

Definitionen

Man kann aus den Grundbegriffen und aus bereits definierten Begriffen neue Begriffe definieren: Wenn etwa der Begriff „ganze Zahl“ schon bekannt ist, kann man die folgenden Begriffe definieren:



Eine ganze Zahl n heißt eine **natürliche Zahl**, wenn $n \geq 0$ ist.



Seien t und n ganze Zahlen. Dann heißt t ein **Teiler** von n , falls es eine ganze Zahl s gibt mit $t \cdot s = n$.



Eine ganze Zahl g heißt **gerade**, falls 2 ein Teiler von g ist. Die Menge der geraden ganzen Zahlen bezeichnen wir mit $2\mathbb{Z}$.



Eine natürliche Zahl $p > 1$ wird eine **Primzahl** genannt, falls 1 und p die einzigen natürlichen Zahlen sind, die p teilen.

Formal gesehen sind Definitionen nur Abkürzungen; man kann jederzeit den definierten Begriff durch die definierende Beschreibung ersetzen. Zum Beispiel kann man „Primzahl“ stets durch „ganze Zahl $p > 1$, die nur 1 und p als positive Teiler hat“ ersetzen. Manchmal muss man eine solche Ersetzung auch vornehmen, etwa dann, wenn man beweisen will, dass eine gewisse Zahl n eine Primzahl ist; dann muss man (sofern man noch keine anderen Charakterisierungen zur Verfügung hat) sich (und andere) überzeugen, dass n größer als 1 ist und nur 1 und n als positive Teiler hat.

Die Vorstellung, eine Definition sei 'nur' eine Abkürzung, setzt aber die Bedeutung von Definitionen herab. Jede Definition ist ein schöpferischer Akt! Es ist bei der mathematischen Arbeit entscheidend, den wichtigen Objekten und Eigenschaften Namen zu geben. Dadurch werden Begriffe geschaffen und diese einer Betrachtung zugänglich gemacht.

Zögern Sie nicht, beim Lösen von Übungsaufgaben oder bei der Lektüre mathematischer Texte die Objekte, die Ihnen zu schaffen machen, mit Bezeichnungen zu versehen. Es kommt dabei in erster Linie nicht auf ein treffendes Wort an, sondern darauf, dass Sie überhaupt ein Wort zur Verfügung haben, mit dem Sie die zu bearbeitenden Objekte ansprechen können. Oft helfen dabei Adjektive: ‚Starke‘ Primzahlen, ‚spezielle‘ Matrizen, ‚normale‘ Untergruppen,...

Es gibt allerdings Bezeichnungen, die so häufig verwendet werden, dass sie farblos sind; dazu gehören Begriffe wie normal, regulär, zulässig. Vermeiden

Sie es, mit diesen Wörtern neue Begriffe zu schaffen. Scheuen Sie sich nicht, kräftige Wörter wie *schön*, *schlank*, *unsichtbar*, *cool*,... zu verwenden. Versuchen Sie immer, einen möglichst treffenden Ausdruck zu finden! Vergleichen Sie hierzu den Abschnitt „Gute Bezeichnungen“.

Viele Definitionen kann man nicht nur verbal ausdrücken, sondern auch unter Zuhilfenahme der mathematischen Symbolik. Man kann die Menge $\mathbf{P}$ aller Primzahlen auch wie folgt definieren:

$$\mathbf{P} := \{n \in \mathbf{Z} \mid n > 1, n \text{ hat nur } 1 \text{ und } n \text{ als positive Teiler}\}.$$

Dazu zwei *Bemerkungen*:

1. Die Präzision einer Beschreibung hängt nicht davon ab, ob man viele Symbole benutzt oder nicht. Es ist ebenso gut zu sagen: „die **symmetrische Differenz** $A \Delta B$ der Mengen A und B ist die Menge der Elemente, die entweder in A oder in B liegen“, wie zu schreiben

$$„A \Delta B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B, \text{ aber } x \notin A \cap B\}“.$$

Man muss aber jederzeit von der formalen in die verbale Beschreibung umschalten können. Außerdem erhöht es das Verständnis von Texten ungemein, wenn (mindestens bei schwierigen) Definitionen dem Leser beide Beschreibungsarten angeboten werden.

2. Der Doppelpunkt bei „ $\mathbf{P} :=$ “ steht immer auf derjenigen Seite des Gleichheitszeichens, auf der der zu definierende Begriff steht. Auch dies ist eine Hilfe für den Leser, die Sie nützen sollten: Der Leser muss nicht lange raten, was denn jetzt definiert wird und was er eigentlich schon wissen müsste.

Achtung! Das Zeichen „ $:=$ “ kommt auch in der Informatik vor, etwa in der Programmiersprache PASCAL; dort bedeutet es aber etwas anderes. Wenn man in einem PASCAL -Programm $a := b$ schreibt, so wird bei dessen Ausführung dem Speicherplatz mit Namen a der Wert des Speicherplatzes mit Namen b zugewiesen. In einer solchen Situation ist eine Formulierung wie „ $x := x+1$ “ sinnvoll und oft nützlich; als mathematische Definition wäre sie aber offenbar unsinnig. Meiner Beobachtung nach führen die beiden Bedeutungen des Doppelpunkts aber zu keinen folgenschweren Missverständnissen.

Übungen

1. Machen Sie sich klar, dass die folgenden Beschreibungen dasselbe Objekt definieren. Welche gefällt Ihnen am besten?

- Die Menge $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z}$ besteht aus den Zahlen $0, 1, \dots, n-1$ zusammen mit der Addition in $\mathbf{Z}$, wobei wir vom Ergebnis nur den Rest betrachten, der bei Division durch n entsteht.
- Definiere $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z} := \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $a + b := a+b \bmod n$.

- Definiere $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z} := \{0, 1, \dots, n-1\}$ und $a \oplus b := a+b \bmod n$.
- Sei $\mathbf{Z} / n\mathbf{Z} := \{n\mathbf{Z}, 1+n\mathbf{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbf{Z}\}$, wobei die Addition repräsentantenweise definiert wird.

2 Richtig oder falsch?

☐ Seien $a, b \in \mathbf{N}$. Schreibe $a \mid b$, falls a die Zahl b teilt.

☐ Seien $a, b \in \mathbf{N}$. Schreibe

$$a \mid b : \Leftrightarrow a \text{ teilt } b.$$

☐ $A \Delta B := (A-B) \cup (B-A)$.

☐ $A \Delta B := (A \cup B) - (A \cap B)$.

☐ p **Primzahl** : $\Leftrightarrow : p > 1$, und p ist nur durch die natürlichen Zahlen p und 1 teilbar.

☐ p, q **Primzahlzwillinge** $\Leftrightarrow : p, q$ Primzahlen und $|q-p| = 2$.

☐ $n\mathbf{Z} := \{nz \mid z \in \mathbf{Z}\}$.

☐ $n\mathbf{Z} := \{x \in \mathbf{Z} \mid \text{es gibt } j \in \mathbf{Z} \text{ mit } x = jn\}$.