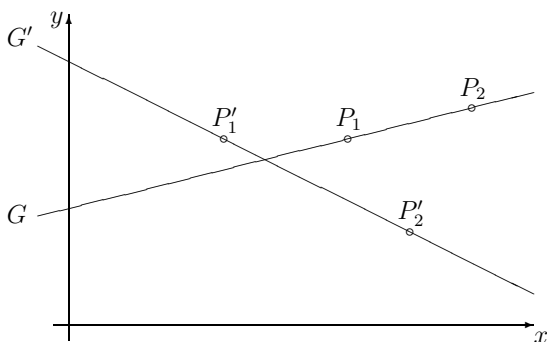


3. Matrizen

Vorbemerkungen

Bisher haben wir uns im Wesentlichen mit der Untersuchung von grundsätzlichen Eigenschaften bei Vektorräumen und linearen Abbildungen sowie der hiermit verbundenen Konstruktionen beschäftigt. Wir wollen nun verstärkt auf den rechnerischen Standpunkt eingehen und in diesem Kapitel zeigen, wie man konkret gegebene Probleme der Linearen Algebra in effektiver Weise rechnerisch lösen kann. Im Zentrum stehen hier *Matrizen* und das so genannte *Gaußsche Eliminationsverfahren*, insbesondere in der Version zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

Als Beispiel gehen wir von der folgenden geometrischen Situation aus:



Gegeben seien zwei Geraden $G, G' \subset \mathbb{R}^2$, wobei G durch die (verschiedenen) Punkte $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ festgelegt sei und entsprechend G' durch die (verschiedenen) Punkte $P'_1, P'_2 \in \mathbb{R}^2$. Man untersuche dann in Abhängigkeit von P_1, P_2, P'_1, P'_2 , ob G und G' Schnittpunkte, also gemeinsame Punkte, besitzen und, wenn ja, wie sich diese aus den Punkten P_1, P_2, P'_1, P'_2 berechnen lassen. Wie wir bereits in den Vorbemerkungen zu Kapitel 1 gesehen haben, gelten für G und G' die Parametrisierungen

$$G = \{P_1 + t(P_2 - P_1) ; t \in \mathbb{R}\}, \quad G' = \{P'_1 + t'(P'_2 - P'_1) ; t' \in \mathbb{R}\},$$

und ein Schnittpunkt $S \in G \cap G'$ ist offenbar dadurch charakterisiert, dass es Parameter $t, t' \in \mathbb{R}$ mit

$$P_1 + t(P_2 - P_1) = S = P'_1 + t'(P'_2 - P'_1)$$

gibt. Mit anderen Worten, zur Ermittlung der Schnittpunkte von G und G' haben wir alle Paare $(t, t') \in \mathbb{R}^2$ zu bestimmen, die der Gleichung

$$(*) \quad t(P_2 - P_1) + t'(P'_1 - P'_2) = P'_1 - P_1$$

genügen, oder, in Komponentenschreibweise mit

$$P_2 - P_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21}), \quad P'_1 - P'_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22}), \quad P'_1 - P_1 = (\beta_1, \beta_2),$$

die den Gleichungen

$$(**) \quad \begin{aligned} t\alpha_{11} + t'\alpha_{12} &= \beta_1 \\ t\alpha_{21} + t'\alpha_{22} &= \beta_2 \end{aligned}$$

genügen. Es ist also ein Gleichungssystem bestehend aus 2 Gleichungen mit den beiden Unbekannten t und t' und den gegebenen Konstanten $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R}$ zu lösen. Dabei handelt es sich um ein *lineares* Gleichungssystem, womit wir meinen, dass die Unbekannten t, t' separiert in höchstens erster Potenz auftreten.

Um die Gleichung $(*)$ zu lösen, nehmen wir zunächst einmal an, dass die beiden Vektoren $P_2 - P_1$ und $P'_1 - P'_2$ *linear abhängig* sind, was in diesem Fall zur Folge hat, dass jeder der beiden Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist; geometrisch bedeutet dies, dass G und G' parallel sind. Es ist also $P'_1 - P'_2$ ein skalares Vielfaches von $P_2 - P_1$, etwa $P'_1 - P'_2 = \gamma(P_2 - P_1)$, und wir können die Gleichung $(*)$ zu

$$P'_1 = P_1 + (t + \gamma t')(P_2 - P_1)$$

umschreiben. Somit ist die Existenz von Lösungen t, t' äquivalent zu $P'_1 \in G$, was aber dann bereits $G = G'$ impliziert. Es können daher lediglich folgende Fälle auftreten, die sich gegenseitig ausschließen:

1. $P_2 - P_1$ und $P'_1 - P'_2$ sind linear abhängig, $G = G'$.
2. $P_2 - P_1$ und $P'_1 - P'_2$ sind linear abhängig, $G \neq G'$; dann gilt $G \cap G' = \emptyset$.
3. $P_2 - P_1$ und $P'_1 - P'_2$ sind linear unabhängig; dann besitzen G und G' genau einen Schnittpunkt (was anschaulich klar ist), den wir sogleich berechnen wollen.

Wir nehmen nun also gemäß 3. an, dass die Vektoren $P_2 - P_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{21})$ und $P'_1 - P'_2 = (\alpha_{12}, \alpha_{22})$ *linear unabhängig* sind. Insbesondere gilt $P_2 - P_1 \neq 0$, und es sei etwa $\alpha_{11} \neq 0$. Dann können wir das System $(**)$ in äquivalenter Weise umformen, indem wir das $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}$ -fache der ersten Gleichung von der zweiten subtrahieren, so dass wir in der zweiten Gleichung die Unbekannte t "eliminieren":

$$\begin{aligned} t\alpha_{11} + t'\alpha_{12} &= \beta_1 \\ t'(\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\alpha_{12}) &= \beta_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\beta_1 \end{aligned}$$

Nun gilt aber $\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\alpha_{12} \neq 0$, denn anderenfalls würde sich

$$\alpha_{12} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\alpha_{11}, \quad \alpha_{22} = \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}\alpha_{21}$$

ergeben, und $P'_1 - P'_2$ wäre linear abhängig von $P_2 - P_1$, was aber unserer Annahme widerspricht. Somit können wir die zweite Gleichung weiter äquivalent umformen zu

$$t' = \frac{\beta_2 - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\beta_1}{\alpha_{22} - \frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\alpha_{12}} = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}},$$

und wir erhalten aus der ersten Gleichung

$$t = \frac{1}{\alpha_{11}} \left(\beta_1 - \alpha_{12} \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}} \right) = \frac{\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}.$$

Dabei haben wir unter der Annahme von $\alpha_{11} \neq 0$ die Gleichungen in äquivalenter Weise umgeformt, so dass t, t' auch tatsächlich Lösungen von $(**)$ sind. Es bleibt nun aber noch der Fall $\alpha_{11} = 0$ zu betrachten. In diesem Fall ist allerdings $\alpha_{21} \neq 0$, und wir können eine entsprechende Rechnung unter dieser Annahme machen. Das Ergebnis für t, t' lässt sich formal aus dem vorstehenden ableiten, indem wir in den Vektoren $(\alpha_{11}, \alpha_{21}), (\alpha_{12}, \alpha_{22}), (\beta_1, \beta_2)$ jeweils die Reihenfolge der Komponenten vertauschen, was einer Vertauschung der beiden Gleichungen des Systems $(**)$ entspricht. Da sich aber das vorstehende Ergebnis bei dieser Vertauschung nicht ändert, wie man leicht feststellt, erhalten wir

$$t = \frac{\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}, \quad t' = \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}$$

als Lösung der Gleichung $(*)$ bzw. des linearen Gleichungssystems $(**)$ im Falle nicht-paralleler Geraden G, G' . Insbesondere besteht $G \cap G'$ aus genau einem Schnittpunkt, und dieser berechnet sich zu

$$S = P_1 + \frac{\beta_1\alpha_{22} - \beta_2\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}(P_2 - P_1) = P'_1 + \frac{\alpha_{11}\beta_2 - \alpha_{21}\beta_1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}}(P'_2 - P'_1),$$

jeweils als Punkt von G bzw. G' .

In ähnlicher Weise führt das Problem, den Schnitt zweier Ebenen im $\mathbb{R}^3$, oder allgemeiner, den Schnitt zweier affiner Unterräume im K^n zu bestimmen, auf ein lineares Gleichungssystem. Im ersten Falle handelt es sich beispielsweise um ein System von 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten, von denen im Allgemeinfall eine frei wählbar ist, so dass der Schnitt dann als Gerade parametrisiert wird. Im zweiten Fall hat man ein System von n Gleichungen mit $r + s$ Unbekannten zu betrachten, wobei r und s die Dimensionen der betrachteten affinen Unterräume im K^n sind.

Aber auch direkte Fragen über Vektoren in Vektorräumen können auf lineare Gleichungssysteme führen. Über einem Körper K betrachte man beispielsweise Vektoren $a_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni}) \in K^n$, $i = 1, \dots, r$, und teste, ob diese linear abhängig sind. Wir müssen dann also feststellen, ob es Elemente $t_1, \dots, t_r \in K$ gibt, die nicht alle verschwinden, so dass

$$t_1 a_1 + \dots + t_r a_r = 0$$

gilt, oder, nach Übergang zu den einzelnen Komponenten, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t_1 \alpha_{11} + \dots + t_r \alpha_{1r} &= 0 \\ t_1 \alpha_{21} + \dots + t_r \alpha_{2r} &= 0 \\ &\dots \\ t_1 \alpha_{n1} + \dots + t_r \alpha_{nr} &= 0 \end{aligned}$$

eine nicht-triviale Lösung $t_1, \dots, t_r \in K$ besitzt. Alternativ können wir eine lineare Abbildung $f: K^r \longrightarrow K^n$ betrachten, welche die kanonische Basis bestehend aus den Einheitsvektoren $e_1, \dots, e_r \in K^r$ auf Vektoren $a_1, \dots, a_r \in K^n$ abbildet, und danach fragen, ob ein gegebener Vektor $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ zum Bild von f gehört, also zu dem Unterraum, der von den Vektoren $a_i = f(e_i)$, $i = 1, \dots, r$ erzeugt wird. Zu testen ist daher, ob die Gleichung

$$t_1 a_1 + \dots + t_r a_r = b,$$

bzw. für $a_i = (\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})$, $i = 1, \dots, r$, ob das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} t_1 \alpha_{11} + \dots + t_r \alpha_{1r} &= \beta_1 \\ t_1 \alpha_{21} + \dots + t_r \alpha_{2r} &= \beta_2 \\ &\dots \\ t_1 \alpha_{n1} + \dots + t_r \alpha_{nr} &= \beta_n \end{aligned}$$

eine Lösung zulässt.

Die Anordnung der Koeffizienten in obigem Gleichungssystem legt es nahe, die Vektoren $a_1, \dots, a_n, b$ nicht mehr als *Zeilen*-Vektoren zu schreiben, sondern als *Spalten*-Vektoren, also

$$a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad a_r = \begin{pmatrix} \alpha_{1r} \\ \vdots \\ \alpha_{nr} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Im Übrigen werden wir das rechteckige Koeffizientenschema

$$A = (a_1, \dots, a_r) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nr} \end{pmatrix}$$

betrachten und dies als *Koeffizientenmatrix* des Gleichungssystems bezeichnen. Wir entschließen uns auch, die Unbekannten $t_1, \dots, t_r$ zu einem Spalten-Vektor zusammenzufassen, und können dann das obige lineare Gleichungssystem, ähnlich wie im Falle einer Gleichung mit einer Unbekannten, in der übersichtlichen Form

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei das Produkt der Koeffizientenmatrix mit dem Vektor der Unbekannten durch

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_r \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_{1j} t_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^r \alpha_{nj} t_j \end{pmatrix}$$

definiert wird. Nach wie vor lautet das Gleichungssystem dann

$$\sum_{j=1}^r \alpha_{ij} t_j = \beta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei wir, wie hier geschehen, die Koeffizienten α_{ij} in Zukunft immer links von den Unbekannten t_j schreiben werden.

Die Bedeutung von Matrizen als rechteckige Koeffizientenschemata ist nicht auf lineare Gleichungssysteme beschränkt. Matrizen treten in der Linearen Algebra überall dort auf, wo es darum geht, Skalare zu katalogisieren, die von zwei Index-Parametern abhängen. So betrachte man etwa eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen K -Vektorräumen V, W mit Basen $X = (x_1, \dots, x_r)$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Es ist f dann vollständig charakterisiert durch die Bilder $f(x_1), \dots, f(x_r)$ der Basis X . Jedes dieser Bilder $f(x_j)$ wiederum ist vollständig durch die Angabe seiner Koordinaten bezüglich Y charakterisiert, d. h. der Koeffizienten $\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{nj} \in K$, die man benötigt, um $f(x_j)$ als Linearkombination der Basis Y darzustellen, etwa

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, r.$$

Somit ist f eindeutig charakterisiert durch die Angabe der Matrix

$$A_{f,X,Y} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2r} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nr} \end{pmatrix},$$

und man nennt dies die Matrix, die f bezüglich der Basen X von V und Y von W beschreibt. Die Korrespondenz $f \mapsto A_{f,X,Y}$ besitzt sehr gute Eigenschaften, wie wir noch sehen werden. Beispielsweise lässt sich der Übergang von einem Vektor $x \in V$ zu seinem Bild $f(x) \in W$ auf dem Niveau der Koordinaten bezüglich X bzw. Y als Multiplikation von $A_{f,X,Y}$ mit dem so genannten Koordinatenspaltenvektor von x bezüglich X interpretieren. Weiter entspricht die

Komposition linearer Abbildungen bei Verwendung geeigneter Basen dem noch zu definierenden Produkt der beschreibenden Matrizen.

Im Spezialfall $V = W$ und $f = \text{id}$ stellt die Matrix $A_{\text{id}, X, Y}$ gerade diejenigen Koeffizienten bereit, die man benötigt, um die Elemente der Basis X als Linearkombinationen der Basis Y darzustellen. Insbesondere sehen wir, dass der Wechsel zwischen verschiedenen Basen eines Vektorraums ebenfalls mittels Matrizen beschrieben wird. Ein weiteres Anwendungsfeld für Matrizen stellen die in Kapitel 7 zu behandelnden Skalarprodukte dar.

Wir studieren in diesem Kapitel zunächst die Korrespondenz zwischen linearen Abbildungen f und den zugehörigen beschreibenden Matrizen $A_{f, X, Y}$ genauer. Sodann besprechen wir das Gaußsche Eliminationsverfahren, und zwar zuerst als Verfahren, welches mittels so genannter elementarer Zeilenumformungen den Zeilenrang einer Matrix bestimmt, d. h. die Dimension des von den Zeilen der Matrix erzeugten Vektorraums. In analoger Weise lässt sich der Spaltenrang einer Matrix betrachten. Es ist leicht einzusehen, dass dieser im Falle einer Matrix $A_{f, X, Y}$, die zu einer linearen Abbildung f gehört, mit dem Rang von f , also der Dimension des Bildes von f , übereinstimmt. Dass der Spaltenrang einer Matrix stets auch mit deren Zeilenrang übereinstimmt, ist hingegen ein nicht-triviales Resultat.

Als Nächstes behandeln wir die Invertierbarkeit von (quadratischen) Matrizen. Eine quadratische Matrix A heißt *invertierbar*, wenn es eine quadratische Matrix B mit $A \cdot B = B \cdot A = E$ gibt, wobei E die so genannte *Einheitsmatrix* bezeichnet, deren Diagonaleinträge alle 1 sind und die ansonsten nur aus Nullen besteht. Wir werden insbesondere sehen, dass die Eigenschaft einer linearen Abbildung, ein Isomorphismus zu sein, auf der Seite der Matrizen der Invertierbarkeit entspricht. Im Übrigen verwenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren, um konkret gegebene Matrizen auf Invertierbarkeit zu überprüfen und, falls möglich, zu invertieren. Es folgt die Interpretation invertierbarer Matrizen im Rahmen von Basiswechselmatrizen.

Schließlich kommen wir dann noch ausführlich auf lineare Gleichungssysteme zu sprechen. Wir ordnen diese in den Zusammenhang linearer Abbildungen ein und zeigen insbesondere, wie man die Lösung konkret gegebener Gleichungssysteme mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens formalisieren kann.

3.1 Lineare Abbildungen und Matrizen

Wir hatten bereits in Abschnitt 2.1 gesehen, dass man mit Hilfe von Matrizen lineare Abbildungen definieren kann und dass man umgekehrt lineare Abbildungen bezüglich gewählter Basen durch Matrizen beschreiben kann. Dieser Sachverhalt soll in diesem Abschnitt genauer studiert werden. Wie immer sei K ein Körper.

Definition 1. *Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Eine $(m \times n)$ -Matrix mit Koeffizienten aus K ist ein System von Elementen $\alpha_{ij} \in K$, welches durch die Bedingung*

$(i, j) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ parametrisiert wird, also

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Dabei heißt i der Zeilenindex und j der Spaltenindex von A ; man sagt, A bestehe aus m Zeilen und n Spalten. Für $m = 0$ oder $n = 0$ ist A eine so genannte leere Matrix¹.

Wir bezeichnen die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen mit $K^{m \times n}$. Dabei lässt sich $K^{m \times n}$ unter der Zuordnung

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \mapsto (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$$

mit $K^{m \cdot n}$ identifizieren. Insbesondere können wir $K^{m \times n}$, ebenso wie $K^{m \cdot n}$, als K -Vektorraum auffassen. Damit ist für Matrizen

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j}, \quad B = (\beta_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$$

deren Summe gegeben durch

$$A + B = (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{i,j},$$

sowie das Produkt von A mit einem Skalar $\lambda \in K$ durch

$$\lambda A = (\lambda \alpha_{ij})_{i,j}.$$

Das Nullelement $0 \in K^{m \times n}$ ist die so genannte *Nullmatrix*, deren Koeffizienten α_{ij} sämtlich verschwinden. Insbesondere ergibt sich als negatives Element zu einer Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$ die Matrix $-A = (-\alpha_{ij})_{i,j}$. Die kanonische Basis von $K^{m \times n}$ wird gegeben durch die Matrizen

$$E_{ij} = (\delta_{i\mu} \delta_{j\nu})_{\substack{\mu=1,\dots,m, \\ \nu=1,\dots,n}}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

wobei E_{ij} genau am Schnittpunkt der i -ten Zeile mit der j -ten Spalte eine 1 stehen hat und ansonsten aus lauter Nullen besteht. Beispielsweise gilt für eine Matrix $(\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$

$$A = \sum_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \alpha_{ij} E_{ij}.$$

¹ Zur Vermeidung von Sonderfällen im Zusammenhang mit linearen Abbildungen ist es praktisch, leere Matrizen nicht von den Betrachtungen auszuschließen. Wir werden insbesondere für $m = 0$ leere Matrizen unterschiedlicher Spaltenanzahlen n betrachten, sowie im Falle $n = 0$ leere Matrizen unterschiedlicher Zeilenanzahlen m .

Im Zusammenhang mit Matrizen ist es üblich, Vektoren $a \in K^m$ nicht wie bisher als *Zeilen*-Vektoren $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ zu schreiben, sondern als *Spalten*-Vektoren:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

Insbesondere kann man aus n solchen Vektoren $a_1, \dots, a_n \in K^m$ eine Matrix $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{m \times n}$ aufbauen. Ist W ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit Basis $Y = (y_1, \dots, y_m)$, so besitzt jedes $a \in W$ eine Darstellung $a = \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i$ mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $\alpha_i \in K$. Wir bezeichnen

$$a_Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in K^m$$

als den zu $a \in W$ gehörigen *Koordinatenspaltenvektor* bezüglich der Basis Y von W .

Bemerkung 2. Es sei W ein K -Vektorraum mit Basis $Y = (y_1, \dots, y_m)$. Dann ist die Abbildung

$$\kappa_Y: W \longrightarrow K^m, \quad a \longmapsto a_Y,$$

ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.

Beweis. Man prüft sofort nach, dass κ_Y linear ist und die Basis Y von V auf die kanonische Basis von K^m abbildet. Somit ist κ_Y notwendigerweise ein Isomorphismus. $\square$

Unter Verwendung von Koordinatenspaltenvektoren können wir die bereits in Abschnitt 2.1 angedeutete Zuordnung einer Matrix zu einer linearen Abbildung in einfacher Weise charakterisieren:

Definition 3. Es seien V, W K -Vektorräume mit Basen $X = (x_1, \dots, x_n)$ von V sowie $Y = (y_1, \dots, y_m)$ von W . Ist dann $f: V \longrightarrow W$ eine K -lineare Abbildung, so heißt

$$A = A_{f,X,Y} = (f(x_1)_Y, \dots, f(x_n)_Y) \in K^{m \times n}$$

die zu f gehörige Matrix bezüglich der Basen X und Y .

Die zu f gehörige Matrix $A_{f,X,Y}$ besteht also gerade aus den Koordinatenspaltenvektoren bezüglich Y , die sich aus den Bildern $f(x_1), \dots, f(x_n)$ der Basis $x_1, \dots, x_n$ von V ergeben. Um $A_{f,X,Y}$ in expliziter Weise aufzuschreiben, stelle man also die Bilder von $x_1, \dots, x_n$ mit Hilfe der Basis Y dar, etwa

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

und es folgt dann:

$$A_{f,X,Y} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Beispielsweise ist die zur Nullabbildung $0: V \longrightarrow W$ gehörige Matrix $A_{0,X,Y}$ gerade die Nullmatrix $0 \in K^{m \times n}$. Betrachtet man andererseits für $V = W$ und $X = Y$ die identische Abbildung $\text{id}: V \longrightarrow V$, so ist die zugehörige Matrix $A_{\text{id},X,X}$ die so genannte $(m \times m)$ -*Einheitsmatrix*:

$$E := E_m := (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in K^{m \times m}$$

Wir wollen nun die Zuordnung $f \mapsto A_{f,X,Y}$ genauer untersuchen und erinnern daran, dass die Menge aller K -linearen Abbildungen eines K -Vektorraums V in einen K -Vektorraum W wiederum einen K -Vektorraum bildet, der mit $\text{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet wird. Die Summe zweier Elemente $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$ ist definiert durch $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ und das skalare Vielfache von f mit einem Element $\alpha \in K$ durch $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)$, jeweils für $a \in V$.

Satz 4. *Es seien V, W endlich-dimensionale K -Vektorräume mit gegebenen Basen $X = (x_1, \dots, x_n)$ und $Y = (y_1, \dots, y_m)$. Dann ist die Abbildung*

$$\Psi: \text{Hom}_K(V, W) \longrightarrow K^{m \times n}, \quad f \mapsto A_{f,X,Y},$$

ein Isomorphismus von K -Vektorräumen.

Beweis. Wir prüfen zunächst nach, dass Ψ K -linear ist. Dabei verwenden wir den Isomorphismus $W \longrightarrow K^m$, $a \mapsto a_Y$, und benutzen insbesondere, dass diese Abbildung K -linear ist. Für $f, g \in \text{Hom}_K(V, W)$, $\alpha \in K$ gilt

$$\begin{aligned} A_{f+g,X,Y} &= ((f+g)(x_1)_Y, \dots, (f+g)(x_n)_Y) \\ &= ((f(x_1) + g(x_1))_Y, \dots, (f(x_n) + g(x_n))_Y) \\ &= (f(x_1)_Y + g(x_1)_Y, \dots, f(x_n)_Y + g(x_n)_Y) \\ &= (f(x_1)_Y, \dots, f(x_n)_Y) + (g(x_1)_Y, \dots, g(x_n)_Y) \\ &= A_{f,X,Y} + A_{g,X,Y}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} A_{(\alpha f),X,Y} &= ((\alpha f)(x_1)_Y, \dots, (\alpha f)(x_n)_Y) \\ &= ((\alpha(f(x_1)))_Y, \dots, (\alpha(f(x_n)))_Y) \\ &= (\alpha(f(x_1))_Y, \dots, \alpha(f(x_n))_Y) \\ &= \alpha(f(x_1)_Y, \dots, f(x_n)_Y) \\ &= \alpha \cdot A_{f,X,Y}, \end{aligned}$$

also $\Psi(f + g) = \Psi(f) + \Psi(g)$, $\Psi(\alpha f) = \alpha\Psi(f)$, d. h. Ψ ist K -linear. Weiter ist Ψ injektiv aufgrund von 2.1/7 (i) und surjektiv aufgrund von 2.1/7 (ii). $\square$

Korollar 5. *Für endlich-dimensionale K -Vektorräume V, W gilt*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_K(V, W) = \dim_K V \cdot \dim_K W.$$

Als Nächstes wollen wir das Produkt von Matrizen definieren und zeigen, dass dieses der Komposition linearer Abbildungen entspricht. Für natürliche Zahlen $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ kann man Matrizen $A \in K^{\ell \times m}$ mit Matrizen $B \in K^{m \times n}$ multiplizieren und erhält dabei Matrizen aus $K^{\ell \times n}$, und zwar ist für

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1, \dots, \ell \\ j=1, \dots, m}} \in K^{\ell \times m}, \quad B = (\beta_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}} \in K^{m \times n}$$

das Produkt $A \cdot B$ erklärt durch:

$$A \cdot B = \left(\sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot \beta_{jk} \right)_{\substack{i=1, \dots, \ell \\ k=1, \dots, n}}$$

Das Produkt kann also nur dann gebildet werden, wenn die Spaltenanzahl von A gleich der Zeilenanzahl von B ist. Ein einfacher Fall eines Matrizenprodukts liegt vor, wenn man eine Zeile aus $K^{1 \times m}$ mit einer Spalte aus $K^{m \times 1}$ multipliziert:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = (\alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_m\beta_m)$$

Es entsteht eine (1×1) -Matrix, wobei wir diese unter Fortlassen der Klammern mit dem entsprechenden Element von K identifizieren wollen. So kann man sagen, dass für Matrizen $A \in K^{\ell \times m}$, $B \in K^{m \times n}$ das Produkt $A \cdot B = (\gamma_{ik})_{i,k}$ aus allen Produkten von Zeilen von A mit Spalten von B besteht, und zwar ist das Element γ_{ik} in der i -ten Zeile und k -ten Spalte von $A \cdot B$ gerade das Produkt der i -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B . Andererseits beachte man, dass das Produkt einer Spalte aus $K^{\ell \times 1}$ mit einer Zeile aus $K^{1 \times n}$ eine Matrix aus $K^{\ell \times n}$ ergibt:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_\ell \end{pmatrix} \cdot (\beta_1, \dots, \beta_n) = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & \dots & \alpha_1\beta_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_\ell\beta_1 & \dots & \alpha_\ell\beta_n \end{pmatrix}$$

Bemerkung 6. *Das Matrizenprodukt ist assoziativ, d. h. für $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ und Matrizen $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$, $C \in K^{p \times q}$ gilt stets*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Beweis. Mit

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m, \\ j=1,\dots,n}}, \quad B = (\beta_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n, \\ k=1,\dots,p}}, \quad C = (\gamma_{k\ell})_{\substack{k=1,\dots,p, \\ \ell=1,\dots,q}}$$

erhält man

$$(A \cdot B) \cdot C = \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \right)_{i,k} \cdot C = \left(\sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{jk} \gamma_{k\ell} \right)_{i,\ell},$$

$$A \cdot (B \cdot C) = A \cdot \left(\sum_{k=1}^p \beta_{jk} \gamma_{k\ell} \right)_{j,\ell} = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \alpha_{ij} \beta_{jk} \gamma_{k\ell} \right)_{i,\ell},$$

also wie gewünscht $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$. $\square$

Wir wollen nun Matrizen im Sinne linearer Abbildungen interpretieren. Zunächst ist festzustellen, dass jede Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$ Anlass zu einer Abbildung

$$f: K^n \longrightarrow K^m, \quad x \longmapsto A \cdot x,$$

gibt, wobei wir K^n mit $K^{n \times 1}$ und K^m mit $K^{m \times 1}$ identifizieren. In ausführlicher Schreibweise lautet die Abbildungsvorschrift

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} \xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} \xi_j \end{pmatrix}$$

und man sieht unmittelbar, dass f K -linear ist. Es ist A offenbar gerade die im Sinne von Definition 3 zu f gehörige Matrix, wenn man in K^n und K^m jeweils die aus den Einheitsvektoren bestehende kanonische Basis zugrunde legt. Wir wollen zeigen, dass dieses Beispiel in gewissem Sinne schon den Allgemeinfall beschreibt:

Satz 7. *Es sei $f: V \longrightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen V und W mit Basen $X = (x_1, \dots, x_n)$ und $Y = (y_1, \dots, y_m)$. Dann gilt für $a \in V$*

$$f(a)_Y = A_{f,X,Y} \cdot a_X.$$

Beweis. Hat man $A_{f,X,Y} = (\alpha_{ij})_{i,j}$ und $a_X = (\xi_j)$, so gilt

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i, \quad j = 1, \dots, n,$$

sowie $a = \sum_{j=1}^n \xi_j x_j$. Dies ergibt

$$f(a) = \sum_{j=1}^n \xi_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} y_i = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \xi_j \right) y_i,$$

also wie gewünscht $f(a)_Y = A_{f,X,Y} \cdot a_X$. $\square$

Die Formel aus Satz 7 lässt sich insbesondere auf den Fall $V = W$ und die identische Abbildung $\text{id}: V \longrightarrow V$ anwenden. Sie beschreibt dann einen Basiswechsel und zeigt, wie sich Koordinatenvektoren bezüglich der Basis X in solche bezüglich der Basis Y umrechnen lassen:

$$a_Y = A_{\text{id}, X, Y} \cdot a_X$$

Um die Aussage von Satz 7 noch etwas genauer zu interpretieren, führen wir die Abbildungen $\kappa_X: V \longrightarrow K^n$, $a \longmapsto a_X$, und $\kappa_Y: W \longrightarrow K^m$, $b \longmapsto b_Y$, ein, welche einem Vektor jeweils den zugehörigen Koordinatenspaltenvektor zuordnen; κ_X, κ_Y sind nach Bemerkung 2 Isomorphismen von K -Vektorräumen. Weiter sei $\tilde{f}: K^n \longrightarrow K^m$ gegeben durch $x \longmapsto A_{f, X, Y} \cdot x$. Dann besagt die Formel in Satz 7 gerade:

Korollar 8. *In der vorstehenden Situation ist das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \kappa_X & & \downarrow \kappa_Y \\ K^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & K^m \end{array}$$

kommutativ.

Fassen wir daher die Abbildungen κ_X, κ_Y als Identifizierungen auf, so geht f in $\tilde{f}$ über und ist nichts anderes als die Multiplikation mit der Matrix $A_{f, X, Y}$.

Als Nächstes wollen wir zeigen, dass das Matrizenprodukt als Komposition linearer Abbildungen interpretiert werden kann.

Satz 9. *Es seien U, V, W K -Vektorräume mit Basen X, Y, Z . Für lineare Abbildungen $f: U \longrightarrow V$ und $g: V \longrightarrow W$ gilt dann*

$$A_{g \circ f, X, Z} = A_{g, Y, Z} \cdot A_{f, X, Y}.$$

Beweis. Auch diese Formel ist leicht nachzurechnen. Gelte

$$X = (x_1, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, \dots, y_m), \quad Z = (z_1, \dots, z_\ell)$$

sowie

$$A_{f, X, Y} = (\alpha_{jk})_{\substack{j=1, \dots, m \\ k=1, \dots, n}}, \quad A_{g, Y, Z} = (\beta_{ij})_{\substack{i=1, \dots, \ell \\ j=1, \dots, m}}.$$

Dann folgt $f(x_k) = \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} y_j$ für $k = 1, \dots, n$ und somit

$$\begin{aligned}
g \circ f(x_k) &= \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} g(y_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \alpha_{jk} \sum_{i=1}^{\ell} \beta_{ij} z_i \\
&= \sum_{i=1}^{\ell} \left(\sum_{j=1}^m \beta_{ij} \alpha_{jk} \right) \cdot z_i,
\end{aligned}$$

also

$$A_{g \circ f, X, Z} = \left(\sum_{j=1}^m \beta_{ij} \alpha_{jk} \right)_{i,k} = A_{g, Y, Z} \cdot A_{f, X, Y},$$

wie gewünscht.

Wir können den Beweis aber auch anders führen und uns dabei jegliche Rechnung ersparen. Man hat nämlich nach Korollar 8 ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\
\downarrow \kappa_X & & \downarrow \kappa_Y & & \downarrow \kappa_Z \\
K^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & K^m & \xrightarrow{\tilde{g}} & K^\ell
\end{array}$$

wobei $\tilde{f}$ durch $x \mapsto A_{f, X, Y} \cdot x$ und $\tilde{g}$ durch $y \mapsto A_{g, Y, Z} \cdot y$ erklärt ist. Mit Bemerkung 6 sieht man dann, dass $A_{g \circ f, X, Z}$ und $A_{g, Y, Z} \cdot A_{f, X, Y}$ zwei Matrizen sind, die die K -lineare Abbildung $g \circ f$ bezüglich der Basen X und Z beschreiben. Mit Satz 4 ergibt sich daraus $A_{g \circ f, X, Z} = A_{g, Y, Z} \cdot A_{f, X, Y}$. $\square$

Wir wollen abschließend noch einige Regeln für das Rechnen mit Matrizen auflisten, die sich leicht durch direkte Verifikation nachrechnen lassen; vgl. auch Bemerkung 6. Sei $\alpha \in K$ und seien A, B, C Matrizen mit Koeffizienten aus K . Weiter bezeichne 0 eine Nullmatrix und E eine (quadratische) Einheitsmatrix. Dann gelten die Formeln

$$\begin{aligned}
A + B &= B + A, \\
A + 0 &= A, \\
EA &= A, \quad BE = B, \\
(\alpha A)B &= A(\alpha B) = \alpha(AB), \\
A(B + C) &= AB + AC, \\
(A + B)C &= AC + BC, \\
(AB)C &= A(BC),
\end{aligned}$$

wobei wir in den einzelnen Gleichungen verlangen, dass die Zeilen- bzw. Spaltenanzahlen so gewählt sind, dass die aufgeführten Summen und Produkte auch gebildet werden können. Mit Matrizen kann man daher, was die Addition und

Multiplikation angeht, (fast) wie gewohnt rechnen. Allerdings darf man in einem Produkt $A \cdot B$ die Faktoren nicht vertauschen, selbst dann nicht, wenn für Matrizen A, B die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ beide erklärt sind; man betrachte etwa den Fall einer Zeile A und einer Spalte B , jeweils mit n Komponenten. Sogar für quadratische Matrizen, also solche, bei denen die Zeilenzahl mit der Spaltenzahl übereinstimmt, ist das Produkt $A \cdot B$ im Allgemeinen verschieden von $B \cdot A$, wie man an einfachen Beispielen nachprüfen kann.

Aufgaben

1. Man berechne die Produkte AB und BA für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

2. Man wähle in den angegebenen K -Vektorräumen V eine kanonische Basis X und bestimme zu den linearen Abbildungen $f: V \rightarrow V$ jeweils die zugehörige Matrix $A_{f,X,X}$.

- (i) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, f Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinne.
- (ii) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, f Spiegelung an der Geraden $y = x$.
- (iii) $V = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K = \mathbb{Q}$, f Multiplikation mit $\alpha + \beta\sqrt{2}$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$.

3. Es sei K ein Körper. Man zeige, dass die Abbildung

$$f: K \rightarrow K^{2 \times 2}, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

injektiv ist und für $x, y \in K$ die Beziehung $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ erfüllt.

4. Es sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen mit $\text{rg } f = r$. Man zeige: Es existieren Basen X von V und Y von W , so dass die zu f gehörige Matrix $A_{f,X,Y}$ die folgende Gestalt besitzt:

$$A_{f,X,Y} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnet E_r die $(r \times r)$ -Einheitsmatrix, sowie 0 jeweils geeignete Nullmatrizen.

5. Für $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\}$ betrachte man Matrizen

$$A \in K^{m_1 \times n_1}, \quad B \in K^{m_1 \times n_2}, \quad C \in K^{m_2 \times n_1}, \quad D \in K^{m_2 \times n_2}, \\ E \in K^{n_1 \times r}, \quad F \in K^{n_2 \times r}$$

und zeige

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BF \\ CE + DF \end{pmatrix},$$

wobei man diese Gleichung in nahe liegender Weise als Gleichung zwischen Matrizen in $K^{(m_1+m_2) \times r}$ auffasse.

6. Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus. Man zeige:

- (i) Es existiert genau dann ein nicht-trivialer linearer Unterraum $U \subset V$ mit $f(U) \subset U$, wenn es in V eine Basis X gibt mit $A_{f,X,X} = \begin{pmatrix} \square & * \\ 0 & \square \end{pmatrix}$.
- (ii) Es existieren genau dann nicht-triviale lineare Unterräume $U_1, U_2 \subset V$ mit $V = U_1 \oplus U_2$ und $f(U_i) \subset U_i$ für $i = 1, 2$, wenn es in V eine Basis X gibt mit $A_{f,X,X} = \begin{pmatrix} \square & 0 \\ 0 & \square \end{pmatrix}$.

Dabei bezeichnen die Symbole 0 jeweils eine Nullmatrix geeigneten Typs, $\square$ nicht-leere quadratische Matrizen, sowie $*$ eine geeignete rechteckige Matrix, jeweils mit (unspezifizierten) Koeffizienten aus K .

7. Es sei V ein nicht-trivialer K -Vektorraum mit Basis X und $f: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, so dass gilt:

$$A_{f,X,X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Man berechne $\dim_K(\ker f)$.

8. Es sei $E \in K^{m \times m}$, $m \geq 1$, die Einheitsmatrix und $N = (\alpha_{ij})_{i,j=1,\dots,m} \in K^{m \times m}$ eine Matrix mit $\alpha_{ij} = 0$ für $i \geq j$. Man zeige:

- (i) $N^m = 0$.
- (ii) Die Matrix $B = E + N$ ist invertierbar, d. h. es existiert eine Matrix C in $K^{m \times m}$ mit $BC = CB = E$. (Hinweis: Man versuche, die Formel für die geometrische Reihe zu verwenden.)

3.2 Das Gaußsche Eliminationsverfahren und der Rang einer Matrix

Es sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$ eine $(m \times n)$ -Matrix und

$$f: K^n \rightarrow K^m, \quad x \mapsto Ax,$$

die durch A definierte lineare Abbildung. Wie wir in Abschnitt 3.1 bemerkt haben, ist A die zu f gehörige Matrix, wenn man in K^n und K^m jeweils die aus den Einheitsvektoren bestehende kanonische Basis zugrunde legt. In Abschnitt 2.1 hatten wir den Rang einer linearen Abbildung f als die Dimension des Bildes im f erklärt. In unserer konkreten Situation wird das Bild im f von den Bildern $f(e_1), \dots, f(e_n)$ der kanonischen Basis $e_1, \dots, e_n$ von K^n erzeugt, also von den Spaltenvektoren der Matrix A . Der Rang von f ist daher gleich der

Dimension des von den Spalten von A in K^n erzeugten linearen Unterraums. Man bezeichnet diese Dimension auch als den Spaltenrang von A . In ähnlicher Weise besitzt A einen Zeilenrang.

Definition 1. Es sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$ eine Matrix. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

von A erzeugten Unterraums in K^m den Spaltenrang von A ; dieser wird mit $\text{rg}_s A$ bezeichnet. Entsprechend heißt die Dimension des von den Zeilen

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \quad \dots, \quad (\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mn})$$

von A erzeugten Unterraums in K^n (wobei wir die Elemente von K^n hier als Zeilenvektoren auffassen) der Zeilenrang von A ; dieser wird mit $\text{rg}_z A$ bezeichnet.

Als wichtiges Resultat werden wir zeigen, dass Spaltenrang und Zeilenrang einer Matrix stets übereinstimmen. Man schreibt dann einfach $\text{rg } A$ anstelle von $\text{rg}_s A$ oder $\text{rg}_z A$ und nennt dies den *Rang* von A . Zunächst wollen wir jedoch die oben erwähnte Beziehung zwischen dem Rang einer linearen Abbildung $K^n \rightarrow K^m$ und dem Rang der zugehörigen Matrix auf beliebige lineare Abbildungen ausdehnen.

Bemerkung 2. Es sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mit Basen X bzw. Y und mit beschreibender Matrix $A_{f,X,Y}$. Dann gilt $\text{rg } f = \text{rg}_s A_{f,X,Y}$. Insbesondere hängt der Spaltenrang der f beschreibenden Matrix $A_{f,X,Y}$ nicht von der Wahl der Basen X und Y ab.

Beweis. Man betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \kappa_X & & \downarrow \kappa_Y \\ K^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & K^m \end{array}$$

aus 3.1/8, wobei κ_X (bzw. κ_Y) gerade derjenige Isomorphismus ist, der einem Vektor aus V (bzw. W) den zugehörigen Koordinatenspaltenvektor bezüglich X (bzw. Y) zuordnet. Weiter ist $\tilde{f}$ die Multiplikation mit $A_{f,X,Y}$. Es wird dann im f unter κ_Y isomorph auf im $\tilde{f}$ abgebildet, und es folgt

$$\text{rg } f = \dim_K(\text{im } f) = \dim_K(\text{im } \tilde{f}) = \text{rg } \tilde{f},$$

wobei, wie eingangs festgestellt, $\text{rg } \tilde{f}$ gerade der Spaltenrang der Matrix $A_{f,X,Y}$ ist. $\square$

Wir wollen nun das *Gaußsche Eliminationsverfahren* besprechen, welches es erlaubt, den Zeilen- bzw. Spaltenrang von Matrizen mittels elementarer Rechnung zu bestimmen, und zwar werden wir uns hier speziell mit der Bestimmung des Zeilenrangs beschäftigen. Zu diesem Zwecke interpretieren wir die Vektoren in K^n als Zeilenvektoren und bauen dementsprechend Matrizen aus $K^{m \times n}$ aus m solcher Zeilenvektoren auf. Wir schreiben also Matrizen $A \in K^{m \times n}$ in der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

mit den Zeilenvektoren $a_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in}) \in K^n, i = 1, \dots, m$. Auf solche Matrizen wollen wir so genannte *elementare Zeilenumformungen* anwenden, die, wie wir noch sehen werden, insbesondere den Zeilenrang nicht ändern. Diese Umformungen lassen sich auch durch Multiplikation von links mittels Matrizen, die man als *Elementarmatrizen* bezeichnet, realisieren. Wir wollen daher einige quadratische Matrizen einführen, die wir zur Beschreibung der Elementarmatrizen benötigen. Für $i, j = 1, \dots, m$ sei $E_{ij} \in K^{m \times m}$ diejenige $(m \times m)$ -Matrix, die am Schnittpunkt der i -ten Zeile und j -ten Spalte eine 1 stehen hat und ansonsten aus lauter Nullen besteht. Weiter bezeichne $E = (\delta_{ij})_{i,j} \in K^{m \times m}$ die *Einheitsmatrix*, wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist. Für diese Matrix gilt also $E = \sum_{i=1}^m E_{ii}$, sie besteht auf der Diagonalen aus Einsen und ansonsten aus Nullen. Die Matrix E heißt Einheitsmatrix, da $E \cdot A = A$ für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ und $B \cdot E = B$ für jede Matrix $B \in K^{n \times m}$ gilt. Folgende Typen elementarer Zeilenumformungen werden wir verwenden:

Typ I: Man multipliziere eine Zeile von A , etwa die i -te, mit einem Skalar $\alpha \in K^*$, also:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha \cdot a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Diese Umformung von A kann man auch erreichen, indem man A von links mit der Elementarmatrix $E + (\alpha - 1)E_{ii}$ multipliziert. Letztere Matrix unterscheidet sich von der Einheitsmatrix E dadurch, dass auf der Diagonalen an der Stelle (i, i) statt einer 1 der Faktor α steht.

Typ II: Man addiere zu einer Zeile von A , etwa der i -ten, eine weitere Zeile von A , etwa die j -te, wobei $i \neq j$ gelte, also:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Diese Umformung kann man auch erreichen, indem man A von links mit der Elementarmatrix $E + E_{ij}$ multipliziert.

Typ III: Man addiere zu einer Zeile von A , etwa der i -ten, ein Vielfaches einer weiteren Zeile von A , etwa der j -ten, wobei $i \neq j$ gelte, also:

$$\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_j \\ \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dots \\ a_i + \alpha a_j \\ \dots \\ a_j \\ \dots \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in K$. Diese Umformung kann man auch erreichen, indem man A von links mit der Elementarmatrix $E + \alpha E_{ij}$ multipliziert.

Typ IV: Man vertausche zwei Zeilen von A , etwa die i -te und die j -te, also:

$$\begin{pmatrix} \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_j \\ \dots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \dots \\ a_j \\ \dots \\ a_i \\ \dots \end{pmatrix}$$

Diese Umformung kann man auch erreichen, indem man A von links mit der Elementarmatrix $E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$ multipliziert. Letztere Matrix erhält man aus der Einheitsmatrix, indem man die i -te und j -te Zeile (oder, alternativ, Spalte) miteinander vertauscht.

Wie man leicht sehen kann, sind die Typen III und IV Kombinationen der Typen I und II.

Satz 3. *Es sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix und $B \in K^{m \times n}$ eine weitere, die mittels elementarer Zeilentransformationen aus A hervorgeht. Dann erzeugen die Zeilenvektoren von A den gleichen linearen Unterraum in K^n wie die Zeilenvektoren von B . Insbesondere ist der Zeilenrang einer Matrix invariant unter elementaren Zeilenumformungen.*

Beweis. Es seien $a_1, \dots, a_m$ Vektoren eines K -Vektorraums V . Wählt man dann $\alpha \in K^*$ und $i, j \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq j$, so gilt offenbar für den von $a_1, \dots, a_m$ erzeugten Unterraum

$$\begin{aligned} \langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m \rangle &= \langle a_1, \dots, \alpha a_i, \dots, a_j, \dots, a_m \rangle, \\ \langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m \rangle &= \langle a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_m \rangle, \\ \langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m \rangle &= \langle a_1, \dots, a_i + \alpha a_j, \dots, a_j, \dots, a_m \rangle, \\ \langle a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m \rangle &= \langle a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_m \rangle. \end{aligned}$$

Indem wir vorstehende Überlegung iterativ auf die Situation $V = K^n$ anwenden, folgt die Behauptung. $\square$

Theorem 4 (Gaußsches Eliminationsverfahren). *Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen, d. h. auf die Form*

$$B = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \mid \beta_1 \dots * & * \dots * & \dots & * \dots * & * \dots * \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid \beta_2 \dots * & \dots & \dots & * \dots * & * \dots * \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & \dots & * \dots * & * \dots * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & \dots & 0 \dots 0 \mid \beta_r \dots * \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & \dots & 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & \dots & 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $\beta_1, \dots, \beta_r \in K^*$. Die ersten r Zeilen von B bilden dann eine Basis des von den Zeilenvektoren von A in K^n erzeugten linearen Unterraums. Insbesondere gilt

$$\operatorname{rg}_z A = \operatorname{rg}_z B = r.$$

Beweis. Es seien $b_1, \dots, b_m$ die Zeilen der obigen Matrix B , das Element β_i gehöre dabei zur Spalte mit Index j_i , $i = 1, \dots, r$. Wir wollen zunächst zeigen, dass $b_1, \dots, b_r$ linear unabhängig sind und damit eine Basis des linearen Unterraums

$$\langle b_1, \dots, b_r \rangle = \langle b_1, \dots, b_m \rangle \subset K^n$$

bilden. Wenn wir A mittels elementarer Zeilentransformationen in B überführen können (was wir weiter unten zeigen werden), so handelt es sich gemäß Satz 3 bei diesem Unterraum gerade um den von den Zeilenvektoren von A erzeugten linearen Unterraum von K^n . Insbesondere ergibt sich $\operatorname{rg}_z A = \operatorname{rg}_z B = r$.

Gelte etwa $\sum_{i=1}^r \alpha_i b_i = 0$ für gewisse Koeffizienten $\alpha_i \in K$. Hat man dann $B = (\beta_{ij})_{i,j}$, also mit $\beta_{i,j_i} = \beta_i$ für $i = 1, \dots, r$, so erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 &= 0, \\ \alpha_1 \beta_{1,j_2} + \alpha_2 \beta_2 &= 0, \\ \alpha_1 \beta_{1,j_3} + \alpha_2 \beta_{2,j_3} + \alpha_3 \beta_3 &= 0, \\ &\dots \\ \alpha_1 \beta_{1,j_r} + \alpha_2 \beta_{2,j_r} + \alpha_3 \beta_{3,j_r} + \dots + \alpha_r \beta_r &= 0, \end{aligned}$$

woraus sich zunächst $\alpha_1 = 0$, dann $\alpha_2 = 0$ usw. bis schließlich $\alpha_r = 0$ ergibt. Es folgt die lineare Unabhängigkeit von $b_1, \dots, b_r$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass sich jede Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$ auf Zeilenstufenform bringen lässt. Hierzu gehe man wie folgt vor. Da die Nullmatrix bereits Zeilenstufenform besitzt, darf man $A \neq 0$ annehmen. Man wähle einen minimalen Index $j = j_1$, so dass es ein i mit $\alpha_{ij} \neq 0$ gibt, vertausche die erste mit der i -ten Zeile und setze $\beta_1 = \alpha_{i,j_1}$. Durch $m - 1$ Umformungen des Typs III, welche die erste Zeile invariant lassen, kann man dann erreichen, dass alle Elemente in der j_1 -ten Spalte unterhalb β_1 zu Null werden. Die resultierende Matrix hat folgende Gestalt:

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \beta_1 & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \cdot & \dots & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{array} \middle| \begin{array}{c} A^{(1)} \end{array} \right)$$

Man kann nun dasselbe Verfahren in einem zweiten Schritt auf $A^{(1)}$ anstelle von A anwenden. Indem man die für $A^{(1)}$ benötigten Transformationen als Zeilentransformationen der Gesamtmatrix interpretiert und das Verfahren genügend oft wiederholt, lässt sich in rekursiver Weise die behauptete Zeilenstufenform realisieren. Erhält man dabei in einem r -ten Schritt erstmalig $A^{(r)}$ als Null- oder leere Matrix, so ist die Konstruktion beendet. $\square$

Wir wollen ein Beispiel zur Transformation einer Matrix auf Zeilenstufenform betrachten:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 0 & \underline{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Gaußsche Eliminationsverfahren kann man insbesondere verwenden, um die Dimension eines von gewissen gegebenen Vektoren erzeugten linearen Unterraums $U = \langle a_1, \dots, a_m \rangle \subset K^n$ zu berechnen bzw. um eine Basis von U anzugeben. In Verbindung mit der Dimensionsformel 1.6/5 ist es dann möglich, die Dimension des Schnittes $U \cap U'$ zweier linearer Unterräume $U, U' \subset K^n$ zu ermitteln. Weiter kann man natürlich zu einer linearen Abbildung $f: K^n \rightarrow K^m$ eine Basis des Bildes und damit insbesondere den Rang $\text{rg } f$ bestimmen (wobei man Vektoren in K^m am besten als Zeilenvektoren interpretiert). Aus der Dimensionsformel 2.1/10 ergibt sich dann auch die Dimension des Kerns von f . Dass das Gaußsche Eliminationsverfahren überdies dazu geeignet ist, eine Basis von $\ker f$ anzugeben, werden wir genauer noch im Abschnitt 3.5 über lineare Gleichungssysteme sehen. Bei der Lösung dieser Gleichungssysteme führt das Gaußsche Verfahren zu einer sukzessiven Reduzierung des Systems der unbekannten Größen, bis man schließlich ein Restsystem von Größen erhält, deren Werte frei gewählt werden können. Einige der unbekannten Größen werden also entfernt (eliminiert), so dass die Bezeichnung *Eliminationsverfahren* plausibel wird.

In Analogie zu den elementaren Zeilenumformungen kann man natürlich auch elementare Spaltenumformungen von Matrizen erklären. Solche Umformungen lassen sich als Multiplikation von rechts mit geeigneten Elementarmatrizen interpretieren, und man kann ähnlich wie in Theorem 4 zeigen, dass sich jede Matrix auf Spaltenstufenform transformieren lässt. Man braucht sich dies aber nicht in allen Details zu überlegen, denn wir wollen als Nächstes das Transponieren von Matrizen behandeln. Unter diesem Prozess gehen elementare Zeilenumformungen über in elementare Spaltenumformungen und umgekehrt. Ähnliches gilt für Matrizen in Zeilenstufenform bzw. Spaltenstufenform.

Definition 5. Es sei

$$A = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in K^{m \times n}.$$

Dann heißt

$$A^t = (\alpha_{ij})_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}} \in K^{n \times m}$$

die zu A transponierte Matrix.

Es geht also A^t aus A hervor, indem man Spalten- und Zeilenindex miteinander vertauscht. Mit anderen Worten, man spiegelt A an der Hauptdiagonalen, welche durch die Positionen (i, i) , $i = 1, \dots, \min(m, n)$, charakterisiert ist. Dabei werden die Zeilenvektoren von A zu den Spaltenvektoren von A^t und entsprechend die Spaltenvektoren von A zu den Zeilenvektoren von A^t . Unmittelbar ersichtlich ist:

Bemerkung 6. Die Abbildung $K^{m \times n} \longrightarrow K^{n \times m}$, $A \longmapsto A^t$, ist ein Isomorphismus von K -Vektorräumen. Insbesondere gilt $(A + B)^t = A^t + B^t$ und $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ für $A, B \in K^{m \times n}$, $\alpha \in K$.

Bemerkung 7. Für $A \in K^{m \times n}$ gilt $(A^t)^t = A$ sowie $\text{rg}_z A = \text{rg}_s A^t$ und $\text{rg}_s A = \text{rg}_z A^t$.

Bemerkung 8. Für komпонierbare Matrizen A, B gilt $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

Wir wollen nur den Beweis zu Bemerkung 8 angeben. Für

$$A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{\ell \times m}, \quad B = (\beta_{jk})_{j,k} \in K^{m \times n}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} (A \cdot B)^t &= \left(\left(\sum_j \alpha_{ij} \beta_{jk} \right)_{i,k} \right)^t = \left(\sum_j \alpha_{ij} \beta_{jk} \right)_{k,i} \\ &= \left(\sum_j \beta_{jk} \alpha_{ij} \right)_{k,i} = B^t \cdot A^t, \end{aligned}$$

wie behauptet. □

Als Nächstes zeigen wir, dass das Transponieren von Matrizen dem Dualisieren linearer Abbildungen entspricht.

Satz 9. Es sei $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen mit Basen X von V und Y von W . Ist dann X^* (bzw. Y^*) die duale Basis zu X (bzw. Y), und bezeichnet $f^*: W^* \longrightarrow V^*$ die zu f duale lineare Abbildung, so gilt

$$A_{f^*, Y^*, X^*} = (A_{f, X, Y})^t.$$

Beweis. Es sei

$$\begin{aligned} X &= (x_1, \dots, x_n), & Y &= (y_1, \dots, y_m), \\ X^* &= (x_1^*, \dots, x_n^*), & Y^* &= (y_1^*, \dots, y_m^*), \end{aligned}$$

wobei man also $x_j^*(x_\nu) = \delta_{j\nu}$ und $y_i^*(y_\mu) = \delta_{i\mu}$ hat. Insbesondere wird dann für $\varphi \in V^*$ die eindeutig bestimmte Darstellung als Linearkombination der Basis X^* durch $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(x_j) x_j^*$ gegeben. Dies ist eine Konsequenz von 2.1/7, wie wir bereits im Beweis zu 2.3/5 gesehen hatten. Somit lässt sich die zu f^* gehörige Matrix wie folgt beschreiben:

$$A_{f^*, Y^*, X^*} = (f^*(y_1^*)_{X^*}, \dots, f^*(y_m^*)_{X^*}) = (f^*(y_i^*)(x_j))_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, m}}$$

Ist nun die Matrix zu f gegeben durch

$$A_{f, X, Y} = (\alpha_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}, \quad \text{d. h. durch} \quad f(x_j) = \sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu j} y_\mu,$$

so erhält man für $i = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} f^*(y_i^*) &= \sum_{j=1}^n f^*(y_i^*)(x_j) \cdot x_j^* = \sum_{j=1}^n (y_i^* \circ f)(x_j) \cdot x_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n y_i^*(f(x_j)) \cdot x_j^* = \sum_{j=1}^n y_i^* \left(\sum_{\mu=1}^m \alpha_{\mu j} y_\mu \right) \cdot x_j^* \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j^*, \end{aligned}$$

und dies bedeutet

$$A_{f^*, Y^*, X^*} = (\alpha_{ij})_{\substack{j=1, \dots, n \\ i=1, \dots, m}} = (A_{f, X, Y})^t,$$

wie behauptet. □

Benutzen wir nun 2.3/7, dass nämlich in der Situation von Satz 9 die Abbildungen f und f^* gleichen Rang haben, so ergibt sich mit Bemerkung 2 und Bemerkung 7

$$\begin{aligned} \text{rg}_s A_{f, X, Y} &= \text{rg } f = \text{rg } f^* = \text{rg}_s A_{f^*, Y^*, X^*} \\ &= \text{rg}_s (A_{f, X, Y})^t = \text{rg}_z A_{f, X, Y}. \end{aligned}$$

Da man Matrizen stets als lineare Abbildungen realisieren kann, erhält man als Folgerung zu Satz 9:

Korollar 10. Für Matrizen $A \in K^{m \times n}$ gilt $\text{rg}_s A = \text{rg}_z A$, d. h. Spalten- und Zeilenrang stimmen überein.

Wie bereits angedeutet, werden wir von nun an $\text{rg } A$ anstelle von $\text{rg}_s A$ bzw. $\text{rg}_z A$ schreiben und diese Zahl als den *Rang* der Matrix A bezeichnen. Die Übereinstimmung von Spalten- und Zeilenrang bei Matrizen ist ein nicht-triviales Resultat, das wir hier auf einfache Weise als Anwendung der Theorie dualer Abbildungen gewonnen haben. Man kann dieses Resultat aber auch anders herleiten, indem man benutzt, dass sich der Zeilen- bzw. Spaltenrang einer Matrix A nicht ändert, wenn man A von links oder rechts mit so genannten invertierbaren Matrizen multipliziert; vgl. Abschnitt 3.4.

Schließlich wollen wir unter Benutzung von Korollar 10 noch zeigen, dass sich die in Theorem 4 beschriebene Transformation einer Matrix auf Zeilenstufenform auch im Sinne von Spaltenvektoren interpretieren lässt. Dies ist insbesondere dann von Vorteil, wenn man aus einem gegebenen System von Vektoren ein maximales linear unabhängiges Teilsystem auswählen möchte.

Satz 11. Es sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{m \times n}$ eine Matrix mit den Spalten $a_1, \dots, a_n \in K^m$, welche sich mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform

$$B = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 \mid \beta_1 \dots * & * \dots * & \dots & * \dots * & * \dots * \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid \beta_2 \dots * & \dots & * \dots * & * \dots * \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & * \dots * & * \dots * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \mid \beta_r \dots * \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 \mid 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

bringen lässt. Dabei sei für $i = 1, \dots, r$ das Element $\beta_i \in K^*$ jeweils in der Spalte mit Index j_i positioniert, mit $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$. Dann sind die Vektoren $a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ linear unabhängig, und es gilt

$$\langle a_1, \dots, a_j \rangle = \langle a_{j_1}, \dots, a_{j_i} \rangle, \quad j = 1, \dots, n,$$

wenn $i \leq r$ jeweils maximal mit $j_i \leq j$ gewählt ist.

Beweis. Verkleinert man die Matrix A zu einer Matrix A' , indem man gewisse Spalten streicht, so erhält man eine zugehörige Zeilenstufenform von A' , indem man B durch Streichen der entsprechenden Spalten zu einer Matrix B' verkleinert. Es folgt dann $\text{rg}_z B' = \text{rg}_z A' = \text{rg}_s A'$, so dass die Dimension des von den Spalten von A' erzeugten linearen Unterraums gerade gleich dem Rang von B' ist. Insbesondere folgt mit diesem Argument die lineare Unabhängigkeit des Systems $a_{j_1}, \dots, a_{j_r} \in K^m$ und mittels 1.5/14(ii) auch die behauptete Gleichheit linearer Unterräume. $\square$

Aufgaben

1. Man bringe die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 9 & 7 & 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$$

auf Zeilenstufenform.

2. Man berechne den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{3 \times 4},$$

jeweils für die Körper $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{F}_5$; dabei ist $\mathbb{F}_5$ der Körper mit 5 Elementen aus Abschnitt 1.3, Aufgabe 3.

3. Man prüfe, ob das System der folgenden Vektoren in
- $\mathbb{R}^5$
- linear unabhängig ist:

$$(5, 4, 3, 2, 1), \quad (1, 2, 3, 4, 5), \quad (2, 2, 2, 2, 1), \quad (1, 0, 0, 1, 1), \quad (1, 0, 1, 0, 1)$$

4. Es sei
- $U \subset \mathbb{R}^4$
- der lineare Unterraum, der von den Vektoren

$$(1, 2, 1, 2), \quad (2, 5, 4, 5), \quad (1, 4, 6, 6), \quad (2, 5, 6, 9), \quad (2, 6, 7, 8), \quad (1, 1, 0, 3)$$

erzeugt wird. Man berechne $\dim_{\mathbb{R}} U$ und gebe eine Basis von U an.

5. Es seien in
- $\mathbb{R}^5$
- die folgenden linearen Unterräume gegeben:

$$U = \langle (1, 0, 1, 0, 1), (2, 3, 4, 1, 2), (0, 3, 2, 1, 0) \rangle$$

$$U' = \langle (1, -1, 1, 0, 2), (1, 3, 3, 1, 1), (1, 2, 3, 1, 2) \rangle$$

Man berechne $\dim_{\mathbb{R}} U$ und $\dim_{\mathbb{R}} U'$ und zeige $U \subset U'$.

6. Man betrachte in
- $\mathbb{R}^6$
- die linearen Unterräume

$$U = \langle (1, 1, 1, 0, 1, 1), (2, 3, 4, 0, 2, 1), (0, 3, 2, 1, 1, 1) \rangle,$$

$$U' = \langle (2, 6, 6, 2, 2, 1), (0, 9, 4, 3, 0, 1), (1, 2, 3, 1, 2, 1) \rangle$$

und berechne $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap U')$.

7. Man betrachte die Linearformen

$$f_1: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)$$

$$f_2: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)$$

$$f_3: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto (5\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + 2\alpha_4 - 2\alpha_5)$$

$$f_4: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \longmapsto (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha_5)$$

und prüfe, ob diese ein linear unabhängiges System im Dualraum $(\mathbb{R}^5)^*$ definieren.

8. Die Linearformen f_1, f_2, f_3, f_4 seien wie in Aufgabe 7. Für die $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \quad x \longmapsto (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)),$$

bestimme man $\dim_{\mathbb{R}} \ker f$ und $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{im} f$. Weiter gebe man eine Basis von $\operatorname{im} f$ an.

9. Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit 2 Elementen. Im $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum $\mathbb{F}_2^{2000}$ sei eine Familie von Vektoren $(v_i)_{i=1, \dots, 2000}$ definiert durch

$$v_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \text{ nicht durch 4 teilbar ist,} \\ (1 + \delta_{ij})_{j=1, \dots, 2000} & \text{falls } i \text{ durch 4, nicht durch 8 teilbar ist,} \\ (1 + \delta_{i-1, j} + \delta_{i+1, j})_{j=1, \dots, 2000} & \text{falls } i \text{ durch 8 teilbar ist.} \end{cases}$$

Man betrachte den von den v_i erzeugten linearen Unterraum $U \subset \mathbb{F}_2^{2000}$, bestimme $\dim_{\mathbb{F}_2} U$ und gebe eine Basis von U an.

3.3 Matrizenringe und invertierbare Matrizen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist auf der Menge $K^{n \times n}$ aller $(n \times n)$ -Matrizen ähnlich wie bei einem Körper neben der Addition eine Multiplikation gegeben, die für $n \geq 2$ allerdings nicht kommutativ ist. Dabei zeigen Gleichungen des Typs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

dass es für $n \geq 2$ nicht-triviale Nullteiler in $K^{n \times n}$ gibt. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt ein *Nullteiler*, wenn es eine von Null verschiedene Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot B = 0$ oder $B \cdot A = 0$ gibt.

Definition 1. Eine Menge R mit zwei Verknüpfungen “+” (Addition) und “ $\cdot$ ” (Multiplikation) heißt ein Ring, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) R ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition.
- (ii) Die Multiplikation ist assoziativ, d. h. für $a, b, c \in R$ gilt

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

- (iii) Addition und Multiplikation verhalten sich distributiv, d. h. für $a, b, c \in R$ gilt

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Das neutrale Element bezüglich der Addition 0 wird als Nullelement von R bezeichnet. Der Ring R heißt kommutativ, wenn die Multiplikation kommutativ ist. Weiter nennt man ein Element $e \in R$ ein Einselement, wenn $e \cdot a = a = a \cdot e$ für alle $a \in R$ gilt; man schreibt dann auch 1 anstelle von e .

Natürlich ist ein Einselement eines Ringes, sofern es existiert, eindeutig bestimmt. Das einfachste Beispiel eines Ringes ist der *Nullring* 0. Dieser besteht

nur aus einem Element 0 mit den Verknüpfungen $0+0=0$ und $0\cdot 0=0$; hier ist also 0 sowohl das Nullelement wie auch das Einselement. Wir wollen aber noch einige interessantere Beispiele anführen.

(1) Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein kommutativer Ring mit Eins unter der gewöhnlichen Addition und Multiplikation.

(2) Jeder Körper, etwa $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, ist ein kommutativer Ring mit Eins.

(3) Es sei V ein K -Vektorraum und $R = \text{Hom}_K(V, V)$ der K -Vektorraum der Endomorphismen von V . Dann ist R ein Ring, der so genannte *Endomorphismenring* von V , wenn man in R als Addition die gewöhnliche Addition linearer Abbildungen sowie als Multiplikation die Komposition linearer Abbildungen betrachtet. Dieser Ring wird mit $\text{End}_K(V)$ bezeichnet. Er enthält die Nullabbildung $0: V \rightarrow V$ als Nullelement, sowie die identische Abbildung $\text{id}: V \rightarrow V$ als Einselement. Man kann sich überlegen, dass $\text{End}_K(V)$ für $\dim_K V \geq 2$ nicht kommutativ ist.

(4) Für $n \in \mathbb{N}$ ist der K -Vektorraum $K^{n \times n}$ der quadratischen n -reihigen Matrizen ein Ring unter der in Abschnitt 3.1 eingeführten Addition und Multiplikation von Matrizen. Es ist $K^{0 \times 0}$ der Nullring und $K^{1 \times 1}$ ein Ring, den wir in kanonischer Weise mit dem Körper K identifizieren können. Weiter ist die Multiplikation in $K^{n \times n}$ für $n \geq 2$ nicht mehr kommutativ. Die Matrix $E = (\delta_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$, oftmals auch mit 1 bezeichnet, ist ein Einselement in $K^{n \times n}$ und wird als n -reihige *Einheitsmatrix* bezeichnet. Wie wir bereits zu Beginn gesehen haben, enthält $K^{n \times n}$ für $n \geq 2$ nicht-triviale Nullteiler.

Die Beispiele (3) und (4) sind, wie man mit Hilfe der Resultate aus Abschnitt 3.1 einsieht, verwandt. Genauer gilt:

Satz 2. *Es sei V ein K -Vektorraum und $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V . Dann ist die Abbildung*

$$\Psi: \text{End}_K(V) \longrightarrow K^{n \times n}, \quad f \longmapsto A_{f,X,X},$$

ein Isomorphismus von Ringen, d. h. eine bijektive Abbildung mit

$$\Psi(f+g) = \Psi(f) + \Psi(g), \quad \Psi(f \circ g) = \Psi(f) \cdot \Psi(g)$$

für alle Elemente $f, g \in \text{End}_K(V)$.

Beweis. Aufgrund von 3.1/4 ist Ψ eine bijektive Abbildung, die mit der Addition verträglich ist. Die Verträglichkeit mit der Multiplikation folgt aus 3.1/9. $\square$

Ist a ein Element eines Ringes R mit Eins, so heißt ein Element $b \in R$ invers zu a , wenn $a \cdot b = 1 = b \cdot a$ gilt. Das inverse zu einem Element $a \in R$ ist, falls es existiert, stets eindeutig bestimmt. Sind nämlich zwei Elemente $b, b' \in R$ invers zu a , oder genauer, ist b invers zu a und gilt lediglich $a \cdot b' = 1$ (bzw. alternativ $b' \cdot a = 1$), so folgt

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot b') = (b \cdot a) \cdot b' = 1 \cdot b' = b',$$

bzw.

$$b = 1 \cdot b = (b' \cdot a) \cdot b = b' \cdot (a \cdot b) = b' \cdot 1 = b'.$$

Man schreibt a^{-1} für das inverse Element zu a und nennt a in diesem Fall *invertierbar* oder eine *Einheit*. In einem Körper ist jedes Element $a \neq 0$ eine Einheit. Andererseits gibt es in Matrizenringen $K^{n \times n}$ für $n \geq 2$ stets nicht-triviale Nullteiler, und solche Matrizen können keine Einheiten sein. Ist nämlich $A \in K^{n \times n}$ eine Einheit und $B \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $A \cdot B = 0$, so folgt notwendig $B = A^{-1} \cdot A \cdot B = 0$ mit der inversen Matrix A^{-1} zu A .

Bemerkung 3. *In jedem Ring R mit Eins ist die Menge R^* aller Einheiten eine Gruppe bezüglich der Multiplikation.*

Diese Aussage ergibt sich unmittelbar aus den definierenden Eigenschaften eines Ringes bzw. einer Einheit.

Bemerkung 4. *Es sei V ein K -Vektorraum und $f \in \text{End}_K(V)$. Dann ist äquivalent:*

(i) *Es existiert ein Element $g \in \text{End}_K(V)$ mit $f \circ g = \text{id}_V = g \circ f$, d. h. f ist eine Einheit in $\text{End}_K(V)$.*

(ii) *f ist ein Automorphismus von V .*

Beweis. Die Beziehung $f \circ g = \text{id}_V$ impliziert, dass f surjektiv ist, und entsprechend $g \circ f = \text{id}_V$, dass f injektiv ist. Aus Bedingung (i) ergibt sich somit (ii), und umgekehrt folgert man aus (ii) auch (i), wenn man g als Umkehrabbildung zu f erklärt. $\square$

Die Einheitengruppe des Endomorphismenrings $\text{End}_K(V)$ besteht also gerade aus allen Automorphismen von V . Wir bezeichnen diese Gruppe mit $\text{Aut}_K(V)$ und nennen dies die *Automorphismengruppe* von V . Die Einheitengruppe des Matrizenrings $K^{n \times n}$ wird mit $\text{Gl}(n, K)$ bezeichnet; man spricht hier von der *allgemeinen linearen Gruppe* (general linear group). Die Elemente von $\text{Gl}(n, K)$ heißen *invertierbare* (oder umkehrbare, bzw. reguläre, bzw. nicht-singuläre, bzw. nicht ausgeartete) Matrizen.

Satz 5. *Es sei V ein K -Vektorraum und $X = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V . Dann beschränkt sich der Isomorphismus*

$$\Psi: \text{End}_K(V) \xrightarrow{\sim} K^{n \times n}, \quad f \longmapsto A_{f, X, X},$$

aus Satz 2 zu einem Isomorphismus

$$\text{Aut}_K(V) \xrightarrow{\sim} \text{Gl}(n, K)$$

der zugehörigen Einheitengruppen, d. h. zu einer bijektiven Abbildung, welche die jeweiligen Gruppenstrukturen respektiert.

Beweis. Ψ bildet die identische Abbildung $\text{id}_V \in \text{End}_K(V)$ auf die Einheitsmatrix $E \in K^{n \times n}$ ab, also das Einselement von $\text{End}_K(V)$ auf das Einselement von $K^{n \times n}$. Hieraus ergibt sich unmittelbar, dass Ψ Einheiten in Einheiten überführt. Da die Umkehrabbildung Ψ^{-1} entsprechende Eigenschaften besitzt, folgt die Behauptung. $\square$

Wir wollen den Inhalt des Satzes noch in einem etwas allgemeineren Rahmen formulieren.

Satz 6. *Es sei $f: V \longrightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen mit Basen $X = (x_1, \dots, x_n)$ und $Y = (y_1, \dots, y_n)$. Die beschreibende Matrix $A = A_{f,X,Y}$ ist genau dann invertierbar, wenn f ein Isomorphismus ist.*

Beweis. Man überlegt sich wie im Beweis zu Bemerkung 4, dass f genau dann bijektiv ist, wenn es eine K -lineare Abbildung $g: W \longrightarrow V$ mit $f \circ g = \text{id}_W$ und $g \circ f = \text{id}_V$ gibt. Letzteres ist aber aufgrund von 3.1/4 und 3.1/9 äquivalent zu der Existenz einer Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $A_{f,X,Y} \cdot B = 1$ und $B \cdot A_{f,X,Y} = 1$. $\square$

Korollar 7. *Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist äquivalent:*

- (i) *A ist invertierbar.*
- (ii) *Es existiert eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $B \cdot A = 1$.*
- (iii) *Es existiert eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $A \cdot B = 1$.*
- (iv) *$\text{rg } A = n$.*

Beweis. Wir realisieren A als lineare Abbildung, etwa als Abbildung

$$f: K^n \longrightarrow K^n, \quad x \longmapsto A \cdot x.$$

Dann ist A die zu f gehörige Matrix bezüglich der kanonischen Basis auf K^n . Indem wir Satz 5 sowie 3.2/2 benutzen, genügt es zu zeigen, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (i') *f ist ein Automorphismus.*
- (ii') *Es existiert eine K -lineare Abbildung $g: K^n \longrightarrow K^n$ mit $g \circ f = \text{id}$.*
- (iii') *Es existiert eine K -lineare Abbildung $g: K^n \longrightarrow K^n$ mit $f \circ g = \text{id}$.*
- (iv') *$\text{rg } f = n$.*

Ist f ein Automorphismus, so folgen natürlich die Bedingungen (ii'), (iii') und (iv'). Umgekehrt, hat man (ii'), so ist f injektiv und nach 2.1/11 ein Automorphismus. Unter den Bedingungen (iii') bzw. (iv') schließlich ist f surjektiv und damit ebenfalls ein Automorphismus aufgrund von 2.1/11. $\square$

Bedingung (iv) aus Korollar 7 gibt uns ein nützliches Kriterium für die Invertierbarkeit einer Matrix $A \in K^{n \times n}$, insbesondere deshalb, weil wir den Rang einer Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen in expliziter Weise bestimmen können; vgl. 3.2/4. So sieht man etwa, dass für $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, und $\alpha \in K^*$ die Elementarmatrizen

$$E + (\alpha - 1)E_{ii}, \quad E + \alpha E_{ij}, \quad E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$$

aus $K^{n \times n}$ invertierbar sind; dabei sei E wie in Abschnitt 3.2 die Einheitsmatrix in $K^{n \times n}$ sowie $E_{ij} = (\delta_{i\mu} \delta_{j\nu})_{\mu, \nu}$. Die Elementarmatrizen gehen nämlich durch elementare Zeilenumformungen aus der Einheitsmatrix E hervor, haben also denselben Rang wie diese, also n ; vgl. 3.2/3. Weiter unten werden wir die Inversen zu den aufgeführten Elementarmatrizen (die sich im Übrigen leicht “erraten” lassen) auch noch explizit bestimmen.

Wir können die gerade beschriebene Argumentation dazu nutzen, um das in Abschnitt 3.2 behandelte Gaußsche Eliminationsverfahren auf die Invertierung von Matrizen auszudehnen. Man gehe etwa aus von einer Matrix $A \in K^{n \times n}$. Dann kann man A gemäß 3.2/4 mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform B bringen. Nehmen wir nun A als invertierbar an, so gilt $\text{rg } A = \text{rg } B = n$ gemäß Korollar 7, und es stehen in der Situation von 3.2/4 die Elemente $\beta_1, \dots, \beta_n$ gerade auf der Hauptdiagonalen, also:

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \beta_2 & * & \dots & * \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_n \end{pmatrix}$$

Man kann nun durch Multiplikation der i -ten Zeile mit β_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$, annehmen, dass alle β_i den Wert 1 haben. Sodann kann man Vielfache der n -ten Zeile von den übrigen Zeilen subtrahieren und auf diese Weise erreichen, dass alle Elemente in der n -ten Spalte oberhalb von β_n zu Null werden. Entsprechend kann man die übrigen Spalten behandeln, und es folgt, dass sich A im Falle der Invertierbarkeit mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E überführen lässt. Jede solche Zeilenumformung lässt sich interpretieren als Multiplikation mit einer Elementarmatrix von links, wie wir in Abschnitt 3.2 gesehen haben. Wir finden daher Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_r \in K^{n \times n}$ mit

$$S_r \cdot \dots \cdot S_1 \cdot A = E,$$

und Multiplikation mit A^{-1} von rechts ergibt $A^{-1} = S_r \cdot \dots \cdot S_1$. Indem wir

$$A^{-1} = S_r \cdot \dots \cdot S_1 \cdot E$$

schreiben, sehen wir folgendes: Diejenigen elementaren Zeilenumformungen, die A in die Einheitsmatrix E überführen, führen E selbst in die Matrix A^{-1} über!

Das Verfahren zur Invertierung von Matrizen kann man daher wie folgt beschreiben: Man bringe A mittels einer Folge elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform und führe bei jedem Schritt die entsprechende Zeilenumformung auch an der Einheitsmatrix durch. Wenn man dann an der Zeilenstufenform $\text{rg } A = n$ ablesen kann, ist A invertierbar, und man fahre fort, bis man A in die Einheitsmatrix überführt hat. Die aus der Einheitsmatrix durch die entsprechenden Umformungen gewonnene Matrix ist dann die zu A inverse Matrix A^{-1} . Beispielsweise erkennt man auf diese Weise für $\alpha \in K$, $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
(E + (\alpha - 1)E_{ii})^{-1} &= E + (\alpha^{-1} - 1)E_{ii} \\
(E + \alpha E_{ij})^{-1} &= E - \alpha E_{ij} \\
(E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})^{-1} &= E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}
\end{aligned}$$

Als Nebenprodukt dieses Verfahrens können wir noch vermerken:

Satz 8. *Jede invertierbare Matrix $A \in \text{Gl}(n, K)$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen des Typs*

$$\begin{aligned}
E + (\alpha - 1)E_{ii}, & \quad \alpha \in K^*, \\
E + E_{ij}, & \quad i \neq j,
\end{aligned}$$

mit $1 \leq i, j \leq n$. Dabei ist $E \in K^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und $E_{ij} = (\delta_{\mu i} \delta_{\nu j})_{\mu, \nu}$.

Beweis. Wir haben gerade gesehen, dass A mittels elementarer Zeilenumformungen des Typs I - IV aus Abschnitt 3.2 in die Einheitsmatrix überführt werden kann und dass A^{-1} das Produkt der entsprechenden Elementarmatrizen ist. Nun kann man aber eine elementare Zeilenumformung des Typs III, also Addition des α -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile für $\alpha \in K^*$ und gewisse Indizes $i \neq j$, auch als eine Folge von elementaren Zeilenumformungen der Typen I und II interpretieren: Man multipliziere die j -te Zeile mit α , addiere sie zur i -ten Zeile und multipliziere die j -te Zeile anschließend wieder mit α^{-1} . Entsprechend kann man auch eine elementare Zeilenumformung des Typs IV, also das Vertauschen von i -ter und j -ter Zeile für gewisse Indizes $i \neq j$, als eine Folge von Umformungen der Typen I und II interpretieren: Man addiere die j -te Zeile zur i -ten Zeile, multipliziere die j -te Zeile mit -1 , addiere die i -te Zeile zur j -ten Zeile und subtrahiere schließlich die j -te Zeile von der i -ten Zeile. Dabei ist der letzte Schritt eine Umformung vom Typ III, also zerlegbar in eine Folge von Umformungen der Typen I und II.

Indem wir vorstehende Überlegung auf A^{-1} anstelle von A anwenden, sehen wir, dass A wie behauptet ein Produkt von Elementarmatrizen ist, die zu den elementaren Zeilenumformungen der Typen I und II korrespondieren. $\square$

Möchte man zu einer gegebenen Matrix $A \in \text{Gl}(n, K)$ deren Zerlegung in Elementarmatrizen konkret bestimmen, so verfährt man am besten wie folgt: Man überführt A mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix und erhält auf diese Weise eine Zerlegung der Form $A^{-1} = S_r \cdot \dots \cdot S_1$ mit Elementarmatrizen $S_1, \dots, S_r$. Inversenbildung liefert dann $A = S_1^{-1} \cdot \dots \cdot S_r^{-1}$, wobei es sich bei den S_i^{-1} , wie oben beschrieben, wiederum um Elementarmatrizen handelt. Will man sich auf die in Satz 8 genannten Elementarmatrizen beschränken, so sind die S_i^{-1} gegebenenfalls noch weiter zu zerlegen.

Aufgaben

1. Es sei X eine Menge und R ein Ring mit 1. Man zeige, dass die Menge $\text{Abb}(X, R)$ aller Abbildungen $X \rightarrow R$ unter der gewöhnlichen Addition bzw. Multiplikation

R -wertiger Funktionen einen Ring bildet. Man beschreibe die Einheitengruppe dieses Ringes.

2. Man gebe einen K -Vektorraum V an, zu dem es Nichteinheiten $f, g \in \text{End}_K(V)$ mit $f \circ g = \text{id}_V$ gibt.
3. Es sei $f: U \rightarrow U$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums. Dann ist äquivalent:
 - (i) $\text{rg } f < \dim_K U$.
 - (ii) f ist ein *Links-Nullteiler* in $\text{End}_K(V)$, d. h. es existiert $g \in \text{End}_K(V)$, $g \neq 0$, mit $f \circ g = 0$.
 - (iii) f ist ein *Rechts-Nullteiler* in $\text{End}_K(V)$, d. h. es existiert $g \in \text{End}_K(V)$, $g \neq 0$, mit $g \circ f = 0$.

Insbesondere ist ein Links-Nullteiler in $\text{End}_K(V)$ auch Rechts-Nullteiler und umgekehrt. Entsprechendes gilt im Matrizenring $K^{n \times n}$.

4. Man prüfe folgende Matrizen auf Invertierbarkeit und gebe gegebenenfalls die inverse Matrix an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

5. Falls möglich schreibe man die folgenden Matrizen als Produkt von Elementarmatrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$$

6. Für $A \in \text{Gl}(n, K)$ zeige man $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.
7. Für $m, r, s \in \mathbb{N} - \{0\}$ betrachte man Matrizen

$$A \in K^{r \times m}, \quad B \in K^{m \times s}, \quad C \in K^{r \times m}, \quad D \in K^{r \times s}$$

mit

$$\text{rg} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = m,$$

wobei A invertierbar sei. Man zeige $D = C \cdot A^{-1} \cdot B$.

3.4 Basiswechsel

Wir haben gesehen, dass man K -lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen bei Fixierung von Basen durch Matrizen beschreiben kann. In diesem Abschnitt soll insbesondere untersucht werden, wie sich die beschreibende Matrix ändert, wenn man zu anderen Basen übergeht. Wir beginnen mit einer Charakterisierung von Basen.

Bemerkung 1. Es sei V ein K -Vektorraum mit einer Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$. Zu n Elementen $y_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} x_i \in V$, $j = 1, \dots, n$, mit Koeffizienten $\alpha_{ij} \in K$ betrachte man die Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$, also die Matrix $A_{f,X,X}$ der durch $x_j \mapsto y_j$ erklärten K -linearen Abbildung $f: V \rightarrow V$. Dann ist äquivalent:

(i) $Y = (y_1, \dots, y_n)$ ist eine Basis von V .

(ii) $\operatorname{rg} A = n$.

(iii) $A \in \operatorname{Gl}(n, K)$, d. h. A ist invertierbar.

Beweis. Ist Y eine Basis von V , so ist f ein Isomorphismus, und es folgt mit 3.2/2 $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f = \dim_K V = n$. Gilt $\operatorname{rg} A = n$, so hat man $A \in \operatorname{Gl}(n, K)$ nach 3.3/7. Aus letzter Bedingung wiederum ergibt sich mit 3.3/6, dass f ein Isomorphismus ist, und folglich, dass Y eine Basis ist. $\square$

Ist Y in der Situation von Bemerkung 1 eine Basis von V , so bezeichnen wir $A = (\alpha_{ij})_{i,j}$ als *Matrix eines Basiswechsels*. Man kann dann, und dies werden wir zur Präzisierung der Art des Basiswechsels stets so handhaben, A auch als Matrix zur identischen Abbildung $\operatorname{id}: V \rightarrow V$ bezüglich der Basen Y und X interpretieren, also $A = A_{\operatorname{id},Y,X}$. Insbesondere ergibt sich aus Bemerkung 1, dass sich bei fixierter Basis X von V jede Matrix $A \in \operatorname{Gl}(n, K)$ als Basiswechselmatrix der Form $A_{\operatorname{id},Y,X}$ mit einer geeigneten Basis Y von V interpretieren lässt. Aus der Gleichung

$$A_{\operatorname{id},Y,X} \cdot A_{\operatorname{id},X,Y} = A_{\operatorname{id},X,X} = 1,$$

vgl. 3.1/9, lesen wir ab:

Bemerkung 2. Es sei V ein K -Vektorraum mit endlichen Basen X und Y . Dann ist die Basiswechselmatrix $A_{\operatorname{id},Y,X}$ invertierbar, und ihr Inverses wird gegeben durch die Basiswechselmatrix $A_{\operatorname{id},X,Y}$.

Weiter folgt aus 3.1/7:

Bemerkung 3. Es sei V ein K -Vektorraum mit endlichen Basen X und Y . Für $a \in V$ bezeichne a_X bzw. a_Y den Koordinatenspaltenvektor von a bezüglich X bzw. Y . Dann gilt

$$a_X = A_{\operatorname{id},Y,X} \cdot a_Y, \quad a_Y = A_{\operatorname{id},X,Y} \cdot a_X.$$

Als Nächstes soll untersucht werden, wie sich die beschreibende Matrix einer linearen Abbildung unter Basiswechsel verhält.

Satz 4. Es sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K -Vektorräumen. Sind dann X, X' Basen von V und Y, Y' Basen von W , so gilt

$$A_{f,X',Y'} = (A_{\operatorname{id},Y',Y})^{-1} \cdot A_{f,X,Y} \cdot A_{\operatorname{id},X',X}.$$

Beweis. Indem man 3.1/9 auf $f = \text{id}_W \circ f \circ \text{id}_V$ anwendet, erhält man

$$A_{f,X',Y'} = A_{\text{id},Y,Y'} \cdot A_{f,X,Y} \cdot A_{\text{id},X',X},$$

mit $A_{\text{id},Y,Y'} = (A_{\text{id},Y',Y})^{-1}$. $\square$

Korollar 5. *Es sei $f: V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K -Vektorraums V mit Basen X, X' . Dann gilt*

$$A_{f,X',X'} = (A_{\text{id},X',X})^{-1} \cdot A_{f,X,X} \cdot A_{\text{id},X',X}.$$

Wir wollen nun noch einige Anwendungen zum Rang einer Matrix geben.

Satz 6. *Für Matrizen $S \in \text{Gl}(m, K)$, $A \in K^{m \times n}$ und $T \in \text{Gl}(n, K)$ gilt*

$$\text{rg}(S \cdot A \cdot T) = \text{rg } A.$$

Beweis. Man betrachte die lineare Abbildung $f: K^n \longrightarrow K^m$, $a \longmapsto A \cdot a$. Dann ist A die zu f gehörige Matrix, wenn man in K^n und K^m jeweils die kanonische Basis zugrunde legt. Interpretiert man dann S^{-1} als Matrix eines Basiswechsels in K^m und T als Matrix eines Basiswechsels in K^n , so ergibt sich

$$\text{rg}(S \cdot A \cdot T) = \text{rg } f = \text{rg } A$$

mit 3.2/2 und Satz 4. $\square$

Lemma 7. *Es sei $f: V \longrightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen Vektorräumen mit $\dim_K V = n$ und $\dim_K W = m$. Sei $r = \text{rg } f$. Dann existiert eine Basis $X = (x_1, \dots, x_n)$ von V sowie eine Basis $Y = (y_1, \dots, y_m)$ von W mit*

$$A_{f,X,Y} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E_r die $(r \times r)$ -Einheitsmatrix ist und 0 jeweils geeignete (möglicherweise auch leere) Bereiche mit Koeffizienteneinträgen 0 bezeichnet.

Beweis. Man wähle eine Basis $y_1, \dots, y_r$ von $\text{im } f$ und ergänze diese zu einer Basis $Y = (y_1, \dots, y_m)$ von W . Seien weiter $x_1, \dots, x_r$ f -Urbilder zu $y_1, \dots, y_r$. Diese sind linear unabhängig, vgl. 2.1/5, und lassen sich, wie im Beweis zu 2.1/10 gezeigt, durch Elemente $x_{r+1}, \dots, x_n \in \ker f$ zu einer Basis X von V ergänzen. Sodann gilt

$$f(x_j) = \begin{cases} y_j & \text{für } j = 1, \dots, r, \\ 0 & \text{für } j = r+1, \dots, n, \end{cases}$$

d. h. $A_{f,X,Y}$ ist von der gewünschten Form. $\square$

Satz 8. *Es sei $A \in K^{m \times n}$ mit $\operatorname{rg} A = r$. Dann existieren invertierbare Matrizen $S \in \operatorname{Gl}(m, K)$ und $T \in \operatorname{Gl}(n, K)$ mit*

$$S \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E_r die $(r \times r)$ -Einheitsmatrix ist und 0 jeweils geeignete (möglicherweise auch leere) Bereiche mit Koeffizienteneinträgen 0 bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f: K^n \longrightarrow K^m, \quad a \longmapsto A \cdot a,$$

deren Matrix bezüglich der kanonischen Basen in K^n und K^m durch A gegeben wird. Nach Lemma 7 gibt es dann Basen X von K^n und Y von K^m , so dass $A_{f,X,Y}$ von der behaupteten Gestalt ist. Nach Satz 4 gilt $A_{f,X,Y} = S \cdot A \cdot T$ mit Basiswechselmatrizen, also invertierbaren Matrizen S und T . $\square$

Abschließend wollen wir noch andeuten, wie man die Überlegungen dieses Abschnitts dazu benutzen kann, um zu zeigen, dass bei einer Matrix stets der Spalten- mit dem Zeilenrang übereinstimmt. Wir hatten dieses Resultat bereits in 3.2/10 hergeleitet, und zwar unter Verwendung der Theorie dualer Abbildungen. Sei also $A \in K^{m \times n}$. Dann können wir A als Matrix $A_{f,X,Y}$ zu einer K -linearen Abbildung $f: V \longrightarrow W$ bezüglich einer Basis X von V bzw. Y von W interpretieren, wobei sich der Spaltenrang von A nach 3.2/2 zu $\operatorname{rg}_s A = \operatorname{rg} f$ berechnet. Invertierbare Matrizen $S \in \operatorname{Gl}(m, K)$, $T \in \operatorname{Gl}(n, K)$ kann man als Basiswechselmatrizen auffassen, so dass man $\operatorname{rg}_s(S \cdot A \cdot T) = \operatorname{rg} f$ unter Benutzung von Satz 4 erhält. Mit dieser Überlegung ergibt sich

$$\operatorname{rg}_s(S \cdot A \cdot T) = \operatorname{rg}_s A$$

für beliebige Matrizen $S \in \operatorname{Gl}(m, K)$, $T \in \operatorname{Gl}(n, K)$. Diese Gleichung ist aber auch für den Zeilenrang richtig, denn es gilt

$$\operatorname{rg}_z(S \cdot A \cdot T) = \operatorname{rg}_s(S \cdot A \cdot T)^t = \operatorname{rg}_s(T^t \cdot A^t \cdot S^t) = \operatorname{rg}_s A^t = \operatorname{rg}_z A.$$

Man benötigt hierfür außer den Resultaten 3.2/7 und 3.2/8 lediglich, dass mit $S \in \operatorname{Gl}(m, K)$ auch S^t invertierbar ist, entsprechend für T , was aber unmittelbar klar ist. Wählt man nun S und T so, dass $S \cdot A \cdot T$ die in Satz 8 angegebene einfache Gestalt besitzt, so gilt natürlich $\operatorname{rg}_s(S \cdot A \cdot T) = \operatorname{rg}_z(S \cdot A \cdot T)$, und es folgt die gewünschte Beziehung

$$\operatorname{rg}_s A = \operatorname{rg}_s(S \cdot A \cdot T) = \operatorname{rg}_z(S \cdot A \cdot T) = \operatorname{rg}_z A.$$

Aufgaben

1. Man zeige, dass die folgenden Systeme von Vektoren

$$X = \{(1, 1, 1, 2, 0), (1, 0, 2, 1, 0), (1, 1, 1, 2, 1), (1, 1, 2, 1, 0), (0, 1, 1, 2, 0)\},$$

$$Y = \{(1, 2, 3, 4, 4), (1, 1, 2, 3, 4), (1, 3, 4, 6, 7), (2, 3, 5, 6, 8), (0, 0, 1, 1, 1)\}$$

jeweils eine Basis von $\mathbb{R}^5$ bilden. Wie lauten die Basiswechselmatrizen $A_{\text{id}, X, Y}$ und $A_{\text{id}, Y, X}$?

2. Es sei V ein K -Vektorraum endlicher Dimension $n > 0$. Man beschreibe alle Basiswechselmatrizen $A \in K^{n \times n}$, welche eine gegebene Basis X von V , abgesehen von der Reihenfolge der Basisvektoren, wieder in sich selbst überführen.
3. Es sei V ein K -Vektorraum endlicher Dimension $n > 0$. Für gegebene Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ beweise man die Äquivalenz folgender Bedingungen:
- (i) Es existiert eine Matrix $S \in \text{Gl}(n, K)$ mit $B = S^{-1}AS$.
 - (ii) Es existieren $f \in \text{End}_K(V)$ und Basen X, Y von V mit $A_{f, X, X} = A$ und $A_{f, Y, Y} = B$.
4. Für Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ schreibe man $A \sim B$, falls es $S \in \text{Gl}(m, K)$ und $T \in \text{Gl}(n, K)$ gibt mit $B = SAT$. Man zeige, dass die Relation “ $\sim$ ” eine Äquivalenzrelation ist, beschreibe die zugehörigen Äquivalenzklassen und gebe insbesondere deren Anzahl an.
5. Es sei $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit den Basen X, Y und V^* sein Dualraum mit den dualen Basen X^*, Y^* . Für die Basiswechselmatrizen $A = A_{\text{id}, X, Y}$ und A_{id, X^*, Y^*} gilt dann $A_{\text{id}, X^*, Y^*} = (A^{-1})^t$.

3.5 Lineare Gleichungssysteme

Für eine Matrix $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{m \times n}$ und einen Vektor $b = (b_1, \dots, b_m)^t \in K^m$, den wir als Spaltenvektor auffassen wollen, nennt man

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}x_1 & + & \dots & + & \alpha_{1n}x_n & = & b_1 \\ \alpha_{21}x_1 & + & \dots & + & \alpha_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \dots & & & & \\ \alpha_{m1}x_1 & + & \dots & + & \alpha_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$A \cdot x = b$$

ein *lineares Gleichungssystem* mit Koeffizienten $\alpha_{ij} \in K$ und den “Unbekannten” $x_1, \dots, x_n$, bzw. $x = (x_1, \dots, x_n)^t$. Genauer versteht man hierunter das Problem, alle $x \in K^n$ zu bestimmen, die die Gleichung $A \cdot x = b$ erfüllen. Im Falle $b = 0$ heißt das Gleichungssystem *homogen*, ansonsten *inhomogen*. Wir wollen eine spezielle Bezeichnung für den Raum der Lösungen eines linearen Gleichungssystems einführen.

Definition 1. Für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ und einen Spaltenvektor $b \in K^m$ bezeichnen wir die Menge

$$M_{A,b} = \{x \in K^n; A \cdot x = b\}$$

als den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$.

Wir können sofort eine triviale, aber sehr wichtige Feststellung treffen, die Informationen über die Struktur solcher Lösungsräume liefert:

Bemerkung 2. Zu einem linearen Gleichungssystem $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$ betrachte man die K -lineare Abbildung $f: K^n \longrightarrow K^m$, $a \longmapsto A \cdot a$. Dann gilt

$$M_{A,b} = f^{-1}(b).$$

Der Lösungsraum des Gleichungssystems ist daher ein affiner Unterraum von K^n ; vgl. 2.2/11.

Für $b = 0$ folgt insbesondere $M_{A,0} = \ker f$. In diesem Falle ist der Lösungsraum sogar ein linearer Unterraum von K^n .

Wir wollen zunächst homogene lineare Gleichungssysteme, also lineare Gleichungssysteme des Typs $A \cdot x = 0$ genauer studieren. Der Lösungsraum $M_{A,0}$ ist dann ein linearer Unterraum von K^n , enthält stets die triviale Lösung $0 \in K^n$ und ist folglich nicht leer.

Satz 3. Für $A \in K^{m \times n}$ ist der Lösungsraum $M_{A,0}$ des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ein linearer Unterraum von K^n mit Dimension $\dim_K(M_{A,0}) = n - \operatorname{rg} A$.

Beweis. Die lineare Abbildung $f: K^n \longrightarrow K^m$, $a \longmapsto A \cdot a$, besitzt $M_{A,0}$ als Kern, und die Dimensionsformel 2.1/10 liefert $n = \dim_K(\ker f) + \operatorname{rg} f$, also $\dim_K(M_{A,0}) = n - \operatorname{rg} A$. $\square$

Lemma 4. Für $A \in K^{m \times n}$ und $S \in \operatorname{Gl}(m, K)$ haben die linearen Gleichungssysteme $A \cdot x = 0$ und $(S \cdot A) \cdot x = 0$ dieselben Lösungen, d. h. $M_{A,0} = M_{SA,0}$.

Beweis. Gilt $x \in M_{A,0}$, also $A \cdot x = 0$, so folgt mittels Multiplikation mit S von links $S \cdot A \cdot x = 0$, also $x \in M_{SA,0}$. Umgekehrt, hat man $x \in M_{SA,0}$, also $S \cdot A \cdot x = 0$, so ergibt sich durch Multiplikation mit S^{-1} von links $A \cdot x = 0$, also $x \in M_{A,0}$. $\square$

Die Aussage des Lemmas ist von besonderem Nutzen, wenn man ein konkret gegebenes homogenes lineares Gleichungssystem der Form $A \cdot x = 0$ explizit lösen möchte. Man kann nämlich das Gaußsche Eliminationsverfahren anwenden

und A gemäß 3.2/4 mittels elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen. Da solche Umformungen auch als Multiplikation von links mit Elementarmatrizen, also invertierbaren Matrizen, interpretiert werden können, ändert sich der Lösungsraum des betrachteten homogenen linearen Gleichungssystems dabei nicht. Man darf daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A Zeilenstufenform besitzt. Um unsere Bezeichnungen übersichtlich zu gestalten, wollen wir weiter annehmen, dass die Elemente von A , bei denen sozusagen die einzelnen Stufen beginnen, auf der Hauptdiagonalen von A stehen, dass also A von der Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \dots & \dots & \alpha_{1n} \\ & \alpha_{22} & \dots & \dots & \alpha_{2n} \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & 0 & & \alpha_{rr} & \dots & \alpha_{rn} \\ & & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

mit Koeffizienten $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{rr} \in K^*$ ist, wobei $r = \operatorname{rg} A$ gilt. Eine solche Zeilenstufenform kann man aus einer Zeilenstufenform allgemeinen Typs durch Vertauschen von Spalten herstellen, ein Prozess, der sich beispielsweise durch Umm Nummerieren der Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ realisieren lässt. Im Übrigen kann man durch Ausführen weiterer elementarer Zeilenumformungen stets $\alpha_{ii} = 1$ für $i = 1, \dots, r$ erreichen und außerdem, dass alle Elemente in der i -ten Spalte oberhalb von α_{ii} verschwinden. Die Matrix A kann also von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1,n} \\ & 1 & & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots \\ & & & \ddots & & \ddots \\ & & & & 1 & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{r,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

angenommen werden, wobei sich in der linken oberen Ecke die $(r \times r)$ -Einheitsmatrix befindet. Somit ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$x_i + \sum_{j=r+1}^n \alpha_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, r$$

Dies ist ohne Aufwand möglich, da man die Werte $x_{r+1}, \dots, x_n \in K$ beliebig vorgeben darf und sich die Werte von $x_1, \dots, x_r$ hieraus zu

$$x_i = - \sum_{j=r+1}^n \alpha_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, r,$$

bestimmen.

Die Arbeit beim Lösen des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ reduziert sich damit auf das Herstellen der oben angegebenen speziellen Zeilenstufenform von A . Insbesondere wird deutlich, warum dieses nach Gauß benannte Verfahren als *Eliminationsverfahren* bezeichnet wird. Aus der ersten Gleichung ergibt sich x_1 in Abhängigkeit von $x_{r+1}, \dots, x_n$, aus der zweiten x_2 in Abhängigkeit von $x_{r+1}, \dots, x_n$ usw. Es werden also nach und nach unbekannte Größen eliminiert, bis man zu einem Restsystem von Größen gelangt, deren Werte frei wählbar sind. Dies äußert sich darin, dass die Projektion

$$K^n \longrightarrow K^{n-r}, \quad (a_1, \dots, a_n)^t \longmapsto (a_{r+1}, \dots, a_n)^t,$$

einen Isomorphismus $M_{A,0} \xrightarrow{\sim} K^{n-r}$ induziert. Insbesondere sehen wir nochmals $\dim_K M_{A,0} = n - r$ ein, und es wird klar, dass man durch Liften einer Basis von K^{n-r} , etwa der kanonischen, eine Basis von $M_{A,0}$ erhält. In obiger Notation besteht diese dann aus den Vektoren

$$v_j = (-\alpha_{1j}, \dots, -\alpha_{rj}, \delta_{r+1j}, \dots, \delta_{nj})^t, \quad j = r+1, \dots, n.$$

Das Verfahren zur Bestimmung einer Basis des Lösungsraums $M_{A,0}$ eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ gestaltet sich daher wie folgt:

Man transformiere A auf die spezielle oben beschriebene Zeilenstufenform. Für $j = r+1, \dots, n$ sei $v_j \in K^n$ derjenige Vektor, dessen Komponenten mit Index $i = 1, \dots, r$ jeweils aus dem Negativen der entsprechenden Komponenten der j -ten Spalte der Zeilenstufenform von A bestehen und dessen Komponenten mit Index $i = r+1, \dots, n$ gerade diejenigen des $(j-r)$ -ten Einheitsvektors aus K^{n-r} seien. Dann bilden $v_{r+1}, \dots, v_n$ eine Basis von $M_{A,0}$.

Im Prinzip behält diese Regel auch dann ihre Gültigkeit, wenn wir bei der Herstellung der Zeilenstufenform von A auf Spaltenvertauschungen und damit auf ein Ummummerieren der Unbekannten verzichten. Die Rolle der Indizes $i = 1, \dots, r$ (bzw. $i = r+1, \dots, n$) wird, was die Spaltenindizes der Zeilenstufenform von A wie auch die Indizes der Komponenten der v_j angeht, in diesem Falle von denjenigen Spaltenindizes übernommen, bei denen die Zeilenstufenform “springt” (bzw. nicht “springt”). Hiermit meinen wir diejenigen Spalten, die im Sinne der Notation von 3.2/4 eines (bzw. keines) der dort positionierten Elemente $\beta_1, \dots, \beta_r \in K^*$ enthalten. Um die Lösungen auch in diesem Falle formelmäßig zu beschreiben, gehen wir von der entsprechenden speziellen Zeilenstufenform von A aus, die nunmehr die Gestalt

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & j_1 & j_2 & \longleftarrow \text{Spaltenindex} \longrightarrow & j_r & n \\
\left(\begin{array}{ccccccc}
0 \dots 0 & \boxed{1 * \dots * 0 * \dots *} & \dots & * \dots * 0 * \dots * \\
0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & \boxed{1 * \dots *} & \dots & * \dots * 0 * \dots * \\
0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & \dots & * \dots * 0 * \dots * \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & \dots & \boxed{0 \dots 0} & \boxed{1 * \dots *} \\
0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & 0 0 \dots 0 & \dots & 0 \dots 0 & 0 0 \dots 0
\end{array} \right)
\end{array}$$

besitzt. Bezeichnet dann J' das Komplement der Menge der Spaltenindizes, bei denen die Zeilenstufenform A “springt”, also $J' = \{1, \dots, n\} - \{j_1, \dots, j_r\}$, so ist das lineare Gleichungssystem

$$x_{j_i} + \sum_{j' \in J'} \alpha_{ij'} x_{j'} = 0, \quad i = 1, \dots, r,$$

zu lösen. Wiederum kann man die Werte der $x_{j'} \in K$ für $j' \in J'$ beliebig vorgeben und die Werte der x_{j_i} für $i = 1, \dots, r$ daraus berechnen. Die Projektion

$$K^n \longrightarrow K^{n-r}, \quad (a_1, \dots, a_n)^t \longmapsto (a_{j'})_{j' \in J'}^t,$$

liefert daher einen Isomorphismus $M_{A,0} \xrightarrow{\sim} K^{n-r}$, und durch Liften der kanonischen Basis von K^{n-r} erhält man eine Basis von $M_{A,0}$ bestehend aus den Vektoren

$$v_{j'} = (\xi_{1j'}, \dots, \xi_{nj'})^t, \quad j' \in J',$$

mit

$$\xi_{i'j'} = \begin{cases} -\alpha_{ij'} & \text{für } i' = j_i \text{ mit } i \in \{1, \dots, r\}, \\ \delta_{i'j'} & \text{für } i' \in J' \end{cases}.$$

Wir wollen ein Beispiel betrachten. Sei $K = \mathbb{R}$, $m = 3$, $n = 4$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ schreibt sich dann ausführlich in der Form:

$$\begin{aligned}
x_3 + 2x_4 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 0 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 0
\end{aligned}$$

Bringen wir nun A mittels elementarer Zeilenumformungen auf die spezielle Zeilenstufenform, also

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so “springt” diese Stufenform genau bei den Spaltenindizes 1 und 3. Wir lesen daher nach der oben beschriebenen Regel als Basis des Lösungsraumes $M_{A,0}$ ab:

$$v_2 = (-2, 1, 0, 0)^t, \quad v_4 = (-1, 0, -2, 1)^t$$

Argumentieren wir etwas ausführlicher, so bleibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

zu lösen. Die Projektion

$$K^4 \longrightarrow K^2, \quad (a_1, \dots, a_4)^t \longmapsto (a_2, a_4)^t,$$

liefert einen Isomorphismus $M_{A,0} \xrightarrow{\sim} K^2$, und wir liften die kanonische Basis von K^2 zu einer Basis von $M_{A,0}$:

$$\begin{aligned} x_2 = 1, \quad x_4 = 0 &\implies x_1 = -2, \quad x_3 = 0 \\ x_2 = 0, \quad x_4 = 1 &\implies x_1 = -1, \quad x_3 = -2 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt $\dim_K M_{A,0} = 2$, und wir erkennen, wie bereits oben angegeben,

$$M_{A,0} = \langle (-2, 1, 0, 0)^t, (-1, 0, -2, 1)^t \rangle.$$

Als Nächstes wollen wir den Allgemeinfall behandeln, also inhomogene lineare Gleichungssysteme des Typs $A \cdot x = b$, wobei der Fall $b = 0$ nicht explizit ausgeschlossen werden soll. Im Folgenden bezeichnen wir mit $(A, b) \in K^{m \times (n+1)}$ diejenige Matrix, die aus A durch Hinzufügen von b als $(n+1)$ -ter Spalte entsteht.

Satz 5. Zu $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ betrachte man das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$.

(i) $A \cdot x = b$ ist genau dann lösbar (d. h. besitzt mindestens eine Lösung), wenn $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b)$ gilt.

(ii) $A \cdot x = b$ ist genau dann universell lösbar (d. h. besitzt für jedes $b \in K^m$ mindestens eine Lösung), wenn $\operatorname{rg} A = m$ gilt.

(iii) $A \cdot x = b$ besitzt genau dann für alle $b \in K^m$ höchstens eine Lösung, wenn $\operatorname{rg} A = n$ gilt.

Beweis. Man betrachte die lineare Abbildung $f: K^n \longrightarrow K^m, a \longmapsto A \cdot a$. Es gilt $M_{A,b} = f^{-1}(b)$ für den Lösungsraum zu $A \cdot x = b$; vgl. Bemerkung 2. Somit ist $M_{A,b}$ genau dann nicht leer, wenn b zum Bild von f gehört. Sind $a_1, \dots, a_n \in K^n$ die Spalten von A , so gilt im $f = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, und es ist $b \in \operatorname{im} f$ äquivalent zu $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$. Da aber $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ stets ein linearer Teilraum

von $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$ ist, kann man mit 1.5/14 (ii) bereits dann auf die Gleichheit beider Räume schließen, wenn ihre Dimensionen übereinstimmen. Die Dimensionen sind aber gerade die Ränge der Matrizen A bzw. (A, b) . Somit sehen wir, dass $M_{A,b} \neq \emptyset$ äquivalent zu $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A, b)$ ist, wie in (i) behauptet.

Wegen $M_{A,b} = f^{-1}(b)$ ist $A \cdot x = b$ genau dann universell lösbar, wenn f surjektiv ist, also im $f: K^m$ gilt. Letzteres ist äquivalent zu $\operatorname{rg} f = m$ und somit zu $\operatorname{rg} A = m$, wie in (ii) behauptet.

Die eindeutige Lösbarkeit von $A \cdot x = b$ schließlich, wie in (iii) betrachtet, ist äquivalent zur Injektivität von f . Indem man die Dimensionsformel 2.1/10 für f benutzt, also

$$n = \dim_K(\ker f) + \operatorname{rg} f,$$

sieht man, dass die Injektivität von f äquivalent zu $\operatorname{rg} f = n$ bzw. $\operatorname{rg} A = n$ ist. $\square$

Gilt $m = n$ in der Situation von Satz 5, so ist die universelle Lösbarkeit in Bedingung (ii) äquivalent zu der höchstens eindeutigen Lösbarkeit in Bedingung (iii). Mit 3.3/7 folgt daher:

Korollar 6. *Für eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist äquivalent:*

- (i) *Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist universell für $b \in K^n$ lösbar.*
- (ii) *Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.*
- (iii) *A ist invertierbar.*

Wir wollen noch etwas genauer auf die Struktur von Lösungsräumen inhomogener linearer Gleichungssysteme eingehen. Das nachfolgende Resultat zeigt dabei nochmals, dass es sich bei solchen Lösungsräumen um affine Unterräume handelt.

Satz 7. *Für $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ habe man eine Lösung $v_0 \in M_{A,b}$ des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$. Dann gilt $M_{A,b} = v_0 + M_{A,0}$. Mit anderen Worten, die Gesamtheit aller Lösungen des inhomogenen Systems $A \cdot x = b$ erhält man in der Form $v_0 + v$, wobei v_0 eine beliebige, so genannte partikuläre Lösung dieses Systems ist und v alle Lösungen des zugehörigen homogenen Systems $A \cdot x = 0$ durchläuft.*

Beweis. Wir betrachten wieder die durch A gegebene lineare Abbildung

$$f: K^n \longrightarrow K^m, \quad x \longmapsto A \cdot x,$$

wobei $M_{A,b} = f^{-1}(b)$ gilt. Für $v_0 \in M_{A,b}$ folgt dann mit 2.2/2

$$M_{A,b} = f^{-1}(f(v_0)) = v_0 + \ker f = v_0 + M_{A,0},$$

wie behauptet. $\square$

Wir wollen nun noch zeigen, wie man mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens auch inhomogene lineare Gleichungssysteme lösen kann. Zunächst

eine nützliche Beobachtung, die als Verallgemeinerung von Lemma 4 zu sehen ist:

Lemma 8. Für $A \in K^{m \times n}$, $b \in K^m$ und $S \in \text{Gl}(m, K)$ haben die linearen Gleichungssysteme $A \cdot x = b$ und $(S \cdot A) \cdot x = S \cdot b$ dieselben Lösungen, d. h. $M_{A,b} = M_{SA, Sb}$.

Beweis. Indem man mit S bzw. S^{-1} von links multipliziert, sieht man, dass $A \cdot x = b$ für $x \in K^n$ äquivalent zu $S \cdot A \cdot x = S \cdot b$ ist. $\square$

Man darf also zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ die Matrix A mittels elementarer Zeilenumformungen abändern, wenn man gleichzeitig diese Umformungen auch bei b , aufgefasst als $(m \times 1)$ -Matrix, durchführt; solche Umformungen lassen sich nämlich als Multiplikation von links mit Elementarmatrizen, also invertierbaren Matrizen auffassen. Am einfachsten ist es dann, A und b zu der Matrix (A, b) zusammenzufügen und diese Matrix mittels elementarer Zeilenumformungen zu verändern. Solche Umformungen wirken separat auf die einzelnen Spalten, insbesondere also separat auf die Matrix A sowie die Spalte b , d. h. es gilt $S \cdot (A, b) = (SA, Sb)$ für $S \in \text{Gl}(m, K)$.

Wie im homogenen Fall transformiere man nun (A, b) zunächst auf Zeilenstufenform. Nach eventueller Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ können wir annehmen, dass die transformierte Matrix die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1,n} & \beta_1 \\ & 1 & & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{2,n} & \beta_2 \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{r,n} & \beta_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \beta_{r+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \ddots & & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$$

SA

Sb

besitzt, wobei sich in der linken oberen Ecke die $(r \times r)$ -Einheitsmatrix befindet und S das Produkt der benötigten Elementarmatrizen andeutet. Wie im homogenen Fall folgt $r = \text{rg } A$, und man sieht, dass die Bedingung $\text{rg } A = \text{rg}(A, b)$ bzw. $\text{rg}(SA) = \text{rg}(SA, Sb)$ äquivalent zu $\beta_{r+1} = 0$ ist. Das System $A \cdot x = b$ ist also genau dann lösbar, wenn in obiger Zeilenstufenform $\beta_{r+1} = 0$ gilt. Ist Letzteres der Fall, so ergibt sich

$$x_i + \sum_{j=r+1}^n \alpha_{ij} x_j = \beta_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

als transformiertes Gleichungssystem. Indem man $x_{r+1}, \dots, x_n = 0$ setzt, gelangt man zu einer partikulären Lösung v_0 mit den Komponenten

$$\xi_j = \begin{cases} \beta_j & \text{für } j = 1, \dots, r \\ 0 & \text{für } j = r+1, \dots, n \end{cases}.$$

Bestimmt man nun auch noch, wie bereits vorgeführt, den Lösungsraum $M_{A,0}$ des homogenen Systems $A \cdot x = 0$, so ergibt sich $M_{A,b} = v_0 + M_{A,0}$ gemäß Satz 7. Insgesamt lässt sich feststellen, dass sich die Lösung v_0 , wie auch eine Basis $v_{r+1}, \dots, v_n$ des Lösungsraumes $M_{A,0}$ in direkter Weise aus der hergeleiteten speziellen Zeilenstufenform der Ausgangsmatrix (A, b) ablesen lassen. Ähnlich wie im Falle homogener linearer Gleichungssysteme gilt dies auch dann, wenn man keine Ummummerierung der Unbekannten zulässt und stattdessen die Indizes $i = 1, \dots, r$ durch diejenigen Spaltenindizes $j_1, \dots, j_r$ ersetzt, bei denen die Zeilenstufenform von A “springt”. Es ist dann das Gleichungssystem

$$x_{j_i} + \sum_{j' \in J'} \alpha_{ij'} x_{j'} = \beta_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

mit $J' = \{1, \dots, n\} - \{j_1, \dots, j_r\}$ zu lösen. Eine partikuläre Lösung $v_0 \in M_{A,b}$ wird in diesem Falle durch den Vektor $v_0 = (\xi_1, \dots, \xi_n)^t \in K^n$ mit den Komponenten

$$\xi_j = \begin{cases} \beta_i & \text{für } j = j_i \text{ mit } i \in \{1, \dots, r\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben.

Als Beispiel wollen wir für $K = \mathbb{R}$ das System $A \cdot x = b$ lösen mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Den Lösungsraum $M_{A,0}$ des zugehörigen homogenen Systems hatten wir bereits bestimmt. Wir bringen zunächst die Matrix (A, b) auf spezielle Zeilenstufenform, also

$$(A, b) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus man $\text{rg}(A, b) = 3 > 2 = \text{rg } A$ entnimmt. Das System $A \cdot x = b$ besitzt daher keine Lösung, d. h. es gilt $M_{A,b} = \emptyset$.

Alternativ wollen wir das Gleichungssystem auch noch für $b = (1, 1, 2)^t$ betrachten. Die Transformation von (A, b) auf spezielle Zeilenstufenform liefert dann

$$(A, b) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall gilt $\text{rg } A = \text{rg}(A, b) = 2$, und man liest $v_0 = (0, 0, 1, 0)$ als partikuläre Lösung ab.

In ausführlicherer Argumentation ist das System

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0, \\x_3 + 2x_4 &= 1\end{aligned}$$

zu betrachten. Um eine partikuläre Lösung zu berechnen, setzen wir $x_2 = x_4 = 0$ und erhalten $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, also $(0, 0, 1, 0)^t \in M_{A,b}$. Da wir bereits gezeigt haben, dass die Vektoren $(-2, 1, 0, 0)^t$ und $(-1, 0, -2, 1)^t$ eine Basis von $M_{A,0}$ bilden, ergibt sich

$$M_{A,b} = (0, 0, 1, 0)^t + \langle (-2, 1, 0, 0)^t, (-1, 0, -2, 1)^t \rangle.$$

Aufgaben

1. Für eine Matrix und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 5}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4, \quad b' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

bestimme man alle Lösungen

- (i) des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$,
- (ii) des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$,
- (iii) des inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b'$.

2. Für reelle Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}$$

und Vektoren $b \in \mathbb{R}^4$ untersuche man die linearen Gleichungssysteme $A \cdot x = b$, $B \cdot x = b$ und $C \cdot x = b$ auf universelle bzw. höchstens eindeutige Lösbarkeit in $x \in \mathbb{R}^3$, bzw. $x \in \mathbb{R}^4$, bzw. $x \in \mathbb{R}^5$. Sind diese Systeme speziell für $b = (1, 0, 0, 0)^t$ lösbar?

- 3. Man zeige, dass jeder affine Unterraum in K^n Lösungsraum eines geeigneten linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten aus K ist.
- 4. Es sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung, die bezüglich geeigneter Basen X von V und Y von W durch die Matrix

$$A_{f,X,Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben sei. Man bestimme eine Basis von $\ker f$.

5. Man betrachte in $\mathbb{R}^6$ die linearen Unterräume

$$U = \langle (1, 1, 1, 0, 1, 1), (2, 3, 4, 0, 2, 1), (0, 3, 2, 1, 1, 1) \rangle,$$

$$U' = \langle (2, 6, 6, 2, 2, 1), (0, 9, 4, 3, 0, 1), (1, 2, 3, 1, 2, 1) \rangle$$

und bestimme $U \cap U'$ durch Angabe einer Basis.

6. Es sei $f: V \rightarrow W$ eine K -lineare Abbildung zwischen (endlich-dimensionalen) K -Vektorräumen und $f^*: W^* \rightarrow V^*$ die zugehörige duale Abbildung. Man zeige für $b \in W$, dass die "lineare Gleichung" $f(x) = b$ genau dann in $x \in V$ lösbar ist, wenn $\varphi(b) = 0$ für alle $\varphi \in \ker f^*$ gilt.
7. Zu einem K -Vektorraum V endlicher Dimension n betrachte man Linearformen $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in V^*$ und zeige:
- (i) Es gilt $\dim_K \langle \varphi_1, \dots, \varphi_m \rangle = \operatorname{rg} f$, wobei $f: V \rightarrow K^m$ definiert sei durch $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$.
 - (ii) Das "lineare Gleichungssystem" $\varphi_i(x) = b_i$, $i = 1, \dots, m$, hat genau dann für alle Wahlen von Elementen $b_1, \dots, b_m \in K$ eine Lösung $x \in V$, wenn die Linearformen $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ linear unabhängig sind.
8. Es seien V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum, $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in V^*$ Linearformen und $b_1, \dots, b_m \in K$. Man zeige: Das "lineare Gleichungssystem"

$$\varphi_i(x) = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

ist genau dann in $x \in V$ lösbar, wenn folgende Bedingung erfüllt ist: Sind $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ Koeffizienten mit $\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i = 0$, so folgt auch $\sum_{i=1}^m \alpha_i b_i = 0$.