieser Regel können wir nun die Lücke „ $1/x$ “, die in den Ableitungen $d/dx x^n = n x^{n-1}$

mit ganzzahligen Exponenten n auftritt, schließen:

Satz (*Ableitung des Logarithmus*)

Die Funktion $\log:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und es gilt

$$\log'(x) = 1/x \quad \text{für alle } x \in]0, \infty[.$$

Beweis

$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng monoton und differenzierbar mit $\exp' = \exp$.

Nach dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion gilt also:

– $\log'(q) = 1/\exp(\log(q)) = 1/q$ für alle $q \in]0, \infty[$.

Suchen wir zu x^n , $n \in \mathbb{Z}$, also diejenigen Funktionen f_n mit $d/dx f_n(x) = x^n$, so erhalten wir die Tabelle

...	x^{-3}	x^{-2}	x^{-1}	x^0	x^1	x^2	...
...	$-x^{-2}/2$	$-x^{-1}$	$\log x$	x^1	$x^2/2$	$x^3/3$	...

Der Logarithmus nimmt eine zeitlos bemerkenswerte Sonderrolle ein und wirkt wie in Kuckucksei in einem Nest voller rationaler Monome.

Die logarithmische Ableitung

Wir notieren schließlich noch eine Version der Ableitung, bei der eine Funktion f mit positiven Werten vor ihrer Ableitung mit dem Logarithmus behandelt wird:

Definition (*logarithmische Ableitung*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ differenzierbar. Dann definieren wir die *logarithmische Ableitung* $L(f): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$L(f)(x) = d/dx \log(f(x))$$

Es gilt also $L(f) = (\log \circ f)'$. Die Kettenregel liefert sofort:

Korollar (*Berechnung der logarithmischen Ableitung*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ differenzierbar. Dann gilt

$$L(f)(x) = f'(x)/f(x).$$

Wir diskutieren einige Eigenschaften der logarithmischen Ableitung in den Übungen. Für Liebhaber des spielerischen Umgangs mit Formeln notieren wir hier noch einen Zusammenhang zur Produktregel. Sind $f, g: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ differenzierbar, so können wir $L(fg)$ auf zwei Weisen berechnen:

$$L(fg) = \log(fg)' = (fg)'/(fg),$$

$$L(fg) = \log(fg)' = (\log(f) + \log(g))' = f'/f + g'/g.$$

Also gilt $(fg)'/(fg) = f'/f + g'/g$. Die Multiplikation mit fg liefert nun die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$. Dem Leser wird es vielleicht Freude bereiten, durch eine analoge Berechnung von $L(f_1 \cdot \dots \cdot f_n)$ eine verallgemeinerte Produktregel für $(f_1 \cdot \dots \cdot f_n)'$ zu finden.

Ableitung der elementaren Funktionen

Wir stellen noch die Ableitungen der im vorangehenden Kapitel betrachteten Funktionen zusammen. Sie lassen sich alle mit Hilfe unserer Regeln berechnen.

Satz (*Zusammenstellung elementarer Ableitungen*)

Auf den Definitionsbereichen der betrachteten Funktionen gilt:

- (a) $d/dx a^x = \log(a) a^x$, $d/dx x^a = a x^{a-1}$,
- (b) $d/dx \log_a(x) = 1/(x \log(a))$, $d/dx \log_x(a) = -\log_x(a)/(x \log(x))$,
- (c) $d/dx \tan x = 1/\cos^2 x$, $d/dx \cot x = -1/\sin^2 x$,
- (d) $d/dx \sec x = \sin x/\cos^2 x$, $d/dx \csc x = -\cos x/\sin^2 x$,
- (e) $d/dx \arcsin x = 1/\sqrt{1-x^2}$, $d/dx \arccos x = -1/\sqrt{1-x^2}$,
- (f) $d/dx \arctan x = 1/(1+x^2)$, $d/dx \operatorname{arccot} x = -1/(1+x^2)$,
- (g) $d/dx \sinh x = \cosh x$, $d/dx \cosh x = \sinh x$,
- (h) $d/dx \tanh x = 1/\cosh^2 x$, $d/dx \coth x = -1/\sinh^2 x$,
- (i) $d/dx \operatorname{arsinh} x = 1/\sqrt{x^2+1}$, $d/dx \operatorname{arcosh} x = 1/\sqrt{x^2-1}$,
- (j) $d/dx \operatorname{artanh} x = 1/(1-x^2)$, $d/dx \operatorname{arcoth} x = 1/(1-x^2)$.

Der Beweis sei dem fleißig differenzierenden Leser überlassen.

Übungen

4.1.1 Die Ableitung einer Funktion

Übung 1

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, und sei $p \in P$ ein Häufungspunkt von P .
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (a) f ist differenzierbar in p .
- (b) Es gibt eine in p stetige Funktion $s: P \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f(p) + s(x)(x - p) \quad \text{für alle } x \in P.$$

Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall $s(p) = f'(p)$ gilt.

Übung 2

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Funktion, d. h. es gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie:

Ist f differenzierbar im Nullpunkt, so gilt $f'(0) = 0$.

Übung 3

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt $p \in]a, b[$. Zeigen Sie:

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} (f(p+h) - f(p-h))/(2h).$$

Übung 4

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$, falls x rational, und $f(x) = x + x^2$ sonst.
Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt differenzierbar ist mit $f'(0) = 1$, und dass f in allen anderen Punkten nicht differenzierbar ist.

4.1.2 Differentiationsregeln

Übung 1

Zeigen Sie, dass im Fall der Definiertheit gilt:

- (a) $d/dx a^x = \log(a) a^x$, $d/dx x^a = a x^{a-1}$,
- (b) $d/dx \log_a(x) = 1/(x \log(a))$, $d/dx \log_x(a) = -\log_x(a)/(x \log(x))$,

Bestimmen Sie weiter für alle $x > 0$:

- (c) $d/dx x^x$,
- (d) $d/dx x^{(x^y)}$.

Übung 2

Beweisen Sie die Produktregel $(fg)' = f'g + fg'$ und die Quotientenregel $(1/g)' = -g'/g^2$ durch direkte Berechnung der entsprechenden Differentialquotienten (also ohne Verwendung des Approximationssatzes und der Kettenregel).

Übung 3

Zeigen Sie, dass im Fall der Definiertheit gilt:

- (a) $d/dx \tan x = 1/\cos^2 x$, $d/dx \cot x = -1/\sin^2 x$,
- (b) $d/dx \sec x = \sin x/\cos^2 x$, $d/dx \csc x = -\cos x/\sin^2 x$,
- (c) $d/dx \arcsin x = 1/\sqrt{1-x^2}$, $d/dx \arccos x = -1/\sqrt{1-x^2}$,
- (d) $d/dx \arctan x = 1/(1+x^2)$, $d/dx \operatorname{arccot} x = -1/(1+x^2)$.

Übung 4

Zeigen Sie, dass im Fall der Definiertheit gilt:

- (a) $d/dx \sinh x = \cosh x$, $d/dx \cosh x = \sinh x$,
- (b) $d/dx \tanh x = 1/\cosh^2 x$, $d/dx \coth x = -1/\sinh^2 x$,
- (c) $d/dx \operatorname{arsinh} x = 1/\sqrt{x^2+1}$, $d/dx \operatorname{arcosh} x = 1/\sqrt{x^2-1}$,
- (d) $d/dx \operatorname{artanh} x = 1/(1-x^2)$, $d/dx \operatorname{arcoth} x = 1/(1-x^2)$.

Übung 5

Für ein differenzierbares $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ sei

$$L(f) = f'/f.$$

Zeigen Sie, dass für alle differenzierbaren $f, g: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $L(fg) = L(f) + L(g)$,
- (b) $L(f^a) = a L(f)$, wobei $f^a(x) = f(x)^a$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- (c) ist $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\exp \circ h = f$, so gilt $L(f) = h'$.

Stellen Sie weiter den im Text erwähnten Zusammenhang zwischen $L(f_1 \cdot \dots \cdot f_n)$ und einer Produktregel für $(f_1 \cdot \dots \cdot f_n)'$ her.

Übung 6

Seien $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar. Zeigen Sie, dass das Produkt $fg: P \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar ist, und dass für alle $p \in P$ gilt:

$$(fg)^{(n)}(p) = \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} f^{(k)}(p) g^{(n-k)}(p).$$

Übung 7

Seien $f, g : P \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, und sei $p \in P$. Es gelte:

- (a) $f(p) = 0$,
- (b) f ist differenzierbar in p ,
- (c) g ist stetig in p .

Zeigen Sie, dass das Produkt $fg : P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in p ist, und dass

$$(fg)'(p) = f'(p) \cdot g(p).$$

Übung 8

Sei $f : P \rightarrow \mathbb{C}$, $P \subseteq \mathbb{R}$, und sei $p \in P$ ein Häufungspunkt von P . Wie für reellwertige Funktionen definieren wir im Fall der Existenz

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p, x \in P - \{p\}} \frac{f(x) - f(p)}{x - p},$$

und wir verwenden die im Reellen eingeführten Sprechweisen und Bezeichnungen. Zeigen Sie:

- (a) Die komplexe Ableitung ist linear, d. h. im Fall der Differenzierbarkeit von f und g in p gilt für alle $c, d \in \mathbb{C}$.

$$(cf + dg)'(p) = cf'(p) + dg'(p).$$

- (b) Für alle $c \in \mathbb{C}$ gilt:

$$d/dx e^{cx} = c e^x.$$

- (c) Gewinnen Sie aus (a), (b) und der Eulerschen Formel die reellen Ableitungen des Sinus und Kosinus.

[Hinweis zu (b): Zeigen Sie in Analogie zu $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)/x = 1$, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{cx} - 1)/x = c,$$

und folgern Sie (b) mit Hilfe des Additionstheorems.]

Übung 9

Skizzieren Sie eine monoton fallende differenzierbare Funktion $f : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ mit den Eigenschaften:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ existiert nicht.

Zehnte Ergänzungen: Zur Bedeutung der Ableitung

Ergänzungsübung 1

Definieren Sie die Begriffe „ f ist linksseitig differenzierbar in p “ und „ f ist rechtsseitig differenzierbar in p “. Diskutieren Sie Beispiele für diese Begriffe, und geben Sie insbesondere eine stetige Funktion f an, die in einem Punkt p weder linksseitig noch rechtsseitig differenzierbar ist.

Ergänzungsübung 2

Erklären Sie einem Schüler die physikalische Bedeutung von f' als Geschwindigkeit und von f'' als Beschleunigung.

Ergänzungsübung 3

Diskutieren Sie mit Hilfe von aussagekräftigen Diagrammen die anschauliche Bedeutung von

- (a) „der Wertebereich von f' ist ein kleines Intervall $[a, a + \varepsilon]$ “,
- (b) „der Wertebereich von f'' ist ein kleines Intervall $[a, a + \varepsilon]$ “,
- (c) „ f' besitzt eine Nullstelle“, „ f' ändert einmal das Vorzeichen“,
- (d) „ f' besitzt viele Nullstellen“, „ f' ändert oft das Vorzeichen“,
- (e) „ f'' besitzt eine Nullstelle“, „ f'' ändert einmal das Vorzeichen“.

Ergänzungsübung 4

Die erste Ableitung f' beschreibt die Steigung von f , und die zweite Ableitung die Krümmung von f . Versuchen Sie, die anschauliche Bedeutung der dritten Ableitung f''' zu beschreiben, und illustrieren Sie Ihre Erklärung durch Diagramme.

Ergänzungsübung 5

Formulieren und beweisen Sie eine Kettenregel für $h \circ g \circ f$.

Ergänzungsübung 6

Erklären Sie die Form „ $f'g + g'f$ “ der Produktregel durch Linearisierung von f und g .

Ergänzungsübung 7

Die von Leibniz eingeführte df/dx -Notation lässt sich oft zum heuristischen Auffinden oder zur suggestiven Darstellung von Ergebnissen der Differentialrechnung verwenden, indem man df und dx als infinitesimal kleine Größen betrachtet. Können Sie zum Beispiel die Linearisierung einer Funktion f in einem Punkt p , die Linearität der Ableitung, die Produkt- und die Kettenregel mit Hilfe dieser Notation formulieren bzw. begründen?

2. Zur Theorie der Differentiation

Das Leitmotiv dieses Kapitels ist die Untersuchung einer Funktion mit Hilfe ihrer ersten und weiter dann ihrer zweiten Ableitung. Wir entwickeln dieses Motiv, indem wir der natürlichen Frage nach den Stetigkeitseigenschaften der Ableitung nachgehen. Diese Frage führt uns zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung und seinen Anwendungen.

Im zweiten Teil des Kapitels diskutieren wir dann drei weitere Anwendungen der Differentiation, nämlich die Regeln von l'Hospital, die uns in vielen Fällen die Berechnung von Grenzwerten mit Hilfe von Ableitungen ermöglichen, den Begriff der Konvexität einer Funktion und seinen Zusammenhang mit der ersten und zweiten Ableitung, sowie das Newtonsche Iterationsverfahren, das zur Berechnung von Nullstellen bestimmter Funktionen geeignet ist.

Der Mittelwertsatz

Wir beginnen mit dem im letzten Kapitel bereits erwähnten Phänomen, dass bei der Ableitung einer differenzierbaren Funktion die Stetigkeit verloren gehen kann.

Satz (*möglicher Verlust der Stetigkeit der Ableitung*)

Es gibt eine differenzierbare Funktion auf $\mathbb{R}$, deren Ableitung nicht stetig ist. Konkret gilt dies für die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Die Funktion f ist differenzierbar, aber f' ist unstetig im Punkt 0.

Beweis

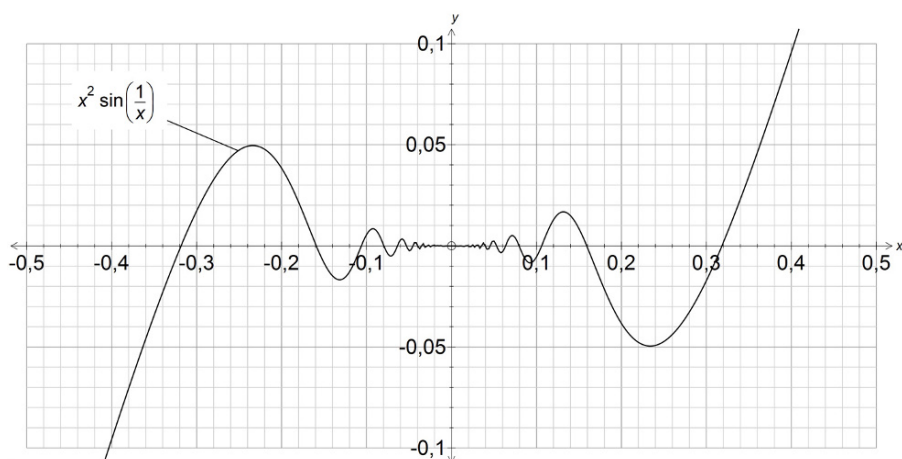
Für alle $x \neq 0$ gilt nach der Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) + x^2 \cos(1/x) (-1/x^2) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x).$$

Im Nullpunkt berechnen wir den Differentialquotienten direkt zu

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(h) - f(0))/h = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin(1/h) = 0.$$

Also ist f differenzierbar. Weiter gilt $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin(1/x) = 0$, aber $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(1/x)$ existiert nicht. Folglich existiert $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} f'(x)$ nicht, und damit ist f' unstetig im Punkt 0.



Die Ableitung f' der Funktion des Satzes besitzt keine einfache Sprungstelle, sondern weist den Unstetigkeitstyp der grenzwertlosen Werteverdichtung in der Umgebung eines Punktes auf. In der Tat gibt es keine Ableitungen mit einfachen Sprüngen, und einige der guten Eigenschaften stetiger Funktionen gelten auch noch für die Ableitung, allen voran ein Analogon zum Nullstellen- und Zwischenwertsatz. Diese guten Eigenschaften sind das Thema der folgenden Sätze. Sie begnügen sich mit der Voraussetzung der Differenzierbarkeit, denn die Stetigkeit der Ableitung wird in vielen Fällen nicht benötigt.

Der Nullstellensatz für eine stetige Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ besagt: Haben $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen, so existiert eine Nullstelle von f . Anschaulich müssen wir auf dem Weg von a nach b irgendwann die x -Achse schneiden. Für eine differenzierbare Funktion f auf einem kompakten Intervall $[a, b]$ ist die folgende Aussage ähnlich anschaulich: Gilt $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$, so beginnt ein durch f beschriebener Höhenweg von $f(a)$ nach $f(b)$ mit einem Anstieg, und er endet mit einem Abstieg. Dazwischen erreichen wir irgendwann eine maximale Höhe, und dort besitzt die Tangente an f die Steigung 0, da wir sonst weiter steigen würden. Also existiert ein $p \in]a, b[$ mit $f'(p) = 0$. Analoge Überlegungen gelten für die andere Vorzeichenwahl der Ableitungen an den Randpunkten. Diese Anschauung lässt sich in der Tat beweisen. Wir beginnen mit der Betrachtung der Tangente in einem Extremwert.

Satz (*Tangentensteigung in Extremwerten*)

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und f nehme in $p \in]a, b[$ ihren maximalen oder minimalen Wert an. Dann gilt $f'(p) = 0$.

Beweis

Wir nehmen zunächst an, dass f in p ihr Maximum annimmt. Dann gilt:

$$f(x) \leq f(p) \quad \text{für alle } x \in]a, b[.$$

Aufgrund der Differenzierbarkeit von f in p gilt dann aber:

$$f'(p) = \lim_{x \uparrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) \geq 0,$$

$$f'(p) = \lim_{x \downarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) \leq 0,$$

denn in der ersten Abschätzung sind alle Differenzenquotienten größer-
gleich 0, während sie in der zweiten Abschätzung kleinergleich 0 sind.

- Also ist $f'(p) = 0$. Der Beweis bei Annahme des Minimums ist analog.

Die offene Form $]a, b[$ des Definitionsbereichs ist wesentlich. Im Beweis haben wir einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Grenzwert herangezogen, um $f'(p) = 0$ zu folgern. Dieses Argument versagt für die Randpunkte des Definitionsbereichs, und der Satz ist ja beispielsweise für die Identität auf $[0, 1]$ nicht richtig. Diese Funktion besitzt ein Minimum in 0 und ein Maximum in 1, aber ihre Ableitung ist konstant gleich 1 und damit frei von Nullstellen. Andererseits ist ein kompakter Definitionsbereich $[a, b]$ wünschenswert, denn wir wissen, dass eine differenzierbare Funktion wie jede stetige Funktion dort ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Der Satz über die Tangentensteigung in Extrema wird mit diesem Wunsch verträglich, wenn wir ausschließen können, dass sich beide Extrema am Rand befinden. In der anschaulichen Argumentation oben haben wir dies durch verschiedene Vorzeichen der Ableitung in den Randpunkten erreicht. Es ist nun leicht, diese Anschauung in einen Beweis zu übersetzen:

Satz (*Nullstellensatz der Differentialrechnung*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und $f'(a)$ und $f'(b)$ haben verschiedene Vorzeichen. Dann existiert ein $p \in]a, b[$ mit $f'(p) = 0$. Genauer gilt dies für jeden Punkt $p \in]a, b[$, in dem die Funktion f ihr Maximum oder Minimum annimmt, und es existiert ein solcher Punkt.

Beweis

Wir behandeln den Fall $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$. Der andere Fall ist analog. Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und nimmt also in einem Punkt p ihr Maximum an. Dann gilt aber $p \neq a$, da sonst $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in [a, b]$ gelten würde, und dann wäre

$$f'(a) = \lim_{x \downarrow a} (f(x) - f(a))/(x - a) \leq 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Analog ist $p \neq b$.

- Also gilt $p \in]a, b[$, und damit gilt $f'(p) = 0$ nach dem obigen Satz.

Wie für stetige Funktionen erhalten wir aus dem Nullstellensatz nun leicht einen allgemeineren Zwischenwertsatz:

Satz (*Zwischenwertsatz der Differentialrechnung*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $y \in \mathbb{R}$ derart, dass y zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ liegt. Dann existiert ein $p \in [a, b]$ mit $f'(p) = y$.

Beweis

Wir definieren $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = f(x) - y \cdot x \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann ist g differenzierbar, und es gilt

$$g'(x) = f'(x) - y \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

- Dann haben aber $g'(a)$ und $g'(b)$ verschiedene Vorzeichen, und daher
 – existiert ein $p \in]a, b[$ mit $g'(p) = 0$, d. h. es gilt $f'(p) = y$.

Wie für die stetigen Funktionen erhalten wir:

Korollar (*Satz von Darboux, Intervallsatz der Differentialrechnung*)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar.

Dann ist der Wertebereich $\{f'(x) \mid x \in I\}$ von f' ein Intervall.

Obwohl also die Ableitung einer Funktion nicht notwendig stetig ist, kann sie keine Werte überspringen! Umgekehrt heißt das, dass zu einer Funktion g , die die Werte überspringt, keine differenzierbare Funktion f mit $f' = g$ existieren kann. Solche sogenannten *Stammfunktionen* f einer Funktion g werden wir in der Integrationstheorie genauer untersuchen. Die hier bewiesenen Sätze zeigen, dass der Nullstellen- und Zwischenwertsatz für jede Funktion g gelten, die auf einem kompakten Intervall definiert ist und eine Stammfunktion besitzt. Wir werden in der Integrationstheorie sehen, dass jede stetige Funktion, aber auch viele andere Funktionen auf einem kompakten Intervall Stammfunktionen besitzen, und damit sind die obigen Sätze echte Verallgemeinerungen des Nullstellen- und des Zwischenwertsatzes für stetige Funktionen.

Der Satz von Rolle und der Mittelwertsatz

Im Nullstellensatz haben wir unterschiedliche Vorzeichen der Ableitung in den Randpunkten a und b eines kompakten Intervalls $[a, b]$ verwendet, um die Existenz eines Extremums im Inneren $]a, b[$ des Intervalls zu erzwingen. Die ebenso einfache wie geistreiche Voraussetzung des folgenden Satzes leistet das Gleiche:

Satz (*Satz von Rolle*)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Weiter sei $f(a) = f(b)$.

Dann existiert ein $p \in]a, b[$ mit $f'(p) = 0$.

Beweis

Die stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nehme ihr Maximum in p und ihr Minimum in $\bar{p}$ an. Gilt $f(p) = f(\bar{p})$, so ist f konstant und damit f' überall gleich 0. Andernfalls gilt wegen $f(a) = f(b)$ aber $p \in]a, b[$ oder $\bar{p} \in]a, b[$, und dann gilt $f'(p) = 0$ oder $f'(\bar{p}) = 0$ nach dem Satz über die Tangenten-

- steigung in Extrema.

Der Satz geht auf den französischen Mathematiker Michel Rolle zurück. Das „e“ wird nicht gesprochen.

In der anschaulichen Formulierung lautet der Satz von Rolle: Beginnt und endet ein Höhenweg mit dem gleichen Wert $f(a) = f(b)$, so ist er entweder ein ebener Spaziergang oder er erreicht sein von $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Minimum oder Maximum, und dort ist die Steigung 0. Der Weg muss in den Randpunkten nicht einmal differenzierbar sein.

Aus dem Satz von Rolle folgt, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion stets eine Nullstelle der Ableitung liegt. Ist f zweimal differenzierbar, so liegen zwischen drei Nullstellen der Funktion zwei Nullstellen der ersten Ableitung und damit eine Nullstelle der zweiten Ableitung, usw.

Der folgende Satz verallgemeinert den Satz von Rolle wieder so, wie der Zwischenwertsatz den Nullstellensatz verallgemeinert:

Satz (*Mittelwertsatz der Differentialrechnung von Lagrange*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.

Dann existiert ein $p \in]a, b[$ mit

$$f'(p) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis

Wir definieren $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Dann ist g differenzierbar in $]a, b[$ und es gilt $g(a) = g(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es also ein $p \in]a, b[$ mit $g'(p) = 0$. Dann gilt aber

$$g'(p) = f'(p) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot 1 = 0,$$

– und damit ist p wie gewünscht.

Der Quotient $(f(b) - f(a))/(b - a)$ ist die mittlere Steigung der Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$. Der Mittelwertsatz bezieht aus dieser Beobachtung seinen Namen, denn er besagt, dass eine differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall in einem gewissen Punkt eine Steigung besitzt, die mit der mittleren Steigung der Funktion übereinstimmt.

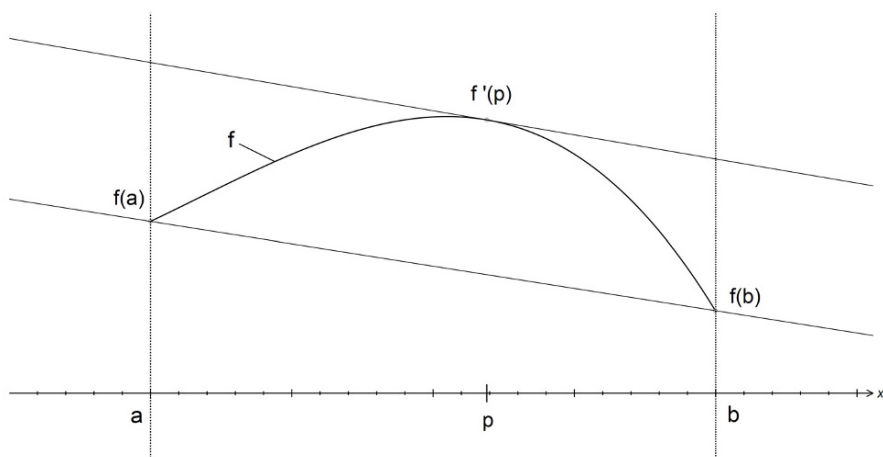


Diagramm zum Mittelwertsatz

Wir diskutieren nun einige Anwendungen des Satzes von Rolle und des Mittelwertsatzes.

Lokale Extrema und Monotonieverhalten

Wir definieren:

Definition (*lokales Maximum, Minimum, Extremum*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$. Dann heißt $(p, f(p)) \in \mathbb{R}^2$ ein *lokales Maximum* von f , falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \leq f(p) \quad \text{für alle } x \in]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap P.$$

Wir sagen dann auch, dass die Funktion f in p ein lokales Maximum besitzt.

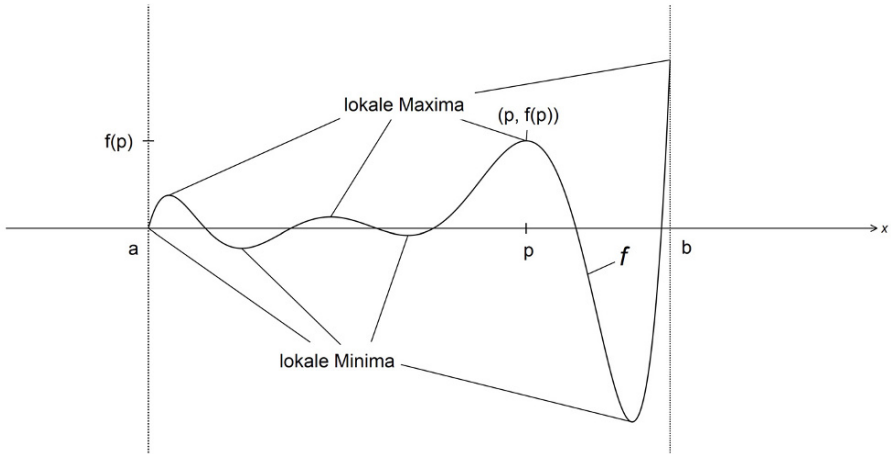
Analog ist ein *lokales Minimum* definiert. Weiter heißt $(p, f(p))$ ein *lokales Extremum*, falls $(p, f(p))$ ein lokales Maximum oder Minimum ist.

Ein lokales Extremum $(p, f(p))$ heißt *strikt*, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert mit

$$f(x) \neq f(p) \quad \text{für alle } x \in]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap P, \quad x \neq p.$$

Ist $(p, f(p))$ ein lokales Extremum von f , so heißt p eine *lokale Extremalstelle* und $f(p)$ ein *lokaler Extremwert* von f . Analog sind *lokale Maximal- und Minimalstellen* und *lokale Maximal- und Minimalwerte* definiert.

Wie in „Nullstelle“ und „Zwischenwertsatz“ verwenden wir also „Stelle“ zur Bezeichnung eines Elements des Definitionsbereichs von f , und „Wert“ zur Bezeichnung eines Elements des Wertebereichs von f . Lokale Extrema fassen wir dagegen als Punkte der Ebene auf, wie es ja auch der Anschauung entspricht: Wer in einem Diagramm von f auf ein lokales Maximum deuten soll, zeigt auf einen Punkt der Form $(p, f(p))$.



Das Diagramm zeigt die lokalen Maxima und Minima einer Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. p ist eine lokale Maximalstelle und $f(p)$ ein lokaler Maximalwert von f .

Die lokalen Extremalstellen des Kosinus sind zum Beispiel genau die ganzzahligen Vielfachen von π . Jedes Extremum ist strikt, und lokale Minimal- und Maximalstellen wechseln sich ab. Ist $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ konstant gleich c , so ist jeder Punkt (p, c) mit $p \in P$ ein lokales Minimum und ein lokales Maximum. Umgekehrt gilt: Ist $(p, f(p))$ ein lokales Maximum und Minimum einer Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, so ist f in einer Umgebung $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap P$ von p konstant.

Der Tangentensatz gilt offenbar auch in der folgenden lokalen Version:

Satz (*notwendige Bedingung für lokale Extrema*)

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $(p, f(p))$ ein lokales Extremum von f . Dann gilt $f'(p) = 0$.

Die Funktion f mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zeigt, dass die Bedingung des Satzes nicht hinreichend ist. Es gilt $f'(0) = 0$, aber der Nullpunkt ist keine lokale Extremalstelle von f . Hinreichende Bedingungen für lokale Extremalstellen liefert uns das in der Ableitung kodierte Monotonieverhalten einer Funktion. Hier gelten die folgenden fundamentalen Zusammenhänge:

Satz (*Vorzeichen der Ableitung und Monotonie der Funktion*)

Sei I ein Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

- (a) $f' \geq 0$ genau dann, wenn f ist monoton steigend.
- (b) $f' \leq 0$ genau dann, wenn f ist monoton fallend.
- (c) $f' > 0$ impliziert f ist streng monoton steigend.
- (d) $f' < 0$ impliziert f ist streng monoton fallend.

Beweis

zu (a): Sei zunächst $f' \geq 0$, und seien $x < y$ zwei Punkte in I . Nach dem Mittelwertsatz existiert ein $p \in]x, y[$ mit

$$f'(p) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Dann ist aber

$$f(y) - f(x) = f'(p)(y - x) \geq 0.$$

Dies zeigt, dass f monoton steigend in I ist.

Sei nun umgekehrt f monoton steigend in I , und sei $p \in I$.

Dann gilt für alle $x \in I$:

$$f(x) - f(p) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } x \geq p, \\ \leq 0, & \text{falls } x \leq p. \end{cases}$$

Damit ist

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \geq 0.$$

zu (b): Analog zu (a).

zu (c): Genau wie im Beweis der Implikation von links nach rechts in Teil (a).

– zu (d): Analog zu (c).

Die Umkehrungen der beiden letzten Aussagen gelten dagegen im Allgemeinen nicht, denn eine streng monotone Funktion kann Nullstellen in ihrer Ableitung aufweisen. Ein Beispiel ist wieder die Funktion f mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die linken Seiten der Aussagen (c) und (d) lassen sich aber in natürlicher Weise so abschwächen, dass eine Äquivalenz entsteht. Wir lassen $f'(x) = 0$ zu, verlangen aber, dass f' die x -Achse nach jeder Berührung gleich wieder verlässt:

Satz (*Vorzeichen der Ableitung und Monotonie der Funktion, Ergänzung*)

Sei I ein Intervall und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

(c') f ist streng monoton steigend *genau dann, wenn*

$f' \geq 0$ und f' ist auf keinem Intervall $[c, d] \subseteq I$, $c < d$, konstant gleich 0.

(d') f ist streng monoton fallend *genau dann, wenn*

$f' \leq 0$ und f' ist auf keinem Intervall $[c, d] \subseteq I$, $c < d$, konstant gleich 0.

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen.

Der Satz ist ein Paradebeispiel für die Analyse einer Funktion mit Hilfe ihrer Ableitung. Das Vorzeichen der Ableitung entspricht der Monotonie der Funk-

tion. Im folgenden Kapitel werden wir einen ganz analog aufgebauten Satz kennenlernen, der die Bedeutung der Monotonie der ersten Ableitung für die Funktion ans Licht bringt. Beide Sätze zusammen beschreiben dann die Bedeutung des Vorzeichenverhaltens der zweiten Ableitung für die Funktion.

Leicht zu zeigen ist nun die folgende oft anwendbare Methode zur Identifizierung lokaler Extrema:

Korollar (*hinreichende Bedingung für lokale Extrema*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Intervall $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subseteq P$, $\varepsilon > 0$.

Dann gilt:

- (a) Ist $f' \geq 0$ in $]p - \varepsilon, p[$ und $f' \leq 0$ in $]p, p + \varepsilon[$, so ist $(p, f(p))$ ein lokales Maximum von f .
- (b) Ist $f' \leq 0$ in $]p - \varepsilon, p[$ und $f' \geq 0$ in $]p, p + \varepsilon[$, so ist $(p, f(p))$ ein lokales Minimum von f .

Gilt in den Voraussetzungen in (a), (b) stärker $>$ statt $\geq$ bzw. $<$ statt $\leq$, so ist das lokale Extremum jeweils strikt.

Beweis

zu (a): Nach dem Satz ist f monoton steigend in $]p - \varepsilon, p[$ und monoton fallend in $]p, p + \varepsilon[$. Aufgrund der Stetigkeit von f in p gelten diese Monotonieeigenschaften dann aber auch in $]p - \varepsilon, p]$ bzw. $[p, p + \varepsilon[$. Dies zeigt die Behauptung.

– zu (b): Analog.

Die gefundenen Bedingungen sind hinreichend, aber auch in kleinen Umgebungen $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\cap P$ einer Extremalstelle p von f nicht notwendig. Wir diskutieren Gegenbeispiele in den Übungen.

Nützlich zur Identifizierung lokaler Extrema ist oft auch die folgende Variante für zweimal differenzierbare Funktionen:

Korollar (*hinreichende Bedingung für lokale Extrema, II*)

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, und sei $p \in]a, b[$ mit $f'(p) = 0$.

Dann gilt:

- (a) Ist $f''(p) < 0$, so ist $(p, f(p))$ ein striktes lokales Maximum von f .
- (b) Ist $f''(p) > 0$, so ist $(p, f(p))$ ein striktes lokales Minimum von f .

Beweis

zu (a): Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x) - f'(p)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{x - p} < 0.$$

Folglich existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$f'(x)/(x - p) < 0 \quad \text{für alle } x \in]p - \varepsilon, p + \varepsilon[, x \neq p.$$

Dann gilt aber $f' > 0$ in $]p - \varepsilon, p[$ und $f' < 0$ in $]p, p + \varepsilon[$. Aus dem letzten Korollar folgt dann die Behauptung.

– *zu (b): Analog.*

Auch hier haben wir kein notwendiges Kriterium vorliegen. Die Funktion f mit $f(x) = x^4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ besitzt zum Beispiel im Nullpunkt ein striktes Minimum, aber es gilt $f''(0) = 0$. In diesem Fall ist dagegen das obige Korollar anwendbar, da die Ableitung $d/dx f(x) = 4x^3$ links der Null negativ und rechts der Null positiv ist.

Die Lösungen der Differentialgleichung $f' = f$

Anschaulich ist klar, dass die Konstanz einer Funktion und das Verschwinden ihrer ersten Ableitung ein und dasselbe sind. Wer aber einmal versucht hat, aus dem Verschwinden der Ableitung die Konstanz der Funktion streng herzuleiten, wird die Eleganz des Mittelwertsatzes spätestens jetzt schätzen lernen:

Satz (*Charakterisierung der konstanten Funktionen*)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind äquivalent:

- (a) $f' = 0$.
- (b) f ist konstant.

Beweis

(a) impliziert (b):

Seien $x < y$ zwei Punkte in I . Nach dem Mittelwertsatz ist dann der Differenzenquotient $(f(y) - f(x))/(y - x)$ ein Wert der Ableitung, also gleich 0. Damit ist also $f(x) = f(y)$ für alle $x < y$ in I .

(b) impliziert (a):

– Ist klar.

Korollar (*Funktionen mit gleicher Ableitung*)

Sei I ein Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Es gelte $f' = g'$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = g(x) + c \quad \text{für alle } x \in I.$$

Insbesondere gilt $f = g$, falls f und g in einem Punkt übereinstimmen.

Beweis

– Die Aussage ergibt sich durch Anwendung des Satzes auf $h = f - g$.

Der Charakterisierungssatz besitzt eine überraschend starke Anwendung:

Korollar (die Lösungen von $f' = f$)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft $f' = f$.
Dann gilt $f = c \exp$, wobei $c = f(0)$.

Insbesondere ist die reelle Exponentialfunktion also durch die beiden Eigenschaften $\exp' = \exp$ und $\exp(0) = 1$ eindeutig bestimmt.

Beweis

Wir definieren $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = f(x) \cdot e^{-x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist g differenzierbar, und nach der Produktregel und $f' = f$ gilt

$$g'(x) = f'(x) \cdot e^{-x} - f(x) e^{-x} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also existiert ein $d \in \mathbb{R}$, sodass g konstant gleich d ist. Dann gilt aber

$$f(x) = d e^x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

- Wegen $f(0) = c$ und $e^0 = 1$ ist dann aber $d = c$.

Varianten diskutieren wir in den Übungen.

Lipschitz-Stetigkeit differenzierbarer Funktionen

Da die Ableitung f' das lokale Steigungsverhalten einer Funktion f beschreibt, ist anschaulich klar, dass Funktionen mit kleinen Ableitungen nicht besonders schnell steigen oder fallen können. Der Mittelwertsatz liefert leicht eine Präzisierung dieser Anschauung. Sie ist ein Paradebeispiel dafür, wie das lokale Verhalten zu Aussagen über das globale Verhalten einer Funktion führen kann:

Satz (Schränkensatz, Lipschitz-Stetigkeit bei Beschränktheit der Ableitung)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter sei f' beschränkt durch $L \in \mathbb{R}$, d. h. es gelte $|f'(x)| \leq L$ für alle $x \in I$. Dann gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \text{für alle } x, y \in I,$$

d. h. f ist Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten L .

Beweis

Für alle $x < y$ in I gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $p \in [x, y]$ mit

$$f'(p) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Dann ist aber

- $|f(x) - f(y)| = |f'(p)| |x - y| \leq L |x - y|.$

Es gilt folgende Umkehrung für beliebige Definitionsbereiche:

Satz (*Beschränktheit der Ableitung bei Lipschitz-Stetigkeit*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und Lipschitz-stetig mit einer Lipschitz-Konstanten L . Dann ist f' beschränkt durch L .

Beweis

Sei $p \in P$. Nach Voraussetzung gilt dann

$$|(f(x) - f(p))/(x - p)| \leq L \quad \text{für alle } x \in P - \{p\}.$$

Damit ist dann aber auch

$$\text{— } |f'(p)| = |\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p)| \leq L.$$

Aus dem Schrankensatz folgt, dass eine stetig differenzierbare Funktion auf einem kompakten Intervall die stärkste Form der Stetigkeit erfüllt, die wir betrachtet haben:

Korollar (*Differenzierbarkeit und Lipschitz-Stetigkeit*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist f Lipschitz-stetig. Jede Schranke L für f' ist eine Lipschitz-Konstante für f .

Beweis

Ist f' stetig, so nimmt f' auf $[a, b]$ ihr Maximum und ihr Minimum an und

— ist daher beschränkt. Der Rest folgt aus dem Schrankensatz.

Weitere Anwendungen der Differentiation

Die Regeln von l'Hospital

Bei der Berechnung von Grenzwerten der Form $\lim_{x \rightarrow p} f(x)/g(x)$ tritt oftmals einer der nicht definierten Fälle „0/0“, „ ∞/∞ “ oder „ $-\infty/-\infty$ “ auf, etwa in

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)/x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x)/(x \sin x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log(x)/x^a \quad \text{für ein } a > 0.$$

Zur Berechnung dieser problematischen Grenzwerte ist im Fall der Differenzierbarkeit nicht selten der Übergang zu den Ableitungen f' und g' hilfreich. Wir betrachten zur Motivation die Situation „ $\lim_{x \rightarrow p} f(x)/g(x) = 0/0$ “ für differenzierbare Funktionen $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$; der Punkt p ist typischerweise ein Randpunkt des Definitionsbereichs P , und auch der uneigentliche Grenzwert $p = \infty$ ist zugelassen. Für alle $x \in P$ schreiben wir wie im Approximationssatz:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y - x) + r(y),$$

$$g(y) = g(x) + g'(x)(y - x) + s(y) \quad \text{für alle } y \in P.$$

Nach Voraussetzung werden in unserem Grenzwertprozess die Werte $f(x)$ und $g(x)$ beliebig klein. Liegt weiter y nahe bei x , so können wir neben $f(x)$ und $g(x)$ auch noch die Reste $r(y)$ und $s(y)$ vernachlässigen, und wir erhalten dann

$$f(y)/g(y) \text{ wird approximiert durch } f'(x)/g'(x) \text{ bei } y \rightarrow x.$$

Aufgrund der Stetigkeit von f und g liegt weiter $f(x)/g(x)$ nahe bei $f(y)/g(y)$. Diese Überlegungen führen uns dazu, anstelle des Grenzwerts $\lim_{x \rightarrow p} f(x)/g(x)$ den hoffentlich einfacheren Grenzwert $\lim_{x \rightarrow p} f'(x)/g'(x)$ zu untersuchen. Ein Beispiel hierfür ist der oben bereits bestimmte Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (\sin x)/x = 1.$$

Differenzieren wir hier Nenner und Zähler, so erhalten wir ebenfalls

$$\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (d/dx \sin x)/(d/dx x) = \lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} (\cos x)/1 = 1,$$

und die Berechnung ist einfach und unproblematisch geworden.

Wir zeigen nun, dass dieses Vorgehen unter bestimmten Bedingungen gerechtfertigt ist. Das entscheidende Hilfsmittel im Beweis ist eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes. Der Mittelwertsatz liefert uns für differenzierbare Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ein $p \in]a, b[$ mit

$$f'(p) = (f(b) - f(a))/(b - a).$$

Diese Gleichung können wir auch als

$$f'(p) (\text{id}(b) - \text{id}(a)) = \text{id}'(p) (f(b) - f(a))$$

notieren, mit der Identität $\text{id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{id}(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Diese Form erlaubt dann die folgende symmetrische Verallgemeinerung, die eine zweite Funktion g ins Spiel bringt:

Satz (*allgemeiner Mittelwertsatz der Differentialrechnung*)

Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar.

Dann existiert ein $p \in]a, b[$ mit

$$(f(b) - f(a)) g'(p) = (g(b) - g(a)) f'(p).$$

Beweis

Wir definieren $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$h(x) = (f(b) - f(a)) g(x) - (g(b) - g(a)) f(x).$$

Dann ist h differenzierbar in $]a, b[$ und es gilt

$$h(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) = h(b).$$

Nach dem Satz von Rolle existiert also ein $p \in]a, b[$ mit $h'(p) = 0$.

Dann gilt aber wie gewünscht, dass

$$- (f(b) - f(a)) g'(p) - (g(b) - g(a)) f'(p) = 0.$$

Damit können wir nun die beiden Regeln von l'Hospital beweisen.

Satz (*erste Regel von l'Hospital, Fall „0/0“*)

Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty < a < b \leq \infty$, differenzierbar. Es gelte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0,$$

$$(b) g'(x) \neq 0 \text{ für alle } x \in]a, b[, \text{ und es existiere}$$

$$c = \lim_{x \rightarrow b} f'(x)/g'(x), \text{ mit } c \in [-\infty, \infty].$$

Dann gilt $c = \lim_{x \rightarrow b} f(x)/g(x)$.

Eine analoge Aussage gilt für den Grenzübergang „ $\lim_{x \rightarrow a}$ “.

Beweis

Wir beginnen mit einigen einfachen Beobachtungen. Da g' keine Nullstelle besitzt, gilt nach dem Nullstellensatz der Differentialrechnung $g' > 0$ oder $g' < 0$. Im ersten Fall ist g streng monoton steigend, im zweiten Fall streng monoton fallend. Insbesondere kann g höchstens eine Nullstelle besitzen, und Limesbildungen gegen Randpunkte mit g im Nenner sind unproblematisch. Wegen (a) hat g als streng monoton gegen 0 konvergierende Funktion aber sogar gar keine Nullstelle in $]a, b[$.

1. Fall: $b < \infty$.

Nach (a) können wir f und g stetig durch „ $f(b) = g(b) = 0$ “ nach $]a, b[$ fortsetzen. Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es dann für alle $x \in]a, b[$ ein $p \in]x, b[$ mit

$$(+)\quad f'(p)/g'(p) = (f(b) - f(x))/(g(b) - g(x)) = f(x)/g(x).$$

Dann ist aber

$$\lim_{x \rightarrow b} f(x)/g(x) = \lim_{p \rightarrow b} f'(p)/g'(p) = c.$$

Denn gilt $\lim_n x_n = b$ für eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $]a, b[$, so gibt es nach (+) $p_n \in]x_n, b[$ mit

$$f'(p_n)/g'(p_n) = f(x_n)/g(x_n) \quad \text{für alle } n.$$

Dann gilt aber $\lim_n p_n = b$, und damit ist

$$\lim_n f(x_n)/g(x_n) = \lim_n f'(p_n)/g'(p_n) = c.$$

Die analoge Aussage für „ $\lim_{x \rightarrow a}$ “ mit $a > -\infty$ wird ebenso bewiesen.

Damit können wir dann einen unendlichen rechten Randpunkt behandeln:

2. Fall: $b = \infty$.

Ohne Einschränkung sei $a > 0$. Wir betrachten $h :]0, 1/a[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = 1/x$ für alle x , und setzen

$$f^* = f \circ h, \quad g^* = g \circ h.$$

Dann sind $f^*, g^* :]0, 1/a[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g^*(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^{**}(x)/g^{**}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(1/x)/g'(1/x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)/g'(x) = c,$$

wobei sich im ersten Schritt die nachdifferenzierten Nenner „ $-1/x^2$ “ wegekürzen. Nach dem bereits Bewiesenen ist also

$$\lim_{x \rightarrow 0} f^*(x)/g^*(x) = c,$$

und damit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f^*(x)/g^*(x) = c.$$

— Ebenso zeigt man die analoge Aussage für „ $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ “.

Die zweite ganz ähnliche Regel erlaubt die Behandlung von Grenzwerten der Form „ $\pm \infty / \pm \infty$ “. Dabei genügt als Voraussetzung, dass der Nenner uneigentlich gegen unendlich konvergiert:

Satz (zweite Regel von l'Hospital, Fall „ ∞/∞ “)

Seien $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, differenzierbar. Es gelte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty.$$

$$(b) g'(x) \neq 0 \quad \text{für alle } x \in]a, b[, \text{ und es existiere}$$

$$c = \lim_{x \rightarrow b} f'(x)/g'(x), \quad \text{mit } c \in [-\infty, \infty].$$

Dann gilt $c = \lim_{x \rightarrow b} f(x)/g(x)$.

Eine analoge Aussage gilt für den Grenzübergang „ $\lim_{x \rightarrow a}$ “.

Beweis

Wir nehmen $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$ an; der Fall $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = -\infty$ ist analog.
Wir zeigen:

$$(+)\quad \forall c_0 < c \exists b_0 < b \forall x \in]b_0, b[\quad f(x)/g(x) > c_0.$$

Beweis von (+)

Sei $c_0 < c$. Weiter sei c_1 mit $c_0 < c_1 < c$. Wegen $\lim_{x \rightarrow b} f'(x)/g'(x) = c$ gibt es ein $b_1 < b$ mit:

$$f'(p)/g'(p) > c_1 \quad \text{für alle } p \in]b_1, b[.$$

Nach dem verallgemeinerten Mittelwertsatz gibt es für alle $y < x$ in $]b_1, b[$ ein $p \in]y, x[$, sodass

$$f(x) - f(y) = f'(p)/g'(p) \cdot (g(x) - g(y)) > c_1 \cdot (g(x) - g(y)).$$

Durch eine Vergrößerung von b_1 können wir $g(x) > 0$ für alle $x \in]b_1, b[$ annehmen. Dann gilt für alle $y < x$ in $]b_1, b[$

$$f(x)/g(x) > c_1 - c_1 g(y)/g(x) + f(y)/g(x).$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$ ist die rechte Seite dieser Ungleichung für alle hinreichend großen x in $]b_1, b[$ größer als $c_0 < c_1$. Dies zeigt (+).

Vollkommen analog gilt:

$$(++)\quad \forall c_0 > c \exists b_0 < b \forall x \in]b_0, b[\quad f(x)/g(x) < c_0.$$

Die Aussage des Satzes folgt nun aus (+) im Fall $c = \infty$, aus (++) im Fall $c = -\infty$ und aus (+) und (++) für $c \in \mathbb{R}$.

Das Muster dieses Beweises lässt sich auch anwenden, um die erste Regel zu beweisen. Eine Fallunterscheidung in „ $b < \infty$ “ und „ $b = \infty$ “ kann dann entfallen. Die Ersetzung der Konvergenz „ $x \rightarrow \infty$ “ durch „ $1/x \downarrow 0$ “ im Beweis der ersten Regel oben verdient es aber, einmal vorgeführt zu werden.

Nach der ersten Regel ist also die obige Rechnung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x)/1 = 1$$

legitim. Im folgenden Beispiel wird die erste Regel von l'Hospital sogar zweimal angewendet.

Beispiel

Sowohl $1/\sin x$ als auch $1/x$ konvergieren gegen ∞ , wenn x von oben gegen 0 konvergiert. Mit Hilfe der Regel von l'Hospital können wir zeigen, dass die Differenz $1/\sin x - 1/x$ gegen 0 konvergiert, was bei „ $\infty - \infty$ “ ja keineswegs selbstverständlich ist. (Der Leser betrachte etwa $1/x^2 - 1/x$.) Es gilt

$$1/\sin x - 1/x = (x - \sin x)/(x \sin x).$$

Nach der ersten Regel gilt

$$\lim_{x \downarrow 0} (x - \sin x)/(x \sin x) = \lim_{x \downarrow 0} (1 - \cos x)/(\sin x + x \cos x),$$

vorausgesetzt, der Grenzwert rechts existiert. Den rechten Grenzwert können wir aber durch eine erneute Anwendung der ersten Regel weiter untersuchen. Dadurch ergibt sich:

$$\lim_{x \downarrow 0} (1 - \cos x)/(\sin x + x \cos x) = \lim_{x \downarrow 0} \sin x/(2 \cos x - x \sin x) = 0/2 = 0.$$

Analoges gilt für „ $x \uparrow 0$ “, und damit haben wir insgesamt gezeigt, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1/\sin x - 1/x) = 0.$$

Der Iteration der Anwendung der l'Hospitalschen Regeln sind aber auch Grenzen gesetzt. Aus rechnerischer Sicht können die Ableitungsterme sehr schnell kompliziert werden, und auch aus theoretischer Sicht kann das Ziel manchmal gar nicht erreicht werden. Betrachten wir zum Beispiel den Tangens Hyperbolicus $\tanh = \sinh/\cosh$, so ist $\sinh x/\cosh x$ vom Typ „ ∞/∞ “ für „ $x \rightarrow \infty$ “. Bei der iterierten Anwendung der zweiten Regel drehen wir uns allerdings wegen $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ im Kreis:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x/\cosh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x/\sinh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x/\cosh x = \dots$$

Die Regel liefert hier also nicht das gewünschte Ergebnis

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x/\cosh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \tanh x = 1.$$

Krümmungsverhalten

Betrachten wir den Graphen einer „typischen“ Funktion, so fällt neben dem Vorzeichen- und Monotonieverhalten das Krümmungsverhalten ins Auge. Anschaulich ist klar, dass eine lokale Änderung der Steigung einer Funktion eine lokale Änderung der Krümmung der Funktion bewirkt. Diese Anschauung wollen wir im Folgenden präzisieren und mathematisch untermauern. Grob gesprochen wird sich ergeben, dass dem Trio „Vorzeichen, Monotonie, Krümmung“ das Trio „ f , f' , f'' “ entspricht, und dass Änderungen des Vorzeichens, der Monotonie und der Krümmung sich in Nullstellen von f , f' , f'' niederschlagen. Damit setzen wir die Untersuchungen fort, die wir oben bereits für die Monotonie und die Ableitung durchgeführt haben.

Die Krümmung einer Funktion ist anschaulich durch „linksgekrümmt“ und „rechtsgekrümmt“ so beschrieben, wie die Monotonie durch „steigend“ und „fallend“. Die mathematische Präzisierung der Monotonie ist durch die Bedingungen „ $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \leq y$ “ bzw. „ $f(x) \geq f(y)$ für alle $x \leq y$ “ einfach möglich. Die Präzisierung der Krümmung verläuft wie folgt: Wir nennen eine Funktion konvex oder linksgekrümmt, wenn für je zwei Punkte des Graphen von f die diese Punkte verbindende Sekante überall oberhalb des Graphen von f verläuft. Analog heißt f konkav oder rechtsgekrümmt, wenn diese Sekante stets unterhalb des Graphen liegt. Für alle $x_1 < x_2$ ist die Sekante durch $(x_1, f(x_1))$ und $(x_2, f(x_2))$ ein Stück der Geraden $g_{a, x_1, f(x_1)}$ mit der Steigung $a = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1)$. Damit definieren wir:

Definition (*konvex, konkav, streng konvex, streng konkav, $a(x_1, x_2)$*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt f *konvex*, falls für alle $x_1 < x_2$ in I und alle $x \in]x_1, x_2[$ gilt:

$$(+)\quad f(x) \leq f(x_1) + a(x_1, x_2)(x - x_1),$$

wobei

$$a(x_1, x_2) = a_f(x_1, x_2) = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1).$$

Gilt in (+) „ $\geq$ “, so heißt die Funktion f *konkav*. Schließlich heißt f *streng konvex* bzw. *streng konkav*, falls in (+) „ $<$ “ bzw. „ $>$ “ gilt.

Die Exponentialfunktion und die Potenzfunktion $f(x) = x^2$ sind zum Beispiel konvex, während $\log$ und $g(x) = \sqrt{x}$ konkav sind. Leicht zu sehen ist weiter, dass eine Funktion f genau dann konvex ist, wenn $-f$ konkav ist.

Die Bedingung (+) können wir auch so schreiben:

$$f \leq g_{a(x_1, x_2), x_1, f(x_1)} \text{ auf }]x_1, x_2[\quad \text{für alle } x_1 < x_2 \text{ in } I.$$

Leicht zu sehen ist, dass außerhalb von $]x_1, x_2[$ die andere Ungleichung gelten muss:

Satz (*Sekantenvergleich für konvexe und konkave Funktionen*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt für alle $x_1 < x_2$ in I :

$$f(x) \geq g_{a(x_1, x_2), x_1, f(x_1)}(x) \quad \text{für alle } x \in I - [x_1, x_2].$$

Ist f streng konvex, so gilt $>$ in dieser Ungleichung. Analoge Aussagen gelten für konkave und streng konkave Funktionen.

Der Beweis kann dem Leser überlassen bleiben.

Für unsere Untersuchungen ist ein Steigungskriterium der Konvexität nützlich, das auf der folgenden ebenso anschaulichen wie rechnerisch einfachen Beobachtung ruht: Sind g_1 und g_2 zwei Geraden mit der Steigung a_1 bzw. a_2 , die durch einen gemeinsamen Punkt (p, q) laufen, so gilt $a_1 \geq a_2$ genau dann, wenn $g_1(x) \geq g_2(x)$ für alle $x > p$ gilt (und genau dann, wenn $g_1(x) \leq g_2(x)$ für alle $x < p$). Weiter kann in dieser Äquivalenz „für alle $x > p$ “ durch „für ein $x > p$ “ ersetzt werden. Damit können wir leicht zeigen:

Satz (*Steigungskriterium für Konvexität*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist konvex.

(b) $a(x_1, x_2) \leq a(x_1, x_3) \leq a(x_2, x_3)$ für alle $x_1 < x_2 < x_3$ in I .

(c) $a(x_1, x_2) \leq a(x_2, x_3)$ für alle $x_1 < x_2 < x_3$ in I .

Analoge Aussagen gelten für streng konvexe, konkave und streng konkave Funktionen mit $<$, $\geq$, bzw. $>$ statt $\leq$ in (b) und (c).

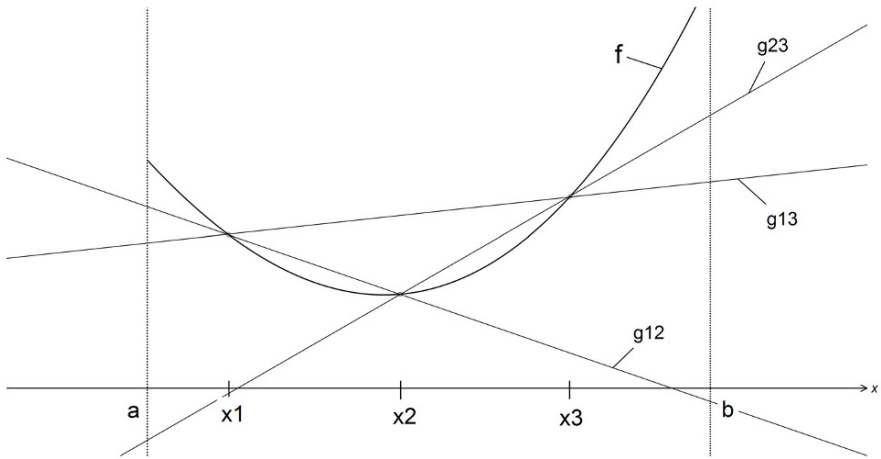


Diagramm zum Steigungskriterium

Beweis

Im Folgenden sei g_{ij} die Gerade durch $(x_i, f(x_i))$ und $(x_j, f(x_j))$ für $1 \leq i < j \leq 3$. Insbesondere besitzt also g_{ij} die Steigung $a(x_i, x_j)$.

(a) impliziert (b):

Seien $x_1 < x_2 < x_3$ in I . Es gilt

$$g_{12}(x_1) = g_{13}(x_1) \text{ und } g_{12}(x_2) = f(x_2) \leq g_{13}(x_2),$$

letzteres nach Konvexität von f . Also ist $a(x_1, x_2) \leq a(x_1, x_3)$.

Die zweite Ungleichung ergibt sich analog.

(b) impliziert (c):

Ist trivial.

(c) impliziert (a):

Seien $x_1 < x_2 < x_3$. Wegen $a(x_1, x_2) \leq a(x_2, x_3)$ gilt

$$g_{12}(x_3) \leq g_{23}(x_3) = g_{13}(x_3).$$

Folglich ist $a(x_1, x_2) \leq a(x_1, x_3)$, und damit ist

$$f(x_2) = g_{12}(x_2) \leq g_{13}(x_2).$$

— Dies zeigt, dass f konvex ist.

Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so sind die Differenzenquotienten

$$a(x, y) = (f(x) - f(y))/(x - y), \quad x, y \in I, \quad x < y,$$

also monoton steigend in beiden Komponenten x und y . Damit gilt:

Korollar (*Differenzierbarkeitseigenschaften konvexer und konkaver Funktionen*)

Sei $f:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ konvex, und sei $p \in]c, d[$. Dann existieren die Grenzwerte

$$-\infty < \lim_{x \uparrow p} a(x, p) \leq \lim_{x \downarrow p} a(p, x) < \infty,$$

d.h. f ist an der Stelle p linksseitig und rechtsseitig differenzierbar.

Die Differenzenquotienten konvergieren dabei monoton steigend von links und monoton fallend von rechts. Ist f streng konvex, so gilt hier strenge Monotonie. Analoge Eigenschaften gelten für konkave Funktionen.

Ist $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so existieren zudem eigentlich oder uneigentlich

$$-\infty \leq \lim_{x \downarrow c} a(c, x) \leq \lim_{x \uparrow d} a(x, d) \leq \infty.$$

Der konvexe Halbkreis $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ zeigt, dass die uneigentliche Konvergenz in den Randpunkten eintreten kann.

Aus den Monotonieeigenschaften der Differenzenquotienten $a(x_1, x_2)$ erhalten wir weiter das folgende sehr anschauliche Kriterium der Konvexität:

Korollar (*Geraden- und Tangentenkriterium für Konvexität und Konkavität*)

Sei $f:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(a) f ist konvex.

(b) Für alle $p \in]c, d[$ existiert eine Gerade g durch $(p, f(p))$ mit $g \leq f$.

Genauer ist dann für alle $p \in]c, d[$ jede Gerade $g_{a, p, f(p)}$ wie in (b), falls

$$\lim_{x \uparrow p} a(x, p) \leq a \leq \lim_{x \downarrow p} a(p, x).$$

Ist f differenzierbar, so ist f genau dann konvex, wenn f größer gleich jeder ihrer Tangenten $g_{f'(p), p, f(p)}$ ist.

Analoge Aussagen gelten für konkave Funktionen und für die strengen Versionen (mit $g(x) < f(x)$ bzw. $g(x) > f(x)$ für alle $x \neq p$ in (b)).

Beweis

(a) impliziert (b):

Sei also f konvex, und sei $p \in]c, d[$. Dann ist

$$a_1 = \lim_{x \uparrow p} a(x, p) \leq \lim_{x \downarrow p} a(p, x) = a_2.$$

Ist nun $x \in]c, p[$ beliebig, so hat die Gerade $g_{a(x, p), x, f(x)}$ durch $(x, f(x))$ und $(p, f(p))$ eine Steigung kleiner gleich der Steigung von $g_{a_1, p, f(p)}$.

Damit gilt $g_{a_1, p, f(p)}(x) \leq g_{a(x, p), x, f(x)}(x) = f(x)$. Dies zeigt, dass

$$f(x) \geq g_{a_1, p, f(p)}(x) \quad \text{für alle } x \in]c, p[.$$

Eine analoge Argumentation liefert, dass

$$f(x) \geq g_{a_2, p, f(p)}(x) \quad \text{für alle } x \in]p, d[.$$

Dies zeigt die Aussage (b) und den Zusatz über die Steigungen.

Ist f differenzierbar in p , so gilt $a_1 = a_2 = f'(p)$, und damit ist
 $g_{f'(p), p, f(p)} = g_{a_1, p, f(p)} \leq f$.

(b) *impliziert (a)*:

Seien $x_1 < p < x_2$ in $[c, d]$. Sei $g \leq f$ eine Gerade durch $(p, f(p))$. Dann gilt $f(p) \leq g_{a(x_1, x_2), x_1, f(x_1)}(p)$, da andernfalls $g(x_1) > f(x_1)$ oder $g(x_2) > f(x_2)$ gelten müsste (!). Also ist f konvex.

Der Satz gilt auch für Funktionen $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, falls $\lim_{x \downarrow c} a(c, x) > -\infty$ und $\lim_{x \uparrow d} a(x, d) < \infty$.

Als nächstes zeigen wir mit Hilfe des Steigungskriteriums, dass sich die Krümmung zur Monotonie der ersten Ableitung genau so verhält wie die Monotonie zum Vorzeichen der ersten Ableitung:

Satz (*Monotonie der Ableitung und Konvexität*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt:

- (a) f' ist monoton wachsend *genau dann, wenn* f ist konvex.
- (b) f' ist streng monoton wachsend *genau dann, wenn* f ist streng konvex.
- (c) f' ist monoton fallend *genau dann, wenn* f ist konkav.
- (d) f' ist streng monoton fallend *genau dann, wenn* f ist streng konkav.

Beweis

zu (a): Sei zunächst f' monoton wachsend. Wir weisen die Bedingung (c) des Steigungskriteriums nach. Seien also $x_1 < x_2 < x_3$ in I . Nach dem Mittelwertsatz existieren $p_1 \in]x_1, x_2[$ und $p_2 \in]x_2, x_3[$ mit

$$f'(p_1) = a(x_1, x_2), \quad f'(p_2) = a(x_2, x_3).$$

Dann gilt $p_1 < p_2$ und damit $f'(p_1) \leq f'(p_2)$ nach Monotonie von f' .

Sei nun umgekehrt f konvex, und seien $x_1 < x_3$ in I . Für alle $x \in]x_1, x_3[$ ist $a(x_1, x) \leq a(x, x_3)$ nach dem Steigungskriterium. Also ist

$$f'(x_1) = \inf_{x \in]x_1, x_3[} a(x_1, x) \leq \sup_{x \in]x_1, x_3[} a(x, x_3) = f'(x_3).$$

Folglich ist $f'(x_1) \leq f'(x_3)$. Also ist f' monoton steigend.

– zu (b), (c) und (d): Analog.

Zusammenfassend haben wir also bewiesen:

Vorzeichen von f' *kodiert* Monotonie von f ,
 Monotonie von f' *kodiert* Krümmung von f .

Kombiniert erhalten wir:

Vorzeichen von f'' *kodiert* Krümmung von f .

Genauer gilt:

Korollar (*zweite Ableitung und Konvexität*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann gilt:

- (a) $f'' \geq 0$ *genau dann, wenn* f ist konvex.
- (b) $f'' \leq 0$ *genau dann, wenn* f ist konkav.
- (c) $f'' > 0$ *impliziert* f ist streng konvex.
- (d) $f'' < 0$ *impliziert* f ist streng konkav.

Beweis

Die Aussagen ergeben sich durch Zusammenschau des obigen Satzes und – des Satzes über das Vorzeichen der Ableitung und der Monotonie.

Wir definieren in diesem Zusammenhang schließlich noch:

Definition (*Wendestelle, Wendepunkt*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt ein $p \in I$ eine *Wendestelle* und $(p, f(p))$ ein *Wendepunkt* von f , falls für ein $\varepsilon > 0$ mit $]p - \varepsilon, p + \varepsilon[\subseteq I$ eine der beiden folgenden Aussagen gilt:

- (a) f ist konvex in $]p - \varepsilon, p[$ und konkav in $]p, p + \varepsilon[$.
- (b) f ist konkav in $]p - \varepsilon, p[$ und konvex in $]p, p + \varepsilon[$.

Das Korollar liefert für zweimal differenzierbare Funktionen eine Möglichkeit zur Identifizierung von Wendepunkten. Für zweimal stetig differenzierbare Funktionen ist dann weiter „ $f''(p) = 0$ “ eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für das Vorliegen einer Wendestelle p .

Die λ -Formulierung der Konvexität

Wir diskutieren schließlich noch eine weitere Formulierung der Konvexität, die oft sogar zur Definition verwendet wird. Hierzu nutzen wir, dass jedes Intervall $]x_1, x_2[$ die *baryzentrische Darstellung*

$$]x_1, x_2[= \{ \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \mid 0 < \lambda < 1 \}$$

besitzt. Diese Darstellung führt zu:

Satz (*λ -Formulierung der Konvexität und Konkavität*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- (a) f ist konvex.
- (b) Für alle $x_1 < x_2$ in I und alle $\lambda \in]0, 1[$ gilt:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

Eine analoge Äquivalenz gilt für konkave Funktionen und weiter für die strengen Versionen der Konvexität und Konkavität.

Beweis

Seien $x_1 < x_2$ in I , und sei $d = x_2 - x_1$. In der Konvexität bzw. Konkavität vergleichen wir $f(x)$ mit $f(x_1) + a(x - x_1)$ mit $a = (f(x_2) - f(x_1))/d$. Zum Vergleich bei baryzentrischer Darstellung eines $x \in I$ formen wir die Geradendarstellung so um, dass sie als eine Linearkombination von $f(x_1)$ und $f(x_2)$ erscheint:

$$\begin{aligned} f(x_1) + (f(x_2) - f(x_1))/d (x - x_1) &= \\ (1 - (x - x_1)/d) f(x_1) + (x - x_1)/d f(x_2) &= \\ (x_2 - x)/d f(x_1) + (x - x_1)/d f(x_2). \end{aligned}$$

Setzen wir hier für x den Term $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ ein, so erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} x_2 - x &= x_2 - \lambda x_1 - (1 - \lambda) x_2 = \lambda (x_2 - x_1) = \lambda d, \\ x - x_1 &= \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 - x_1 = (1 - \lambda) (x_2 - x_1) = (1 - \lambda) d \end{aligned}$$

den Term

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2).$$

— Hieraus folgen alle Behauptungen.

Aus dem Beweis extrahieren wir die folgende Darstellung einer Geraden g , die durch zwei Punkte (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , $x_1 < x_2$, der Ebene verläuft:

Korollar (*Zweipunktdarstellung einer Geraden*)

Seien (x_1, y_1) , (x_2, y_2) zwei Punkte mit $x_1 < x_2$. Sei $d = x_2 - x_1$ und

$$g(x) = (x_2 - x)/d y_1 + (x - x_1)/d y_2 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $g = g_{a, x_1, y_1}$ mit $a = (y_2 - y_1)/d$.

Statt der Rechnung im Beweis oben kann man alternativ auch so argumentieren: Die Funktion g im Korollar ist offenbar eine Gerade, und sie verläuft durch die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) . Damit muss $g = g_{a, x_1, y_1}$ für $a = (y_2 - y_1)/d$ gelten. Auch die Form von g lässt sich ohne Rechnung „erraten“, da die Koeffizienten von y_1 und y_2 bei Einsetzen von x_1 bzw. x_2 für x jeweils ein 0-1-Paar ergeben müssen.

Die λ -Formulierung der Konvexität erlaubt folgende Verallgemeinerung:

Satz (*Jensensche Ungleichung*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in I$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Ist f streng konvex, so gilt hier Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$.

Eine analoge Aussage (mit „ $\geq$ “ statt „ $\leq$ “) gilt für konkave Funktionen.

Der Beweis sei dem Leser zur Übung überlassen. Als Anwendung der Jensen-schen Ungleichung zeigen wir hier noch:

Satz (*arithmetisches und geometrisches Mittel*)

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_n > 0$:

$$x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n.$$

Speziell ist also das geometrische Mittel kleinergleich dem arithmetischen Mittel von $x_1, \dots, x_n$, d. h.

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq (x_1 + \dots + x_n)/n.$$

Beweis

Seien $x_1, \dots, x_n > 0$. Dann gilt

$$\log(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 \log(x_1) + \dots + \lambda_n \log(x_n)$$

aufgrund der Konkavität des Logarithmus. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion ist dann

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n &= \exp(\log(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n)) \geq \\ &\exp(\lambda_1 \log(x_1) + \dots + \lambda_n \log(x_n)) = x_1^{\lambda_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\lambda_n}. \end{aligned}$$

– Der Zusatz entspricht dem Spezialfall $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1/n$.

Das Newton-Verfahren

Wir diskutieren noch ein klassisches Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen. Zunächst beobachten wir:

Satz (*Nullstellensatz für konvexe Funktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und konvex, und es gelte $f(a) < 0 < f(b)$. Dann besitzt f eine eindeutig bestimmte Nullstelle p , und es gilt $f > 0$ in $]p, b]$ und $f < 0$ in $[a, p[$. Ist f differenzierbar, so gilt weiter $f' > 0$ in $[p, b]$.

Eine analoge Aussage gilt, falls $f(a) > 0 > f(b)$.

Beweis

Die Existenz einer Nullstelle folgt aus $f(a) < 0 < f(b)$ und der Stetigkeit von f . Für die Eindeutigkeit sei p_1 eine Nullstelle von f , und es sei $p_2 \in]a, p_1[$. Dann existiert ein $\lambda \in]0, 1[$ mit $p_2 = \lambda a + (1 - \lambda)p_1$, und damit gilt nach Konvexität von f

$$f(p_2) = f(\lambda a + (1 - \lambda)p_1) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(p_1) = \lambda f(a) < 0.$$

Dies zeigt, dass es keine Punkte $p_2 < p_1$ in $]a, b[$ gibt mit $f(p_1) = f(p_2) = 0$.

Sei also p die eindeutige Nullstelle von f . Wegen $f(b) > 0$ ist $f > 0$ in $]p, b]$, da sonst f eine weitere Nullstelle in $]p, b]$ hätte. Analog ist $f < 0$ in $[a, p[$.

Sei nun f differenzierbar. Wegen der Konvexität von f ist dann f' monoton steigend. Es genügt also, $f'(p) > 0$ zu zeigen. Wäre aber $f'(p) \leq 0$, so wäre $f' \leq 0$ auf $[a, p]$ nach Monotonie von f' . Dann wäre aber $f(x) \leq f(a) < 0$ für

– alle $x \in [a, p]$, im Widerspruch zu $f(p) = 0$.

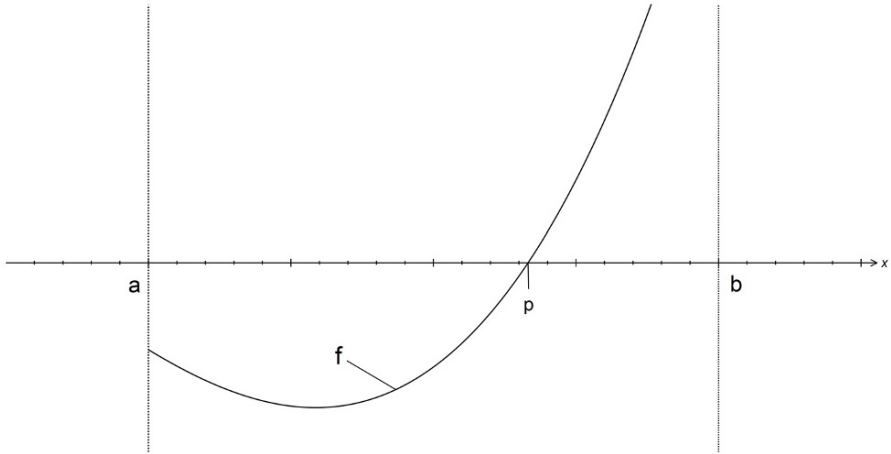


Diagramm zum Nullstellensatz für konvexe Funktionen

Ist f differenzierbar, so ist folgender Versuch ein natürlicher Ansatz, die Nullstelle p von f zu finden. Wir beginnen mit einem beliebigen Startwert x_0 mit $f(x_0) \geq 0$, zum Beispiel mit dem rechten Randpunkt $x_0 = b$. Nun legen wir die Tangente g_0 an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an, und berechnen ihren Schnittpunkt x_1 mit der x -Achse. Ist f identisch mit g_0 in $[x_1, x_0]$, so haben wir die Nullstelle p bereits gefunden. Andernfalls ist g_0 lediglich ein mehr oder weniger guter Ersatz für f . Die Konvexität von f führt dann aber dazu, dass

$$p < x_1 < x_0,$$

und damit ist $f(x_1) \geq 0$. Nun wird das Verfahren mit der Bildung der Tangente g_1 an f im Punkt $(x_1, f(x_1))$ wiederholt, und liefert ein x_2 mit $x_2 = p$ oder

$$p < x_2 < x_1 < x_0,$$

usw. Die Schnittpunkte der Tangenten mit der x -Achse sind dabei sehr einfach zu berechnen. Es gilt

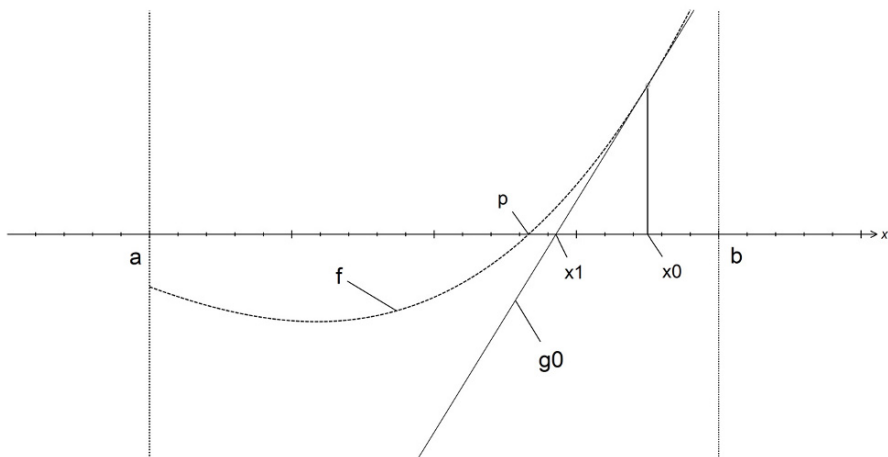
$$g_0(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x,$$

und damit ist

$$x_1 = \text{„die Nullstelle von } g_0\text{“} = x_0 - f(x_0)/f'(x_0).$$

Analog erhalten wir:

$$x_2 = \text{„die Nullstelle von } g_1\text{“} = x_1 - f(x_1)/f'(x_1).$$



Diese Überlegungen motivieren die folgende allgemeine Definition:

Definition (*Newton-Iteration*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und sei $x_0 \in [a, b]$. Wir definieren rekursiv solange möglich:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Im Fall der Existenz heißt dann $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die *Newton-Iteration* von f für den Startwert x_0 .

Der Ausdruck „solange möglich“ beinhaltet bei der Definition von x_{n+1} zwei-erlei. Zum einen muss $f'(x_n) \neq 0$ gelten, und zum anderen muss x_n im Definitionsbereich von f liegen. Unter diesen Voraussetzungen ist dann x_{n+1} definiert. Andernfalls bricht die Rekursion ab.

Wir können nun leicht zeigen, dass die Newton-Iteration in der obigen Situation tatsächlich die Nullstelle von f findet:

Satz (*Konvergenzsatz für die Newton-Iteration für konvexe Funktionen*)

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, konvex, und es gelte $f(a) < 0 < f(b)$. Sei p die eindeutige Nullstelle von f , und es sei x_0 ein Punkt in $[a, b]$ mit

- (i) $f(x_0) \geq 0$ oder
- (ii) $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) > 0$ und $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0) \leq b$.

Dann existiert die Newton-Iteration $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von f im Startpunkt x_0 und konvergiert gegen p . Ist $f(x_0) \geq 0$, so ist die Konvergenz monoton fallend. Ist $f(x_0) < 0$, so ist $f(x_1) \geq 0$ und die Konvergenz monoton fallend ab x_1 .

Eine analoge Aussage gilt, falls $f(a) > 0 > f(b)$.

Beweis

1. Fall: Es gelte (i).

Die Aussage ist klar für $x_0 = p$. Sei also $x_0 \neq p$. Sei wieder

$$a(x, x_0) = (f(x_0) - f(x))/(x_0 - x) \text{ für alle } x \in [p, x_0[.$$

Nach dem Steigungskriterium ist $a(x, x_0)$ monoton steigend in x .

Es gilt

$$f'(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} a(x, x_0) \geq a(p, x_0) = f(x_0)/(x_0 - p) > 0.$$

Wegen $0 < a(p, x_0) \leq f'(x_0)$ ist die Tangente g_0 an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ im Intervall $[p, x_0]$ kleinergleich der Geraden durch $(p, 0)$ und $(x_0, f(x_0))$.

Damit gilt $p \leq x_1 \leq x_0$ für die Nullstelle x_1 der Geraden g_0 .

Induktiv zeigt diese Überlegung, dass die Newton-Iteration $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, und dass

$$p \leq \dots \leq x_n \leq \dots \leq x_1 \leq x_0.$$

Sei $p^* = \lim_n x_n$. Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit von f gilt

$$p^* = \lim_n x_{n+1} = \lim_n (x_n - f(x_n)/f'(x_n)) = p^* - f(p^*)/f'(p^*),$$

und damit ist $f(p^*) = 0$. Da f nur eine Nullstelle besitzt, ist $p = p^*$.

2. Fall: Es gelte (ii).

Es gilt $g_0 \leq f$ für die Tangente g_0 an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Also gilt $f(x_1) \geq 0$ für den Schnittpunkt $x_1 < b$ von g_0 mit der x -Achse. Damit verläuft die Newton-Iteration ab x_1 wie im ersten Fall.

Der Leser beachte, dass im ersten Fall die Konvergenz streng monoton ist, solange $x_n \neq p$ gilt. Denn gilt $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n$ für ein n , so gilt $f(x_n) = 0$ und damit $x_n = p$.

Die Newton-Iteration konvergiert im Allgemeinen sehr schnell. Mit Hilfe des Satzes von Taylor werden wir eine Abschätzung für den Fehler $x_n - p$ nachrechen können.

Das Verfahren lässt sich insbesondere zur effektiven Berechnung von Wurzeln einsetzen:

Korollar (*Wurzelberechnung mit dem Newton-Verfahren*)

Seien $k \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$, und sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$f(x) = x^k - a \text{ für alle } x \in [0, \infty[.$$

Dann konvergiert die Newton-Iteration von f für jeden Startpunkt $x_0 > 0$ gegen $\sqrt[k]{a}$.

Beweis

Für b hinreichend groß erfüllt die Einschränkung $f|_{[0, b]}$ von f auf das

Intervall $[0, b]$ alle Voraussetzungen des Konvergenzsatzes.

Es gilt also

$$\sqrt[k]{a} = \lim_n x_n$$

mit der Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^k - a)/(k x_n^{k-1}) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für den Fall $k = 2$ der Berechnung von Quadratwurzeln lautet die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n - (x_n^2 - a)/(2 x_n) = (x_n + a/x_n)/2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

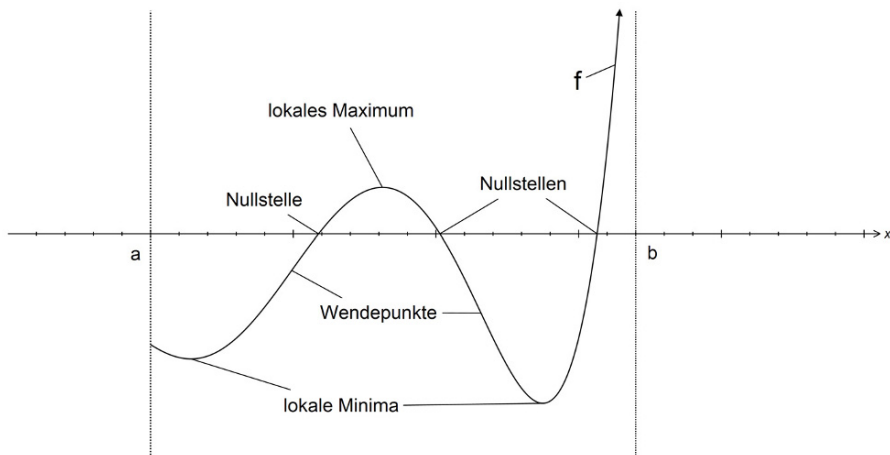
Diese Rekursion lässt sich auch ohne die Hintergrundtheorie der Differentialrechnung motivieren: Gilt $p^2 = a$, so ist

$$p = a/p \quad \text{und damit} \quad (p + a/p)/2 = p.$$

Für einen beliebigen Wert x ist damit das arithmetische Mittel von x und a/x ein natürlicher Ansatz, sich der gesuchten Quadratwurzel zu nähern, und dies ergibt die Rekursion $x_{n+1} = (x_n + a/x_n)/2$. In der Tat wurde diese Methode zur Berechnung von Quadratwurzeln bereits von den Babyloniern verwendet, und sie ist auch als *Heron-Verfahren* bekannt. Eine geometrische Interpretation diskutieren wir in den Ergänzungen.

Kurvendiskussion

Wir wollen unsere Untersuchungen abschließend noch einmal anhand eines Diagramms zusammenfassen.



Das Diagramm zeigt eine Funktion $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion besitzt genau drei Nullstellen, zwei lokale Minima, ein lokales Maximum und zwei Wendepunkte. Die Funktion könnte stetig in den Punkt a fortgesetzt werden, dagegen ist angedeutet, dass $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \infty$ gilt. Wir nehmen an, dass die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist. Dann sind die drei lokalen Extremalstellen

von f genau die Nullstellen der ersten Ableitung f' , und die beiden Wendestellen von f sind genau die Nullstellen der zweiten Ableitung f'' . Sind $w_1 < w_2$ die Wendestellen von f , so ist f im Intervall $]a, w_1[$ strikt konvex, im Intervall $[w_1, w_2]$ strikt konkav und im Intervall $[w_2, b[$ strikt konvex. Sind $p_1 < p_2 < p_3$ die Nullstellen von f , so konvergiert das Newton-Verfahren für Startwerte in $[w_1, p_1]$ gegen p_1 , für Startwerte in $[p_2, w_2]$ gegen p_2 und für Startwerte in $[p_3, b[$ gegen p_3 . Weiter konvergiert das Newton-Verfahren beispielsweise auch für einige Startwerte x_0 kleiner als p_3 gegen p_3 . Nähern wir uns mit x_0 aber der zweiten Minimalstelle von f zu weit an, so liegt der erste Punkt x_1 der Newton-Iteration außerhalb des Definitionsbereichs von f .

Unsere Untersuchung zeigt, dass uns die Differentialrechnung verschiedene Hilfsmittel zur Verfügung stellt, eine *Kurvendiskussion* für eine Funktion f wie im Diagramm oben durchzuführen: Viele interessante Punkte von f wie Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte können wir exakt oder zumindest näherungsweise bestimmen.

Übungen

4.2.1 Der Mittelwertsatz

Übung 1

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{für alle } x \in \mathbb{R} - \{0\}, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf ihre Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Übung 2

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Weiter sei f' beschränkt durch $s \in \mathbb{R}$, d. h. es gelte $|f'(x)| \leq s$ für alle x . Für alle $c > 0$ sei

$$g_c = \text{id} + cf,$$

d. h. es gilt $g_c(x) = x + cf(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass ein $c > 0$ existiert derart, dass g_c streng monoton steigend ist. Skizzieren Sie weiter g_c für $f = \sin$ und ein für die strenge Monotonie hinreichend kleines c .

Übung 3

Sei $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = (1 + 1/x)^x \quad \text{für alle } x > 0.$$

Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist.

[Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $g = \log \circ f$ und ihre Ableitung.]

Übung 4

Sei $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(0) = 0$ und $f'(x) > f(x)$ für alle $x > 0$. Zeigen Sie, dass $f(x) > 0$ für alle $x > 0$ gilt.

Übung 5

Geben Sie (in Form einer Zeichnung oder besser in Form einer elementaren Funktion) eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an mit den Eigenschaften:

- (a) 0 ist eine lokale Maximalstelle von f .
- (b) f ist in keinem Intervall $[-\varepsilon, 0]$ monoton steigend und in keinem Intervall $[0, \varepsilon]$ monoton fallend.

Übung 6

Sei $a \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie alle Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f' = af$.

Übung 7

Sei I ein Intervall und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

- (a) f ist streng monoton steigend *genau dann, wenn*
 $f' \geq 0$ und f' ist auf keinem Intervall $[c, d] \subseteq I$, $c < d$, konstant gleich 0.
- (b) f ist streng monoton fallend *genau dann, wenn*
 $f' \leq 0$ und f' ist auf keinem Intervall $[c, d] \subseteq I$, $c < d$, konstant gleich 0.

4.2.2 Weitere Anwendungen der Differentiation**Übung 1**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit Hilfe der Regeln von l'Hospital:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(x)/x^a$ für $a > 0$,
 (b) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (x - \pi/2) \tan x$,
 (c) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \cos(\pi x))/(x - 1)^2$.

Übung 2

Geben Sie differenzierbare Funktionen $f, g :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in]0, 1[$ an derart, dass gilt:

$$\lim_{x \downarrow 0} f(x)/g(x) = 0, \quad \lim_{x \downarrow 0} f'(x)/g'(x) \text{ existiert nicht.}$$

Übung 3

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie:

- (a) Seien $x_1 < x_2$ in I . Dann gilt:
 $f(x) \geq g_{a(x_1, x_2), x_1, f(x_1)}(x)$ für alle $x \in I - [x_1, x_2]$.
- (b) Ist f streng konvex, so gilt „ $>$ “ statt „ $\geq$ “ in (a).

Übung 4

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Zeigen Sie:

- (a) Seien $x_1 < x_2 < x_3$ in I , und es gebe eine Gerade g durch $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$. Dann gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in [x_1, x_3]$.
- (b) Ist f streng konvex, so nimmt f jeden Wert höchstens zweimal an.

Übung 5

Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft:

$$f((x+y)/2) \leq (f(x) + f(y))/2 \quad \text{für alle } x, y \in]a, b[.$$

Zeigen Sie, dass f konvex ist.

Übung 6

Sei $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ konvex oder konkav. Zeigen Sie, dass f stetig ist.
Gilt diese Aussage auch für abgeschlossene Intervalle?

Übung 7

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und konvex. Zeigen Sie:

- (a) Ist f streng monoton steigend, so ist f^{-1} konkav.
- (b) Ist f streng monoton fallend, so ist f^{-1} konvex.

Übung 8

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Weiter seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, \dots, x_n \in I$ gilt:

$$(+)\quad f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

Zeigen Sie weiter: Ist f streng konvex, so gilt in (+) Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \dots = x_n$.

Übung 9

Sei $n \geq 1$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über das geometrische und arithmetische Mittel, dass für alle $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|. \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung})$$

Hierbei ist wie üblich

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

das *Skalarprodukt* von x und y , und $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2}$ die *Euklidische Länge* von $v = (v_1, \dots, v_n)$.

Übung 10

Zeigen Sie, dass es eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, für deren Newton-Iteration $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zum Startwert $x_0 = 1$ gilt:

$$x_n = n + 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Übung 11

Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x_0 \in]-\pi/2, 0[$ gibt, sodass für die Newton-Iteration $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $\sin(x)$ zum Startpunkt x_0 gilt:

$$x_n = x_0 + 2\pi n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Übung 12

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^3 - 2x + 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Newton-Iteration von f zum Startwert x_0 die Form $x_0, x_1, x_0, x_1, \dots$ mit $x_1 \neq x_0$ besitzt.

Elfte Ergänzungen: Zum Krümmungsbegriff und Newton-Verfahren

Ergänzungsübung 1

Sei I ein Intervall, und seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Untersuchen Sie, welche der punktweise definierten Funktionen

$$h_1 = f + g, \quad h_2 = f \cdot g, \quad h_3 = \max(f, g), \quad h_4 = \min(f, g)$$

wieder konvex sind.

Ergänzungsübung 2

Entwickeln Sie einen Konvexitätsbegriff für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Untersuchen Sie weiter die folgenden Funktionen auf Konvexität:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 y^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,

(b) $g_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g_p(x) = f(x, p)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(c) $h_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h_p(y) = f(p, y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$,

wobei p eine beliebige reelle Zahl ist.

Ergänzungsübung 3

Zeichnen Sie Diagramme zur Illustration des Newton-Verfahrens.

Ergänzungsübung 4

Zeichnen Sie eine differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) f besitzt eine eindeutige Nullstelle p .

(b) Es existiert ein Startwert $x_0 \in [a, b]$, für den die Newton-Iteration existiert, aber nicht konvergiert.

Ergänzungsübung 5

Motivieren Sie das Heron-Verfahren zur Berechnung der Quadratwurzel einer Zahl $a > 0$ geometrisch, indem sie es mit einer Folge von flächengleichen Rechtecken in Verbindung bringen, die gegen ein Quadrat konvergieren (d.h. die beiden Folgen der Seitenlängen der Rechtecke konvergieren gegen $\sqrt{a}$).

3. Potenzreihen und Taylor-Entwicklung

Im letzten Kapitel dieses Buches lernen wir eine weitere grundlegende Idee der Analysis mit weitreichender Bedeutung kennen, nämlich die Darstellung einer Funktion in Form einer Potenzreihe

$$\sum_n a_n (x - p)^n = a_0 + a_1 (x - p) + a_2 (x - p)^2 + a_3 (x - p)^3 + \dots,$$

mit einer reellen Variablen x , Koeffizienten a_n und einem Entwicklungspunkt p . Wir zeigen, dass jede Potenzreihe in einem beschränkten oder unbeschränkten Intervall der Form $]p - R, p + R[$ eine gliedweise differenzierbare Funktion darstellt, während sie in den Intervallen $] - \infty, p - R[$ und $]p + R, \infty[$ divergiert. Ist der Konvergenzradius R endlich, so ist zum Konvergenzverhalten in den beiden Randpunkten $p - R$ und $p + R$ keine allgemeine Aussage möglich. Jedoch werden wir im Abelschen Grenzwertsatz sehen, dass im Fall der Konvergenz die Grenzfunktion auch in ihren Randpunkten stetig ist. Im zweiten Teil des Kapitels gehen wir dann der Frage nach, wie wir eine Funktion in einer Umgebung eines Punktes p durch eine Potenzreihe darstellen können. Dies führt uns zur sogenannten Taylor-Entwicklung, die sich als Verfeinerung des Ansatzes ansehen lässt, eine Funktion in einem Punkt durch ihre Tangente zu ersetzen. Aus den Geraden werden nun Polynome n -ten Grades, die Approximationen beliebig hoher Güte ermöglichen.

Potenzreihen und gliedweises Differenzieren

Wir definieren:

Definition (*Potenzreihe, Entwicklungspunkt, Konvergenzbereich*)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, und sei $p \in \mathbb{R}$. Dann heißt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Reihe

$$\sum_n a_n (x - p)^n$$

die *Potenzreihe* mit *Koeffizienten* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und *Entwicklungspunkt* p im Punkt x . Die Menge

$$K = \{ x \in \mathbb{R} \mid \sum_n a_n (x - p)^n \text{ konvergiert} \}$$

heißt der *Konvergenzbereich* der Potenzreihe $\sum_n a_n (x - p)^n$.

Die Notation $\sum_n a_n (x - p)^n$ verwenden wir in drei Bedeutungen:

- (1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ bedeutet $\sum_n a_n (x - p)^n$ die Folge $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$s_n(x) = \sum_{k \leq n} a_k (x - p)^k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$
- (2) Für jedes $x \in K$ bedeutet $\sum_n a_n (x - p)^n$ den Limes der Folge $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.
- (3) $\sum_n a_n (x - p)^n$ fassen wir zuweilen auch als die Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ auf mit

$$f(x) = \sum_n a_n (x - p)^n \quad \text{für alle } x \in K.$$

Diese Mehrfachbedeutung ist in der Regel ungefährlich und erleichtert die Sprechweise.

Spezielle Potenzreihen haben wir bereits kennengelernt und untersucht:

Geometrische Reihe

Die geometrische Reihe $\sum_n x^n$ ist eine Potenzreihe. Ihr Konvergenzbereich ist das offene Intervall $] - 1, 1 [$.

Die Potenzreihen $\sum_{n \geq 1} x^n/n$ und $\sum_{n \geq 1} x^n/n^k$ für $k \geq 2$

Die Konvergenzbereiche der Potenzreihen $\sum_{n \geq 1} x^n/n$ und $\sum_{n \geq 1} (-1)^n x^n/n$ sind $] - 1, 1 [$ bzw. $] - 1, 1 [$; in den Randpunkten $x = -1$ und $x = 1$ liegen hier jeweils die harmonische und die alternierende harmonische Reihe vor. Die Reihe $\sum_{n \geq 1} x^n/n^k$ hat dagegen den Konvergenzbereich $] - 1, 1 [$ für $k \geq 2$. Mit Blick auf die geometrische Reihe zeigt dies, dass alle vier Varianten $] - 1, 1 [$, $] - 1, 1 [$, $] - 1, 1 [$ und $] - 1, 1 [$ des Einheitsintervalls als Konvergenzbereich einer Potenzreihe auftreten können.

Die Exponentialreihe

Die Exponentialreihe $\sum_n x^n/n!$ ist eine Potenzreihe mit Konvergenzbereich $\mathbb{R}$.

Die Binomischen Reihen

Für alle $s \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$ ist die Binomische Reihe $B_s(x) = \sum_n \binom{s}{n} x^n$ eine Potenzreihe. Für ihren Konvergenzbereich K gilt $] - 1, 1 [\subseteq K \subseteq] - 1, 1 [$. Genauer hängt dann, wie sich zeigen lässt, K vom Exponenten s wie folgt ab: Für $s \geq 0$ gilt $K =] - 1, 1 [$, für $-1 < s < 0$ gilt $K =] - 1, 1 [$ und für $s \leq -1$ gilt $K =] - 1, 1 [$.

Dagegen ist die Reihe $\sum_{n \geq 1} 1/n^x$ der Riemannschen Zetafunktion keine Potenzreihe. Reihen des Typs $\sum_{n \geq 1} a_n/n^x$ sind als *Dirichlet-Reihen* bekannt und werden in der analytischen Zahlentheorie untersucht.

Wir untersuchen nun das Konvergenzverhalten von Potenzreihen. Da eine Potenzreihe $\sum_n a_n (x - p)^n$ mit Entwicklungspunkt p in einem Punkt x genau dann konvergiert, wenn $\sum_n a_n x^n$ im Punkt $x - p$ konvergiert, können wir uns im Folgenden auf den Entwicklungspunkt 0 beschränken. Der allgemeine Fall ergibt sich dann aus einer Verschiebung des Konvergenzbereichs um den Entwicklungspunkt p . Die Konvergenz von $\sum_n a_n x^n$ in $] - R, R [$ ist zum Beispiel gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\sum_n a_n (x - p)^n$ in $] p - R, p + R [$. In diesem Sinne sind für das Konvergenzverhalten einer Potenzreihe nur die Koeffizienten und nicht der Entwicklungspunkt maßgeblich.

Wir zeigen nun:

Satz (*Konvergenzverhalten von Potenzreihen*)

Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzbereich K . Weiter sei

$$R = \sup(\{x \geq 0 \mid \text{die Folge } (a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}) \leq \infty,$$

und es sei $P = [-r, r]$ für ein r mit $0 \leq r < R$. Dann gilt $P \subseteq K$, und $\sum_n a_n x^n$ konvergiert absolut und gleichmäßig auf P gegen eine stetige Funktion.

Beweis

Wir definieren $f_n : P \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f_n(x) = a_n x^n$ für alle $x \in P$ und $n \in \mathbb{N}$.

Sei nun $x_0 \in]r, R[$. Nach Definition von R gibt es dann ein $s \in \mathbb{R}$ mit

$$|a_n x_0^n| \leq s \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $x \in P$ gilt dann

$$|a_n x^n| = |a_n| |x_0|^n |x/x_0|^n \leq s |x/x_0|^n \leq s (r/x_0)^n,$$

und damit ist also

$$\|f_n\| \leq s (r/x_0)^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen $r/x_0 < 1$ gilt also für alle $x \in P$

$$\sum_n |a_n x^n| \leq \sum_n \|f_n\| \leq s \sum_n (r/x_0)^n = s x_0 / (x_0 - r).$$

Damit konvergiert $\sum_n a_n x^n$ absolut für alle $x \in P$, und die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes von Weierstraß sind erfüllt. Folglich ist die Konvergenz gleichmäßig und die Grenzfunktion $f = \sum_n f_n$ stetig auf P .

Einmal mehr ist es die geometrische Reihe, die einen einfachen Beweis eines fundamentalen Satzes ermöglicht!

Aus dem Satz ergibt sich folgendes Bild des Konvergenzbereichs K :

Korollar (*Konvergenzverhalten von Potenzreihen, II*)

Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzbereich K , und sei

$$R = \sup(\{x \geq 0 \mid \text{die Folge } (a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist beschränkt}\}) \leq \infty.$$

Dann gilt:

- (a) $\sum_n a_n x^n$ konvergiert auf $] -R, R[$ gegen eine stetige Funktion f .
- (b) $\sum_n a_n x^n$ divergiert für alle x mit $|x| > R$.

Insbesondere ist also $] -R, R[\subseteq K \subseteq [-R, R]$, und es gilt

$$R = \sup(\{|x| \mid \sum_n a_n x^n \text{ konvergiert}\}) \leq \infty.$$

Ist $R < \infty$, so können, wie wir in den obigen Beispielen für $R = 1$ schon gesehen haben, für die beiden Randpunkte $-R$ und R alle vier denkbaren Fälle der Konvergenz und Divergenz eintreten.

Unsere Ergebnisse rechtfertigen folgende Definition:

Definition (*Konvergenzradius*)

Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe. Dann heißt

$$R = \sup(\{ |x| \mid \sum_n a_n x^n \text{ konvergiert} \}) \leq \infty$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$.

Der Konvergenzradius lässt sich oft mit Hilfe folgender Formeln bestimmen:

Satz (*Berechnung des Konvergenzradius*)

Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann gilt, mit den Konventionen „ $1/0 = \infty$ “ und „ $1/\infty = 0$ “:

$$(a) \quad R = 1 / \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (\text{Formel von Cauchy-Hadamard})$$

(b) Ist $a_n \neq 0$ für alle n , so gilt im Falle der Existenz des Grenzwerts

$$R = 1 / \lim_n |a_{n+1}/a_n|. \quad (\text{Formel von Euler})$$

Die Aussagen ergeben sich leicht aus dem Wurzelkriterium bzw. dem Quotientenkriterium für Reihen. Die Durchführung des Arguments sei dem Leser überlassen.

Gliedweises Differenzieren

Die Bedeutung der Potenzreihen für die Differentialrechnung ruht auf der Tatsache, dass eine Potenzreihe eine im Inneren ihres Konvergenzbereichs differenzierbare Funktion darstellt, und dass darüber hinaus die Berechnung der Ableitung durch gliedweises Differenzieren erfolgen kann. Der Beweis ist ein klassisches $\varepsilon/3$ -Argument. Der Schrankensatz steuert dabei Lipschitz-Konstanten für die Glieder $a_n x^n$ bei, mit deren Hilfe wir unendliche Summen aus Differenzenquotienten in den Griff bekommen:

Satz (*gliedweises Differenzieren von Potenzreihen*)

Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist die Funktion $f:]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ für alle $x \in]-R, R[$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} \quad \text{für alle } x \in]-R, R[.$$

Beweis

Mit $\lim_n \rightarrow \infty \sqrt[n]{n} = 1$ gilt $\limsup_n \sqrt[n]{(n+1) |a_{n+1}|} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$, und damit ist R auch der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$.

Sei nun $p \in]-R, R[$. Wir zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - f(p))/(x - p) = \sum_{n \geq 1} n a_n p^{n-1}.$$

Sei hierzu $\varepsilon > 0$ mit $[p - \varepsilon, p + \varepsilon] \subseteq]-R, R[$. Nach dem Schrankensatz gilt für alle $n \geq 1$:

$|a_n (x^n - p^n)/(x - p)| \leq L_n$ für alle $x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]$, $x \neq p$, wobei

$$L_n = \max\{|n a_n x^{n-1}| \mid x \in [p - \varepsilon, p + \varepsilon]\}.$$

Dann gilt aber für alle $n \geq 1$

$$L_n = \begin{cases} |n a_n (p - \varepsilon)^{n-1}|, & \text{falls } p < 0, \\ |n a_n (p + \varepsilon)^{n-1}|, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da aber $p - \varepsilon$ und $p + \varepsilon$ dem Konvergenzintervall $] - R, R[$ der Potenzreihe $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ angehören, gilt $\sum_{n \geq 1} L_n < \infty$. Dann existiert aber ein n_0 mit

$$(+)\quad \sum_{n > n_0} L_n < \varepsilon/3 \quad \text{und} \quad |\sum_{n > n_0} n a_n p^{n-1}| < \varepsilon/3.$$

Damit können wir nun abschätzen:

$$|(f(x) - f(p))/(x - p) - \sum_{n \geq 1} n a_n p^{n-1}| =$$

$$|\sum_{n \geq 1} a_n (x^n - p^n)/(x - p) - \sum_{n \geq 1} n a_n p^{n-1}| \leq$$

$$\sum_{1 \leq n \leq n_0} |a_n ((x^n - p^n)/(x - p) - n p^{n-1})| + \sum_{n > n_0} L_n + |\sum_{n > n_0} n a_n p^{n-1}|.$$

Wegen $dx^n/dx(p) = n p^{n-1}$ ist der erste der drei Summanden in einer hinreichend kleinen Umgebung von p kleiner als $\varepsilon/3$, und nach (+) ist damit in dieser Umgebung die ganze Summe kleiner als ε . Hieraus folgt, dass

$$\lim_{x \rightarrow p} |(f(x) - f(p))/(x - p) - \sum_{n \geq 1} n a_n p^{n-1}| = 0,$$

– und dies zeigt die Behauptung.

Dieser Satz ist vom Typ „Vertauschung von Grenzprozessen“. Er besagt, dass wir die Ableitungsoperation und die unendliche Summation für Potenzreihen in beliebiger Reihenfolge durchführen können:

$$d/dx \sum_n a_n x^n = \sum_n d/dx (a_n x^n).$$

Allgemeiner erhebt sich die Frage, wann $(\sum_n f_n)' = \sum_n f_n'$ gilt. Obiger Beweis nutzt nur wenige Eigenschaften der speziellen Form $a_n x^n$ der Reihenglieder, und er zeigt de facto allgemeiner:

Satz (*Vertauschung von Differentiation und Summation*)

Seien $f_n : P \rightarrow \mathbb{R}$ in $p \in P$ differenzierbare Funktionen, und es existiere $f = \sum_n f_n$. Weiter gelte:

(a) $\sum_n f_n'(p)$ konvergiert.

(b) Es gibt Lipschitz-Konstanten L_n für f_n , $n \in \mathbb{N}$, mit $\sum_n L_n < \infty$.

Dann ist f differenzierbar in p , und es gilt $f'(p) = \sum_n f_n'(p)$.

Ein Gegenbeispiel zur Vertauschung von Differentiation und Limesbildung werden wir in den Übungen kennenlernen.

Wir diskutieren nun noch einige Anwendungen des gliedweisen Differenzierens. Durchgeführt für die Reihen

$$\exp(x) = \sum_n x^n/n!,$$

$$\cos(x) = \sum_n (-1)^n x^{2n}/(2n)!, \quad \sin x = \sum_n (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)!$$

liefert die Methode mühelos die uns schon bekannten Ergebnisse

$$d/dx \exp x = \exp x, \quad d/dx \cos x = -\sin x, \quad d/dx \sin x = \cos x.$$

Allgemeiner gilt: Führen wir eine Funktion als Potenzreihe ein, so kennen wir bereits ihre Ableitung.

Das gliedweise Differenzieren erlaubt aber manchmal sogar das Auffinden der Potenzreihendarstellung einer Funktion. Die beiden folgenden Sätze sind berühmte Beispiele hierfür. Ihre Beweise ruhen darauf, dass wir die relativ einfachen Ableitungen $1/x$ und $1/(1+x^2)$ des Logarithmus und des Arkustangens mit Hilfe der geometrischen Reihe in Potenzreihen entwickeln können. Da sich zwei differenzierbare Funktionen mit identischer Ableitung auf einem Intervall lediglich um eine Konstante unterscheiden, können wir die Potenzreihen der Ableitungen dann leicht zu Potenzreihen zurückrechnen, die die Ausgangsfunktionen darstellen.

Satz (*Logarithmus- oder Mercator-Reihe*)

Für alle $x \in]-1, 1[$ gilt

$$\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n x^n. \quad (\text{Logarithmus-Reihe})$$

Beweis

Die Potenzreihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n x^n$ konvergiert auf $]-1, 1[$ gegen eine differenzierbare Funktion f . Gliedweises Differenzieren zeigt, dass

$$f'(x) = \sum_n (-1)^n x^n \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

Andererseits gilt auch

$$d/dx \log(1+x) = 1/(1+x) = \sum_n (-1)^n x^n \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

Damit existiert aber ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) - \log(1+x) = c$ für alle $x \in]-1, 1[$.

– Wegen $f(0) = 0 = \log(1+0)$ ist $c = 0$, und dies zeigt die Behauptung.

In ganz ähnlicher Weise können wir eine Potenzreihendarstellung des Arkustangens gewinnen:

Satz (*Arkustangens- oder Gregory-Reihe*)

Für alle $x \in]-1, 1[$ gilt

$$\arctan(x) = \sum_n (-1)^n/(2n+1) x^{2n+1}. \quad (\text{Arkustangens-Reihe})$$

Beweis

Die Potenzreihe $\sum_n (-1)^n/(2n+1) x^{2n+1}$ konvergiert auf $]-1, 1[$ gegen eine differenzierbare Funktion f , und es gilt

$$f'(x) = \sum_n (-1)^n x^{2n} \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

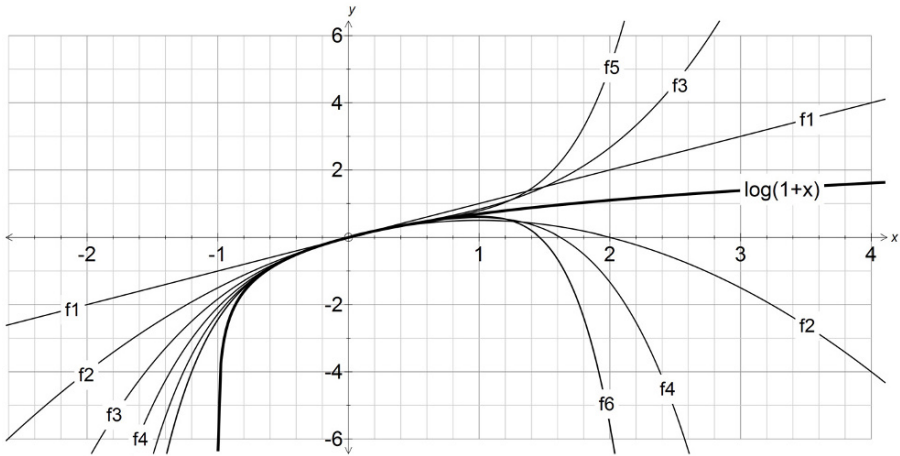
Andererseits gilt auch

$$d/dx \arctan x = 1/(1+x^2) = \sum_n (-1)^n x^{2n} \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

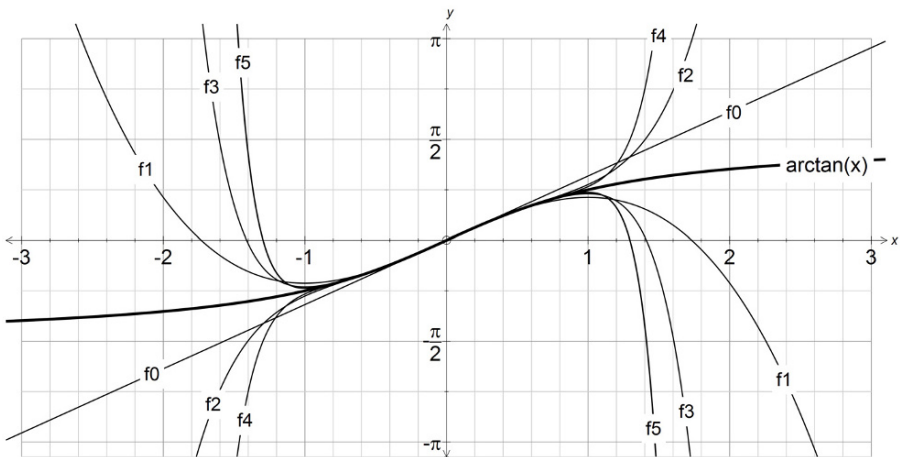
Also ist $f - \arctan$ konstant gleich einem $c \in \mathbb{R}$. Wegen $f(0) = 0 = \arctan(0)$

ist aber wieder $c = 0$.

Wir werden gleich sehen, dass wir den Punkt 1 in die Potenzreihenentwicklungen des Logarithmus und des Arkustangens mitaufnehmen können. Die beiden folgenden Diagramme deuten an, dass dies gilt.



zur Logarithmus-Reihe, $f_k(x) = \sum_{1 \leq n \leq k} (-1)^{n-1}/n x^n$ für $1 \leq k \leq 6$



zur Arkustangens-Reihe, $f_k(x) = \sum_{n \leq k} (-1)^n/(2n+1) x^{2n+1}$ für $k \leq 5$.

Der Abelsche Grenzwertsatz

Wie angekündigt zeigen wir nun noch, dass die Konvergenz in den Randpunkten des Konvergenzbereichs stetig erfolgt. Zum Beweis verwenden wir die Abelsche Summation, die wir im Kapitel über die Konvergenz unendlicher Reihen kennengelernt haben.

Satz (*Abelsches Konvergenzkriterium*)

Seien $f_n, g_n : P \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, Funktionen mit den Eigenschaften:

- (a) $\sum_n f_n$ ist gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f : P \rightarrow \mathbb{R}$.
- (b) $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist punktweise monoton fallend.
- (c) Es gibt ein $b \in \mathbb{R}$, sodass $\|g_n\| \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $\sum_n f_n g_n$ gleichmäßig konvergent.

Beweis

Die Aussage ist klar für $b = 0$. Wir nehmen also an, dass $b > 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Seien $s_{-1} = 0$ und $s_n = \sum_{k \leq n} f_k$ für alle n . Nach (a) gibt es ein n_0 mit

$$\|f - s_n\| < \varepsilon/(4b) \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Nach Abelscher Summation gilt aber für alle $n_1 \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \sum_{n_0 \leq n \leq n_1} f_n g_n &= \sum_{n_0 \leq n < n_1} (s_n (g_n - g_{n+1})) + s_{n_1} g_{n_1} - s_{n_0-1} g_{n_0} = \\ &\quad \sum_{n_0 \leq n < n_1} (s_n - f)(g_n - g_{n+1}) + (s_{n_1} - f)g_{n_1} - (s_{n_0-1} - f)g_{n_0}. \end{aligned}$$

Damit gilt aber für alle $x \in P$:

$$\begin{aligned} |\sum_{n_0 \leq n \leq n_1} f_n(x) g_n(x)| &\leq \varepsilon/(4b) \sum_{n_0 \leq n < n_1} |g_n(x) - g_{n+1}(x)| + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \stackrel{(b)}{=} \\ &\quad \varepsilon/(4b) \sum_{n_0 \leq n < n_1} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \\ &\quad \varepsilon/(4b) (g_{n_0}(x) - g_{n_1}(x)) + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

– Dies zeigt die Behauptung.

Damit können wir nun leicht zeigen:

Satz (*Abelscher Grenzwertsatz*)

Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzbereich K . Dann ist die Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_n a_n x^n$ für alle $x \in K$ stetig.

Beweis

Sei R der Konvergenzradius der Potenzreihe. Nach den bisherigen Ergebnissen über das Konvergenzverhalten ist nur noch zu zeigen:

- (a) Ist $R \in K$, so ist f stetig in R .
- (b) Ist $-R \in K$, so ist f stetig in $-R$.

Beweis von (a)

Wir zeigen, dass $\sum_n a_n x^n$ gleichmäßig auf $[0, R]$ konvergiert.

Es gilt:

$$\sum_n a_n x^n = \sum_n (a_n R^n) (x/R)^n.$$

Dann sind die Voraussetzungen des Abelschen Konvergenzkriteriums für $P = [0, R]$ und $f_n(x) = a_n R^n$, $g_n(x) = (x/R)^n$ für alle $x \in P$ und $n \in \mathbb{N}$ erfüllt: (a) gilt für die konstanten Funktion f_n wegen $R \in K$, (b) ist klar und (c) gilt mit der Schranke $b = 1$.

Beweis von (b)

Die Potenzreihe $\sum_n (-1)^n a_n x^n$ konvergiert für alle $x \in [0, R]$ gegen $f(-x) = \sum_n a_n (-x)^n$, und $f \circ (-\text{id})$ ist nach dem bereits Bewiesenen stetig auf $[0, R]$. Also ist f stetig auf $[-R, 0]$.

Der Beweis zeigt de facto (unabhängig von den obigen Ergebnissen über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen): Konvergiert eine Potenzreihe in den Punkten r_1, r_2 mit $r_1 \leq 0 \leq r_2$, so konvergiert sie gleichmäßig auf dem abgeschlossenen Intervall $[r_1, r_2]$.

Wenden wir den Abelschen Grenzwertsatz auf die Logarithmus-Reihe an, so erhalten wir:

Satz (Reihendarstellung von $\log(2)$)

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \pm \dots = \log(2).$$

Beweis

Die Logarithmus-Reihe $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n x^n$ konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen im Punkt 1. Der Abelsche Grenzwertsatz und die Stetigkeit des Logarithmus im Punkt 2 rechtfertigen dann die beiden folgenden Limesbildungen:

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n = \lim_{x \uparrow 1} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1}/n x^n =$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \log(1+x) = \log(2).$$

Analog liefert der Abelsche Grenzwertsatz angewendet auf die Arkustangens-Reihe eine zeitlose Reihendarstellung:

Satz (Reihendarstellung von $\pi/4$, Mādhava-Leibniz-Reihe)

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 \pm \dots = \pi/4. \quad (\text{Mādhava-Leibniz-Reihe})$$

Beweis

Wie im vorhergehenden Beweis erhalten wir:

$$\sum_n (-1)^n/(2n+1) = \lim_{x \uparrow 1} \sum_n (-1)^n/(2n+1) x^{2n+1} =$$

$$\lim_{x \uparrow 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \pi/4.$$

Mit den Reihendarstellungen von $\log(2)$ und $\pi/4$ haben wir zwei weitere Juwelen der Analysis ans Licht gebracht, die vielleicht weniger hell leuchten als die Eulersche Identität $e^{i\pi} + 1 = 0$, die sie aber an magischer Aura sogar noch übertreffen.

Potenzreihen in $\mathbb{C}$

Potenzreihen lassen sich natürlich wieder in $\mathbb{C}$ studieren, und de facto spielen sie dort eine noch größere Rolle als in der reellen Analysis. Eine komplexe Potenzreihe (in der Variablen z) hat die Form

$$\sum_n a_n (z - c)^n$$

mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ und einem Entwicklungspunkt $c \in \mathbb{C}$. Obige Ergebnisse gelten, bei identischer Argumentation, auch für $\mathbb{C}$. Aus Konvergenzintervallen werden nun Konvergenzkreise, und aus den Randpunkten eines Konvergenzintervalls wird eine Kreislinie. Definieren wir wieder

$$R = \sup(\{ |z| \mid z \in \mathbb{C}, \sum_n a_n z^n \text{ ist beschränkt} \}) \leq \infty,$$

so konvergiert die Potenzreihe $\sum_n a_n (z - c)^n$ auf der offenen Kreisscheibe

$$U_R(c) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < R \}$$

gegen eine stetige Funktion. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - c| > R$ divergiert die Reihe und für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - c| = R$ ist keine allgemeine Aussage möglich. Für Spezialfälle gibt es aber interessante Ergebnisse. Ein Beispiel ist:

Satz (*komplexe Potenzreihen mit monotonen Nullfolgen als Koeffizienten*)

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_n a_n z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1, z \neq 1$.

Beweis

Sei also $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq 1, z \neq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|\sum_{k \leq n} z^k| = |(1 - z^{n+1})/(1 - z)| \leq |2/(1 - z)|.$$

Die Partialsummen der Reihe $\sum_n z^n$ sind also beschränkt. Nach dem aus der Abelschen Summation gewonnenen Konvergenzsatz für Produktsum-

men konvergiert also die Reihe $\sum_n a_n z^n$.

Der Leser beachte, dass hier nur der Fall $|z| = 1$ = „der Konvergenzradius R der Reihe“ neu ist. Denn für $|z| < 1$ konvergiert $\sum_n a_n z^n$ aufgrund der absoluten Konvergenz von $\sum_n z^n$, und ist $R > 1$, so ist die Aussage trivial.

Im Unterschied zu $\mathbb{R}$ ist im Fall der Konvergenz einer komplexen Potenzreihe in einem Randpunkt p des Konvergenzkreises die Funktion dort im Allgemeinen nicht mehr stetig. Es gilt aber noch, dass $f(z)$ gegen $f(p)$ konvergiert, wenn sich z radial an den Randpunkt p annähert, d. h. es gilt

$$\lim_{z \rightarrow p, z \in \mathbb{C}} f(z) = f(p) \quad \text{mit } C = \{ \alpha p \mid 0 \leq \alpha < 1 \}.$$

Eine interessante Beobachtung ist, dass sich reelle Funktionen automatisch nach $\mathbb{C}$ fortsetzen lassen, wenn sie durch konvergente Potenzreihen gegeben sind. Konvergiert die reelle Potenzreihe $\sum_n a_n (x - c)^n$ im Intervall $]c - R, c + R[$, so konvergiert die komplexe Potenzreihe $\sum_n a_n (z - c)^n$ automatisch in der offenen Kreisscheibe $U_R(c)$.

Die Taylor-Entwicklung

Im Approximationssatz haben wir gezeigt, dass wir eine in einem Punkt p differenzierbare Funktion f in der Form

$$f(x) = f(p) + a(x - p) + r(x)$$

darstellen können, wobei $a = f'(p)$ gilt und die Rest- oder Fehlerfunktion r die Approximationsgüte

$$\lim_{x \rightarrow p} r(x)/(x - p) = 0$$

besitzt. Es liegt nun nahe, diesen Ansatz für Funktionen, die in einem Punkt p mehr als einmal differenzierbar sind, zu verbessern. Wir streben also bei hinreichend guter Differenzierbarkeit eine Darstellung

$$f(x) = f(p) + a_1(x - p) + a_2(x - p)^2 + \dots + a_n(x - p)^n + r_n(x)$$

an, mit gewissen Koeffizienten a_i und einer Fehlerfunktion r_n mit

$$\lim_{x \rightarrow p} r_n(x)/(x - p)^n = 0.$$

Ist f sogar glatt, so können wir hoffen, dass die Fehlerfunktionen gegen Null konvergieren, wenn n gegen unendlich strebt. In diesem Fall erhalten wir eine Potenzreihendarstellung von f im Entwicklungspunkt p :

$$f(x) = f(p) + a_1(x - p) + a_2(x - p)^2 + \dots + a_n(x - p)^n + \dots$$

Die rigorose Umsetzung dieser Überlegungen beschert uns mit einem großen, wenn auch nicht überwältigenden Erfolg. Die lokalen Approximationen mit Fehlern n -ter Ordnung lassen sich in der Tat etablieren, und wir sehen die Form, die eine Potenzreihenentwicklung im Fall der Existenz haben muss. Aber es zeigt sich, dass sich nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Das mag man bedauern, es ist aber eine Realität des Reellen. Erst in der komplexen Differentialrechnung wird an dieser Stelle alles glatt laufen.

Wir beginnen mit einer Analyse der Koeffizienten a_i . Durch gliedweises Differenzieren wird ihre Berechnung sehr einfach:

Satz *(Berechnung der Koeffizienten)*

Sei $\sum_n a_n (x - p)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann gilt

$$a_n = f^{(n)}(p)/n! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$. Gliedweises Differenzieren ergibt

$$f^{(n)}(x) = a_n n! + (n+1)!/1! a_{n+1} (x-p) + (n+2)!/2! a_{n+2} (x-p)^2 + \dots,$$

– und damit ist $f^{(n)}(p) = a_n n!$.

Damit ist folgender Versuch der Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe frei von Willkür:

Definition (*Taylor-Polynome und Taylor-Reihe einer Funktion*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $p \in P$. Dann setzen wir unter der Voraussetzung der Definiertheit der Ableitungen $f^{(k)}$:

$$T_p^n f(x) = \sum_{k \leq n} f^{(k)}(p)/k! (x-p)^k \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

$$T_p f(x) = \sum_n f^{(n)}(p)/n! (x-p)^n.$$

Wir fassen (unabhängig vom Definitionsbereich P der Funktion f) $T_p^n f$ als Polynom höchstens n -ten Grades und $T_p f$ als Potenzreihe auf, und nennen $T_p^n f$ das n -te *Taylor-Polynom* von f im Entwicklungspunkt p und $T_p f$ die (formale) *Taylor-Reihe* von f im Entwicklungspunkt p .

Ist $f = \sum_n a_n (x-p)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, so gilt $f = T_p f$ nach dem Satz über die Berechnung der Koeffizienten, d.h. die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt p stimmt mit f überein.

Die ersten Taylor-Polynome von f im Entwicklungspunkt p sind:

$$T_p^0 f(x) = f(p),$$

$$T_p^1 f(x) = f(p) + f'(p)(x-p),$$

$$T_p^2 f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + f''(p)/2 (x-p)^2,$$

$$T_p^3 f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + f''(p)/2 (x-p)^2 + f'''(p)/6 (x-p)^3.$$

Folgende Eigenschaften der Taylor-Polynome werden oft verwendet und sind leicht einzusehen:

Satz (*elementare Eigenschaften der Taylor-Polynome*)

Sei $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal differenzierbar in $p \in P$. Dann gilt:

$$(a) \quad f^{(k)}(p) = (T_p^n f)^{(k)}(p) \quad \text{für alle } 0 \leq k \leq n,$$

$$(b) \quad (T_p^n f)^{(n+1)} = 0.$$

Das n -te Taylor-Polynom von f im Punkt p hält also bei der wiederholten Differentiation im Punkt p n -mal mit seiner Mutterfunktion f mit, verabschiedet sich dann aber ins Nichts.

Als Polynom n -ten Grades ist ein Taylor-Polynom vom Grad $n \geq 1$ unbeschränkt. Damit erhalten wir sicher keine aus globaler Sicht guten Ergebnisse, wenn wir eine beschränkte Funktion wie den Sinus auf $\mathbb{R}$ durch Taylor-Polynome ersetzen.

Wir haben nun alle Hilfsmittel zur Verfügung, um unser Vorhaben zu beginnen. Zuerst beweisen wir einen Hilfssatz, den wir als Verallgemeinerung des Satzes von Rolle ansehen können:

Satz (*Satz von Rolle, Variante für mehrfach differenzierbare Funktionen*)

Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar in $[a, b]$. Es gelte

$$g^{(0)}(a) = g^{(1)}(a) = \dots = g^{(n)}(a) = g(b) = 0.$$

Dann existiert ein $p \in]a, b[$ mit $g^{(n+1)}(p) = 0$.

Gleiches gilt, falls $g(a) = g^{(0)}(b) = \dots = g^{(n)}(b) = 0$.

Beweis

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion. Der Fall $n = 0$ folgt aus dem Satz von Rolle. Im Induktionsschritt von n nach $n+1$ existiert nach Induktionsvoraussetzung ein $q \in]a, b[$ mit $g^{(n+1)}(q) = 0$. Wegen $g^{(n+1)}(a) = 0$ existiert dann wieder nach dem Satz von Rolle ein $p \in]a, q[$ mit $g^{(n+2)}(p) = 0$.
 — Der Zusatz wird analog bewiesen.

Für den Beweis genügt de facto die etwas schwächere Voraussetzung „ n -mal stetig differenzierbar in $[a, b]$ und $(n+1)$ -mal differenzierbar in $]a, b[$ “. Die 0-fache stetige Differenzierbarkeit ist dabei einfach die Stetigkeit der Funktion. Für $n = 0$ geht obiger Satz dann in den alten Satz von Rolle über.

Damit können wir nun relativ leicht zeigen:

Satz (*Satz von Taylor, Lagrangesche Form des Restglieds*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar.

Weiter sei $p \in I$. Dann gibt es für alle $x \in I - \{p\}$ ein ξ zwischen p und x mit

$$f(x) = T_p^n f(x) + f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! (x-p)^{n+1}.$$

Die Darstellung der Differenz $f(x) - T_p^n f(x)$ zwischen der Funktion und ihrer Taylor-Approximation in der Form $f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! (x-p)^{n+1}$ ist als *Lagrangesches Restglied* der Ordnung $n+1$ bekannt. In der Integrationstheorie werden wir noch andere Darstellungen kennenlernen.

Beweis

Sei also $x \in I$, $x \neq p$. Wir nehmen $x > p$ an. Der andere Fall wird analog behandelt. Wir definieren $g: [p, x] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(y) = (f(y) - T_p^n f(y)) - (f(x) - T_p^n f(x)) \left(\frac{y-p}{x-p} \right)^{n+1} \quad \text{für alle } y \in [p, x].$$

Dann gilt $g(x) = 0$ und wegen $f^{(k)}(p) = (T_p^n f)^{(k)}(p)$ für alle $0 \leq k \leq n$ auch $g^{(0)}(p) = \dots = g^{(n)}(p) = 0$.

Nach dem obigen Satz existiert also ein $\xi \in]p, x[$ mit $g^{(n+1)}(\xi) = 0$. Wegen $(T_p^n f)^{(n+1)} = 0$ ist dann aber

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - (f(x) - T_p^n f(x)) \frac{(n+1)!}{(x-p)^{n+1}},$$

– und dies zeigt die Behauptung.

Für ein Punktepaar $p < x$ genügt nach obiger Bemerkung die Voraussetzung „ n -mal stetig differenzierbar in $[p, x]$ und $(n+1)$ -mal differenzierbar in $]p, x[$ “ an die Funktion f . Der Satz von Taylor verallgemeinert damit den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Denn er liefert für stetige und in $]p, x[$ differenzierbare Funktionen $f: [p, x] \rightarrow \mathbb{R}$ die Darstellung $f(x) = f(p) + f'(\xi)(x-p)$, mit einem $\xi \in]p, x[$.

Die Restglieddarstellung liefert sofort:

Korollar (*Taylor-Entwicklung von Polynomen*)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom n -ten Grades. Dann gilt $f = T_p^n f$ für alle $p \in \mathbb{R}$.

Beweis

Es gilt $f^{(n+1)}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Das Lagrangesche Restglied der Ordnung $n+1$ ist also für alle $x \neq p$ gleich 0. Zudem gilt $f(p) = T_p^n f(p)$.

Ist zum Beispiel

$$f(x) = (x-3)^3 - 2(x-3)^2 + 4 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

so ist f ein Polynom dritten Grades mit Entwicklungspunkt 3. Es gilt

$$f'(x) = 3(x-3)^2 - 4(x-3),$$

$$f''(x) = 6(x-3) - 4,$$

$$f'''(x) = 6 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die Taylor-Entwicklung von f im Punkt 2 liefert also die Koeffizienten

$$a_0 = f^{(0)}(2)/0! = 1, \quad a_1 = f^{(1)}(2)/1! = 7,$$

$$a_2 = f^{(2)}(2)/2! = -5, \quad a_3 = f^{(3)}(2)/3! = 1.$$

Damit gilt also

$$f(x) = (x-2)^3 - 5(x-2)^2 + 7(x-2) + 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Der Satz von Taylor ist also auch zur eleganten algebraischen Umformung von Polynomen geeignet. Er lässt sich weiter auch zu einem Beweis der binomischen Formel verwenden. Wir diskutieren dies in den Übungen.

Mit Hilfe des Satzes von Taylor können wir nun auch leicht den erwünschten polynomiellen Approximationssatz beweisen:

Korollar (*polynomieller Approximationssatz*)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar.

Weiter sei $p \in I$. Dann gilt

$$f(x) = T_p^n f(x) + r(x) \quad \text{für alle } x \in I,$$

mit einer stetigen Funktion $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{x \rightarrow p} r(x)/(x-p)^n = 0.$$

Beweis

Wir definieren $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$r(x) = f(x) - T_p^n f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Dann ist r stetig. Sei nun $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine gegen p konvergente Folge in I mit $x_k \neq p$ für alle n . Nach dem Satz von Taylor existiert dann für jedes k ein ξ_k zwischen p und x_k mit

$$r(x_k) = f^{(n+1)}(\xi_k)/(n+1)! (x_k - p)^{n+1}.$$

Dann gilt $\lim_k \xi_k = p$, und aufgrund der Stetigkeit von $f^{(n+1)}$ in p ist

$$\begin{aligned} \lim_k r(x_k)/(x_k - p)^n &= \lim_k f^{(n+1)}(\xi_k)/(n+1)! (x_k - p) = \\ &= f^{(n+1)}(p)/(n+1)! (p - p) = 0. \end{aligned}$$

Mit der Landauschen „klein-o“-Notation können wir die Aussage des Approximationssatzes schreiben als

$$f(x) = T_p^n f(x) + o((x-p)^n) \quad \text{für } x \rightarrow p.$$

Der Satz von Taylor liefert gute Abschätzungen für das Restglied, wenn gute Schranken für die Ableitungen der betrachteten Funktion bekannt sind. Dies ist zum Beispiel für den Sinus und den Kosinus der Fall. Alle Ableitungen dieser Funktionen sind durch 1 beschränkt, und wir erhalten die folgenden globalen Versionen der alten Restgliedabschätzungen:

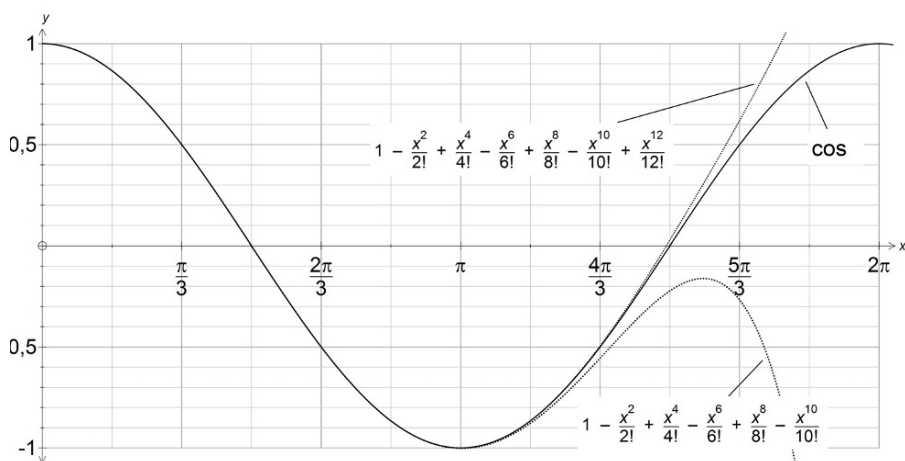
Korollar (*Taylor-Approximation des Sinus und Kosinus*)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$(a) \quad |\sin x - \sum_{k \leq n} (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)!| \leq |x|^{2n+3}/(2n+3)!,$$

$$(b) \quad |\cos x - \sum_{k \leq n} (-1)^k x^{2k}/(2k)!| \leq |x|^{2n+2}/(2n+2)!.$$

Das folgende Diagramm visualisiert, wie gut die Approximationen sind.



Taylor-Approximation des Kosinus

Schließlich können wir mit Hilfe des Satzes von Taylor auch leicht die oben schon angekündigte hohe Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens beweisen:

Korollar (Fehlerabschätzung für das Newton-Verfahren)

Sei $f: [p, x_0] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und konvex mit $f(p) = 0$, $f(x_0) > 0$ und $a_{\min} = f'(p) > 0$. Dann gilt für die monoton fallend gegen p konvergierende Newton-Iteration $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für den Startwert x_0 :

$$x_n - x_{n+1} \leq x_n - p \leq c_{\max}/(2 a_{\min}) (x_{n-1} - x_n)^2 \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

wobei $c_{\max} = \max(\{f''(x) \mid x \in [p, x_0]\})$.

Beweis

Sei $n \geq 1$. Die erste Ungleichung folgt aus $p \leq x_{n+1} \leq x_n$. Die zweite Ungleichung ist klar für $x_n = p$. Sei also $p < x_n$ (und damit auch $x_n < x_{n-1}$). Aufgrund der Konvexität von f ist f' monoton steigend, also ist

$$a_{\min} = \min(\{f'(x) \mid x \in [p, x_0]\}).$$

Damit ist $a_{\min} (x - p) \leq f(x)$ für alle $x \in [p, x_0]$, speziell gilt also

$$x_n - p \leq f(x_n)/a_{\min}.$$

Es genügt also zu zeigen:

$$(+)\quad f(x_n) \leq c_{\max}/2 (x_{n-1} - x_n)^2.$$

Beweis von (+)

Nach dem Satz von Taylor für f und den Entwicklungspunkt x_{n-1} existiert ein ξ zwischen x_n und x_{n-1} mit

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) + f''(\xi)/2 (x_n - x_{n-1})^2.$$

Nach der Rekursionsgleichung der Newton-Iteration gilt aber

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1}),$$

und damit ist

$$- f(x_n) = 0 + f''(\xi)/2 (x_n - x_{n-1})^2 \leq c_{\max}/2 (x_{n-1} - x_n)^2.$$

Um ein Gefühl für die quadratische Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens zu bekommen, nehmen wir an, dass $c_{\max}/(2 a_{\min}) \leq 1$ ist, und dass wir die Rekursion soweit durchgeführt haben, dass sich x_n nur noch ab der dritten Nachkommastelle von x_{n-1} unterscheidet. Dann gilt nach der zweiten Ungleichung

$$x_n - p \leq 1 \cdot (x_{n-1} - x_n)^2 \leq (1/100)^2 = 1/10000,$$

d.h. x_n und die gesuchte Nullstelle p stimmen bereits auf vier Nachkommastellen überein. Wegen $x_n - x_{n+1} \leq x_n - p$ nach der ersten Ungleichung stimmen dann aber auch x_{n+1} und x_n auf vier Nachkommastellen überein, und wie eben folgt, dass x_{n+1} und p nun auf acht Nachkommastellen übereinstimmen. Ebenso stimmen x_{n+2} und p auf 16 Nachkommastellen überein, usw.

Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe

Wir wenden uns noch der Frage nach der Entwicklung einer glatten Funktion in eine Potenzreihe zu. Der Satz von Taylor liefert genau dann eine Potenzreihenentwicklung, wenn die Restglieder mit wachsendem Entwicklungsgrad n gegen Null konvergieren. Dies wird in allen Intervallen erzwungen, in denen die Ableitungen uniform beschränkt sind. Genauer gilt:

Satz (*Konvergenz der Taylor-Reihe bei uniform beschränkten Ableitungen*)

Sei I ein Intervall, und sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Weiter sei $p \in I$, und es seien

$$J_1 = \{p - r \in I \mid r \geq 0, \exists s \geq 0 \forall n \forall \xi \in]p - r, p[\mid f^{(n)}(\xi) \mid \leq s\},$$

$$J_2 = \{p + r \in I \mid r \geq 0, \exists s \geq 0 \forall n \forall \xi \in]p, p + r[\mid f^{(n)}(\xi) \mid \leq s\}.$$

Dann sind J_1 und J_2 Intervalle mit $p \in J_1, J_2$, und es gilt

$$f(x) = T_p f(x) \text{ für alle } x \in J_1 \cup J_2.$$

Insbesondere lässt sich f auf allen Intervallen J mit Mittelpunkt p als Potenzreihe mit Entwicklungspunkt p darstellen, für die $J \subseteq J_1 \cup J_2$ gilt. Weiter gilt: Ist $J_1 \cup J_2 \neq \{p\}$, so konvergiert $T_p f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis

Offenbar gilt $p \in J_1$. Ist $p - r \in J_1$ und ist $0 \leq r' < r$, so ist auch $p - r' \in J_1$ (mit jeder Schranke s , die für $p - r$ geeignet ist). Damit ist J_1 ein Intervall. Es gilt $f(p) = T_p f(p)$. Sei also $x = p - r \in J_1$ für ein $r > 0$, und sei s wie in der Definition von J_1 für x . Dann gilt nach dem Satz von Taylor:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_p^n f(x)| \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in]p-r, p[} |f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! (x-p)^{n+1}| \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s r^{n+1}/(n+1)! = 0.$$

Damit gilt $f(x) = T_p f(x)$ für alle $x \in J_1$. Analoges gilt für J_2 .

Zum Beweis der Konvergenzaussage über $T_p f$ sei $x \in J_1 \cup J_2$, $x \neq p$. Weiter sei s wie in der Definition von J_1 bzw. J_2 für x . Aufgrund der Stetigkeit aller Ableitungen $f^{(n)}$ gilt dann auch $|f^{(n)}(p)| \leq s$ für alle n , und damit ist

$$- |T_p f(x)| \leq \sum_n |f^{(n)}(p)/n! (x-p)^n| \leq s \cdot \sum_n (x-p)^n/n! = s \cdot e^{x-p}.$$

Aus dem Satz erhalten wir noch einmal unsere Potenzreihenentwicklungen der Exponentialfunktion und des Sinus und Kosinus im Nullpunkt. In allen drei Fällen ist $J_1 \cup J_2 = \mathbb{R}$: Für die Exponentialfunktion können wir wegen $\exp^{(n)} = \exp$ für alle n die Ableitungsschranken $s = e^0$ für alle Intervalle $] -r, 0[$ und $s = e^r$ für alle Intervalle $]0, r[$ verwenden. Für den Sinus und Kosinus ist $s = 1$ für alle $r > 0$ geeignet. Für den natürlichen Logarithmus $\log :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und den Entwicklungspunkt $p = 1$ erhalten wir dagegen, wie leicht zu sehen ist, $J_1 = J_2 = \{p\}$, obwohl die Funktion in $]0, 2] =]1-1, 1+1]$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Der Satz liefert also nicht in allen Fällen das gewünschte Ergebnis, und wir müssen dann eine andere Methode verwenden, um das Intervall zu bestimmen, in dem die Taylor-Reihe gegen die Funktion konvergiert. Im letzten Kapitel hatten wir dies für den Logarithmus durch Heranziehen der geometrischen Reihe und gliedweises Differenzieren erreicht. Für das Intervall $[1, 2]$ führt aber folgende Variante des obigen Satzes zum Ziel:

Satz (Konvergenz der Taylor-Reihe bei uniform beschränkten Ableitungen, II)

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Weiter sei $[p, p+1] \subseteq I$ für ein $p \in I$, und es gebe ein s mit

$$|f^{(n+1)}(x)/n!| \leq s \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in]p, p+1[.$$

Dann gilt $f(x) = T_p f(x)$ für alle $x \in [p, p+1]$.

Eine analoge Aussage gilt für Intervalle $[p-1, p]$.

Beweis

Wie immer ist $f(p) = T_p f(p)$. Für alle $x \in]p, p+1]$ gilt wie oben:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - T_p^n f(x)| \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\xi \in]p, x[} |f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)! (x-p)^{n+1}| \leq$$

$$- \lim_{n \rightarrow \infty} s/(n+1) 1^{n+1} = 0.$$

Dieser Satz lässt sich auf den Logarithmus anwenden:

Korollar (*Logarithmus-Entwicklung durch Lagrangesche Restgliedabschätzung*)

Es gilt $\log(x) = T_1 \log(x)$ für alle $x \in [1, 2]$.

Beweis

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ gilt, wie leicht zu sehen ist,

$$|\log^{(n+1)}(x)| = n! / x^{n+1}.$$

– Damit ist $s = 1$ eine geeignete Schranke wie im obigen Satz.

Diese Analyse liefert zwar nicht die Logarithmus-Reihe im Intervall $]0, 1[$, beinhaltet andererseits aber den rechten Grenzpunkt 2. Wir erhalten also einen neuen vom Abelschen Grenzwertsatz unabhängigen Beweis für

$$\log(2) = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 \pm \dots$$

Scheitern der Potenzreihenentwicklung

Die Frage, ob eine glatte Funktion stets in einer gewissen Umgebung eines Punktes p ihres Definitionsbereichs in eine Potenzreihe entwickelbar ist, steht noch immer unbeantwortet im Raum. Wir wissen, wie die Koeffizienten im Fall der Existenz aussehen müssen, und wir haben verschiedene Methoden der Bestimmung von Entwicklungsbereichen kennengelernt. Im Allgemeinen muss die Frage aber verneint werden:

Satz (*Scheitern der Potenzreihenentwicklung*)

Es gibt eine glatte Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- (a) Die Taylor-Reihe $T_0 f$ von f konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.
- (b) $f(x) \neq T_0 f(x)$ für alle $x \neq 0$.

Insbesondere lässt sich f also in keiner Umgebung $] - \varepsilon, \varepsilon [$ des Nullpunkts in eine Potenzreihe entwickeln.

Beweis

Wir definieren $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f glatt, und es gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Beweis als Übung).

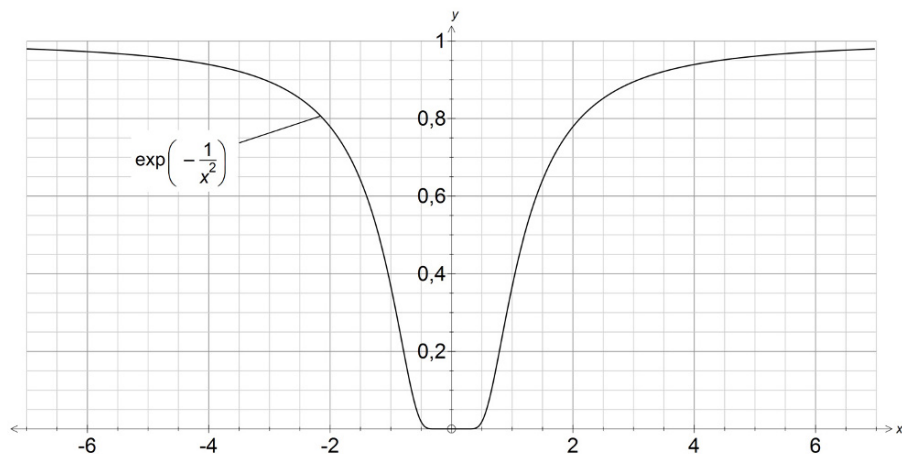
Damit gilt für alle n und für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$T_0^n f(x) = \sum_{k \leq n} f^{(k)}(0)/k! (x-0)^k = 0,$$

$$T_0 f(x) = \sum_n f^{(n)}(0)/n! (x-0)^n = 0.$$

Die Taylor-Reihe von f konvergiert also überall gegen 0, stimmt aber nur im Nullpunkt mit f überein. Dies zeigt (a) und (b). Der Zusatz folgt daraus,

dass im Fall der Existenz die Potenzreihenentwicklung von f in $] - \varepsilon, \varepsilon[$ mit der Taylor-Reihe von f in $] - \varepsilon, \varepsilon[$ übereinstimmt (nach obigem Satz über die Berechnung der Koeffizienten).



Definieren wir $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = e^{-1/x^2}$ für $x > 0$, so konvergiert $T_0 g$ genau auf $] - \infty, 0]$ gegen g . Diese Variante zeigt, dass die Übereinstimmung von $T_p g$ mit g nicht symmetrisch um den Entwicklungspunkt p sein muss. Damit ist insbesondere eine Aufspaltung der Konvergenzanalyse in linke und rechte Intervalle $[x_1, p]$ bzw. $[p, x_2]$ zuweilen angebracht, wie sie ja in den obigen Konvergenzsätzen bereits erscheint.

Die Funktion f des Beweises zeigt, dass die Taylor-Polynome einer Funktion nicht in jedem Fall mit immer größer werdendem Entwicklungsgrad immer näher an den Funktionswerten liegen, auch nicht in einer kleinen Umgebung des Entwicklungspunktes. Die Funktion ist im Nullpunkt derart flach, dass auch die besten polynomiell auflösenden Mikroskope sie dort nicht von der Nullfunktion unterscheiden können. Der Satz von Taylor ist damit im Allgemeinen „nur“ ein lokaler Approximationssatz. Er liefert eine bessere garantierte Güte der Annäherung an den Entwicklungspunkt als der lineare Ansatz, der Funktionen in einem Punkt lediglich als eine Gerade ansieht und nicht als ein oft angemesseneres Polynom n -ten Grades. Dass in vielen interessanten Fällen die Taylor-Entwicklung einer Funktion die Funktion global oder zumindest in einer Umgebung des Entwicklungspunktes darstellt, ist ein Phänomen, das sich wohl erst innerhalb der komplexen Analysis (der Funktionentheorie) vollends würdigen und beleuchten lässt. Dort gelten erstaunlich starke und allgemeine Sätze, die alle „pathologischen“ Gegenbeispiele des Reellen aus dem Weg räumen: Jede in einem Punkt $p \in \mathbb{C}$ differenzierbare Funktion $f: P \rightarrow \mathbb{C}$, $P \subseteq \mathbb{C}$, lässt sich in p beliebig oft differenzieren und dort zudem in eine Potenzreihe mit einem positiven Konvergenzradius entwickeln. Dabei wird die komplexe Differenzierbarkeit von f in p genau wie im Reellen über die Existenz des Differentialquotienten

$$\lim_{z \rightarrow p} (f(z) - f(p))/(z - p) \quad (\textit{komplexer Differentialquotient})$$

erklärt, aber die im Vergleich zu den reellen Zahlen komplexere Konvergenz von z gegen p in $\mathbb{C}$ erzwingt bessere Eigenschaften für differenzierbare Funktionen. Die im Komplexen gewonnenen Potenzreihenentwicklungen gelten dann auch im Reellen, und damit sind die differenzierbaren Funktionen der komplexen Analysis die eigentliche Quelle der Potenzreihenentwicklung.

Übungen

4.3.1 Potenzreihen

Übung 1

Sei $\sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Zeigen Sie, dass mit „ $1/0 = \infty$ “ und „ $1/\infty = 0$ “ gilt:

(a) $R = 1 / \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$. *(Formel von Cauchy-Hadamard)*

(b) Ist $a_n \neq 0$ für alle n , so gilt im Falle der Existenz des Grenzwerts

$R = 1 / \lim_n |a_{n+1}/a_n|$. *(Formel von Euler)*

Übung 2

Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_n a_n x^n$ mit $a_n \in \{0, 1\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\sum_n x^n / 2^n$, $x \in \mathbb{R}$,

(c) $\sum_{n \geq 1} (x - 1)^n / n$, $x \in \mathbb{R}$,

(d) $\sum_{n \geq 1} z^n / n^2$, $z \in \mathbb{C}$,

(e) $\sum_{n \geq 1} \log(n) x^n$, $x \in \mathbb{R}$,

(f) $\sum_n x^{n!}$, $x \in \mathbb{R}$,

(g) $\sum_n \binom{2n}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$.

Übung 3

Sei R der Konvergenzradius der reellen Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden reellen Potenzreihen:

(a) $\sum_n a_n^k x^n$,

(b) $\sum_n a_n x^{k^n}$,

(c) $\sum_n a_n n^k x^n$.

Übung 4

Bestimmen Sie die folgenden Summen für alle x mit $|x| < 1$:

(a) $\sum_{n \geq 1} x^n / (n + 1)$,

(b) $\sum_{n \geq 1} x^n / (2n - 1)$.

Übung 5

Zeigen Sie: $|\log(1+x) - x| \leq x^2$ für alle x mit $|x| \leq 1/2$.

Übung 6

Seien $f = \sum_n a_n x^n$ und $g = \sum_n b_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien R_1 bzw. R_2 . Weiter sei R das Minimum von R_1 und R_2 . Zeigen Sie, dass sich die Funktionen $f+g$ und $f \cdot g$ in $] -R, R[$ als Potenzreihen darstellen lassen. Kann der Konvergenzradius dieser Reihen größer sein als R ?

Übung 7

Seien $f = \sum_n a_n x^n$ und $g = \sum_n b_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien R_1 bzw. R_2 . Weiter sei R der Konvergenzradius von $\sum_n (a_n b_n) x^n$. Zeigen Sie, dass $R \geq R_1 \cdot R_2$ gilt. Kann $R > R_1 \cdot R_2$ gelten?

Übung 8

Seien $f = \sum_n a_n x^n$ und $g = \sum_n b_n x^n$ Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien. Es gebe eine Nullfolge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k \neq 0$ und $f(x_k) = g(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[Zeigen Sie die Aussage durch Induktion nach n . Betrachten Sie im Induktionsschritt von n nach $n+1$ Schranken für die unendliche Summe des Terms $x \cdot \sum_{m \geq n+1} (a_m - b_m) x^{m-n-1}$.]

Übung 9

Sei $f = \sum_n a_n x^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R . Weiter sei $0 < r < R$, und es sei $N = \{x \in [-r, r] \mid f(x) = 0\}$ unendlich. Zeigen Sie, dass $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Übung 10

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen, d.h. es gilt $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ für alle n . Weiter sei $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ der goldene Schnitt. Zeigen Sie unter Verwendung von $\lim_n a_n/a_{n+1} = 1/\varphi$:

- Die Potenzreihe $\sum_n a_n x^n$ hat den Konvergenzradius $1/\varphi$.
- Für alle x mit $|x| < 1/\varphi$ gilt $\sum_n a_n x^n = 1/(1 - x - x^2)$.

Übung 11

Seien $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = x/(1 + n^2 x^2) \quad \text{für alle } x \in [-1, 1] \text{ und alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen die Nullfunktion auf $[-1, 1]$,
- $\lim_n f'_n(1) = 1 \neq (\lim_{n \in \mathbb{N}} f_n)'(1)$.

Übung 12

Zeigen Sie, dass für alle $x \in]-1, 1[$ gilt:

$$\log((1+x)/(1-x)) = 2 \sum_n x^{2n+1}/(2n+1).$$

Gewinnen Sie hieraus eine weitere Reihendarstellung für $\log(2)$.

Übung 13

Sei $f:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ für alle x mit $|x| < 1$.

- (a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung $\sum_n a_n x^n$ von f .
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) die Potenzreihenentwicklung $\sum_n b_n x^n$ von $\arcsin:]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$.

[Betrachten Sie die Potenzreihenentwicklung von $(1+y)^{-1/2}$ und setzen Sie dann $y = -x^2$. Der Satz über das gliedweise Differenzieren liefert (b).]

4.3.2 Die Taylor-Entwicklung*Übung 1*

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt beliebig oft differenzierbar ist, und dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

[Hinweis: Zeigen Sie durch Induktion, dass es Polynome p_n gibt mit

$$f^{(n)}(x) = p_n(1/x) f(x) \quad \text{für alle } x \neq 0.]$$

Übung 2

Sei $f: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = e^{-1/z^2}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 0$.

Ist f stetig in den Nullpunkt fortsetzbar?

Übung 3

Beweisen Sie den binomischen Lehrsatz

$$(x+p)^n = \sum_{k \leq n} \binom{n}{k} x^k p^{n-k} \quad \text{für alle } x, p \in \mathbb{R}$$

durch Taylor-Entwicklung der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = (x+p)^n \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Übung 4

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f:]-\infty, 0[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1/x^2$ für alle $x < 0$ im Entwicklungspunkt $p = -1$.

Übung 5

Sei $s \in \mathbb{R}$, und sei $f_s :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_s(x) = (1+x)^s \quad \text{für alle } x \text{ mit } |x| < 1.$$

Bestimmen Sie die Ableitungen $f_s^{(n)}$ und die Taylor-Reihe $T_0 f_s$ von f_s im Entwicklungspunkt 0.

Übung 6

Sei $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = (1+x)^{1/2}$ für alle x mit $|x| < 1$.

Bestimmen Sie die Taylor-Approximation $T_0^1 f$ und beweisen Sie mit Hilfe dieser Approximation, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} ((x + x^{1/2})^{1/2} - x^{1/2}) = 1/2.$$

Übung 7

Sei $f = \sum_n a_n (x-p)^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R . Weiter sei $q \in]p-R, p+R[$, und es sei $g = T_q f$ die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt q . Zeigen Sie, dass die Funktionen f und g auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen.

Übung 8

Sei I ein offenes Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar. Weiter sei $p \in I$, und es gelte

$$f(x) = a_0 + a_1(x-p) + \dots + a_n(x-p)^n + r(x) \quad \text{für alle } x \in I,$$

mit einer Funktion $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow p} r(x)/(x-p)^n = 0$.

Zeigen Sie:

$$a_k = f^{(k)}(p)/k! \quad \text{für alle } k \leq n.$$

Übung 9

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Weiter sei $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Es gelte $|f^{(n)}(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in I$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $p \in I$ gilt: $T_p f(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Zwölfte Ergänzungen: Untersuchung spezieller Taylor-Entwicklungen

Die Logarithmus-Reihe hatten wir mit Hilfe des Satzes über gliedweises Differenzieren gefunden:

$$\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} / n \cdot x^n \quad \text{für alle } x \in]-1, 1[.$$

Mit dem Abelschen Grenzwertsatz konnten wir zudem zeigen, dass diese Reihendarstellung von $\log(1+x)$ auch noch im Punkt 1 gültig ist. Dagegen divergiert die Reihe in allen anderen Punkten. Insgesamt erhalten wir also die folgende Potenzreihenentwicklung des natürlichen Logarithmus im Entwicklungspunkt 1:

$$(+)\quad \log(x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} / n \cdot (x-1)^n, \quad \text{mit dem Konvergenzbereich }]0, 2].$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung ist klar, dass die mit Hilfe der Ableitungen berechnete Taylor-Entwicklung des natürlichen Logarithmus im Entwicklungspunkt 1 die Reihe in (+) reproduzieren wird. Es ist aber dennoch instruktiv, diese Berechnung durchzuführen:

Ergänzungsübung 1

- (a) Bestimmen Sie die Ableitungen $\log^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitungen $\log^{(n)}$ die Taylor-Reihe $T_1 \log$.
- (c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ableitungen $\log^{(n)}$ allgemeiner die Taylor-Reihe $T_p \log$ für einen beliebigen Entwicklungspunkt $p > 0$.

Umgekehrt müssen wir die Ableitungen des natürlichen Logarithmus gar nicht kennen, um die Taylor-Entwicklungen in (c) angeben zu können:

Ergänzungsübung 2

Sei $p > 0$. Bestimmen Sie die Taylor-Reihe $T_p \log$, indem Sie die Logarithmus-Reihe

$$\log(1+x) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} / n \cdot x^n$$

und „ $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ “ verwenden. Zeigen Sie weiter, dass der Konvergenzbereich der Potenzreihe $T_p \log$ das Intervall $]0, 2p]$ ist.

Wir bestimmen nun noch die Taylor-Entwicklungen einiger weiterer elementarer Funktionen, und wir zeigen, dass diese Taylor-Reihen mit den Funktionen übereinstimmen, d. h. Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen sind.

Ergänzungsübung 3

Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung $T_0 \exp_a$ und zeigen Sie, dass $T_0 \exp_a(x) = \exp_a(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Unter Verwendung der Ableitungen $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$ ist die Taylor-Analyse des Sinus und Kosinus Hyperbolicus ebenfalls leicht durchzuführen:

Ergänzungsübung 4

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklungen $T_0 \sinh$ und $T_0 \cosh$ und zeigen Sie, dass $T_0 \sinh(x) = \sinh(x)$ und $T_0 \cosh(x) = \cosh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Allgemeiner ist für Funktionen wie $\exp$, $\sin$, $\cos$, $\sinh$, $\cosh$, deren Ableitungen nach endlich vielen Schritten die Ausgangsfunktion reproduzieren, die Taylor-Entwicklung stets global erfolgreich:

Ergänzungsübung 5

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, und es gebe ein $n^* \geq 1$ mit $f^{(n^*)} = f$. Zeigen Sie, dass für jeden Entwicklungspunkt $p \in \mathbb{R}$ gilt:

$$T_p f(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Um bei aller globalen Analyse die lokale Natur der Taylor-Entwicklung nicht zu vernachlässigen, betrachten wir die folgende typische Fragestellung:

Welches Polynom dritten Grades ist eine gute Approximation für den Tangens im Nullpunkt?

Ergänzungsübung 6

Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_0^3 \tan$ und notieren Sie die Güte dieser Approximation an den Tangens.

Schließlich betrachten wir noch ein Beispiel für die Verkettung zweier Funktionen:

Ergänzungsübung 7

Sei $f:]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \log(\cos(x)) \quad \text{für alle } x \in]-\pi/2, \pi/2[.$$

- (a) Skizzieren Sie die Funktion f .
- (b) Bestimmen Sie das Taylor-Polynom $T_0^6 f$.

[zu (b): Entweder durch Ableiten oder durch Verwendung der Taylor-Entwicklungen von $\cos(x)$ und $\log(1+x)$.]

Anhänge

1. Bezüge zur Schulmathematik

Wir betrachten, wie, wann und welche der in diesem Buch behandelten Themen am Gymnasium typischerweise unterrichtet werden. Exemplarisch wird hierzu der seit 2004 gültige Bayerische Lehrplan für das Fach Mathematik am achtjährigen Gymnasium herangezogen, aus dem im Folgenden zitiert wird. Die Anordnung der Themen entspricht dabei in etwa den ihnen entsprechenden Jahrgangsstufen.

Rationale Zahlen

Rationale Zahlen und das Rechnen mit ihnen bilden ein zentrales Thema der sechsten Klasse. Dabei werden auch Dezimalzahlen eingeführt:

„Die bereits aus Jahrgangsstufe 5 im Zusammenhang mit Größen vertraute Kommaschreibweise wird jetzt mithilfe von Brüchen erklärt und systematisch ausgebaut. Dabei finden die Schüler Zusammenhänge zwischen der Primfaktorzerlegung des Nenners und der Möglichkeit, den Bruch als endlichen Dezimalbruch darzustellen. Bereits hier können auch unendliche Dezimalbrüche zur Sprache kommen.“ (M 6.1.2)

Beim Erlernen der Rechenregeln der vier Grundrechenarten kommen auch periodische Dezimalbrüche zur Sprache:

„Die Schüler lernen, positive Brüche zu multiplizieren und zu dividieren. Davon ausgehend finden sie Regeln für die entsprechenden Rechenoperationen bei Dezimalzahlen ... Die Kinder lernen periodische Dezimalbrüche kennen ...“ (M 6.2.2)

Funktionsbegriff

Der Funktionsbegriff wird in der achten Klasse eingeführt:

„Mit der Funktion wird ein zentraler mathematischer Begriff erarbeitet, der als universelles Hilfsmittel für das Mathematisieren von Zusammenhängen dient. Die Schüler beschäftigen sich näher mit linearen und einfachen gebrochen-rationalen Funktionen und üben beim Umgang damit auch Kalküle ein, die für Anwendungen in naturwissenschaftlichen Fächern und für nachfolgende Jahrgangsstufen notwendig sind.“ (Vorspann zu M8).

In den Folgejahren wird der Funktionsbegriffs vor allem durch die Analyse von Funktionsgraphen anschaulich ausgebaut. Hierunter fällt auch der Grenzwertbegriff für Funktionen und die Entwicklung der Differentialrechnung (s.u.).

Reelle Zahlen

In der neunten Klasse wird die Unvollständigkeit der rationalen Zahlen thematisiert:

„Die Schüler erkennen, dass die Menge der rationalen Zahlen sich zur Lösung bestimmter Problemstellungen als nicht ausreichend erweist. Beim Übergang zur Zahlenmenge der reellen Zahlen werden Probleme angesprochen, die bereits in der Mathematik und Philosophie der griechischen Antike ... eine große Rolle spielten.“ (Vorspann M9).

Beim Kennenlernen der reellen Zahlen spielen dann die Quadratwurzeln eine Schlüsselrolle:

„... Über den Wurzelbegriff lernen sie reelle Zahlen kennen, mithilfe numerischer Verfahren bestimmen sie exemplarisch die Dezimalbruchentwicklung irrationaler Zahlen. Schließlich erarbeiten sie Rechenregeln für Wurzeln und üben den Umgang mit Wurzeltermen.“ (M 9.1)

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen wird ebenfalls in der neunten Klasse behandelt:

„Die Jugendlichen machen sich mit Funktionen zweiten Grades und deren Graphen vertraut. Die Frage nach Nullstellen führt sie dabei unmittelbar zu quadratischen Gleichungen. Bei paralleler Betrachtung von Funktionsgraph und entsprechender Gleichung entwickeln sie Verständnis dafür, wie sich die Änderung von Koeffizienten eines quadratischen Funktionsterms auf Form und Lage der zugehörigen Parabel, auf deren Achsenpunkte und damit auf die Lösungen der entsprechenden Gleichungen auswirkt. Gleichzeitig lernen sie graphische und rechnerische Verfahren zum Lösen quadratischer Gleichungen kennen und erarbeiten sich die allgemeine Lösungsformel. Dabei lernen sie die binomischen Formeln als nützliches Hilfsmittel kennen.“ (M 9.2.1)

Schließlich werden auch allgemeine Wurzeln und die Exponentiation für rationale Exponenten eingeführt:

„Die Schüler verallgemeinern ihre Kenntnisse über Quadratwurzeln und übertragen die aus den vorherigen Jahrgangsstufen bekannten Rechenregeln auf Potenzen mit rationalen Exponenten, wobei sie auch Grundlagen für die Beschäftigung mit Exponentialfunktionen erwerben.“ (M 9.3)

Die trigonometrischen Funktionen

Dem Sinus, Kosinus und Tangens begegnen die Schüler zum ersten Mal im Geometrieunterricht der neunten Klasse:

„Bei der Beschäftigung mit den Zusammenhängen zwischen Winkelmaßen und Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken werden Sinus, Kosinus und Tangens für spitze Winkel definiert.“ (M 9.5.2)

In der zehnten Jahrgangsstufe werden Sinus und Kosinus dann schließlich als Funktionen auf den reellen Zahlen betrachtet, und erneut wird die Veranschaulichung durch Graphen betont:

„Beispielsweise bei Fragen der Landvermessung erkennen die Schüler, dass die bisherige Definition trigonometrischer Funktionen verallgemeinert werden muss. Mit Sinus- und Kosinussatz erwerben sie Hilfsmittel, die ihnen Berechnungen an beliebigen ebenen Dreiecken erlauben. Die Schüler ergänzen die Menge der ihnen bereits bekannten Funktionen durch die Sinus- und Kosinusfunktion. Sie lernen Periodizität als ein neues, charakteristisches Merkmal von Funktionen kennen und untersuchen den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion. Dabei nutzen sie die Möglichkeit zur Veranschaulichung mithilfe von Funktionsplottern.“ (M 10.2)

Die Kreiszahl π

Die Formeln für Umfang und Flächeninhalt von Kreisen werden bereits in der achten Klasse gelernt. In der zehnten Klasse wird das Thema dann im Rahmen von Approximationsprozessen vertieft:

„... Aufbauend [auf Grundkenntnissen aus der 8. Klasse] betrachten [die Schüler] nun leistungsstärkere Näherungsverfahren zur Bestimmung der Kreiszahl π und erkennen die Notwendigkeit, Grenzprozesse durchzuführen. Am Beispiel der Kugel wird veranschaulicht, dass ähnliche Grenzprozesse auch bei räumlichen Betrachtungen angewendet werden können ... Die Schüler ermitteln mithilfe eines numerischen Verfahrens Näherungswerte für π . Dabei werden sie von elektronischen Hilfsmitteln wie einem Tabellenkalkulationsprogramm unterstützt. Sie erfahren, dass sich Gelehrte seit über zweitausend Jahren immer wieder mit der Kreiszahl π und der „Quadratur des Kreises“ beschäftigt haben.“ (M 10.1 und 10.1.1)

Zur Sprache kommt in diesem Zusammenhang auch das Bogenmaß.

Exponentialfunktionen und Logarithmen

Die Exponentialfunktionen zu einer positiven Basis a lernen die Schüler in der zehnten Klasse kennen, basierend auf den in der neunten Klasse gesammelten Erfahrungen mit rationalen Exponenten:

„Vielfältige Beispiele aus Natur, Technik und Wirtschaft machen den Jugendlichen die große Bedeutung von Wachstums- und Zerfallsprozessen bewusst; beispielsweise beim Bevölkerungswachstum bzw. beim radioaktiven Zerfall erkennen sie, dass Wachstums- und Abklingprozesse häufig durch Exponentialfunktionen modelliert werden können. Aufbauend auf ihrem Wissen über Potenzen lernen sie die Exponentialfunktion sowie deren charakteristische Eigenschaften kennen und stellen insbesondere am Verlauf der zugehörigen Funktionsgraphen fest, wie sich exponentielles von linearem Wachstum unterscheidet.“ (M 10.3)

Exponentialgleichungen führen zu Logarithmen und ihren Rechengesetzen:

„Bei unterschiedlichen Problemstellungen, z. B. bei Altersbestimmungen, stellen die Jugendlichen Exponentialgleichungen auf, deren Lösung zur Definition des Logarithmus führt. Die Jugendlichen lernen, mit Logarithmen umzugehen.“ (M 10.3)

Die Eulersche Zahl e und die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion wird dagegen erst in der elften Klasse im Rahmen der Differentialrechnung eingeführt (s.u.).

Grenzwertbegriff und Limesnotation

Neben den betrachteten Grenzprozessen im Umfeld von π wird in der zehnten Klasse auch der uneigentliche Grenzwertbegriff für Funktionen anschaulich eingeführt:

„Anhand des unterschiedlichen Verhaltens von Funktionen an den Rändern ihres jeweiligen Definitionsbereichs gewinnen die Schüler aus der Anschauung heraus einen Grenzwertbegriff und verwenden erstmals systematisch die Grenzwertschreibweise [für $x \rightarrow \pm \infty$].“ (M 10.5.2)

In der elften Klasse wird dann auch das Konvergenzverhalten einer Funktion an einem Punkt betrachtet:

„Seit Jahrgangsstufe 8 kennen die Schüler Beispiele für gebrochen rationale Funktionen. Sie vertiefen nun ihre Kenntnisse über diesen Funktionstyp und erweitern den aus der Anschauung gewonnenen Grenzwertbegriff für $x \rightarrow \pm \infty$ auf den Fall $x \rightarrow x_0$. Den Grobverlauf eines Graphen erschließen sie sich durch Analyse des Funktionsterms. Dabei berücksichtigen die Schüler auch schräge Asymptoten, wenn deren Gleichung unmittelbar aus dem jeweiligen Funktionsterm ersichtlich ist.“ (M 11.1.1)

Die Diskussion eines Grenzwertbegriffs für Folgen ist nicht verbindlich vorgesehen.

Stetigkeit

Eine Behandlung des Stetigkeitsbegriffs wird im aktuellen bayerischen Lehrplan nicht vorgeschrieben. Auf der Basis des in der zehnten und elften Klasse anschaulich gewonnenen Grenzwertbegriffs für Funktionen wird direkt zur Differential- und Integralrechnung übergegangen:

„Anhand von Funktionen, bei denen sich in der Regel die Frage nach der Stetigkeit nicht stellt, erarbeiten die Schüler nun Methoden der Differential- und Integralrechnung.“ (Vorspann M11/12)

Differentialquotienten und Ableitungsregeln

Die Differentialrechnung beginnt in der elften Klasse mit der Untersuchung von Differenzenquotienten und elementaren Grenzübergängen:

„Ausgehend von graphischen Betrachtungen und numerischen Untersuchungen des Differenzenquotienten lernen die Jugendlichen den Differentialquotienten als Grenzwert kennen. Sie verstehen ihn als geeignetes Maß zur Beschreibung lokaler Änderungsraten und deuten ihn geometrisch am Graphen. Die dabei benötigten Grenzwerte ermitteln sie mithilfe elementarer Termumformungen. Die Schüler lernen die Betragsfunktion als eine Funktion kennen, die an einer Stelle ihres Definitionsbereichs nicht differenzierbar ist, und interpretieren diese Eigenschaft auch graphisch.“ (M 11.1.2)

Nach diesen lokalen Erfahrungen werden Ableitungsfunktionen eingeführt und die Ableitungsregeln etabliert, mit deren Hilfe rationale Funktionen differenziert werden können. In diesem Zusammenhang fällt auch der Begriff der Stammfunktion:

„Lokal ermittelte Werte für die Ableitung führen zum Begriff der Ableitungsfunktion. Die Schüler lernen, Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten zu differenzieren, und erarbeiten Regeln, die es ihnen erlauben, rationale Funktionen abzuleiten. Die Aufgabe, zu gegebener Ableitungsfunktion eine zugehörige Funktion zu finden, führt die Jugendlichen zum Begriff der Stammfunktion ...“ (M 11.1.3)

Die Ableitung von Sinus und Kosinus wird untersucht, und die Kettenregel wird im Zusammenhang mit der Wurzelfunktion diskutiert:

„Die Jugendlichen treffen beispielsweise bei der Untersuchung naturwissenschaftlicher Fragestellungen erneut auf die Sinus- und Kosinusfunktion, deren Ableitungsfunktionen sie sich auf graphischem Weg plausibel machen. Der Übergang von der lokalen Umkehroperation zur zugehörigen Umkehrfunktion führt die Schüler von der Quadratfunktion zur Wurzelfunktion, die häufig auch in Verkettung mit anderen Funktionen auftritt. Sie lernen, mit diesem Funktionstyp umzugehen sowie die Kettenregel anzuwenden ...“ (M 11.3)

Anwendungen der Differentiation

Ausführlich werden „Monotonie und lokale Extrema“ und Extremwertprobleme diskutiert. Mit dem Newton-Verfahren wird ein iteratives Verfahren zur Nullstellenbestimmung vorgestellt:

„Die Schüler erkennen, dass mithilfe der Ableitungsfunktion präzisere Aussagen über den Verlauf von Funktionsgraphen und das Änderungsverhalten von Funktionen gemacht werden können. Mit dem Newton-Verfahren lernen sie, ein effizientes iteratives Verfahren anzuwenden, das mithilfe der Ableitung Näherungswerte für Nullstellen liefert, die sich mit den bisherigen Kenntnissen nicht berechnen lassen.“ (M 11.1.4)

Dem Krümmungsbegriff begegnen die Schüler nicht im Zusammenhang mit der zweiten Ableitung, sondern innerhalb der Integrationstheorie:

„Auf der Grundlage ihrer Kenntnisse über Grenzwerte aus Jahrgangsstufe 11 gewinnen die Schüler mit der Integration ein tragfähiges Verfahren zur Messung von Flächeninhalten. Sie erarbeiten die wesentlichen Begriffe und Konzepte und wenden diese zielgerichtet an. Dabei lernen sie auch, durch Untersuchung des Krümmungsverhaltens von Funktionsgraphen deren Verlauf präziser zu beschreiben.

Beispielsweise beim Erschließen des Verlaufs des Graphen einer Integralfunktion aus dem der Integrandenfunktion und aus deren Ableitung lernen die Schüler neben der Monotonie nun auch die Krümmung als Eigenschaft von Graphen kennen. Sie untersuchen das Krümmungsverhalten an Beispielen bisher bekannter Funktionstypen.“ (M 12.1)

Die Eulersche Zahl e

Die Eulersche Zahl e wird in der elften Klasse durch das Problem der Ableitung der Exponentialfunktionen motiviert, und die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion wird untersucht:

„Die Schüler erkennen, dass sie noch nicht alle ihnen bekannten Funktionen differenzieren können. Beispielsweise bei der Frage nach der Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion lernen sie die Euler'sche Zahl e kennen. Hierbei bietet sich zur Abrundung der im Lauf der Gymnasialzeit aufgebauten Zahlvorstellung ein Rückblick auf die Zahlenbereichserweiterungen an.

Mithilfe anschaulicher Überlegungen erfassen die Jugendlichen den Zusammenhang zwischen den Graphen von natürlicher Exponential- und natürlicher Logarithmusfunktion. Durch Untersuchung einfacher Verknüpfungen der bisher bekannten Funktionen mit der natürlichen Exponential- und Logarithmusfunktion vertiefen sie ihre Kenntnisse.“ (M 11.4)

2. Literatur

Wir stellen einige Lehrbücher zur Analysis und Umgebung zusammen. Einige davon erscheinen für den Studienbeginn besonders geeignet, andere sind gute Begleiter im Studium und dienen dadurch auch zum Rück- und Ausblick. Die Liste ist keineswegs vollständig und auch von den Vorlieben des Autors geprägt. Ebenso sollen die folgenden persönlich gefärbten Kommentare dem Leser lediglich zur ersten Orientierung dienen. Sie können den neugierigen und vergleichenden Gang in eine Bibliothek nicht ersetzen. Und genauer müsste man sagen den „wiederholten Gang“, denn ein Buch, das im ersten Semester nicht mit einem sprechen will, kann bereits im dritten Semester einen freundlichen Ton annehmen und als höflicher Vertreter seiner Gattung erscheinen.

In jedem Fall wird dem Leser geraten, links und rechts neben sein Vorlesungsskript je ein Buch zur Analysis zur Seite zu legen, und sie ebenso regelmäßig zu benutzen wie die direkte Abbildung der Darstellung aus dem Hörsaal. Die Erfahrung von Studienschwierigkeiten in den ersten Wochen führt leider dazu, dass Bücher in dieser Zeit oft als zusätzliche Komplikation empfunden werden, da dort vieles wieder ein bisschen anders gemacht wird als hier. Aber gerade dieses Anderssein zeigt am besten, worum es eigentlich geht. Die Mathematik löst sich von ihren individuellen Darstellungen und wird im eigenen Kopf neu gedacht, vielleicht sogar neu erfunden. Und spätestens nach der Klausur des ersten Semesters, bei deren Vorbereitung naturgemäß das eigene Skript und die zugehörigen Übungsaufgaben im Vordergrund stehen, lohnt sich der Vergleich.

Wir beginnen mit den einführenden Lehrbüchern zur Analysis. Zuerst ist hier das Buch von Otto Forster als kompakter und vielbenutzter Klassiker zu nennen. Es enthält vergleichsweise wenig Erklärungen und Kommentare, ist aber dadurch gerade für Leser attraktiv, die die Prägnanz eines skriptartigen Buches schätzen. Weitere sehr erfolgreiche und einflussreiche klassische Darstellungen der Analysis sind die Bücher von Herbert Amann und Joachim Escher, Harro Heuser, Stefan Hildebrandt, Konrad Königsberger, Walter Rudin und Wolfgang Walter. Sie sind anspruchsvoll und weisen dabei eine inhaltliche Fülle auf, die oft weit mehr als ein Semester abdeckt. Eine andere Konzeption verfolgt das Buch von Jürgen Appell, indem es sich auf das Studium von reellen Funktionen und die

ausführliche Behandlung von Beispielen und Gegenbeispielen konzentriert. Einen eigenen Weg verfolgt auch der Text von Ehrhard Behrends, der speziell den Übergang von der Schule zur Hochschule im Blick hat und mit vielen ausführlichen Erklärungen aufwartet. Im Hinblick auf die Informatik wird die Reihe dieser Bücher noch durch das Buch von Folkmar Bornemann ergänzt, im Hinblick auf die mathematische Physik noch durch das Buch von Vladimir Zorich. Zu den „Analysis 1“-Büchern von Amann/Escher, Behrends, Forster, Heuser, Hildebrandt, Königsberger, Walter und Zorich existieren Fortsetzungsbände, sodass die Werke dann zusammengekommen zwei bis drei Semester abdecken, und dann später oft auch zum Nachschlagen, Erinnern und Vertiefen benutzt werden können.

Unter dem genannten Texten ist vor allem das Buch von Walter der Geschichte verpflichtet. Eine noch stärkere Einbeziehung der Geschichte bietet das Buch von Ernst Hairer und Gerhard Wanner, dessen englischer Originaltitel „Analysis by Its History“ die Konzeption treffend beschreibt. Ebenfalls stark historisch ausgerichtet ist das Analysis-Buch von Thomas Sonar, das sich zudem speziell an Studierende des Lehramts wendet. Die „3000 Jahre Analysis“ des gleichen Autors geben weiter eine umfassende und attraktive Darstellung der Geschichte des Gebiets, die von der griechisch-hellenistischen Antike bis zur Konstruktion der infinitesimalen Größen im 20. Jahrhundert reicht.

Die komplexe Exponentialfunktion haben wir in unserer Darstellung bereits gut kennengelernt, und an einigen Stellen wurde auf die allgemeinen Reichtümer und Eigenheiten der komplexen Analysis hingewiesen. Der Leser, der mehr über diese Welt erfahren möchte, kann schon jetzt mit dem Buch von Reinhold Remmert und Georg Schumacher oder dem Buch von Eberhard Freitag und Rolf Busam eine erste Bekanntschaft herstellen.

Neben der Analysis zählt die lineare Algebra zu den Grundvorlesungen, die die meisten Studienanfänger im ersten Fachsemester hören. Hier verweisen wir auf die Bücher von Gerd Fischer und Siegfried Bosch. Dabei ist das neugestaltete Buch von Fischer für Lehramtsstudierende, die eine breite und ausführlich erklärende Darstellung suchen, wohl besonders geeignet. Sowohl die Analysis als auch die lineare Algebra setzen eine gewisse Vertrautheit mit Zahlen und dem Zahlssystem voraus. Das Buch von Kristina Reiss und Gerald Schmieder bietet hier eine ausführliche Darstellung, die sich speziell an Lehramtsstudierende wendet und Schulbezüge diskutiert. Sie vermittelt neben einer genaueren Kenntnis der Zahlbereiche auch einen Grundstock an zahlentheoretischem Wissen, das viele Vorlesungen zur linearen Algebra ergänzt.

Ein noch heute sehr gut lesbarer Klassiker mit enormer Wirkung, der „Mathematik für das Lehramt“ thematisiert und darstellt, ist das Buch „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ von Felix Klein. Die Modifikation und Fortführung der genetischen Methode durch Otto Toeplitz wird im Hinblick auf die Analysis besonders deutlich in seiner aus dem Nachlass von Gottfried Köthe herausgegebenen „Infinitesimalrechnung“. Eine sehr schöne mehrbändige Gesamtdarstellung der Elementarmathematik mit Blick auf den Lehrberuf hat Pavel Alexandroff herausgegeben. Der dritte Band befasst sich hier mit der Analysis.

Schließlich darf der Autor vielleicht auch ein paar Sätze über die Bücher anfügen, die er (mit-)verfasst hat. Die „Grundbegriffe“ eignen sich in geeigneter Auswahl für einen Brückenkurs und dann als Begleittext für das Studium. Der Text will dem Leser helfen, die häufig anzutreffenden großen sprachlichen und formalen Schwierigkeiten im Umfeld von Beweisen, Mengen, Relationen, Funktionen, Zahlen und elementaren Begriffsbildungen zu überwinden. Die „Reellen Zahlen“ werfen studienbegleitend einen Blick auf eine der Grundstrukturen der Mathematik, der auch topologische, maßtheoretische, mengentheoretische und historische Aspekte umfasst. Die „Einführung in die Mengenlehre“ ist ein historisch bewusster Text, der vom Abitur an gelesen werden kann und eine Möglichkeit bieten soll, das Verständnis der modernen, das Unendliche er- und begreifenden Mathematik und ihrer Entstehung zu vertiefen. Schließlich ist „12 x 12“ eine von vier Autoren erarbeitete Zusammenstellung von 144 mathematischen Schlüsselkonzepten, die ab dem ersten Semester begleiten und bei der weiteren Orientierung helfen will.

- Alexandroff, Pavel (Hrsg.)** 1978 Enzyklopädie der Elementarmathematik.
Band III Analysis; *Vierte Auflage. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.*
- Amann, Herbert / Escher, Joachim** 2008 Analysis I; *3. Auflage. Birkhäuser, Basel.*
- Apell, Jürgen** 2008 Analysis in Beispielen und Gegenbeispielen; *Springer, Berlin.*
- Behrends, Ehrhard** 2008 Analysis I; *4. Auflage. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.*
- Bornemann, Folkmar** 2008 Konkrete Analysis für Studierende der Informatik;
Springer, Berlin.
- Bosch, Siegfried** 2009 Lineare Algebra; *4. Auflage. Springer, Berlin.*
- Deiser, Oliver** 2008 Reelle Zahlen; *2. Auflage. Springer, Berlin.*
- 2009 Einführung in die Mengenlehre; *3. Auflage. Springer, Berlin.*
 - 2010 Grundbegriffe der wissenschaftlichen Mathematik; *Springer, Berlin.*
- Deiser, Oliver / Lasser, Caroline / Vogt, Elmar / Werner, Dirk** 2011
12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik; *Spektrum, Heidelberg.*
- Fischer, Gerd** 2010 Lernbuch Lineare Algebra und analytische Geometrie;
Vieweg+Teubner, Wiesbaden.
- Forster, Otto** 2008 Analysis 1; *9. Auflage. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.*
- Freitag, Eberhard / Busam, Rolf** 2006 Funktionentheorie 1; *4. Auflage. Springer, Berlin.*
- Hairer, Ernst / Wanner, Gerhard** 2010 Analysis in historischer Entwicklung;
Springer, Berlin.
- Heuser, Harro** 2009 Analysis 1; *17. Auflage. Vieweg + Teubner, Wiesbaden.*
- Hildebrandt, Stefan** 2006 Analysis 1; *2. Auflage. Springer, Berlin.*
- Klein, Felix** 1968 Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. I;
Nachdruck der 4. Auflage von 1933. Springer, Berlin.

- Königsberger, Konrad** 2004 Analysis 1; 6. Auflage. Springer, Berlin.
- Rudin, Walter** 2009 Analysis; 4. Auflage. Oldenbourg Verlag, München.
- Reiss, Kristina / Schmieder, Gerald** 2007 Basiswissen Zahlentheorie; 2. Auflage. Springer, Berlin.
- Remmert, Reinhold / Schumacher, Georg** 2002 Funktionentheorie 1; 5. Auflage. Springer, Berlin.
- Sonar, Thomas** 1999 Einführung in die Analysis. Unter besonderer Berücksichtigung ihrer historischen Entwicklung für Studierende des Lehramtes; Vieweg, Braunschweig.
- 2011 3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen; Springer, Berlin.
- Toeplitz, Otto** 1972 Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band; aus dem Nachlass herausgegeben von Dr. Gottfried Köthe und zuerst erschienen 1949 bei Springer, Berlin. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.
- Walter, Wolfgang** 2004 Analysis 1; 7. Auflage. Springer, Berlin.
- Zorich, Vladimir** 2006 Analysis I; Springer, Berlin.

3. Verzeichnis der Abbildungen

Euklidischer Algorithmus	33
Irrationale Verhältnisse: Quadrat mit Seitenlänge a und Diagonale d	34
Konstruktion eines Pentagons	35
Pentagramm	35
Supremum und Infimum	41
Potenzfunktionen	48
komplexe Konjugation	58
Einheitswurzeln	63
n -te Wurzeln	76
Unstetigkeit einer Funktion	137
Fixpunktsatz	158
Werteverhalten stetiger Funktionen	159
Gleichmäßige Konvergenz: ε -Schlauch	162
Basispolynome	167
Bernstein-Polynom	168
Exponentialfunktion	174
Logarithmus	175
Exponentialfunktionen $\exp_a$	178
Logarithmusfunktionen $\log_2, \log, \log_{10}$	181
Potenzfunktionen x^a	182
Einschließung des Kosinus	188

Sinus und Kosinus	191
Tangens	193
Kotangens	193
Arkussinus	199
Arkuskosinus	199
Arkustangens und Arkuskotangens	200
Sekans	200
Kosekans	201
Arkussekans und Arkuskosekans	202
Sinus und Kosinus Hyperbolicus	203
Tangens und Kotangens Hyperbolicus	203
Area Sinus und Kosinus Hyperbolicus	204
Area Tangens und Kotangens Hyperbolicus	204
Trigonometrische Funktionen in geometrischen Figuren	211
Unstetigkeit der Ableitung	238
Mittelwertsatz der Differentialrechnung	242
Lokale Maxima und Minima	243
Steigungskriterium für Konvexität	255
Nullstellensatz für konvexe Funktionen	261
Newton-Iteration	262
Kurvendiskussion	264
Logarithmus-Reihe	277
Arkustangens-Reihe	277
Taylor-Approximation des Kosinus	286
Scheitern der Potenzreihenentwicklung	290

Alle Abbildungen wurden vom Autor erstellt.

4. Notationen

Voraussetzungen

$a \in A$, 17

$A \subseteq B$, $A \subset B$, 17

$\{x \mid \mathcal{E}(x)\}$, 17

$\emptyset$, $\{\}$, 17

$\{a\}$, $\{a, b\}$, 17

(a, b) , 18

$A \cup B$, $A \cap B$, 18

$A - B$, $A \setminus B$, 18

$A \times B$, A^2 , 18

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, 18

$\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, 18

$f: X \rightarrow Y$, 18

$f[X]$, 18

$f|A$, 19

f^{-1} , 19

$\neg$, 19

$\wedge$, $\vee$, 19

$\rightarrow$, $\leftrightarrow$, 19

$\forall$, $\exists$, 19

Kapitel 1.1

$\mathbb{A}$, 25

Kapitel 1.2

$-x$, 38

$x - y$, 38

x^{-1} , 38

x/y , 38

$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i$, 39

$\prod_{1 \leq i \leq n} x_i$, 39

x^n , 39

$[x, y]$, $]x, y[$, ..., 40

$|x|$, 40

$X \leq s$, $s \leq X$, 41

$\sup(X)$, $\inf(X)$, 41

$X + Y$, XY , 48

$B(n, k)$, 49

$\binom{n}{k}$, 49

$n!$, 49

$n, a_1 \dots a_k$, 50

Kapitel 1.3

$\mathbb{C}$, 56

i , 57

$\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, 58

$\bar{z}$, 58

$|z|$, 58

$\arg(z)$, 66

Kapitel 2.1

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 71

$\lim_n \rightarrow \infty$, 72, 74

$x_n \rightarrow x$, 74

$(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 74

$\sqrt[n]{x}$, 76

x^q , 77

$(x_{i_n})_{n \in \mathbb{N}}$, 78

$U_\varepsilon(x)$, 79

∞ , $-\infty$, 81

$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$, 83

$\limsup_n \rightarrow \infty$, $\liminf_n \rightarrow \infty$, 83

Kapitel 2.2 $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$, 94**Kapitel 2.3** $\sum_{i \in I} x_i$, 115 $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 120 e , 120 e^x , 121 $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, 122 $s^{[k]}, \binom{s}{k}$, 122 $B_s(x)$, 123 $B_s(z)$, 125**Kapitel 3.1** id , 136 $f + g, f - g, f \cdot g, \dots$, 138 $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$, 142 $\lim_{x \downarrow \uparrow p} f(x)$, 142 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, 142 $U_\varepsilon(p)$, 148**Kapitel 3.2** $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, 161 $\|f\|$, 163 $b_{k,n}, B_n$, 167**Kapitel 3.3** $\log$, 174 $\exp_a$, 177 a^x , 177 $\log_a$, 180 $\sin, \cos$, 185 $\tan, \cot$, 187 π , 189 $\arg(z)$, 195 $\zeta_{k,n}$, 196 $\arcsin, \arccos$, 198 $\arctan, \text{arccot}$, 198 $\sec, \csc$, 200 $\sinh, \cosh, \dots$, 202 $\text{arsinh}, \text{arcosh}, \dots$, 204**Kapitel 4.1** $g_{a,p,q}$, 215 $f'(p)$, 216 $Df(p)$, 216 $df/dx(p)$, 216 $df(x)/dx|_{x=p}$, 216 abs , 217 $o(g)$, 218 f' , 219 $f^{(n)}$, 220 $L(f)$, 229**Kapitel 4.2** $a(x_1, x_2)$, 254**Kapitel 4.3** $\sum_n a_n (x - p)^n$, 271 $\sum_n a_n (z - c)^n$, 280 T_p^n , 282 $T_p f$, 282

5. Index

Abel'sche Summation, 103
Abelsche Ungleichung, 104
Abelscher Grenzwertsatz, 278
Abelsches Konvergenzkriterium, 278
abgeschlossen, 40
Ableitung, 216, 219, 220
Ableitungstabelle, 230
Ableitung der Exponentialfunktion, 222
Ableitung der Monome, 221
Ableitung der Umkehrfunktion, 228
Ableitung des Logarithmus, 228
Ableitung von Sinus und Kosinus, 223
absolute Konvergenz, 105, 161
Abspalten von Nullstellen, 59
abzählbar, 27
abzählbar unendlich, 27
Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$, 27
Abzählbarkeit von $\mathbb{A}$, 28
Addition, 56, 138
Additionstheorem, 121, 123, 124, 173, 178, 186, 187, 203, 209
additives Inverses, 38
algebraisch, 25
algebraische Gleichung, 59
allgemeiner Mittelwertsatz, 250
alternierende harmonische Reihe, 103
alternierende Reihe, 102
analytische Definition der Zahl π , 189
angeordneter Körper, 40
Annahme von Extremwerten, 158
Anordnungsaxiome, 40, 44
Antisymmetrie, 40
Approximationssatz, 218, 285
Approximationssatz von Weierstraß, 167
archimedische Anordnung, 42, 43
Areafunktionen, 204
Argument (Funktion), 18
Argument (komplexe Zahl), 66, 195
arithmetisches Mittel, 260
Arkuskosekans, 201
Arkuskosinus, 198
Arkuskotangens, 198
Arkussekans, 201
Arkussinus, 198
Arkustangens, 198

Arkustangens-Reihe, 276
Artinsche Vermutung, 111
Assoziativgesetz, 37, 44

B-adisch, 52
baryzentrische Darstellung, 258
Basispolynom, 166
Bedingung für lokale Extrema, 243, 245
Berechnung der Koeffizienten, 281
Bernoulli-Ungleichung, 48
Bernstein-Polynom, 167
beschränkt, 41, 72, 155
bestimmt divergent, 81
Betrag, 40, 58
bijektiv, 19
Bild, 18
Binomialkoeffizient, 122
Binomialreihe, 123, 125
Binomische Reihe, 123, 125, 179, 272
Bogenmaß, 197
Bruch, 18, 38

Cauchy-Bedingung, 82, 99
Cauchy-Folge, 82
Cauchy-Produkt, 118
Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 268
Charakterisierung der Exponentialfunktion, 139
Charakterisierung der konstanten Funktionen, 246
Charakterisierung der Potenzfunktionen, 182

Darstellung in Polarkoordinaten, 195
Definitionsbereich, 18
Dezimalbruch, 18, 50
Dezimalbruchentwicklung, 50
Dezimaldarstellung, 50, 51
Diagonal-Aufzählung, 118
Diagonal-Produkt, 118
dicht, 43, 149
Differentialgleichung $f' = f$, 246
Differentialquotient, 216, 291
Differenzenquotienten, 216
differenzierbar, 216, 219
Dirichlet-Reihe, 272
Diskriminante, 61

Distributivgesetz, 37, 44
 divergent, 73
 Divergenz der harmonischen Reihe, 98
 Divergenzbedingung, 73
 Division, 38
 Dreiecksungleichung, 163
 Dualdarstellung, 52
 dyadischer Bruch, 52

Echte Teilmenge, 17
 Eigenschaftsstrich, 17
 Eindeutigkeit des Grenzwerts, 73
 eineindeutig, 19
 Einheitswurzel, 63, 67, 196
 Einpunktfortsetzung, 140, 143
 Element, 17
 Entwicklungspunkt, 271
 ε - δ -Bedingung, 144
 ε - δ -stetig, 144
 $\varepsilon/2$ -Argument, 74
 ε -Umgebung, 79
 essentielles Infimum, 83
 essentielles Supremum, 83
 Euklidische Länge, 268
 Euklidischer Algorithmus, 33
 Eulersche Formel, 186
 Eulersche Identität, 189
 Eulersche Produktdarstellung, 100
 Eulersche Zahl, 25, 120
 Existenz transzendenter Zahlen, 29
 Existenz von Wurzeln, 76, 157
 Existenzquantor, 19
 Exponent, 123
 Exponentialfunktion, 120, 122, 177
 Exponentialreihe, 119, 272
 Exponentiation, 77
 Extremalstelle, 242
 Extremum, 242
 Extremwert, 242

Fakultät, 49
 fallende Potenz, 122
 Familie, 115
 Fibonacci-Folge, 72
 Fibonacci-Zahlen, 71
 Fixpunktsatz, 157
 Folge, 71, 115
 Folge (Reihe als Folge), 93
 Formel von Cauchy-Hadamard, 274, 292
 Formel von Euler, 274, 292
 Fortsetzung, 140
 Fortsetzungssatz, 141
 Fundamentalsatz der Algebra, 57
 Funktion, 18
 Funktionalgleichung, 121
 Funktionswert, 18

Geometrische Multiplikationsregel, 197
 geometrische Reihe, 96, 272
 geometrisches Mittel, 260
 geordnetes Paar, 18
 Gerade, 215
 glatt, 220
 gleichmächtig, 27
 gleichmäßig konvergent, 161
 gleichmäßig stetig, 147, 160
 Gleichung, 59
 Glied, 71
 Glieder, 93
 gliedweises Differenzieren, 274
 Goldener Schnitt, 30
 Grad, 59
 Gregory-Reihe, 276
 Grenzwert, 72, 73, 161
 Grenzwert einer Funktion, 142

Halboffen, 40
 harmonischen Reihe, 97
 Häufungspunkt, 78, 79
 Hilbertsches Hotel, 26

Identität, 136
 Identitätssatz, 139
 I-Folge, 115
 imaginäre Einheit, 55, 57
 Imaginärteil, 58
 Indexfolge, 78
 Indexmenge, 115
 indirekter Beweis, 20
 Induktionsanfang, 20
 Induktionsschritt, 20
 Induktionsvoraussetzung, 20
 Infimum, 41
 infinitesimal, 43
 injektiv, 19
 Intervall, 40
 Intervallsatz, 160, 240
 Intervallschachtelung, 43
 invers, 37, 38, 44
 Irrationalität von $\sqrt{2}$, 24
 Irreflexivität, 40, 44
 iterierte Ableitung, 220

Jensensche Ungleichung, 259

Kartesisches Produkt, 18
 Kettenregel, 225
 Koeffizient, 59, 271
 Kommutativgesetz, 37, 44
 kompakt, 155
 komplexe Exponentialfunktion, 122
 komplexe Zahl, 56
 komponentenweise Konvergenz, 80

Komposition, 19
 Komposition stetiger Funktionen, 138
 Konjugation, 58
 Konjugierte, 58
 konkav, 254
 Kontinuum, 45
 konvergent, 73, 161
 Konvergenz der binomische Reihe, 124
 Konvergenz der geometrische Reihe, 96
 Konvergenz von Cauchy-Folgen, 82
 Konvergenzbedingung, 73
 Konvergenzbereich, 271
 Konvergenzkriterien, 99
 Konvergenzradius, 274
 Konvergenzsatz für Produktsummen, 104
 Konvergenzsatz von Weierstraß, 165
 Konvergenzverhalten von Potenzreihen, 273
 konvex, 254
 Körper, 37
 Körper der komplexen Zahlen, 56
 Körper der reellen Zahlen, 45
 Körperaxiome, 37
 Kosekans, 200
 Kosinus, 185
 Kosinus Hyperbolicus, 202
 Kotangens, 187
 Kotangens Hyperbolicus, 202
 Kreisaufwicklung, 194
 Kreisumfang, 197
 Kreiszahl, 25
 Kreuzprodukt, 18
 Krümmung, 253
 Kurvendiskussion, 265
 Kürzungsregel, 38
Lagrangesches Restglied, 283
 λ -Formulierung der Konvexität, 258
 Landau-Symbol, 218
 leere Menge, 17
 Leibniz-Kriterium, 102
 Leibniz-Reihe, 279
 Leibnizsche Reihe, 103
 Leitkoeffizient, 59
 l'Hospital, 250
 Limes, 72, 73, 161
 Limes Inferior, 83
 Limes Superior, 83
 Limesnotation, 74
 Limesregeln, 75
 lineare Ordnung, 40
 Linearisierung, 216
 Linearität der Ableitung, 224
 linksseitiger Grenzwert, 142
 Lipschitz-Konstante, 147

Lipschitz-stetig, 147
 Lipschitz-Stetigkeit, 247
 Loch, 42
 $\log(2)$, 279
 logarithmische Ableitung, 229
 Logarithmus, 174, 180
 Logarithmus-Reihe, 276
 lokaler Extremwert, 242
 lokales Extremum, 242
 lokales Maximum und Minimum, 242
 lösbar, 59
 Lösung, 59
 Lösungen von $f' = f$, 247
 Lösungsformel, 61
 Lücke, 42
Mādhava-Leibniz-Reihe, 279
 Majorante, 99
 Majorantenkriterium, 99
 Menge, 17
 Mengenklammern, 17
 Mengenkomprehension, 17
 Mercator-Reihe, 276
 Mittel, 260
 Mittelwertsatz, 249
 Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 241
 Mitternachtsformel, 61
 monoton, 72, 141
 Monotonie, 191
 Monotonie der Ableitung und Konvexität, 257
 Multiplikation, 56, 138, 195
 Multiplikationstheorem, 174

Nach oben (unten) beschränkt, 41
 Nachdifferenzieren, 226
 Näherung, 51
 natürliche Logarithmus, 174
 Nenner, 38
 Neutralität, 37
 Newton-Iteration, 262
 Newton-Verfahren, 260, 286
 Null, 18
 Nullfolge, 97
 Nullstelle, 59, 190
 Nullstellen von Polynomen, 157
 Nullstellensatz, 156, 260
 Nullstellensatz der Differentialrechnung, 239

Obere Schranke, 41
 Obermenge, 17
 offen, 40
 Oktaven, 57

Paar, 18
 Partialsumme, 93

Pentagon, 35
 Pentagramm, 35
 Periodizität, 190
 $\pi/4$, 279
 Polarkoordinaten, 195
 Polynom, 59
 Polynomfunktion, 46, 59
 polynomieller Approximationssatz, 285
 positiv, 49
 Potenzreihe, 271
 Potenzreihen in $\mathbb{C}$, 280
 Prinzip des kleinsten Ausreißers, 20
 Produkt, 116
 Produktregel, 224
 Punkt, 18
 punktweise Konvergenz, 161
 punktweise Operationen, 138
 quadratische Gleichung, 60
 quadratischen Ergänzung, 60

Quadratwurzel, 76
 Quaternionen, 57
 Quotientenkriterium, 101
 Quotientenregel, 225, 227

Rationale Funktionen, 138
 rationale Funktion, 46
 Realteil, 58
 Rechteck-Aufzählung, 118
 Rechteck-Produkt, 119
 rechtsseitiger Grenzwert, 142
 Reflexivität, 40
 Regeln von l'Hospital, 250, 251
 Reihe, 93
 Reihendarstellung von $\log(2)$, 279
 Reihendarstellung von $\pi/4$, 279
 rein imaginär, 58
 reinquadratische Gleichung, 60
 Restglied, 283
 Restgliedabschätzung, 119
 Riemannsche Vermutung, 100, 111

Satz von Bolzano-Weierstraß, 78, 80
 Satz von Darboux, 240
 Satz von Dini, 164
 Satz von Gauß, 24
 Satz von Rolle, 240, 283
 Satz von Taylor, 283
 Satz von Weierstraß, 158
 Schrankensatz, 247
 Sekans, 200
 Sinus, 185
 Sinus Hyperbolicus, 202
 Skalarprodukt, 268
 Skalierung, 138
 Stammfunktion, 240

starke Induktion, 20
 Startwert, 262
 Steigung, 215
 Steigungskriterium, 254
 Stelle, 18
 stetig, 136
 stetig, ε - δ , 144
 stetig differenzierbar, 219
 stetige Fortsetzung, 140
 Stetigkeit der Ableitung, 237
 Stetigkeit der Umkehrfunktion, 146
 Stetigkeitssatz, 162
 streng konkav und konvex, 254
 streng monoton, 72, 141
 strikt, 242
 Subtraktion, 38, 138
 Summanden, 93
 Summe, 74, 94, 115
 Summenformel, 20
 Supremum, 41
 Supremumsnorm, 163
 surjektiv, 19

Tangens, 187
 Tangens Hyperbolicus, 202
 Tangente, 216
 Tangentenkriterium, 256
 Tangentensteigung in Extremwerten, 238
 Taylor-Polynom, 282
 Taylor-Reihe, 282
 Teilfolge, 78
 Teilmenge, 17
 Teleskopsumme, 95
 totale Ordnung, 40
 Transitivität, 40, 44
 transzendent, 25
 Trunkierung, 51

Ueberabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, 28
 Umgebung, 151
 ε -Umgebung, 79
 Umgebung, 79
 Umgebungs-Bedingung, 144
 umgebungsstetig, 144
 Umkehrfunktion, 19, 228
 Umordnung, 114
 Umordnungssatz, 114
 Unbestimmte, 59
 uneigentlich konvergent, 81
 uneigentliches Intervall, 40
 unendliche Reihe, 93
 unendliche Summe, 94
 untere Schranke, 41

Vergleichbarkeit, 40, 44
 Verknüpfung, 19

Verlaufsanalyse des Kosinus, 188
Vertauschung von Differentiation und
Summation, 275
Vietasche Regeln, 65
vollständig angeordnet, 42
vollständige Induktion, 20
Vollständigkeit, 42
Vollständigkeitsaxiom, 42, 44, 85

Wechselwegnahme, 33, 34,
Wendepunkt, 258
Wendestelle, 258
Wertebereich, 18
Wertevorrat, 18
Widerspruchsbeweis, 20
Wurzelkriterium, 101
Wurzeln, 76, 157

Zähler, 38
Zweifaktor, 23
Zweipunktdarstellung, 259
zweite Ableitung und Konvexität, 258
Zwischenwertsatz, 157
Zwischenwertsatz der
Differentialrechnung, 239