

Beispiele

Sie sollten sich bei jeder mathematischen Aussage, die Sie zu Gesicht bekommen, fragen, ob Sie dazu ein Beispiel kennen. Warum? Der Hauptgrund ist der, dass Sie sich dadurch zwingen, genau zu lesen; dadurch verstehen Sie eine Aussage besser, Sie können sich zum Beispiel eine Meinung darüber bilden, ob das in der Aussage beschriebene Phänomen selbstverständlich oder außergewöhnlich ist. Stellen Sie zusätzliche Fragen an eine mathematische Aussage und überzeugen Sie sich, wie die Antwort auf diese Fragen bei den von Ihnen konstruierten Beispielen lautet.

Nach Beispielen kann man bei allen Formen mathematischer Aussagen, insbesondere bei Definitionen, Sätzen und Beweisen fragen.

Beispiele zu Definitionen.

Leitfragen: Gibt es viele Beispiele? Sind sie einfach zu finden? Oder ist es schwierig, Beispiele zu konstruieren? (Beschreibt die Definition ein seltenes Objekt?) Oder gibt es vielleicht überhaupt kein Beispiel?

Sie sollten für jeden Begriff ein Beispiel wissen, nein: mindestens zwei Beispiele, nämlich ein triviales und ein nichttriviales.

- Sei G eine Gruppe mit der Verknüpfung $\cdot$. Eine Teilmenge U von G heißt **Untergruppe** von G , falls U bezüglich der (auf U eingeschränkten) Operation $\cdot$ selbst eine Gruppe ist.
Jede Gruppe G hat **triviale Untergruppen**, nämlich G selbst und $\{e\}$, wobei e das neutrale Element von G ist.
Nichttriviales Beispiel: $2\mathbb{Z}$ ist Untergruppe der additiven Gruppe $\mathbb{Z}$.
- *Triviale Beispiele* von linearen Abbildungen: Nullabbildung und Identität;
Nichttriviale Beispiele von linearen Abbildungen: Basistransformationen, Projektionen, Spiegelungen,...
- *Triviales Beispiel* eines Polynoms: das Polynom 2 ;
Nichttriviales Beispiel eines Polynoms: Das Polynom x^2+1 .

(Was ist ein ‚triviales‘ Polynom? Meiner Meinung nach ist dies ein solches, das kein ‚normaler Mensch‘ als Polynom akzeptieren würde. Da in einem ‚richtigen‘ Polynom eine Unbekannte vorkommen muss, sind demgemäß die konstanten Polynome trivial. Über $\mathbb{R}$ sind also die reellen Zahlen die trivialen Polynome.)

Beispiele zu Sätzen.

Leitfragen: Ist der Satz überraschend oder handelt es sich um eine erwartete Aussage? Wäre ich aufgrund meines Wissens selbst darauf gekommen, den Satz zu formulieren? Ist die Aussage des Satzes überhaupt glaubhaft?

Ich halte die Aussagen der folgenden Sätze für so überraschend, dass ich ein Beispiel benötigte, um mich subjektiv zu versichern, dass die Aussage richtig ist.

- Jede endliche Menge hat ebenso viele Teilmengen gerader Mächtigkeit wie Teilmengen ungerader Mächtigkeit.
- Seien $p_1, \dots, p_n$ die ersten n Primzahlen. Man teile diese n Zahlen beliebig in zwei Teilmengen auf und bilde das Produkt A bzw. B der Elemente jeder der beiden Teilmengen. Dann ist $A+B$ eine Primzahl, falls sie größer als 1 und kleiner als $(p_{n+1})^2$ ist. (Honsberger, *More Mathematical Morsels*).

Beispiele zu Beweisen.

Leitfragen: Haben Sie den Gedankengang des Beweises wirklich verstanden? Ist der Beweis Routine, oder gibt es einen Trick? Sagt der Beweis mehr als in dem Satz tatsächlich formuliert ist?

Was ich meine, kann man etwa an dem euklidischen Beweis für den Satz sehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dieser Beweis lautet (in Kurzform):

Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, \dots, p_n$. Da die natürliche Zahl $m := p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ größer als 1 ist, muss sie durch eine Primzahl teilbar sein. Nach Annahme muss sie also durch eine der Primzahlen $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$ teilbar sein. Dann teilt p_i aber 1, da p_i sowohl m als auch das Produkt $p_1 \cdot \dots \cdot p_n$ teilt: Ein Widerspruch.

Ein Beispiel für diesen Beweis ist das folgende:



Sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$. Dann muss $m = p_1 \cdot p_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1$ durch eine Primzahl teilbar sein. Dies kann weder 2 noch 3 sein. Also gibt es eine dritte Primzahl, nämlich $p_3 = 7$.

Aufgrund dieses Beispiels sieht man nicht nur, wie der Beweis funktioniert, sondern kann ihm auch noch eine konstruktive Version geben:



Seien $p_1, \dots, p_n$ Primzahlen. Dann ist jede Primzahl p_{n+1} , welche die Zahl $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ teilt, eine weitere (das heißt von $p_1, \dots, p_n$ verschiedene) Primzahl.

Merke: Man kann nie zu viele Beispiele kennen! Versuchen Sie immer, an den Beispielen das Wesentliche zu sehen!

Übungen

- 1 Geben Sie triviale und nichttriviale Beispiele zu folgenden Begriffen an: Teiler, Unterraum, Erzeugendensystem eines Vektorraums, linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums, Basis von K^n .
- 2 Ein **Primzahltrilling** ist ein Tripel von Primzahlen p, q und r , für die gilt $r = q+2$ und $q = p+2$. Kennen Sie ein Beispiel eines Primzahltrillings? Kennen Sie alle Beispiele? (Beweis?)
[Hinweis: Schlagen Sie in der zahlentheoretischen Literatur das Stichwort Primzahltrilling nach!]
[Noch ein Hinweis: Um zu entscheiden, ob hier ein Druckfehler vorliegt, sollten Sie vorher die Aufgabe lösen!]
- 3 Konstruieren Sie Beispiele zu den im Text genannten Sätzen.
- 4 Beweisen Sie die im Text erwähnten Sätze.