

7 Anwendungen in der Geometrie

Es ist naheliegend, Sachverhalte der Linearen Algebra in geeigneten Fällen auch geometrisch zu interpretieren, zumal dann, wenn diese im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ stattfinden.

Dies ermöglicht einen fruchtbaren Anschluss an das räumliche Vorstellungsvermögen, führt aber zwangsläufig dazu, dass die prinzipielle Unterscheidung zwischen *Punkten* auf der einen und *Vektoren* auf der anderen Seite verwischt wird.

In diesem Kapitel wird der Zusammenhang zwischen Geometrie und linearer Algebra von einem systematischeren Standpunkt untersucht.

7.1 Affine Räume

Frage 421 Was versteht man unter einem **affinen Raum** A über einem Körper K ?

Antwort: Ein affiner Raum A über K besteht aus einer Menge, die wir ebenfalls mit A bezeichnen und deren Elemente *Punkte* genannt werden, und im Fall $A \neq \emptyset$ aus einem K -Vektorraum V_A und einer Zuordnung, die jedem geordneten Paar (p, q) von Punkten aus A eindeutig einen mit $\overrightarrow{pq}$ bezeichneten Vektor aus V_A so zuordnet, dass folgende Axiome erfüllt sind:

(A1) Zu jedem Punkt $p \in A$ und jedem Vektor $v \in V_A$ gibt es genau einen Punkt $q \in A$ mit $v = \overrightarrow{pq}$.

(A2) Für alle Punkte $p, q, r \in A$ gilt $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$.

Axiom (i) beinhaltet, dass ein Vektor $v \in V_A$ jedem Punkt $p \in A$ eindeutig einen weiteren Punkt $q \in A$ zuordnet. Man kann die Vektoren $v \in V_A$ daher auch als Abbildungen

$$v: A \longrightarrow A, \quad p \longmapsto q \quad \text{mit } v = \overrightarrow{pq}$$

interpretieren, die den Punkt p in q überführen. Insbesondere gilt

$$\overrightarrow{pq}(p) = q \quad \text{und} \quad \overrightarrow{pv(p)} = v. \quad (*)$$

Geometrisch beschreibt $v = \overrightarrow{pq}$ eine Translation des affinen Raums A , weswegen wir V_A als *Translationsraum* bezeichnen.

Beispiel: Sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Dann ist für jeden Vektor $v \in V$ der affine Unterraum $A := v + U \subset V$ (vgl. Frage 149) ein affiner Raum im Sinne der obigen Definition, indem man für zwei Punkte $p = v + u_1 \in A$ und $q = v + u_2 \in A$ den Vektor $\overrightarrow{pq}$ durch

$$\overrightarrow{pq} = q - p \in U$$

definiert. Mit $V_A = U$ erfüllt die Zuordnung dann die beiden Axiome (A1) und (A2). Damit ist insbesondere auch gezeigt, dass jeder Vektorraum V Anlass zu einem affinen Raum gibt, indem man die Elemente der Menge V als Punkte interpretiert und V zusammen mit seiner Vektorraumstruktur als Translationsraum. Gilt speziell $V = K^n$, so erhält man daraus den *n -dimensionalen affinen Standardraum* $\mathbb{A}_n(K)$. $\blacklozenge$

Frage 422 Wie ist die **Dimension** eines affinen Unterraums A erklärt?

Antwort: Die Dimension eines affinen Raums A ist gleich der Dimension des A zugeordneten Translationsraums V_A . Im Fall $A = \emptyset$ setzt man $\dim A = -1$. $\blacklozenge$

Frage 423 Wieso gilt für zwei Punkte p, q eines affinen Raums A stets $\overrightarrow{pp} = 0$ und $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$?

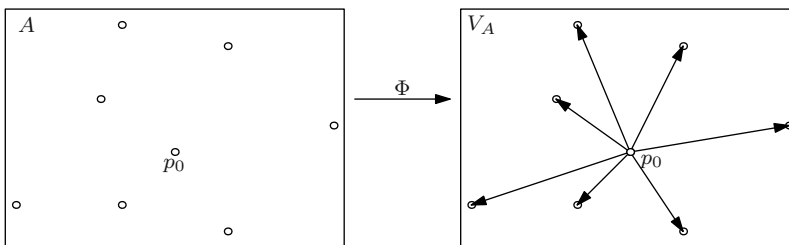
Antwort: Axiom (A2) liefert $\overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp}$, also $\overrightarrow{pp} = 0$. Damit folgt wiederum mit dem zweiten Axiom $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = 0$, also $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$. $\blacklozenge$

Frage 424 Wie erhält man eine Bijektion zwischen einem affinen Raum A und dessen Translationsraum V_A ?

Antwort: Man wähle einen beliebigen Punkt $p_0 \in A$ und definiere die Abbildung

$$\Phi: A \longrightarrow V_A, \quad p \longmapsto \overrightarrow{p_0 p}.$$

Dann ist Φ injektiv und ferner aufgrund von (A1) surjektiv, also eine Bijektion.



Zeichnet man im affinen Raum einen beliebigen Punkt als „Anfangspunkt“ aus, dann entsprechen die Punkte aus A also eineindeutig den Vektoren aus V_A . Man kann daher V_A als Raum der *Ortsvektoren* von A bezüglich eines Anfangspunkts p_0 auffassen. Es gilt also

$$V_A = \{\overrightarrow{pq} ; p, q \in A\} = \{\overrightarrow{p_0 q} ; q \in A\},$$

wobei der mittlere Term sich direkt aus der Definition von V_A ergibt und der hintere aufgrund der vorigen Überlegung. $\blacklozenge$

Frage 425 Was ist ein **affiner Unterraum** eines affinen Raums A ? Wie ist die Dimension eines affinen Unterraums erklärt? Wann nennt man einen affinen Unterraum eine **affine Gerade**, wann eine **affine Ebene**?

Antwort: Eine Teilmenge $U \subset A$ heißt *affiner Unterraum von A* , wenn entweder $U = \emptyset$ gilt oder die Menge $V_U = \{\overrightarrow{pq} ; p, q \in U\}$ ein linearer Unterraum von V_A ist.

Für $U \neq \emptyset$ ist $\dim U = \dim V_U$ und für $U = \emptyset$ setzt man $\dim U = -1$. Affine Unterräume der Dimension 1 heißen *affine Gerade*, Unterräume der Dimension 2 *affine Ebene*. ♦

Frage 426 Sei S ein nichtleeres System von affinen Unterräumen eines affinen Raums A . Ist dann der Durchschnitt $D := \bigcap_{U \in S} U$ selbst wieder ein affiner Unterraum?

Antwort: Der Durchschnitt ist selbst ein affiner Unterraum. Im Fall $D = \emptyset$ ist dies trivial. Im anderen Fall genügt es zu zeigen, dass die Menge

$$V_D := \{\overrightarrow{pq} ; p, q \in D\} \subset V.$$

ein linearer Unterraum von V ist. Dies folgt mit der Antwort zu Frage 98, da V_D wegen

$$V_D = \bigcap_{U \in S} \{\overrightarrow{pq} ; p, q \in U\} = \bigcap_{U \in S} V_U$$

ein Durchschnitt linearer Unterräume ist. ♦

Frage 427 Sei A ein affiner Raum, $M \subset A$ eine Teilmenge. Wie ist die **affine Hülle von M** definiert?

Antwort: Die *affine Hülle* $\langle M \rangle$ von M in A (oder auch: der von M *erzeugte* oder *aufgespannte* affine Unterraum) ist definiert als der Durchschnitt aller M enthaltenden affinen Unterräume von A , also

$$\langle M \rangle := \bigcap \{U ; M \subset U, U \text{ Unterraum von } A\}.$$

Nach Antwort 426 ist $\langle M \rangle$ in der Tat ein affiner Unterraum von A .

In informeller Sprechweise lässt sich die affine Hülle von M auch als der kleinste affine Unterraum von A charakterisieren, der alle Punkte aus M enthält. Die affine Hülle eines Kreises in der affinen reellen Ebene ist z. B. mit dieser Ebene identisch. ♦

Frage 428 Sei S ein System von affinen Unterräumen eines affinen Raums A . Was versteht man dann unter dem **Verbindungsraum** $\bigvee_{U \in S} U$?

Antwort: Der Verbindungsraum $\bigvee_{U \in S} U$ ist definiert als die affine Hülle der Vereinigung $\bigcup_{U \in S} U$, also

$$\bigvee_{U \in S} U := \left\langle \bigcup_{U \in S} U \right\rangle.$$

Nach Antwort 426 ist $\bigvee_{U \in S} U$ ein affiner Unterraum von A , nämlich der kleinste, der alle Punkte aus S enthält.

Der Verbindungsraum $\bigvee_{U \in S} U$ ist der kleinste affine Unterraum von A der alle Unterräume $U \in S$ enthält. So ist der Verbindungsraum zweier Punkte z. B. eine affine Gerade.

Für den Verbindungsraum endlich vieler Unterräume $U_1, \dots, U_k$ benutzt man auch die Schreibweise $U_1 \vee \dots \vee U_k$, und statt $\{p\} \vee \{q\}$ schreibt man vereinfachend auch $p \vee q$. $\blacklozenge$

Frage 429 Können Sie zeigen, dass für zwei Punkte $p, q \in A$ der Verbindungsraum eine affine Gerade ist?

Antwort: Es ist $V_{p \vee q} = \bigcap \{U \text{ Unterraum von } V ; U \supset \overrightarrow{pq}\} = K \cdot \overrightarrow{pq}$. Damit ist $p \vee q$ ein eindimensionaler affiner Unterraum, also eine affine Gerade. $\blacklozenge$

Frage 430 Sei A ein affiner Raum über einem Körper K mit $\text{char } K \neq 2$ und $U \subset A$ eine Teilmenge. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

- (i) U ist ein affiner Unterraum von A .
- (ii) Zu je zwei verschiedenen Punkten $p, q \in U$ gilt $p \vee q \subset U$.

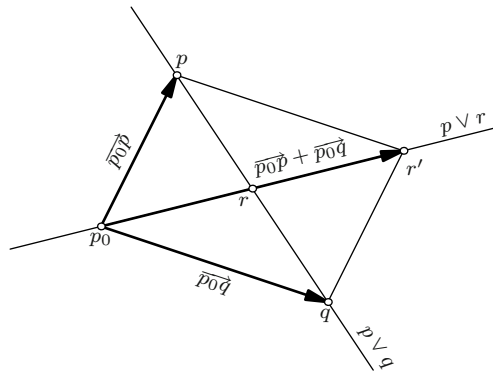
Können Sie das beweisen?

Antwort: (i) $\iff$ (ii). Ist U ein affiner Unterraum, so gilt $\overrightarrow{pq} \in V_U$ für $p, q \in U$, also $V_{p \vee q} = K \overrightarrow{pq} \subset V_U$ nach Frage 429 und folglich $p \vee q \subset U$.

(ii) $\iff$ (i). Die Idee des Beweises ist in der Abbildung rechts veranschaulicht. Sind p_0, p und q drei Punkte aus U , so liegt nach Voraussetzung der Mittelwert r von p und q ebenfalls in U . Die Gerade $p_0 \vee r$ ist dann nach Voraussetzung ebenfalls in U enthalten und somit auch der Punkt $r' = (\overrightarrow{p_0 p} + \overrightarrow{p_0 q})(p_0)$.

Formal argumentiert man folgendermaßen. Für einen festen Punkt $p_0 \in U$ betrachte man die Menge

$$V_U := \{\overrightarrow{p_0 p} \in V_A ; p \in U\}.$$



Es ist zu zeigen, dass V_U ein linearer Teilraum von V_A ist. Nach Voraussetzung liegt für zwei Punkt $p, q \in U$ der „Mittelwert“

$$r := \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{pq} \right) (p)$$

in U . Es gilt $\overrightarrow{pr} = \frac{1}{2} \overrightarrow{pq}$ und $\overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{pq}$, also $\overrightarrow{pr} + \overrightarrow{qr} = 0$. Damit erhält man

$$\overrightarrow{p_0 p} + \overrightarrow{p_0 q} = \overrightarrow{p_0 p} + \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{p_0 q} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{p_0 r} + \overrightarrow{p_0 r} = 2 \overrightarrow{p_0 r}.$$

Wegen $r \in U$ folgt $\overrightarrow{p_0 p} + \overrightarrow{p_0 q} \in V_U$. Ferner gilt für $\alpha \in K$ und $p \in U$ aufgrund von Formel (*) aus der Antwort zu Frage 421

$$\alpha \cdot \overrightarrow{p_0 p} = \overrightarrow{p_0 p'} \quad \text{mit } p' = \alpha \cdot \overrightarrow{p_0 p}(p_0).$$

Der Punkt p' liegt auf der Verbindungsgeraden $p_0 \vee p$ und damit nach Voraussetzung in U . Es folgt $\alpha \cdot \overrightarrow{p_0 p} \in V_U$.

Damit ist insgesamt gezeigt, dass V_U ein linearer Unterraum von V_A ist, die Behauptung damit vollständig bewiesen. $\blacklozenge$

Frage 431 Seien U, W affine Unterräume. Können Sie die folgenden beiden Behauptungen zeigen?

(i) Im Fall $U \cap W \neq \emptyset$ gilt

$$V_{U \vee W} = V_U + V_W.$$

(ii) Ist $U \cap W = \emptyset$ und sind $p \in U$ sowie $q \in W$ beliebige fest gewählte Punkte, so gilt

$$V_{U \vee W} = (V_U + V_W) \oplus V_{p \vee q}.$$

Antwort: (i) Sei $p \in U \cap W$ fest gewählt. Es gilt dann

$$V_U \cup V_W = \{\overrightarrow{pq} ; q \in U \cup W\} \subset V_{U \vee W}.$$

Da definitionsgemäß $V_U \cup V_W \subset V_U + V_W$ gilt, folgt daraus

$$V_U + V_W \subset V_{U \vee W}.$$

Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, betrachte man den affinen Raum

$$X := \{q ; \overrightarrow{pq} \in V_U + V_W\}.$$

Wegen $U \subset X$ und $W \subset X$ gilt $U \vee W \subset X$, also

$$V_{U \vee W} \subset V_X = V_U + V_W.$$

Daraus folgt die zu zeigende Identität. (Kurz zusammengefasst ergibt sich diese daraus, dass die Summe linearer Unterräume und der Verbindungsraum affiner Unterräume analog definiert sind, nämlich als kleinster linearer (affiner) Unterraum, der die Vereinigung der beiden linearen (affinen) Unterräume enthält.)

(ii) Sei $p \in U$ und $q \in W$. Aus $p \vee q \subset U \vee W$ erhält man $U \vee W \vee (p \vee q) = U \vee W$. Durch zweimalige Anwendung des Ergebnisses von Teil (i) folgt daraus

$$V_{U \vee W} = V_U + V_{W \vee (p \vee q)} = (V_U + V_W) + V_{p \vee q},$$

und es bleibt zu zeigen, dass die hintere Summe direkt ist. Wegen $V_{p \vee q} = K\vec{pq}$ genügt es, dafür $\vec{pq} \notin V_U + V_W$ zu beweisen. Angenommen also, es gilt $\vec{pq} \in V_U + V_W$, dann gibt es Punkte $u \in U$ und $w \in W$ mit

$$\vec{pq} = \vec{pu} + \vec{wq}.$$

Daraus folgt

$$\vec{uw} = \vec{up} + \vec{pq} + \vec{qw} = 0,$$

also $u = w$, im Widerspruch zur Voraussetzung $U \cap W = \emptyset$. Damit ist auch die Gleichung unter (ii) bewiesen. $\blacklozenge$

Frage 432 Wie lautet die **Dimensionsformel** für den Verbindungsraum $U \vee W$ zweier affiner Unterräume U und W ?

Antwort: Die Dimensionsformel lautet

$$\dim(U \vee W) = \begin{cases} \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) & \text{falls } U \cap W \neq \emptyset \\ \dim U + \dim W - \dim(V_U \cap V_W) + 1 & \text{falls } U \cap W = \emptyset. \end{cases}$$

Die Gleichungen folgen zusammen mit der Dimensionsformel für Summen von Untervektorräumen aus der Darstellung von $V_{U \vee W}$ aus Frage 431. Ist $U \cap W = \emptyset$, so gilt demnach

$$\begin{aligned} \dim(U \vee W) &= \dim(V_U + V_W) = \dim V_U + \dim V_W - \dim(V_U \cap V_W) \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W). \end{aligned}$$

Die Formel für den anderen Fall beweist man analog. Man beachte dabei aber, dass die Gleichung $V_{U \cap W} = V_U \cap V_W$ nur dann gilt, wenn U und W nicht disjunkt sind. $\blacklozenge$

Frage 433 Welche affine Dimension besitzen im $\mathbb{R}^3$ der Verbindungsraum

- (i) zweier sich schneidender Geraden?
- (ii) zweier windschiefer Geraden?

Antwort: Die Dimensionsformel liefert die Dimension $1 + 1 - 0 = 2$ im ersten und die Dimension $1 + 1 - 0 + 1 = 3$ im zweiten. $\blacklozenge$

Frage 434 Wann heißen zwei affine Unterräume U und W eines affinen Raumes A **parallel**?

Antwort: Die affinen Unterräume U und W heißen *parallel*, in Zeichen $U \parallel W$, wenn einer der beiden Translationsräume im anderen enthalten ist, wenn also $V_U \subset V_W$ oder $V_W \subset V_U$ gilt. $\blacklozenge$

Frage 435 Können Sie zeigen, dass zwei parallele affine Unterräume U und W entweder punktfremd sind, oder einer ein Unterraum des anderen ist?

Antwort: Sei $p \in U \cap W$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $V_U \subset V_W$ annehmen. Dann gilt für jedes $q \in U$ wegen $\vec{pq} \in V_U$ auch $\vec{pq} \in V_W$, also $q \in W$. Daraus folgt $U \subset W$. $\blacklozenge$

Frage 436 Was ist eine **Hyperebene** eines affinen Raums A ?

Antwort: Eine Hyperebene von A ist ein affiner Unterraum von A der Dimension $\dim A - 1$. Typische Beispiele sind Ebenen im $\mathbb{R}^3$ oder Geraden im $\mathbb{R}^2$. $\blacklozenge$

Frage 437 Sei U ein nichtleerer Unterraum und H eine Hyperebene des affinen Raumes A . Dann sind U und H parallel oder es gilt $\dim(U \cap H) = \dim U - 1$. Können Sie das beweisen?

Antwort: Sei U nicht in H enthalten. Dann gilt $U \vee H = A$. Im Fall $U \cap H \neq \emptyset$ folgt dann mit der Dimensionsformel

$$\dim(U \cap H) = \dim U + \dim H - \dim(U \vee H) = \dim U + (n - 1) - n = \dim U - 1.$$

Ist jedoch $U \cap H = \emptyset$, dann liefert die Dimensionsformel

$$\begin{aligned} \dim(V_U \cap V_H) &= \dim U + \dim H - \dim(U \vee H) + 1 \\ &= \dim U + (n - 1) - n + 1 \\ &= \dim U = \dim V_U. \end{aligned}$$

Es folgt $V_U \cap V_H = V_U$, also ist V_U ein linearer Unterraum von V_H , d. h. U und H sind parallel.

Aus diesem Ergebnis folgen nun bekannte geometrische Zusammenhänge:

- (i) Eine Gerade und eine Hyperebene in einem affinen Raum besitzen genau einen Schnittpunkt oder sind parallel. Insbesondere schneiden sich zwei nicht-parallele Geraden einer affinen Ebene in genau einem Punkt.
- (ii) Die Schnittmenge zweier Hyperebenen in einem affinen Raum der Dimension n ist entweder leer oder ein affiner Unterraum der Dimension $n - 2$. Insbesondere schneiden sich zwei nicht-parallele Ebenen im dreidimensionalen affinen Raum in einer Geraden. $\blacklozenge$

7.2 Affine Abbildungen und Koordinaten

Frage 438 Seien A und B affine Räume. Wann heißt eine Abbildung $F: A \rightarrow B$ **affin**? Was ist eine **Affinität**?

Antwort: Eine Abbildung $F: A \rightarrow B$ heißt *affin*, wenn eine lineare Abbildung $\hat{F}: V_A \rightarrow V_B$ zwischen den entsprechenden Translationsvektorräumen mit der Eigenschaft existiert, dass

$$\hat{F}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{F(p)F(q)}$$

für alle Punkte $p, q \in A$ gilt. Die Abbildung $\hat{F}$ ist dann im Fall der Existenz natürlich eindeutig bestimmt. Man nennt eine affine Abbildung *Affinität*, wenn sie bijektiv ist. $\blacklozenge$

Frage 439 Wieso ist eine Abbildung $F: A \rightarrow B$ zwischen affinen Räumen A und B schon dann affin, wenn ein Punkt $p_0 \in A$ existiert, so dass die Abbildung

$$\hat{F}: V_A \rightarrow V_B, \quad \overrightarrow{p_0 q} \mapsto \overrightarrow{F(p_0)F(q)}, \quad q \in A$$

linear wird?

Antwort: Seien $p, q \in A$ beliebig. Wegen $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pp_0} + \overrightarrow{p_0 q} = -\overrightarrow{p_0 p} + \overrightarrow{p_0 q}$ impliziert die Linearität von $\hat{F}$

$$\hat{F}(\overrightarrow{pq}) = \hat{F}(-\overrightarrow{p_0 p} + \overrightarrow{p_0 q}) = -\hat{F}(\overrightarrow{p_0 p}) + \hat{F}(\overrightarrow{p_0 q}) = -\overrightarrow{F(p_0)F(p)} + \overrightarrow{F(p_0)F(q)} = \overrightarrow{F(p)F(q)}.$$

Damit erfüllt F die Definition einer affinen Abbildung. $\blacklozenge$

Frage 440 Seien A, B affine Räume, $p \in A$ und $p^* \in B$ beliebig und $G: V_A \rightarrow V_B$ eine lineare Abbildung. Wieso existiert dann genau eine affine Abbildung $F: A \rightarrow B$, die $F(p) = p^*$ und $\hat{F} = G$ erfüllt? Mit anderen Worten: eine affine Abbildung ist durch ihre lineare Komponente und die Angabe eines Bildpunktes eindeutig bestimmt.

Antwort: Definiert man

$$\overrightarrow{p^* F(q)} = G(\overrightarrow{pq}),$$

so ist $F(q)$ für jeden Punkt $q \in A$ aufgrund von Axiom (A1) eindeutig bestimmt. Ferner ist F nach Frage 439 affin. $\blacklozenge$

Frage 441 Wie viele verschiedene Affinitäten der affinen Ebene $A := \mathbb{A}_2(\mathbb{F}_2)$ über dem Körper mit zwei Elementen gibt es?

Antwort: Die Menge $\text{GL}(2, \mathbb{F}_2)$ enthält 6 Elemente, nämlich die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt also sechs bijektive lineare Abbildungen $\mathbb{F}_2^2 \rightarrow \mathbb{F}_2^2$. Jeder dieser Isomorphismen bestimmt zusammen mit der Angabe des Bildpunktes von $p_0 \in A$ eindeutig eine Affinität $A \rightarrow A$. Da A vier Punkte enthält, gibt es für die Auswahl des Bildpunktes 4 Möglichkeiten. Also existieren $4 \cdot 6 = 24$ Affinitäten der affinen Ebene über dem Körper mit zwei Elementen. $\blacklozenge$

Frage 442 Können Sie zeigen, dass mit F und G auch $F \circ G$ eine affine Abbildung ist, der die lineare Abbildung $\hat{F} \circ \hat{G}$ zugeordnet ist?

Antwort: Es gilt

$$\overrightarrow{F(G(p))F(G(q))} = \hat{F}(\overrightarrow{G(p)G(q)}) = \hat{F}(\hat{G}(\overrightarrow{pq}))$$

Also ist $F \circ G$ eine affine Abbildung mit zugeordneter linearer Abbildung $\hat{F} \circ \hat{G}$. $\blacklozenge$

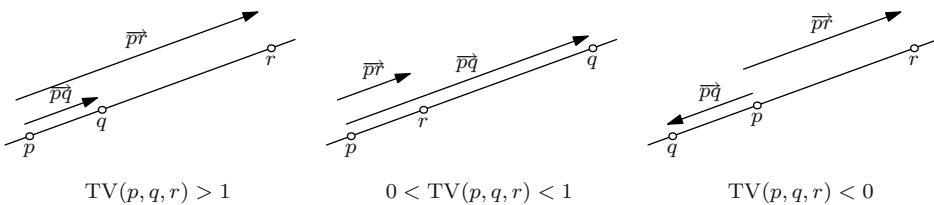
Frage 443 Sei $F: A \rightarrow B$ eine affine Abbildung und U, W parallele Unterräume von A . Wieso sind dann $F(U)$ und $F(W)$ parallele affine Unterräume von B ?

Antwort: Man kann voraussetzen, dass U und W nicht leer sind, da die Behauptung andernfalls trivial ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $V_U \subset V_W$. Daraus folgt $\hat{F}(V_U) \subset \hat{F}(V_W)$, also $F(U) \subset F(W)$ und damit $U \parallel W$. $\blacklozenge$

Frage 444 Wann heißen drei Punkte p, q, r eines affinen Raumes A **kollinear**? Wie ist das Teilverhältnis $TV(p, q, r)$ dreier kollinearer Punkte $p, q, r \in A$ definiert? Was sagt das Teilverhältnis über die Lagebeziehung der drei Punkte aus?

Antwort: Drei Punkte $p, q, r \in A$ heißen *kollinear*, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Sind p, q, r kollinear, so gilt $\overrightarrow{pr} = \alpha \cdot \overrightarrow{pq}$ für genau ein $\alpha \in K$. Man nennt α dann das *Teilverhältnis* der drei Punkte: $\alpha = TV(p, q, r)$. $\blacklozenge$



$TV(p, q, r) > 1$	q liegt zwischen p und r	$TV(p, q, r) = 0$	$p = r$
$0 < TV(p, q, r) < 1$	r liegt zwischen p und q	$TV(p, q, r) = 1$	$q = r$
$TV(p, q, r) < 0$	p liegt zwischen q und r	$TV(p, q, r) = \infty$	$p = q$

$\blacklozenge$

Frage 445 Warum sind mit $p, q, r \in A$ auch die Bildpunkte $F(p), F(q), F(r)$ einer affinen Abbildung kollinear und warum gilt $\text{TV}(p, q, r) = \text{TV}(F(p), F(q), F(r))$?

Antwort: Sind p, q, r kollinear, dann hat der Verbindungsraum $U = p \vee q \vee r$ eine Dimension ≤ 1 . Daher gilt

$$\dim F(U) = \dim \hat{F}(V_U) \leq \dim V_U = \dim U \leq 1.$$

Die Bildpunkte $F(p), F(q), F(r)$ liegen also in einem Unterraum von mit einer Dimension ≤ 1 , d. h., sie sind kollinear.

Gilt weiter $p \neq q$ und $\overrightarrow{pr} = \alpha \cdot \overrightarrow{pq}$ mit $\alpha \in K$, dann folgt $\hat{F}(\overrightarrow{pr}) = \alpha \cdot \hat{F}(\overrightarrow{pq})$, also $\overrightarrow{F(p)F(r)} = \alpha \cdot \overrightarrow{F(p)F(q)}$. Das beantwortet den zweiten Teil der Frage. $\blacklozenge$

Frage 446 Sei $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ eine Basis eines affinen Raums A und B ein weiterer affiner Raum. Können Sie zeigen, dass man durch Vorgabe der Bildpunkte $F(p_0), \dots, F(p_n) \in B$ eine eindeutig bestimmte affine Abbildung $F: A \rightarrow B$ erhält? Mit anderen Worten: Sind $p_0^*, \dots, p_n^*$ beliebige Punkte aus B , dann existiert genau eine affine Abbildung $F: A \rightarrow B$ mit $F(p_i) = p_i^*$ für $i = 0, \dots, n$.

Antwort: Da die Vektoren $\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$ eine Basis von V_A bilden, gibt es genau eine lineare Abbildung $\hat{F}: V_A \rightarrow V_B$ mit

$$\hat{F}(\overrightarrow{p_0p_i}) = \overrightarrow{p_0^*p_i^*}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Nach Frage 440 gibt es dazu genau eine affine Abbildung $A \rightarrow B$, die $F(p_0) = p_0^*$ erfüllt, und für diese gilt dann notwendigerweise $F(p_i) = p_i^*$ für $1 \leq i \leq n$. $\blacklozenge$

Frage 447 Wann nennt man ein $(n+1)$ -Tupel von Punkten $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ eines affinen Raums A **affin unabhängig**? Was ist eine **affine Basis**?

Antwort: Das $(n+1)$ -Tupel heißt *affin unabhängig* (eine affine Basis von A), wenn die n Vektoren

$$\overrightarrow{p_0p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0p_n}$$

linear unabhängig in V_A sind (eine Basis von V_A bilden). $\blacklozenge$

Frage 448 Wieso hängt die affine Unabhängigkeit eines $(n+1)$ -Tupels $(p_0, \dots, p_n)$ nicht von der Reihenfolge der Komponenten ab?

Antwort: Seien das $(n+1)$ -Tupel $(p_0, \dots, p_n)$ affin unabhängig im Sinne von Frage 447. Um die Frage zu beantworten genügt es zu zeigen, dass dann für jedes $\ell \in \{0, \dots, n\}$ die Vektoren

$$\overrightarrow{p_\ell p_0}, \dots, \overrightarrow{p_\ell p_{\ell-1}}, \overrightarrow{p_\ell p_{\ell+1}}, \dots, \overrightarrow{p_\ell p_n} \quad (*)$$

ebenfalls linear unabhängig in V_A sind. Gelte also

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \ell}}^n \alpha_i \overrightarrow{p_\ell p_i} = 0$$

mit $\alpha_i \in K$. Wegen $\overrightarrow{p_\ell p_i} = \overrightarrow{p_\ell p_0} + \overrightarrow{p_0 p_i}$ folgt daraus

$$0 = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \ell}}^n \alpha_i (\overrightarrow{p_\ell p_0} + \overrightarrow{p_0 p_i}) = \underbrace{\left(\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq \ell}}^n \alpha_i \right)}_{=: \alpha_\ell} \overrightarrow{p_\ell p_0} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \ell}}^n \alpha_i \overrightarrow{p_0 p_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{p_0 p_i}.$$

Man erhält zunächst $\alpha_i = 0$ für $i = \{1, \dots, n\}$ aufgrund der affinen Unabhängigkeit der Punkte $p_0, \dots, p_n$. Nach der Definition von α_ℓ ergibt sich dann auch $\alpha_0 = 0$. Die Vektoren in $(*)$ sind also linear unabhängig. $\blacklozenge$

Frage 449 Was versteht man unter einem **affinen Koordinatensystem**? Was ist ein **Koordinatenvektor** eines Punktes $p \in A$?

Antwort: Wählt man in einem affinen Raum A eine Basis $(p_0, \dots, p_n)$ aus, so gibt es nach Frage 440 genau eine Affinität

$$\kappa: K^n \longrightarrow A \quad \text{mit} \quad \kappa(0) = p_0, \kappa(e_1) = p_1, \dots, \kappa(e_n) = p_n.$$

Dabei wird K^n als affiner Raum mit der zugrundeliegenden Menge K^n interpretiert (vgl. Frage 421). Allgemein bezeichnet man eine Affinität

$$\kappa: K^n \longrightarrow A$$

als ein *affines Koordinatensystem*.

Durch Auswahl eines Koordinatensystems wird es möglich, Punkte in A durch Koordinaten, also Elementen aus K^n zu beschreiben. Setzt man nämlich

$$p_0 := \kappa(0), p_1 := \kappa(e_1), \dots, p_n := \kappa(e_n),$$

so ist $(p_0, \dots, p_n)$ eine affine Basis von A , und das durch

$$\kappa^{-1}(p) = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$$

eindeutig bestimmte n -Tupel nennt man den *Koordinatenvektor von p bezüglich der Basis $(p_0, \dots, p_n)$* . Die Skalare $x_1, \dots, x_n$ heißen die *Koordinaten von p bezüglich der entsprechenden Basis*. $\blacklozenge$

Frage 450 Was ist eine **Affinkombination** von Punkten $p_0, \dots, p_m \in K^n$?

Antwort: Unter einer *Affinkombination* der Punkte $p_0, \dots, p_m$ versteht man eine Linearkombination

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m$$

mit $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_m = 1$. $\blacklozenge$

Frage 451 Wieso ist der Verbindungsraum $p_0 \vee p_1 \vee \dots \vee p_m$ beliebiger Punkte aus K^n gleich der Menge der Affinkombinationen von $p_0, \dots, p_m$, also

$$p_0 \vee \dots \vee p_m = \left\{ \sum_{i=0}^m \alpha_i p_i \in K^n ; \alpha_0, \dots, \alpha_m \in K^n, \sum_{i=0}^m \alpha_i = 1 \right\},$$

wobei die Skalare $\alpha_0, \dots, \alpha_m$ genau dann eindeutig bestimmt sind, wenn $p_0, \dots, p_m$ affin unabhängig sind?

Antwort: Es ist $V_{p_0 \vee \dots \vee p_m} = \text{span}(\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m})$. Also gilt $p \in p_0 \vee \dots \vee p_m$ genau dann, wenn Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$ existieren mit

$$\overrightarrow{p_0 p} = \alpha_1 \overrightarrow{p_0 p_1} + \dots + \alpha_m \overrightarrow{p_0 p_m}. \quad (*)$$

In K^n lässt sich diese Gleichung auch so schreiben:

$$p - p_0 = \alpha_1(p_1 - p_0) + \dots + \alpha_m(p_m - p_0).$$

Hieraus folgt

$$p = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_m p_m \quad \text{mit } \alpha_0 := 1 - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m),$$

also wie gewünscht $\alpha_0 + \dots + \alpha_m = 1$.

Sind die Punkte $p_0, \dots, p_m$ affin unabhängig, dann auch die Vektoren $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_m}$, und somit sind die Koeffizienten in (*) eindeutig bestimmt. Das beantwortet die Zusatzfrage. $\blacklozenge$

Frage 452 Seien A und B affine Räume mit den Koordinatensystemen $\kappa_1 : K^n \rightarrow A$ und $\kappa_2 : K^m \rightarrow B$. Ferner sei $F : A \rightarrow B$ affin. Dann existiert genau eine Matrix $M \in K^{m \times n}$, so dass für alle $p \in A$ gilt

$$\kappa_2^{-1}(F(p)) = b + M \cdot \kappa_1^{-1}(p),$$

wobei $b = \kappa_2^{-1}(F(p_0))$ mit $p_0 = \kappa_1(0)$ gilt. Können Sie das beweisen?

Antwort: Sei zunächst $A = K^n$ und $B = K^m$ und sei x ein beliebiger Punkt aus K^n . Für die zu F gehörende lineare Abbildung $\hat{F}$ gilt dann

$$\hat{F}(\overrightarrow{0x}) = M \cdot \overrightarrow{0x} = A \cdot (x - 0) = A \cdot x.$$

mit einer Matrix $M \in K^{m \times n}$. Daraus folgt für die affine Abbildung $F : K^n \rightarrow K^m$

$$F(x) = F(x) - 0 = \overrightarrow{0F(x)} = \overrightarrow{0F(0)} + \overrightarrow{F(0)F(x)} = F(0) + \hat{F}(\overrightarrow{0x}) = F(0) + M \cdot x.$$

Also gilt die Behauptung im Fall $A = K^n$ und $B = K^m$. Der allgemeine Fall folgt nun aus der Tatsache, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{F} & B \\ \kappa_1^{-1} \downarrow & & \downarrow \kappa_2^{-1} \\ K^n & \xrightarrow{F'} & K^m \end{array}$$

kommutiert. Die Abbildung $F' = \kappa_2^{-1} \circ F \circ \kappa_1$ ist eine affine Abbildung $K^n \rightarrow K^m$. Mit $x = F(p)$ folgt

$$\kappa_2^{-1}(F(p)) = F'(0) + M \cdot \kappa_1^{-1}(p),$$

Das ist die Behauptung. ◆

Frage 453 Was versteht man unter einer **Kollineation**? Ist jede Kollineation eine affine Abbildung?

Antwort: Eine Kollineation ist eine bijektive Abbildung $f: A \rightarrow B$ zwischen affinen Räumen A und B , welche Geraden auf Geraden abbildet oder, gleichbedeutend, welche je drei kollineare Punkte aus A auf kollineare Punkte aus B abbildet.

Nicht jede Kollineation ist eine affine Abbildung. Als Gegenbeispiel betrachte man in $\mathbb{A}_2(\mathbb{C})$ die Abbildung

$$f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (z_1, z_2) \mapsto (\overline{z_1}, \overline{z_2}).$$

Für jede komplexe Gerade $G = (\zeta_1, \zeta_2) + \mathbb{C} \cdot (z_1, z_2)$ ist $f(G) = (\overline{\zeta_1}, \overline{\zeta_2}) + \mathbb{C} \cdot (\overline{z_1}, \overline{z_2})$. Die Abbildung f ist also eine Kollineation. Sie ist aber nicht affin, denn andernfalls müsste die Abbildung $\hat{f}: (z_1, z_2) \mapsto (\overline{z_1}, \overline{z_2})$ des Vektorraums $\mathbb{C}^2$ linear sein, was aber wegen

$$\hat{f}((\alpha z_1, \alpha z_2)) = \overline{\alpha} \hat{f}((z_1, z_2)) \neq \alpha \hat{f}((\alpha z_1, \alpha z_2)) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

nicht zutrifft.

Als anderes Gegenbeispiel betrachte man den affinen Raum $\mathbb{A}_3(\mathbb{F}_2)$. Da jede Gerade in $\mathbb{A}_3(\mathbb{F}_2)$ genau zwei Punkte enthält, ist jede bijektive Selbstabbildung von $\mathbb{A}_3(\mathbb{F}_2)$ eine Kollineation. Davon gibt es $8! = 40\,320$ Stück. Andererseits enthält die Gruppe $\text{GL}(3, \mathbb{F}_2)$ genau $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ Elemente, wie man sich leicht überlegt. Also existieren nur $8 \cdot 168 = 1\,344$ Affinitäten von $\mathbb{A}_2(\mathbb{F}_2)$.

7.3 Projektive Räume

In der affinen Geometrie wurde der Zusammenhang zwischen geometrischen Objekten und der Struktur der Vektorräume über den Begriff der *Parallelverschiebung* oder *Parallelprojektion* hergestellt. Das ist nicht die einzige Möglichkeit, geometrische Sachverhalte mittels linearer Algebra zu beschreiben. Eine weitere wichtige Klasse geometrischer Transformationen bilden *Zentralprojektionen*, die in aller Regel keine affinen Abbildungen zu sein brauchen. Die *projektive Geometrie* stellt einen Zusammenhang zwischen den Räumen der Geometrie und den Vektorräumen der Linearen Algebra in einer solchen Weise her, dass auch Zentralprojektionen über lineare Abbildungen der zugrunde liegenden Vektorräume beschrieben werden können. Ein weiterer Vorteil des projektiven Standpunktes besteht darin, dass lästige Fallunterscheidungen wegfallen, die in der affinen Geometrie vorkommen, da parallele Hyperebenen in affinen Räumen keinen Schnittpunkt besitzen. Dagegen enthält die projektive Geometrie die Vorstellung, dass sich parallele Geraden in einer Ebene „im Unendlichen“ schneiden.

Frage 454 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K . Wie ist der **projektive Raum** $\mathbb{P}(V)$ definiert? Wie nennt man die Elemente von $\mathbb{P}(V)$ und wie ist die **projektive Dimension** von $\mathbb{P}(V)$ definiert?

Antwort: Der *projektive Raum* $\mathbb{P}(V)$ ist die Menge der eindimensionalen Unterräume von V ,

$$\mathbb{P}(V) = \{U = K \cdot v ; v \in V\}.$$

Die Elemente von $\mathbb{P}(V)$ werden wiederum *Punkte* genannt, obwohl es sich dabei im formalen Sinne um Geraden handelt. Die *projektive Dimension* von $\mathbb{P}(V)$ ist definiert als die Zahl

$$\text{pdim } \mathbb{P}(V) := \dim V - 1. \quad \blacklozenge$$

Frage 455 Wann nennt man eine Teilmenge $U_p \subset \mathbb{P}(V)$ einen **projektiven Unterraum**? Können Sie die Begriffe **(projektive) Gerade**, **(projektive) Ebene** und **(projektive) Hyperebene** erläutern?

Antwort: U_p ist ein *projektiver Unterraum* von $\mathbb{P}(V)$, wenn die Menge aller Punkte aus U_p ein linearer Unterraum U von V ist, so dass also $U_p = \{Kv ; v \in U\}$ gilt. Damit ist $U_p = \mathbb{P}(U)$ selbst ein projektiver Raum mit projektiver Dimension. Man nennt $U_p \subset \mathbb{P}(V)$ eine

- (projektive) Gerade, wenn $\text{pdim } U_p = 1$,
- (projektive) Ebene, wenn $\text{pdim } U_p = 2$,
- (projektive) Hyperebene, wenn $\text{pdim } U_p = \text{pdim } \mathbb{P}(V) - 1$ gilt.

Aus den entsprechenden Sätzen für Untervektorräume erhält man außerdem unmittelbar

- (a) Der Durchschnitt eines Systems von projektiven Unterräumen von $\mathbb{P}(V)$ ist selbst ein projektiver Unterraum.
- (b) Sei S ein System von Unterräumen von $\mathbb{P}(V)$. Dann ist der *Verbindungsraum*

$$\bigvee_{U \in S} U := \bigcap_{U \in S} \{W \text{ Unterraum von } \mathbb{P}(V) \text{ mit } U \subset W\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, und zwar der kleinste, der alle Unterräume aus S enthält. Es gilt $\bigvee_{U \in S} U = \mathbb{P}(\sum_{U \in S} U)$. $\blacklozenge$

Frage 456 Wie lautet die **Dimensionsformel** für projektive Unterräume?

Antwort: Seien $U_1, U_2 \subset \mathbb{P}(V)$ projektive Unterräume. Dann lautet die *Dimensionsformel*

$$\text{pdim}(U_1 \vee U_2) = \text{pdim } U_1 + \text{pdim } U_2 - \text{pdim}(U_1 \cap U_2).$$

Wegen $\text{pdim } U = \dim U - 1$ für jeden Unterraum $U \subset \mathbb{P}(V)$ folgt diese unmittelbar aus der Dimensionsformel für Untervektorräume aus Frage 124. $\blacklozenge$

Frage 457 Können Sie den Begriff der **homogenen Koordinaten** im n -dimensionalen *projektiven Standardraum* $\mathbb{P}_n(K) := \mathbb{P}(K^{n+1})$ erläutern?

Antwort: Jeder von 0 verschiedene Vektor $v = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1}$ bestimmt genau eine Gerade $K \cdot v \subset K^{n+1}$. Durch

$$F: v \longmapsto K \cdot v$$

ist also eine Abbildung $F: V \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ gegeben, wobei $F(v) = F(v')$ genau dann gilt, wenn v' ein skalares Vielfaches von v ist. Man definiert

$$(x_0 : x_1 : \dots : x_n) := K \cdot (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

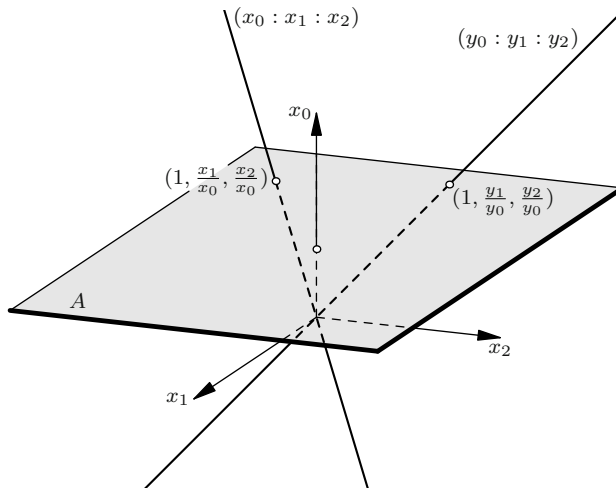
als die *homogenen Koordinaten* von $F(v) \in \mathbb{P}(V)$. Die Komponenten $x_0, \dots, x_n$ sind dann bis auf ein skalares Vielfaches $\lambda \neq 0$ eindeutig bestimmt, d. h., es gilt

$$\begin{aligned} (x_0 : x_1 : \dots : x_n) &= (x'_0 : x'_1 : \dots : x'_n) \\ \iff x'_0 &= \lambda x_0, x'_1 = \lambda x_1, \dots, x'_n = \lambda x_n \quad \text{für ein } \lambda \in K^*. \end{aligned}$$

Jeder Punkt $p = (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K)$ mit $x_0 \neq 0$ lässt sich daher auch in der standardisierten Form $(1 : \frac{x_1}{x_0} : \dots : \frac{x_n}{x_0})$ schreiben. In diesem Fall ist das $(n+1)$ -Tupel $(1, \frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}) \in K^{n+1}$ eindeutig bestimmt. Bezeichnet $H \subset \mathbb{P}_n(K)$ die Menge aller projektiven Punkte mit $x_0 = 0$ und A die durch $x_0 = 1$ definierte Hyperebene von K^{n+1} , so hat man damit eine Bijektion.

$$\mathbb{P}_n(K) \setminus H \longrightarrow A, \quad (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \longmapsto (1, x_1, \dots, x_n)$$

Das Bild eines Punktes $p = Kv \in \mathbb{P}_n(K)$ entspricht im Fall $K = \mathbb{R}$ und $n = 2$ dem Schnitt der Geraden Kv mit der Hyperebene A .



Allein für die Elemente aus H ist diese Abbildung nicht definiert, da diese und nur diese keinen Schnittpunkt mit A besitzen. Fügt man zu A zu jedem Punkt aus H , also zu jeder Geradenrichtung des durch $x_0 = 0$ gegebenen linearen Unterraums von K^{n+1} , genau ein Element hinzu, so lässt sich A zusammen mit diesen „unendlich fernen Punkten“ mit dem projektiven Raum $\mathbb{P}_n(K)$ identifizieren. ♦

Frage 458 Seien p_1, p_2 zwei verschiedene Punkte aus $\mathbb{P}_n(K)$. Können Sie zeigen, dass die Gerade g durch p_1 und p_2 sich in homogenen Koordinaten durch die Gleichung

$$g : q = \lambda p_1 + \mu p_2 \quad \text{mit} \quad (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_2(K)$$

darstellen lässt?

Antwort: Sei $p_1 = K \cdot v_1$ und $p_2 = K \cdot v_2$ mit Vektoren $v_1, v_2 \in K^{n+1}$. Die Gerade g ist die Menge aller eindimensionalen Unterräume des durch die Vektoren v_1 und v_2 aufgespannten zweidimensionalen Unterraums von K^{n+1} . Es gilt also

$$g : q = K \cdot (\lambda v_1 + \mu v_2), \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

Daraus folgt (*). ♦

Frage 459 Wieso besitzen je zwei verschiedene Geraden in einer projektiven Ebene genau einen Schnittpunkt?

Antwort: Für zwei verschiedene Geraden U_1, U_2 in einer projektiven Ebene $\mathbb{P}(V)$ gilt $U_1 \vee U_2 = \mathbb{P}(V)$. Wegen $\text{pdim } U_i = 1$ für $i = 1, 2$ und $\text{pdim } \mathbb{P}(V) = 2$ folgt aus der Dimensionsformel $\text{pdim}(U_1 \cap U_2) = 0$. Also existiert genau ein Schnittpunkt. ♦

Frage 460 Sei H eine Hyperebene eines n -dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}(V)$. Können Sie zeigen, dass $A := \mathbb{P}(V) \setminus H$ dann ein affiner Raum ist?

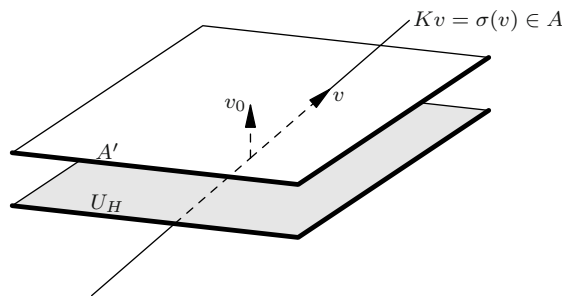
Antwort: Es ist $H = \mathbb{P}(U_H)$ mit einer Hyperebene $U_H \subset V$. Für ein $v_0 \in V \setminus U_H$ betrachte man die Menge

$$A' = v_0 + U_H.$$

Dies ist ein affiner Unterraum von V . Wegen $v_0 \notin U_H$ ist für jeden Vektor $v \in A'$ die Gerade $K \cdot v$ ein Element aus A . Man hat damit eine Abbildung

$$\sigma: A' \longrightarrow A, \quad v \longmapsto K \cdot v.$$

Diese Abbildung ist bijektiv, da jede Gerade aus A die Hyperebene $A' \subset V$ in genau einem Punkt schneidet.



Definiert man für $p, q \in A$ nun

$$\overrightarrow{pq} := \overline{\sigma^{-1}(p)\sigma^{-1}(q)} = \sigma^{-1}(q) - \sigma^{-1}(p) \in U_H,$$

so ist leicht zu sehen, dass A zusammen mit dieser Zuordnung die Axiome eines affinen Raums aus Antwort 421 erfüllt, wobei der zugehörige Translationsraum in diesem Fall U_H ist. Das beantwortet die Frage. $\blacklozenge$

Frage 461 Sei $\mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum, $H \subset \mathbb{P}(V)$ eine Hyperebene und $A = \mathbb{P}(V) \setminus H$ der zur Hyperebene H gehörende affine Raum. Können Sie zeigen, dass zu jedem affinen Unterraum $U \subset A$ genau ein projektiver Unterraum $U_p \subset \mathbb{P}(V)$ existiert, so dass $U = A \cap U_p$ gilt?

Antwort: Man benutze die Affinität $\sigma: A' \longrightarrow A$ aus Frage 460 und betrachte den Unterraum $U' := \sigma^{-1}(U) \subset A'$. Es gilt dann

$$U' = v_0 + V_U$$

mit einem Unterraum $V_U \subset U_H$. Da v_0 nicht in V_U enthalten ist, ist die Summe

$$W := Kv_0 \oplus V_U \subset V$$

in der Tat direkt. Die Menge $\mathbb{P}(W)$ ist ein projektiver Unterraum von $\mathbb{P}(V)$ mit

$$\mathbb{P}(W) = \{Kv ; v = \alpha v_0 + u, \alpha \in K, u \in V_U\}.$$

Ferner gilt

$$A = \{Kv ; v = v_0 + u, u \in V_H\} \quad (*)$$

$$U = \{Kv ; v = v_0 + u, u \in V_U\}. \quad (**)$$

Hieraus folgt $U = \mathbb{P}(W) \cap A$. Das beweist die Existenzbehauptung.

Ist $W^* \subset V$ ein weiterer Unterraum mit $U = \mathbb{P}(W^*) \cap A$, dann implizieren $(*)$ und $(**)$ zusammen mit der Vektorraumeigenschaft von W^* , dass $W^* = Kv_0 + V_U$, also $W^* = W$ gilt. $\blacklozenge$

Frage 462 Sei H eine Hyperebene eines projektiven Raumes $\mathbb{P}(V)$, $A := \mathbb{P}(V) \setminus H$ der zugehörige affine Raum und $U \subset A$ ein affiner Unterraum. Was versteht man unter dem **projektiven Abschluss** von U ?

Antwort: Der *projektive Abschluss* $\overline{U}$ ist der nach Frage 461 eindeutig bestimmte projektive Unterraum von $\mathbb{P}(V)$, für den

$$U = \overline{U} \cap A$$

gilt. Man überzeuge sich, indem man den Beweis aus Antwort 461 nachvollzieht, dass man $\overline{U}$ erhält, indem man zu den Geradenrichtungen aus U diejenigen des Vektorraums V_U hinzufügt. Dies sind aus der Perspektive von U genau die „unendlich fernen“ Punkte. $\blacklozenge$

Frage 463 Sei U_1 eine affine Hyperebene des affinen Raums $A = \mathbb{P}(V) \setminus H$ und U_2 ein weiterer echter Teilraum von A , für den $U_2 \not\subset U_1$ gilt. Können Sie zeigen, dass U_1 und U_2 genau dann parallel sind, wenn $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \subset H$ gilt?

Antwort: Man betrachte für $i = 1, 2$ wieder die affinen Hyperebenen

$$U'_i = \sigma(U_i) = v_i + V_{U_i}.$$

Wegen $U_i \subset H$ gilt $V_{U_i} \subset V_H$ für $i = 1, 2$. Ferner hat man

$$\overline{U}_i = \{Kv ; v = \alpha v_i + u_i, \alpha \in K, u_i \in U_i\}.$$

Seien U_1 und U_2 nun parallel. Da U_1 eine Hyperebene ist, gilt dann $V_{U_2} \subseteq V_{U_1}$ (mit Gleichheitszeichen, falls U_1 auch eine Hyperebene von A ist). Ferner gilt $v_1 \neq v_2$, da U_2 nach Voraussetzung nicht in U_1 enthalten ist. Daraus folgt

$$\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 = \{Kv ; v \in V_{U_1} \cap V_{U_2}\} = \{Kv ; v \in V_{U_1}\} \subset H.$$

Gilt umgekehrt $\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2 \subset H$, dann folgt $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ wegen $v_1 \neq v_2$, und da U_1 eine Hyperebene und U_2 ein Unterraum von A ist, sind U_1 und U_2 parallel nach Frage 434. $\blacklozenge$

7.4 Projektive Abbildungen und Koordinaten

Es ist naheliegend, in Analogie zu den affinen Abbildungen auch projektive Abbildungen $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ mittels der Existenz von linearen Abbildungen $F: V \rightarrow W$ der zugrunde liegenden Vektorräume zu definieren. Allerdings muss dabei zusätzlich gefordert werden, dass durch F Geraden aus V auf Geraden aus W abgebildet werden. Dies ist nur für *injektive* lineare Abbildungen der Fall.

Nach demselben Prinzip wie bei Vektorräumen und affinen Räumen ermöglichen bijektive projektive Abbildungen die Einführung von *Koordinaten* in einem projektiven Raum.

Frage 464 Wann heißt eine Abbildung $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ **projektiv**? Wie nennt man eine bijektive projektive Abbildung?

Antwort: Eine Abbildung $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ heißt *projektiv*, wenn eine injektive lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ existiert, so dass

$$f(K \cdot v) = K \cdot F(v)$$

für alle $v \in V \setminus \{0\}$ gilt. Man benutzt in diesem Fall die Schreibweise

$$f = \mathbb{P}(F).$$

Eine bijektive projektive Abbildung nennt man *Projektivität*.

Frage 465 Können Sie zeigen, dass die zu einer projektiven Abbildung gehörende lineare Abbildung nur bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmt ist, d. h. für zwei injektive lineare Abbildungen $F, F': V \rightarrow W$ ist $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F')$ genau dann, wenn $F' = \alpha \cdot F$ für ein $\alpha \in K$ gilt.

Antwort: Hat man $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F')$, so gilt für jedes $v \in V$

$$K \cdot F'(v) = K \cdot F(v), \quad \text{also} \quad F'(v) = \alpha_v \cdot F(v)$$

mit einem $\alpha_v \in K$. Es muss gezeigt werden, dass α_v für jeden $v \in V$ gleich ist. Aufgrund der Linearität von F und F' gilt

$$F'(v + w) = \alpha_v \cdot F(v) + \alpha_w \cdot F(w)$$

sowie mit $\alpha := \alpha_{v+w}$

$$F'(v + w) = \alpha \cdot (F(v) + F(w)).$$

Die beiden Gleichungen führen zusammen auf

$$(\alpha_v - \alpha) \cdot F(v) + (\alpha_w - \alpha) \cdot F(w) = 0.$$

Wegen der Injektivität von F sind auch die Vektoren $F(v)$ und $F(w)$ linear unabhängig in W . Aus der letzten Gleichung folgt daher $\alpha_v = \alpha = \alpha_w$, was zu zeigen war.

Die andere Richtung des Beweises ist einfach: Aus $F' = \alpha \cdot F$ folgt $K \cdot F(v) = K \cdot F'(v)$ für jedes $v \in V$, also $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F')$. $\blacklozenge$

Frage 466 Wann heißt ein $(r+1)$ -Tupel $(p_0, \dots, p_r)$ von Punkten eines projektiven Raumes $\mathbb{P}(V)$ **projektiv unabhängig**?

Antwort: Die $r+1$ Punkte heißen *projektiv unabhängig*, wenn die zugehörigen eindimensionalen Unterräume in V paarweise verschieden sind, d. h. wenn jedes $r+1$ -Tupel $(v_0, \dots, v_r)$ von Vektoren aus V , für das $p_i = Kv_i$ gilt, linear unabhängig in V ist.

Äquivalent hierzu ist die nur scheinbar schwächere Voraussetzung, dass ein einziges linear unabhängiges System $(w_0, \dots, w_r)$ von Vektoren aus V existiert, so dass $p_i = Kw_i$ gilt. Die Äquivalenz ist klar, da jeder Vektor v_i mit $p_i = Kv_i$ dann ein skalares Vielfaches von w_i sein muss. $\blacklozenge$

Frage 467 Was ist eine **projektive Basis** eines n -dimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}(V)$?

Antwort: Eine *projektive Basis* in $\mathbb{P}(V)$ ist ein $(n+2)$ -Tupel $(p_0, \dots, p_{n+1})$ von Punkten aus $\mathbb{P}(V)$ mit der Eigenschaft, dass je $(n+1)$ Punkte davon projektiv unabhängig sind.

Im Raum $\mathbb{P}_n(K)$ ist zum Beispiel mit

$$\begin{aligned} p_0 &:= (1 : 0 : \dots : 0) \\ p_1 &:= (0 : 1 : \dots : 0) \\ &\vdots \\ p_n &:= (0 : 0 : \dots : 1) \\ p_{n+1} &:= (1 : 1 : \dots : 1) \end{aligned}$$

eine projektive Basis gegeben. $\blacklozenge$

Frage 468 Sei $(p_0, \dots, p_{n+1})$ eine Basis von $\mathbb{P}(V)$. Dann gibt es eine Basis $(v_0, \dots, v_n)$ mit $p_i = Kv_i$ für $i = 0, \dots, n$. Können Sie zeigen, dass sich die Vektoren v_i so wählen lassen, dass

$$p_{n+1} = K \cdot (v_0 + \dots + v_n)$$

gilt?

Antwort: Zunächst gilt

$$p_{n+1} = K \cdot (\alpha_0 v_0 + \cdots + \alpha_n v_n) \quad (*)$$

mit geeigneten $\alpha_i \in K$. Es genügt nun zu zeigen, dass $\alpha_i \neq 0$ für alle $i = 0, \dots, n$ gilt, denn in diesem Fall hat man mit $(\alpha_0 v_0, \dots, \alpha_n v_n)$ eine Basis von V mit den gesuchten Eigenschaften. Sei dazu $p_{n+1} = Kv$ mit einem Vektor $v \in V$. Wäre $\alpha_\ell = 0$ für ein $\ell \in \{0, \dots, n\}$, dann wäre das $(n+1)$ -Tupel

$$(v_0, \dots, v_{\ell-1}, v, v_{\ell+1}, \dots, v_n)$$

wegen $(*)$ linear abhängig in V und damit $(p_0, \dots, p_{n+1})$ keine Basis von $\mathbb{P}(V)$. ♦

Frage 469 Seien $\mathbb{P}(V)$ und $\mathbb{P}(W)$ projektive Räume derselben Dimension mit Basen $(p_0, \dots, p_{n+1})$ und $(q_0, \dots, q_{n+1})$. Wieso gibt es dann genau eine Projektivität $f: \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ mit $f(p_i) = q_i$ für $i = 0, \dots, n+1$?

Antwort: Entsprechend der Antwort zu Frage 468 wähle man Basen $(v_0, \dots, v_n)$ von V und $(w_0, \dots, w_n)$ so, dass $p_{n+1} = K \cdot (v_0 + \cdots + v_n)$ und $q_{n+1} = K \cdot (w_0 + \cdots + w_n)$ gilt.

Definiert man für $i = 0, \dots, n$ die lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ durch $F(v_i) = w_i$, dann gilt mit $f := \mathbb{P}(F)$

$$f(p_i) = q_i \quad \text{für } i = 0, \dots, n+1. \quad (*)$$

Das zeigt die Existenzbehauptung.

Ist $\tilde{f}$ eine weitere Abbildung, die die Basispunkte wie in $(*)$ aufeinander abbildet, dann gilt für die lineare Abbildung $\tilde{F}: V \rightarrow W$ mit $\tilde{f} = \mathbb{P}(\tilde{F})$

$$\tilde{F}(v_0) = \alpha_0 w_0, \dots, \tilde{F}(v_n) = \alpha_n w_n$$

mit bestimmten $\alpha_i \in K$ sowie

$$\tilde{F}(v_0 + \cdots + v_n) = \alpha \cdot (w_0 + \cdots + w_n).$$

mit einem bestimmten $\alpha \in K$. Aus den letzten beiden Gleichungen zusammen folgt zusammen mit der Linearität von $\tilde{F}$

$$(\alpha_0 - \alpha) \cdot w_0 + \cdots + (\alpha_n - \alpha) \cdot w_n = 0.$$

Daraus folgt $\alpha_i = \alpha$ für alle $i = 0, \dots, n$ aufgrund der linearen Unabhängigkeit der w_i . Also gilt $\tilde{F} = \alpha \cdot F$, also $\tilde{f} = f$. Das zeigt die Eindeutigkeit. ♦

Frage 470 Wieso besitzt jede Projektivität einer reell-projektiven Ebene mindestens einen Fixpunkt und eine Fixgerade?

Antwort: Sei F eine lineare Abbildung mit $f = F(\mathbb{P})$. Dann ist F ein Endomorphismus $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und besitzt mindestens einen reellen Eigenwert λ und einen F -invarianten Unterraum U der Dimension 2. Die Unterräume $\text{Eig}(F, \lambda)$ und U bestimmen dann F -invariante Unterräume von $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ der Dimension 0 bzw. 1. ♦

Frage 471 Was versteht man unter einem **Koordinatensystem** in einem n -dimensionalen projektiven Raum $\mathbb{P}(V)$?

Antwort: Unter einem Koordinatensystem in $\mathbb{P}(V)$ versteht man eine Projektivität

$$\kappa: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}(V).$$

Mit Hilfe der in $\mathbb{P}_n(K)$ gegebenen homogenen Koordinaten lassen sich damit auch in $\mathbb{P}(V)$ homogene Koordinaten einführen. Gilt $p = \kappa((x_0 : \dots : x_n))$, so heißt $(x_0 : \dots : x_n)$ *homogener Koordinatenvektor* von p bezüglich κ . Man beachte, dass dieser nur bis auf einen Skalar $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt ist. ♦

Frage 472 Wie lassen sich mithilfe eines Koordinatensystems **homogene Koordinaten** in $\mathbb{P}(V)$ einführen und Projektivitäten durch eine Matrix beschreiben?

Antwort: Ist zunächst $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$ eine Projektivität, so entspricht dem ein bis auf eine Konstante eindeutig bestimmter Isomorphismus $F: K^{n+1} \rightarrow K^{n+1}$, der sich durch eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

beschreiben lässt. Für einen Vektor $x = (x_0, \dots, x_n)$ gilt dann

$$F(x) = Ax = (z_0 \cdot x, \dots, z_n \cdot x),$$

wobei $z_0, \dots, z_n$ die Zeilen von A bezeichnen. Entsprechend erhält man für einen Punkt $p \in \mathbb{P}_n(K)$ mit den homogenen Koordinaten $(x_0 : \dots : x_n)$ die homogenen Koordinaten des Bildes $f(p)$ durch

$$f(p) = (z_0 \cdot x : \dots : z_n \cdot x),$$

also durch formale Matrizenoperationen, wobei wiederum zu beachten ist, dass die homogenen Komponenten von $f(p)$ nur bis auf einen skalaren Faktor eindeutig festgelegt sind. Das Gleiche gilt auch für die Einträge der Matrix A .

Mithilfe eines Koordinatensystems lassen sich damit auch Projektivitäten $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ beliebiger projektiver Räume derselben Dimension beschreiben. Dazu braucht man nur die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}(V) & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}(W) \\ \kappa_1^{-1} \downarrow & & \downarrow \kappa_2^{-1} \\ \mathbb{P}_n(K) & \xrightarrow{f'} & \mathbb{P}_n(K). \end{array}$$

auszunutzen. Die der Projektivität f bezüglich der Koordinatensysteme κ_1 und κ_2 zugeordnete Matrix ist dann die Matrix der Projektivität f' . Diese hängt natürlich von den gewählten Koordinatensystemen ab. $\blacklozenge$

Frage 473 Eine Matrix $A \in K^{(n+1) \times (n+1)}$ beschreibt genau dann eine affine Abbildung $K^n \rightarrow K^n$, wenn A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

besitzt. Können Sie das aus der Perspektive projektiver Abbildungen begründen?

Antwort: Der affine Raum K^n ist mittels der Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n)$$

in $\mathbb{P}_n(K)$ eingebettet. Eine Projektivität $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$ lässt sich daher genau dann zu einer affinen Abbildung $K^n \rightarrow K^n$ beschränken, wenn f die Hyperebene

$$H := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(K) ; x_0 = 0\}$$

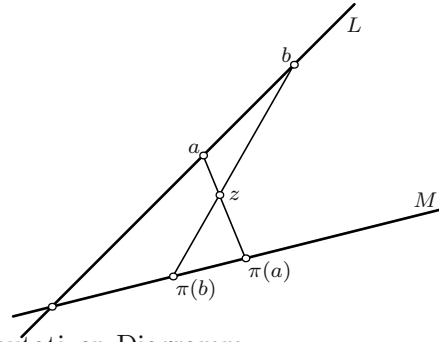
in sich abbildet. Wird f durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

beschrieben, so bedeutet $f(H) = H$ gerade, dass $a_{01} = \dots = a_{0n} = 0$ gilt. $\blacklozenge$

Frage 474 Sei $\mathbb{P}(V)$ ein projektiver Raum der projektiven Dimension n . Die Hyperebene $L \subset \mathbb{P}(V)$ werde durch die „Perspektivität“ π von einem Zentrum z außerhalb von L und M auf die Hyperebene $M \subset \mathbb{P}(V)$ projiziert, so wie es in der Abbildung skizziert ist. Können Sie zeigen, dass π eine Projektivität $L \rightarrow M$ ist?

Antwort: Sei $(p_1, \dots, p_n)$ eine projektive Basis von M . Wegen $z \neq M$ ist dann $(z, p_1, \dots, p_n)$ eine projektive Basis von $\mathbb{P}(V)$. Mit dem Koordinatensystem $\kappa: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}(V)$, das die Standardbasis von $\mathbb{P}_n(K)$ auf die Basis $(z, p_1, \dots, p_n)$ abbildet, gilt dann $\kappa^{-1}(z) = (1 : 0 : \dots : 0)$, und M wird bezüglich κ durch die Gleichung $x_0 = 0$ beschrieben. Schreibt man $\hat{M} := \kappa^{-1}(M)$ und $\hat{L} := \kappa^{-1}(L)$ so lässt sich die Situation übersichtlich in dem kommutativen Diagramm



$$\begin{array}{ccc} \hat{L} & \xrightarrow{f} & \hat{M} = \{(x_0 : \dots : x_n) ; x_0 = 0\} \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \kappa \\ L & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

darstellen. Für das Weitere genügt es zu zeigen, dass f eine Projektivität ist.

Sei $\hat{p} = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$ ein beliebiger Punkt aus $\hat{L}$. Die Gerade durch $\hat{p}$ und $\hat{z} := \kappa^{-1}(z)$ besitzt dann nach Frage 458 die Gleichung

$$\lambda \hat{p} + \mu \hat{z} = \lambda(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2) + \mu(1 : 0 : 0) \quad \text{mit } (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}_2(K).$$

Die Gerade schneidet $\hat{M}$ im Punkt $(0 : x_1 : \dots : x_n)$. Folglich gilt

$$f: \hat{L} \rightarrow \hat{M}, \quad (x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mapsto (0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Man betrachte nun die zu $\hat{L}$ und $\hat{M}$ gehörenden Hyperebenen $\hat{\mathcal{L}}$ und $\hat{\mathcal{M}}$ in K^{n+1} sowie die lineare Abbildung

$$F: \hat{\mathcal{L}} \rightarrow \hat{\mathcal{M}}, \quad (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (0, x_1, \dots, x_n).$$

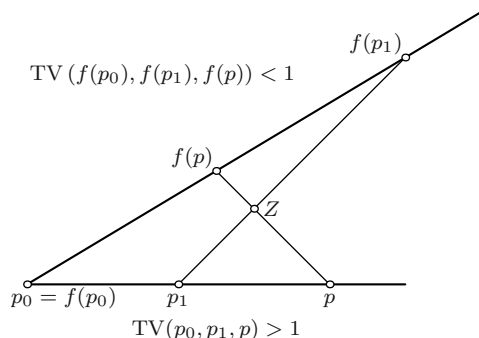
Aus $x \in \ker F$ folgt $x = (\lambda, 0, \dots, 0)$ mit einem $\lambda \in K$. Wäre $\lambda \neq 0$, so würde $\hat{z} = (1 : 0 : \dots : 0) \in \hat{L}$ und damit im Widerspruch zur Voraussetzung $z \in L$ folgen. Folglich gilt $\ker F = \{0\}$, d. h., F ist injektiv und damit aus Dimensionsgründen auch bijektiv.

Man erkennt nun $f = \mathbb{P}(F)$, woraus schließlich folgt, dass f und damit auch π eine Projektivität ist. $\blacklozenge$

7.5 Invarianten von Projektivitäten

Frage 475 In Abschnitt 7.3 hatten wir gesehen, dass affine Abbildungen das Teilverhältnis dreier Punkte invariant lassen. Gilt dies für projektive Abbildungen auch?

Antwort: Projektive Abbildungen erhalten das Teilverhältnis in der Regel nicht, wie man an der Zentralprojektion, die in der Abbildung rechts dargestellt ist, sehen kann.



Dagegen erhalten projektive Abbildungen ein bestimmtes Verhältnis von vier kollinearen Punkten, das sogenannte *Doppelverhältnis*. Dieses lässt sich folgendermaßen einführen. Seien p_0, p_1 und p_2 drei kollineare, paarweise verschiedene Punkte eines projektiven Raumes $\mathbb{P}(V)$. Dann bildet (p_0, p_1, p_2) eine Basis der gemeinsamen projektiven Geraden Z , folglich gibt es ein Koordinatensystem

$$\kappa: \mathbb{P}_1(K) \longrightarrow Z$$

mit

$$\kappa(1:0) = p_0, \quad \kappa(0:1) = p_1, \quad \kappa(1:1) = p_2.$$

Jeder Punkt p der Geraden Z besitzt dann bezüglich dieses Koordinatensystems bestimmte homogene Koordinaten $\kappa^{-1}(p) = (\lambda:\mu)$ mit $\lambda, \mu \in K$. Man definiert nun

$$DV(p_0, p_1, p_2, p) = \lambda:\mu \in K \cup \{\infty\} \simeq \mathbb{P}_1(K)$$

Ist $\mu \neq 0$ (d. h. $p \neq p_0$), dann ist $DV(p_0, p_1, p_2, p)$ ein Element aus K , andernfalls ist $DV(p_0, p_1, p_2, p) = \infty$.

Wir zeigen, dass das Doppelverhältnis eine projektive Invariante ist. Sei $f: \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(W)$ eine Projektivität. f bildet die Gerade $Z \in \mathbb{P}(V)$ auf eine Gerade $Z' \in \mathbb{P}(W)$ ab. Für die Abbildung $\kappa' := f|_Z \circ \kappa$ gilt dann $\kappa'(1:0) = f(p_0)$, $\kappa'(0:1) = f(p_1)$ und $\kappa'(1:1) = f(p_2)$. Damit ist κ' ein Koordinatensystem von Z' . Aus $\kappa(\lambda:\mu) = p$ folgt $\kappa'(\lambda:\mu) = f(p)$, also

$$DV(p_0, p_1, p_2, p) = \lambda:\mu = DV(f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p)),$$

was zu zeigen war. ◆

Frage 476 Kennen Sie eine Formel, mit der sich das Doppelverhältnis von vier kollinearen Punkten des projektiven Raums $\mathbb{P}_n(K)$ explizit berechnen lässt?

Antwort: Es gilt:

Seien die Punkte

$$p_k = (x_0^{(k)} : x_1^{(k)} : \dots : x_n^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

kollinear. Sind $i, j \in \{1, \dots, n\}$ zwei Indizes derart, dass die Punkte

$$(x_i^{(0)} : x_j^{(0)}), (x_i^{(1)} : x_j^{(1)}), (x_i^{(2)} : x_j^{(2)}) \in \mathbb{P}_1(K)$$

definiert (was heißt, dass nicht beide Komponenten verschwinden) und paarweise verschieden sind, dann gilt

$$DV(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{\begin{vmatrix} x_i^{(3)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(3)} & x_j^{(1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i^{(3)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(3)} & x_j^{(0)} \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(1)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(1)} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i^{(2)} & x_i^{(0)} \\ x_j^{(2)} & x_j^{(0)} \end{vmatrix}}. \quad (*)$$

Beweis: Man betrachte zunächst den Spezialfall $n = 1$ und berechne die Darstellungsmatrix A des Koordinatensystems $\kappa: \mathbb{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{P}_1(K)$, das die projektive Standardbasis von $\mathbb{P}_1(K)$ auf die Punkte p_0, p_2 und p_3 abbildet.

Wegen $\kappa(1 : 0) = (\lambda_0 : \mu_0)$ und $\kappa(0 : 1) = (\lambda_1 : \mu_1)$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} \alpha\lambda_0 & \alpha'\lambda_1 \\ \alpha\mu_0 & \alpha'\mu_1 \end{pmatrix}$$

mit frei wählbaren Skalaren $\alpha, \alpha' \in K^*$. Die Forderung $\kappa(1 : 1) = (\lambda_2 : \mu_2)$ führt anschließend auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha\lambda_0 + \alpha'\lambda_1 &= \alpha''\lambda_2 \\ \alpha\mu_0 + \alpha'\mu_1 &= \alpha''\mu_2 \end{aligned}$$

mit frei wählbarem $\alpha'' \in K^*$. Mithilfe der Cramer'schen Formel aus Frage 262 lassen sich die Werte α, α' in Abhängigkeit von α'' berechnen. Dies liefert

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \alpha''\lambda_2 & \lambda_1 \\ \alpha''\mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{vmatrix}}, \quad \alpha' = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_0 & \alpha''\lambda_2 \\ \mu_0 & \alpha''\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{vmatrix}}.$$

Wählt man speziell $\alpha'' = \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 \\ \mu_0 & \mu_1 \end{vmatrix}$, so erhält man also

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_0 \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} & \lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} \\ \mu_0 \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} & \mu_1 \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Mit der Formel zur Berechnung der Inversen einer Matrix folgt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \mu_1 \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} & -\lambda_1 \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} \\ -\mu_0 \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} & \lambda_0 \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten des Punktes p bezüglich κ berechnen sich damit zu

$$\kappa^{-1}(p) = \det A \cdot A^{-1}(\lambda_3 : \mu_3)^T = \left(\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_2 \\ \mu_0 & \mu_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \lambda_0 & \lambda_3 \\ \mu_0 & \mu_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix} \right).$$

Es folgt

$$\text{DV}(p_0, p_1, p_2, p) = \frac{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 \\ \mu_3 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_3 & \lambda_0 \\ \mu_3 & \mu_0 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ \mu_2 & \mu_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_0 \\ \mu_2 & \mu_0 \end{vmatrix}}.$$

Das ist die Formel (*) für den Fall $n = 1$.

Um den allgemeinen Fall darauf zurückzuführen, betrachten wir eine geeignete Projektivität $\mathbb{P}_n(K) \longrightarrow \mathbb{P}_1(K)$, die ja nach Frage 475 das Doppelverhältnis invariant lässt. Ist Z die von den drei Punkten $p_0, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_n(K)$ aufgespannte Gerade, so wähle man zwei verschiedene Indizes $i, j \in \{0, \dots, n\}$ derart, dass für alle Punkte $(x_0 : \dots : x_i : \dots : x_j : \dots : x_n) \in Z$ gilt

$$(x_i, x_j) \neq (0, 0) \quad \text{und} \quad (x_i : x_j) \neq \text{const} \quad \text{für alle } p \in Z.$$

In jedem Fall existiert mindestens ein Indexpaar (i, j) mit diesen Eigenschaften. Dies erkennt man sofort, wenn man die Z entsprechende Hyperebene in K^{n+1} betrachtet. Die Abbildung

$$f: Z \longrightarrow \mathbb{P}_1(K), \quad (x_0 : \dots : x_i : \dots : x_j : \dots : x_n) \longmapsto (x_i : x_j)$$

ist unter dieser Voraussetzung eine Projektivität. Nach Frage 475 gilt

$$DV(p_0, p_1, p_2, p) = DV(f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p)).$$

Um $DV(p_0, p_1, p_2, p)$ zu berechnen, genügt es daher, zwei geeignete Koordinaten auszuwählen und in die Formel (*) einzusetzen. Aufgrund der Invarianz des Doppelverhältnisses liefert jede Auswahl geeigneter Koordinatenpaare, die die Eigenschaft (**) erfüllen, dasselbe Ergebnis. ♦

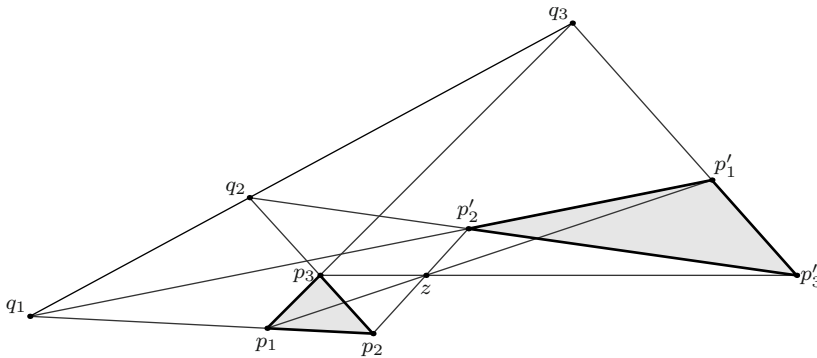
Frage 477 Wie lautet der **Satz von Desargues**? Können Sie ihn beweisen?

Antwort: Der Satz von Desargues lautet:

In der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(K)$ sei ein Dreieck mit den Eckpunkten p_1, p_2 und p_3 gegeben. Ein weiteres Dreieck mit den Eckpunkten p'_1, p'_2, p'_3 sei das Bild des ersten Dreiecks unter einer Perspektivität mit Zentrum z . Dann sind die Schnittpunkte

$$\begin{aligned} q_1 &:= (p_1 \vee p_2) \cap (p'_1 \vee p'_2) \\ q_2 &:= (p_2 \vee p_3) \cap (p'_2 \vee p'_3) \\ q_3 &:= (p_3 \vee p_1) \cap (p'_3 \vee p'_1) \end{aligned}$$

der durch die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke verlaufenden Geraden kollinear.



Beweis: Man wähle für $i = 1, 2, 3$ Vektoren $v, v_i, v'_i \in K^3$ mit

$$z = K \cdot v, \quad p_i = K \cdot v_i, \quad p'_i = K \cdot v'_i$$

Da die Punkte z, p_i, p'_i kollinear sind, kann man zusätzlich

$$v = v_1 - v'_1 = v_2 - v'_2 = v_3 - v'_3,$$

also

$$v_1 - v_2 = v'_1 - v'_2, \quad v_2 - v_3 = v'_2 - v'_3, \quad v_3 - v_1 = v'_3 - v'_1$$

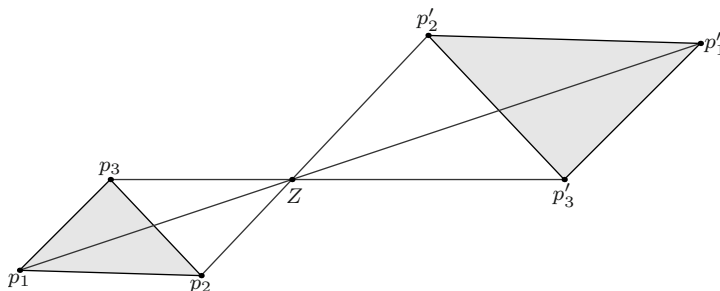
annehmen. Somit gilt $q_1 = K \cdot (v_1 - v_2)$, $q_2 = K \cdot (v_2 - v_3)$ und $q_3 = K \cdot (v_3 - v_1)$. Die drei Vektoren sind aber wegen

$$(v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + (v_3 - v_1) = 0$$

linear abhängig. Folglich sind die Punkte q_1, q_2 und q_3 kollinear. Das beweist den Satz.

Frage 478 Können Sie den Satz von Desargues beweisen, indem sie aus $\mathbb{P}_n(2)$ eine geeignete Hyperebene entfernen und die gesuchten Eigenschaften anhand der enthaltenen affinen Konstellation nachweisen?

Antwort: Sei A der affine Raum, den man aus $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ durch Herausnahme der Geraden $q_1 \vee q_2$ erhält, so dass also $q_1 \vee q_2$ aus der Sicht von A die „unendlich ferne“ Gerade ist. Da die Punkte q_1 und q_2 auf dieser Geraden liegen, sind die affinen Anteile der Geraden $p_1 \vee p_2$ und $p'_1 \vee p'_2$ und die affinen Anteile der Geraden $p_2 \vee p_3$ und $p'_2 \vee p'_3$ jeweils parallel in A . Die affine Konstellation besitzt also folgende Gestalt.



Um zu beweisen, dass q_3 ebenfalls auf der unendlich fernen Geraden $q_1 \vee q_2$ liegt, genügt es nun zu zeigen, dass die Geraden $p_1 \vee p_3$ und $p'_1 \vee p'_3$ ebenfalls parallel sind. Das aber ergibt sich als einfache Konsequenz aus dem Strahlensatz. ♦

Frage 479 Was besagt der **Satz von Pappos** und wie kann man ihn beweisen?

Antwort: Der Satz besagt:

Seien Z, Z' zwei Geraden der projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(K)$ und darauf je drei paarweise verschiedene Punkte

$$p_1, p_2, p_3 \in Z \quad p'_1, p'_2, p'_3 \in Z'$$

gegeben. Dann sind die Schnittpunkte

$$q_1 := (p_1 \vee p'_2) \cap (p_2 \vee p'_1)$$

$$q_2 := (p_2 \vee p'_3) \cap (p_3 \vee p'_2)$$

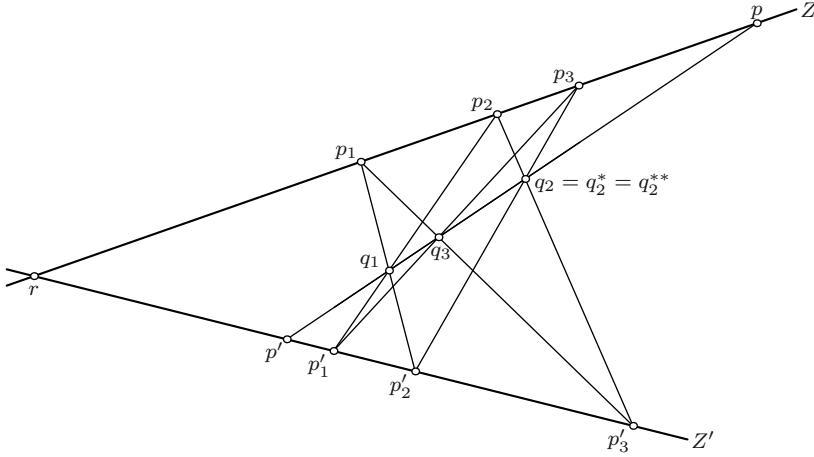
$$q_3 := (p_1 \vee p'_3) \cap (p_3 \vee p'_1)$$

kollinear.

Beweis: Man betrachte die Gerade $q_1 \vee q_3$. Dann genügt es zu zeigen, dass die Punkte

$$q_2^* := (q_1 \vee q_3) \cap (p_2 \vee p'_3) \quad \text{und} \quad q_2^{**} := (q_1 \vee q_3) \cap (p_3 \vee p'_2)$$

übereinstimmen.



Sei p bzw. p' der Schnittpunkt der Geraden $(q_1 \vee q_3)$ mit den Geraden Z bzw. Z' . Ferner bezeichne r den Schnittpunkt von Z und Z' . Die Projektion auf die Gerade Z mit dem Zentrum p'_3 ergibt

$$DV(p', q_3, q_2^*, p) = DV(r, p_1, p_2, p).$$

Die Projektion auf die Gerade Z' mit dem Zentrum q_1 liefert

$$DV(r, p_1, p_2, p) = DV(r, p'_2, p'_1, p'),$$

und die Projektion auf die Gerade $p \vee q$ mit dem Zentrum p_3 ergibt

$$DV(r, p'_2, p'_1, p') = DV(p, q_2^{**}, q_3, p').$$

Insgesamt folgt daraus

$$DV(p', q_3, q_2^*, p) = DV(p, q_2^{**}, q_3, p').$$

Da allgemein $DV(a, b, c, d) = DV(d, c, b, a)$ gilt, wie man anhand der Formel (*) aus der Antwort zu Frage 476 überprüfen kann, gilt also

$$DV(p', q_3, q_2^*, p) = DV(p', q_3, q_2^{**}, p).$$

Daraus folgt $q_2^* = q_2^{**}$, was zu zeigen war. ◆

Frage 480 Können Sie für Sätze der projektiven Geometrie das Prinzip der *Dualität* erläutern? Wie lässt sich die Gültigkeit dieses Prinzips formal begründen?

Antwort: Die Sätze der projektiven Geometrie handeln von Punkten und Hyperebenen und deren Lagebeziehungen zueinander. In der projektiven Ebene z. B. sagen die Sätze aus, dass bestimmte Geraden sich in einem gemeinsamen Punkt schneiden bzw. bestimmte Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Die Besonderheit der projektiven Geometrie besteht darin, dass Punkte und Hyperebenen formal vollkommen identische Eigenschaften besitzen. So ist eine Hyperebene z. B. definiert als die Menge aller Punkte $(x_0 : \dots : x_n)$, die eine Gleichung der Form

$$a_0x_0 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \text{mit} \quad (a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}_n(K) \quad (*)$$

erfüllt. Eine Hyperebene ist damit durch das projektive n -Tupel $(a_0 : \dots : a_n)$, mithin durch den *Punkt* $(a_0 : \dots : a_n)$ eindeutig bestimmt. Punkte und Hyperebenen sind in diesem Sinne *duale* Objekte. Die Menge der Punkte $(x_0 : \dots : x_n)$, die $(*)$ erfüllen, lässt sich daher genauso gut als Menge von Hyperebenen interpretieren, und zwar als die Menge derjenigen Hyperebenen, die den Punkt $(a_0 : \dots : a_n)$ enthalten. Unter algebraischen Gesichtspunkten bleiben alle Eigenschaften der Menge erhalten, unabhängig davon, ob sie als Punktmenge oder als Menge von Hyperebenen definiert wird. Entsprechend lässt sich jede Relation von Punkten auch als Relation von Hyperebenen interpretieren, indem man die Eigenschaft der Kollinearität durch die Relation „schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt“ austauscht. Jedem Satz der projektiven Geometrie entspricht daher ein dualer Satz.

Das Dualitätsprinzip bleibt auch für Sätze gültig, die Aussagen über nicht-lineare projektive Gebilde wie etwa Quadriken enthalten. Jede Quadrik lässt sich nämlich als Punktmenge genauso wie als Menge ihrer Tangentialhyperebenen definieren. Jedem Satz der projektiven Geometrie, der Aussagen über die Eigenschaften von Quadriken als Punktmengen macht, entspricht daher ein dualer Satz über die Tangentialhyperebenen. $\blacklozenge$

Frage 481 Wie lauten die dualen Versionen der Sätze von Desargues und von Pappos?

Antwort: Die duale Version des Satzes von Desargues lautet

In einer projektiven Ebene seien die Geraden $G_1, G_2, G_3, G'_1, G'_2, G'_3, Z$ gegeben mit der Eigenschaft, dass G_i, Z, G'_i sich für $i = 1, 2, 3$ jeweils in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Dann schneiden sich die Geraden

$$\begin{aligned} (G_1 \vee G_2) \cap (G'_1 \vee G'_2) \\ (G_2 \vee G_3) \cap (G'_2 \vee G'_3) \\ (G_1 \vee G_3) \cap (G'_1 \vee G'_3) \end{aligned}$$

in einem gemeinsamen Punkt.

Als die duale Version des Satzes von Pappos erhält man den sogenannten *Satz von Brianchon*.

Schneiden sich die Geraden Z_1, Z_2, Z_3 in einem gemeinsamen Punkt p und die Geraden Z'_1, Z'_2, Z'_3 in einem gemeinsamen Punkt p' , dann schneiden sich die Geraden

$$Y_1 := (Z_1 \vee Z'_2) \cap (Z_2 \vee Z'_1)$$

$$Y_2 := (Z_2 \vee Z'_3) \cap (Z_3 \vee Z'_2)$$

$$Y_3 := (Z_1 \vee Z'_3) \cap (Z_3 \vee Z'_1)$$

in einem gemeinsamen Punkt.

7.6 Projektive Quadriken

Frage 482 Wann nennt man ein Polynom $P \in K[x_0, \dots, X_n]$ zweiten Grades **homogen**?

Antwort: Das Polynom $P \in K[X_0, \dots, X_n]$ heißt *homogen*, wenn P die Darstellung

$$P(X_0, \dots, X_n) = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} X_i X_j$$

besitzt. Ein homogenes Polynom ist also dadurch ausgezeichnet, dass alle darin vorkommenden Monome denselben Grad – im Fall eines *quadratischen* Polynoms also den Grad 2 – besitzen.

Beispielsweise ist das Polynom $P_1 = X_0^2 + 2X_1X_0 + X_1^2$ homogen, das Polynom $P' = X_0^2 + 2X_1X_0 + X_1^2 + X_0 + 1$ jedoch nicht. ♦

Frage 483 Was ist eine **projektive Quadrik**?

Antwort: Eine Teilmenge $Q \subset \mathbb{P}_n(K)$ heißt (projektive) *Quadrik*, wenn ein homogenes Polynom $P \in K[X_0, \dots, X_n]$ existiert, so dass gilt

$$Q = \{(x_0 : \dots : x_n) ; P(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Hier ist zu bemerken, dass für $\lambda \in K^*$ jedes homogene Polynom $P \in K[X_0, \dots, X_n]$ die Gleichung $P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 P(x_0, \dots, x_n)$ erfüllt. Daher gilt

$$P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = 0 \iff P(x_0, \dots, x_n) = 0.$$

Aus diesem Grund entspricht der Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms in $K[X_0, \dots, X_n]$ auch eindeutig eine Teilmenge des projektiven Raumes $\mathbb{P}_n(K)$, d. h., die Menge

$$\{(x_0 : \dots : x_n) ; P(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

ist wohldefiniert. Dies ist für allgemeine Polynome aus $K[X_0, \dots, X_n]$ nicht der Fall. So enthält z. B. die Nullstellenmenge des inhomogenen Polynoms $X_0^2 - X_1 = 0$ den Punkt $(1, 1)$, aber keinen der Punkte (λ, λ) für $\lambda \notin \{0, 1\}$. $\blacklozenge$

Frage 484 Sei P ein Polynom in $K[X_1, \dots, X_n]$ und $Q \in K^n$ die Nullstellenmenge von P , also

$$Q = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n ; P(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

Was versteht man dann unter dem **projektiven Abschluss** $\overline{Q}$ von Q in $\mathbb{P}_n(K)$?

Antwort: Jedes Polynom $P \in K[X_1, \dots, X_n]$ lässt sich durch die Hinzunahme einer weiteren Variablen X_0 *homogenisieren*, d. h. zu einem homogenen Polynom $\overline{P} \in K[X_0, \dots, X_n]$ erweitern, indem man jedes Monom von P mit einer geeigneten Potenz von X_0 multipliziert. Für $P = X_1^2 + X_1 + 1 \in K[X_1]$ gilt beispielsweise $\overline{P} = X_1^2 + X_1 X_0 + X_0^2 \in K[X_0, X_1]$.

Der *projektive Abschluss* von Q ist dann gerade die durch das Polynom $\overline{P}$ gegebene Quadrik in $\mathbb{P}_n(K)$.

Beispiel: Sei

$$Q = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; 1 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}.$$

Dies ist eine Hyperbel in $\mathbb{R}^2$. Deren projektiver Abschluss ist die Quadrik

$$\overline{Q} = \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) ; x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}.$$

Die Quadrik $\overline{Q}$ enthält im Vergleich zu Q zusätzlich die „unendlich fernen Punkte“ von Q . Das sind genau die Schnittpunkte von $\overline{Q}$ mit der Hyperebene $x_0 = 0$, also alle Punkte $(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ mit $x_1^2 - x_2^2 = 0$ bzw. die beiden uneigentlichen Punkte

$$\{(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) ; x_1 = x_2\} \quad \text{und} \quad \{(0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) ; x_1 = -x_2\}. \quad \blacklozenge$$

Frage 485 Sei $Q \in \mathbb{P}_n(K)$ eine projektive Quadrik und $H \subset \mathbb{P}_n(K)$ eine Hyperebene. Was versteht man unter dem *affinen Anteil* Q_0 von Q bezüglich H ?

Antwort: Es ist

$$Q_0 := Q \cap (\mathbb{P}_n(K) \setminus H).$$

Da $\mathbb{P}_n(K) \setminus H$ sich nach Frage 460 mit dem affinen Raum $\mathbb{A}_n(K)$ identifizieren lässt, ist Q_0 damit eine affine Teilmenge von $\mathbb{A}_n(K)$. Deren geometrische Gestalt hängt aber wesentlich von der Wahl der Ebene H ab (vgl. dazu die nächste Frage).

Ist H speziell durch $x_0 = 0$ gegeben, so gilt

$$\begin{aligned} Q_0 &= \{(x_0 : \dots : x_n) \in Q ; x_0 \neq 0\} \\ &= \{(1, x_1, \dots, x_n) \in K^{n+1} ; (1 : x_1 : \dots : x_n) \in Q\}. \end{aligned}$$

Wird Q durch die Gleichung $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ beschrieben, so wird Q_0 als Teilmenge von $\mathbb{A}_n(K)$ bezüglich der kanonischen affinen Basis durch die Gleichung

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \alpha_{0i} x_i + \alpha_{00} = 0$$

beschrieben. ◆

Frage 486 Sei Q die durch die Gleichung $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ gegebene projektive Quadrik in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Können Sie zeigen, dass man durch Entfernen einer geeigneten Hyperebene in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ als affinen Anteil von Q

- (a) einen Kreis
- (b) eine Hyperbel
- (c) eine Parabel

erhält?

Antwort: Die Gleichung $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ beschreibt einen Kreiskegel in $\mathbb{R}^3$. Die affinen Anteile von Q lassen sich als die Schnitte von Q mit den entsprechenden Hyperebenen veranschaulichen.

a) Sei $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) ; x_0 = 0\}$. Man hat dann eine Affinität

$$\iota: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \setminus H, \quad (x_1, x_2) \longmapsto (1 : x_1 : x_2).$$

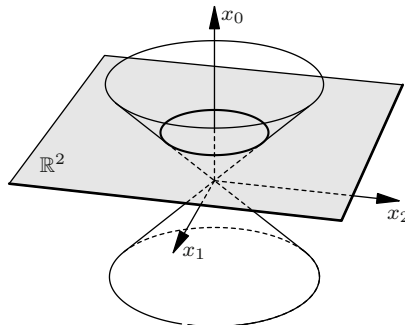
Für alle Punkte $(1 : x_1 : x_2) \in Q \cap A$ gilt

$$x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

Es folgt

$$\iota^{-1}(Q) = \{(x_1, x_2) ; x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$

Dies ist ein Kreis in A . Geometrisch kann man sich diesen als Schnitt des Kreiskegels mit der Hyperfläche $x_0 = 1$ vorstellen.



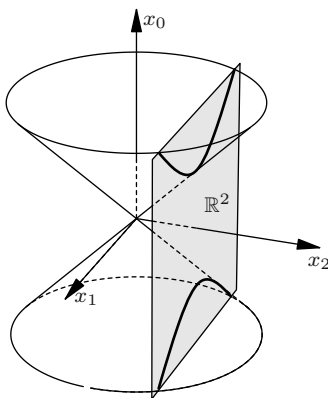
b) Im Fall $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) ; x_2 = 0\}$ lautet die Affinität

$$\iota: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \setminus H, \quad (x_0, x_1) \longmapsto (x_0 : x_1 : 1).$$

Es gilt

$$\iota^{-1}(Q) = \{(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 ; x_0^2 - x_1^2 = 1\}.$$

Dies ist eine Hyperbel in $\mathbb{R}^2$, die man sich als Schnitt von K mit der Hyperbene $x_2 = 1$ des $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen kann.



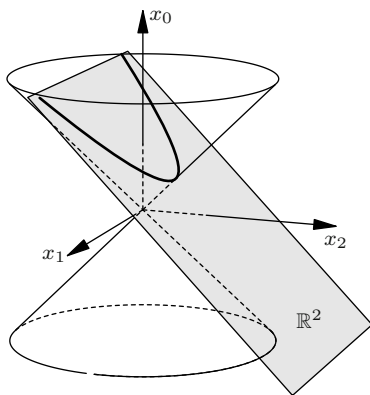
c) Sei nun $H = \{(x_0 : x_1 : x_2) ; x_0 + x_2 = 0\}$. In diesem Fall hat man eine Affinität

$$\iota: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \setminus H, \quad (x_1, x_2) \longmapsto ((1 - x_2) : x_1 : x_2).$$

Die Menge $Q \setminus H$ wird dann durch die Gleichung $(1 - x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$ bzw. $x_2 = (1 - x_1^2)/2$ beschrieben. Es folgt

$$\iota^{-1}(Q) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_2 = (1 - x_1^2)/2\}.$$

Dies ist eine Parabel in $\mathbb{R}^2$. Man erhält sie als Schnitt des Kreiskegels K mit der Hyperfläche $x_0 + x_2 = 1$.



Frage 487 Wie lassen sich projektive Quadriken $Q \in \mathbb{P}_n(K)$ durch symmetrische Bilinearformen

$$\Phi: K^{n+1} \times K^{n+1} \longrightarrow K$$

beschreiben?

Antwort: Ist $P \in K[X_0, \dots, X_n]$ ein homogenes Polynom, so definiere man eine Matrix $A \in K^{(n+1) \times (n+1)}$ durch

$$a_{ij} := \begin{cases} \alpha_{ij} & \text{für } i = j \\ \frac{1}{2}\alpha_{ij} & \text{für } i < j \\ \frac{1}{2}\alpha_{ji} & \text{für } i > j. \end{cases}$$

Dann ist $A = (a_{ij})$ eine symmetrische Matrix, definiert also eine symmetrische Bilinearform auf K^{n+1} . Für jeden Spaltenvektor $x = (x_0, \dots, x_n)^T$ gilt

$$x^T A x = \sum_{i \leq j} \alpha_{ij} x_i x_j = P(x).$$

Zu jeder Quadrik Q gibt es also eine symmetrische Matrix A mit

$$Q = \{x = (x_0 : \dots : x_n)^T ; x^T A x = 0\}.$$

Dabei ist die Matrix A nur bis auf einen Faktor $\varrho \in K^*$ eindeutig bestimmt.

Umgekehrt gehört zu jeder symmetrischen Bilinearform

$$\Phi: K^{n+1} \times K^{n+1} \longrightarrow K,$$

eine quadratische Form

$$q: K^{n+1} \longrightarrow K, \quad x \longmapsto \Phi(x, x)$$

und damit eine projektive Quadrik

$$Q = \{(x_0 : \dots : x_n)^T ; \Phi(x, x) = 0\}.$$



Frage 488 Können Sie zeigen, dass Quadriken unter Projektivitäten invariant bleiben, dass also für jede Quadrik $Q \in \mathbb{P}_n(K)$ und jede Projektivität $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$ auch $f(Q)$ eine Quadrik ist?

Antwort: Sei

$$Q = \{(x_0 : \dots : x_n)^T ; x^T A x = 0\}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in K^{n+1}$. Ist $F: K^{n+1} \longrightarrow K^{n+1}$ ein Isomorphismus mit $f = \mathbb{P}(F)$ und $S \in \text{GL}(n+1)$ die beschreibende Matrix von F , so gilt

$$f(Q) = \{f(x_0 : \dots : x_n)^T ; x^T A x = 0\}.$$

Mit $y = (y_0, \dots, y_n)^T = F((x_0, \dots, x_n)^T)$ schreibt sich das in der Form

$$f(Q) = \{(y_0 : \dots : y_n) ; y^T((S^{-1})^T A S^{-1})y = 0\}$$

Die Matrix $(S^{-1})^T A S^{-1}$ ist dann ebenfalls symmetrisch und somit $f(Q)$ nach Frage 487 eine Quadrik. $\blacklozenge$

Frage 489 Wann heißen zwei Quadriken $Q, Q' \in \mathbb{P}_n(K)$ **geometrisch (projektiv) äquivalent**?

Antwort: Zwei Quadriken $Q, Q' \in \mathbb{P}_n(K)$ heißen *geometrisch* oder *projektiv äquivalent*, symbolisch $Q \sim Q'$, wenn es eine Projektivität $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$ mit $Q' = f(Q)$ gibt. $\blacklozenge$

Frage 490 Was besagt der Satz über die **projektive Hauptachsentransformation**?

Antwort: „Hauptachsentransformation“ bedeutet in diesem Zusammenhang, eine Quadrik mittels einer Projektivität auf eine geometrisch äquivalente Quadrik abzubilden, die durch eine besonders einfache standardisierte Gleichung beschrieben wird, in der keine gemischten Variablen mehr vorkommen. Der Satz über die Hauptachsentransformation besagt gerade, dass sich jede projektive Quadrik dergestalt auf Hauptachsen transformieren lässt. Er ermöglicht es daher, zu jeder Klasse geometrisch äquivalenter Quadriken einen eindeutigen Repräsentanten in „Hauptachsenform“ anzugeben, was bei der Klassifikation von Quadriken eine tragende Rolle spielt. Der Satz besitzt für komplexe und reelle Quadriken jeweils eine eigene Formulierung. Genau besagt er:

1. Zu jeder Quadrik $Q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ gibt es eine geometrisch äquivalente Quadrik Q' mit der Gleichung

$$x_0^2 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = 0, \quad -1 \leq \ell, k \leq n.$$

Dabei sind die Zahlen ℓ und k durch die zusätzliche Forderung $\ell + 1 \geq k - \ell$ eindeutig bestimmt.

2. Zu jeder Quadrik $Q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $k \leq n \in \mathbb{N}$, so dass Q geometrisch äquivalent ist zu der Quadrik mit der Gleichung

$$x_0^2 + \dots + x_k^2 = 0.$$

Die äquivalente matrizentheoretische Formulierung lautet

1'. Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in M((n+1) \times (n+1), \mathbb{R})$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen, k, ℓ mit $-1 \leq k, \ell \leq n$ und $\ell+1 \geq k-\ell$ und eine invertierbare Matrix $S \in \text{GL}(n+1, \mathbb{R})$, so dass

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} E_{\ell+1} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{k-\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

gilt.

2'. Zu jeder symmetrischen Matrix $A \in M((n+1) \times (n+1), \mathbb{C})$ gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $k \leq n$ und eine invertierbare Matrix $S \in \text{GL}(n+1, \mathbb{C})$ mit

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (**)$$

gilt.

Der Beweis ergibt sich im reellen Fall unmittelbar aus dem Satz über die reelle Hauptachsentransformation. Beim komplexen Fall ist jedoch zu beachten, dass in Antwort 416 die Hauptachsentransformation im Bezug auf hermitesche Formen bzw. Matrizen bewiesen wurde, während man es im gegenwärtigen Kontext mit symmetrischen komplexen Matrizen zu tun hat. Eine leichte Modifikation der Argumentation führt aber auch in diesem Fall zum gewünschten Ergebnis. ♦

Frage 491 Wie lässt sich mit den Mitteln der linearen Algebra die geometrisch äquivalente Quadrik Q' bestimmen?

Antwort: Sei

$$Q = \{x \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) ; x^T A x = 0\}$$

mit einer symmetrischen Matrix $A \in M((n+1) \times (n+1), \mathbb{K})$. Die Frage läuft darauf hinaus, die nach dem Satz über die Hauptachsentransformation existierende Matrix $S \in \text{GL}(n+1, \mathbb{K})$ zu bestimmen mit der $D := S^{-1}AS$ die Gestalt $(*)$ bzw. $(**)$ aus Frage 490 besitzt. Die Matrix S^{-1} beschreibt dann die Projektivität, die Q auf die geometrisch äquivalente Quadrik Q' in Normalform abbildet.

Als Element aus $\text{GL}(n+1, k)$ lässt sich S als Produkt $C_1 \cdots C_s$ von Elementarmatrizen schreiben. Es gilt also

$$B = C_n^T \cdots C_1^T \cdot A \cdot C_1 \cdots C_n.$$

Die Multiplikation von rechts mit den Matrizen $C_1, \dots, C_k$ beschreibt eine Reihe elementarer Zeilenumformungen, die Multiplikation von links mit den Matrizen $C_1^T, \dots, C_k^T$ die Serie entsprechender elementarer Spaltenumformungen. Man erhält $B = C_1 \cdots C_k$, wenn man an E_{n+1} die gleichen Zeilenumformungen durchführt. Dies führt auf folgendes Verfahren. Man transformiere A durch elementare

Zeilenumformungen, gefolgt von den entsprechenden elementaren Spaltenumformungen auf eine Matrix des Typs B um. Gleichzeitig wende man auf E_{n+1} die Zeilenumformungen an. Die auf diese Weise aus E_{n+1} erhaltene Matrix ist die gesuchte Matrix T . Schematisch lässt sich das so darstellen:

A	E_{n+1}
$C_1^T A C_1$	$E_{n+1} C_1$
$\vdots$	$\vdots$
$B = C_k^T \cdots C_1^T A C_1 \cdots C_k$	$E_{n+1} C_1 \cdots C_k = T$

Mit $S := T^{-1}$ ist die gesuchte Transformationsmatrix gefunden, und es gilt

$$\begin{aligned} Q' &= \{(y_0 : \dots : y_n) ; y^T (S^T A S) y = 0\} = \{(y_0 : \dots : y_n) ; (S y)^T A (S y) = 0\} \\ &= \{S \cdot (x_0, \dots, x_n)^T ; x^T A x = 0\} = f(Q). \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Frage 492 Was besagt die **Vorzeichenregel von Descartes**?

Antwort: Die Regel besagt:

Die Anzahl der positiven Nullstellen eines reellen Polynoms

$$P[X] = \alpha_m X^m + \alpha_{m-1} X^{m-1} + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0 \quad \text{mit } \alpha_m \neq 0 \text{ und } \alpha_0 \neq 0$$

welches nur reelle Nullstellen besitzt, ist gleich der Anzahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizientenfolge.

So besitzt beispielsweise das Polynom $X^2 - X - 2$ genau eine positive Nullstelle (die Voraussetzung, dass alle Nullstellen reell sind, ist in diesem Fall erfüllt). Einen Beweis findet man etwa in [5]. $\blacklozenge$

Frage 493 Wie kann man, ohne die Transformationsmatrix explizit zu berechnen, die zu einer Quadrik $Q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ äquivalente Quadrik Q' in Hauptachsenform, d. h. die Q' beschreibende Gleichung

$$x_0^2 + \cdots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \cdots - x_k^2 = 0$$

bestimmen?

Antwort: Wird Q durch die symmetrische Matrix $A \in M((n+1), \mathbb{R})$ beschrieben, so besitzt A nach Frage 417 $n+1$ reelle Eigenwerte $\lambda_0, \dots, \lambda_n$. Die Q' beschreibende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} E_{\ell+1} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{k-\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat nach dem Trägheitssatz von Sylvester dieselbe Anzahl positiver und negativer Eigenwerte wie A . Um B und damit Q' zu bestimmen, genügt es also, die Anzahl positiver und negativer Eigenwerte von A ausfindig zu machen, d. h. die Vorzeichenverteilung des charakteristischen Polynoms von A . Ist

$$\chi_A = X^m(\alpha_j X^j + \alpha_{j-1} X^{j-1} + \cdots + \alpha_0) =: X^m \cdot P(X), \quad \alpha_0 \neq 0,$$

so folgt mit der Vorzeichenregel von Descartes

$$\ell = \text{Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizientenfolge von } P$$

sowie

$$k - \ell = \deg P - \ell = j - \ell.$$

Beispiel: Sei

$$Q = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) ; x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_3 = 0\}$$

Zu $\chi_A(X) = X^4 - 2X^2 + 1$ gehört die Vorzeichenfolge $(+, +, -, +, +)$. Also ist $\ell = 2$ und $k - \ell = 4 - 2 = 2$, und somit ist Q äquivalent zu

$$Q' = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) ; x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0\}. \quad \blacklozenge$$

Frage 494 Wie lautet das **Klassifikationstheorem** für projektive Quadriken aus $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$?

Antwort: Der Satz lautet

Seien $A_1, A_2 \in M((n+1), \mathbb{K})$ symmetrische Matrizen und

$$Q_i := \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}_n(\mathbb{K}) ; x^T A_i x\}, \quad i = 1, 2$$

die dadurch beschriebenen Quadriken. Dann gilt im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$Q_1 \sim Q_2 \iff \text{rg } A_1 = \text{rg } A_2 \text{ und } |\text{Sign } A_1| = |\text{Sign } A_2|.$$

Dabei ist $\text{Sign } A$ für eine reelle symmetrische Matrix definiert durch

$$\begin{aligned} \text{Sign } A := & (\text{Anzahl der positiven Eigenwerte von } A) \\ & - (\text{Anzahl der negativen Eigenwerte von } A). \end{aligned}$$

Für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt

$$Q_1 \sim Q_2 \iff \text{rg } A_1 = \text{rg } A_2.$$

Dass zwei geometrisch äquivalente Matrizen die angegebenen Eigenschaften besitzen, folgt, indem man Q_1 und Q_2 auf Hauptachsen transformiert. Der Beweis der anderen Richtung benötigt noch zusätzlich die Tatsache, dass jeder „normalen“ Quadrik bis auf einen Faktor ein eindeutiges Polynom zugeordnet werden kann. $\blacklozenge$

Frage 495 Welche Normalformen von Quadriken in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ erhält man aus dem Klassifikationssatz?

Antwort: Jede Normalform entspricht einer möglichen Kombinationen von $\text{rg } A$ und $|\text{Sign } A|$. In der reell projektiven Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ erhält man damit folgende sechs Normalformen:

rg	$ \text{Sign} $	Gleichung	Beschreibung
0	0	$0 = 0$	Ebene $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
1	1	$x_0^2 = 0$	Gerade
2	2	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Punkt
2	0	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	Geradenpaar
3	3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	leere Quadrik
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	Kreis

In $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ erhält man neun Klassen geometrisch äquivalenter Quadriken:

rg	$ \text{Sign} $	Gleichung	Beschreibung
0	0	$0 = 0$	$\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$
1	1	$x_0^2 = 0$	Ebene
2	2	$x_0^2 + x_1^2 = 0$	Gerade
2	0	$x_0^2 - x_1^2 = 0$	Ebenenpaar
3	3	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$	Punkt
3	1	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$	Kegel
4	4	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	leere Quadrik
4	2	$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Kugel
4	2	$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$	Regelfläche

Die affinen Anteile der Quadriken der reellen projektiven Ebene wurden schon in Frage 486 untersucht. In der nächsten Frage wird dies für die interessanten Fälle der Quadriken aus $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ nachgeholt. $\blacklozenge$

Frage 496 Können Sie für die Kugel und die Regelfläche die affinen Anteile angeben?

Antwort: Zunächst zur Kugel Q mit der Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Entfernt man aus $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ die Hyperebene H_1 mit der Gleichung $x_3 = 0$, so verbleibt

$$\{(x_0, x_1, x_2) ; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$$

als affiner Anteil. Dies ist eine Kugel im affinen Raum. Wegen $Q \cap H_1 = \emptyset$ besitzt diese keine unendlich fernen Punkte.

Durch Entfernen der Hyperebene H_2 mit der Gleichung $x_0 = 0$ erhält man

$$\{(x_1, x_2, x_3) ; x_3^2 - x_2^2 - x_1^2 = 1\}.$$

Das ist ein **zweischaliges Hyperboloid**. Die unendlich fernen Punkte liegen auf dem Kreis

$$\{(x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) ; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\},$$

der gewissermaßen den „Äquator“ von Q beschreibt.

Die dritte Möglichkeit, ein affines Bild von Q zu erhalten, besteht darin, einen einzigen Punkt von Q „ins Unendliche“ zu rücken. Dazu ersetze man Q durch die geometrisch äquivalente Quadrik Q' mit der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_0 x_3 = 0.$$

Definiert man H_3 durch $x_0 = 0$, dann erhält man als affinen Rest von Q' das *elliptische Paraboloid*

$$\{(x_1, x_2, x_3) ; x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0\}.$$

Der unendlich ferne Anteil ist gegeben durch

$$\{(x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) ; x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{(0 : 0 : 1)\}.$$

Nun zur Regelfläche Q mit der Gleichung

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Entfernt man die Hyperebene H_1 mit der Gleichung $x_3 = 0$, so erhält man als affinen Rest

$$\{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 ; x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 1\}.$$

Das ist ein *einschaliges Hyperboloid*. Der unendlich ferne Anteil ist dann der „Kreis“

$$\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) ; x_0^2 + x_1^2 = 1\}.$$

7.7 Affine Quadriken

Frage 497 Was ist eine **affine Quadrik**?

Antwort: Eine Teilmenge $Q_0 \subset \mathbb{A}_n(K)$ heißt *affine Quadrik*, wenn es eine projektive Quadrik $Q \in \mathbb{P}_n(K)$ mit $Q_0 = Q \cap \mathbb{A}_n(K)$ gibt. Eine affine Quadrik erhält man damit als affinen Anteil einer projektiven Quadrik, d. h., indem man aus Q die unendlich fernen Punkte entfernt.

Lautet die Gleichung der projektiven Quadrik Q

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0,$$

so wird Q_0 als Teilmenge von $\mathbb{A}_n(K)$ bezüglich der kanonischen affinen Koordinaten durch die Gleichung

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^n \alpha_{0j} x_j + \alpha_{00} = 0.$$

beschrieben.

Die Menge

$$Q_u := \{(x_0 : \dots : x_n) \in Q ; x_0 = 0\}$$

heißt der *uneigentliche Anteil* von Q . Da dieser durch die Gleichung

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$$

beschrieben wird, ist Q_u eine Quadrik des projektiven Raumes $\mathbb{P}_{n-1}(K)$.

Durch jede projektive Quadrik Q ist die affine Quadrik $Q_0 = Q \cap \mathbb{A}_n(K)$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt können aber zwei verschiedene projektive Quadriken Q und Q' durchaus dieselbe affine Quadrik bestimmen. Das ist genau dann der Fall, wenn sich Q und Q' nur in ihren uneigentlichen Punkten unterscheiden. ♦

Frage 498 Wann heißen zwei affine bzw. projektive Quadriken **affin äquivalent**?

Antwort: Zwei affine Quadriken Q_0 und Q'_0 heißen *affin äquivalent*, wenn es eine Affinität F mit $F(Q_0) = Q'_0$ gibt.

Entsprechend nennt man zwei projektive Quadriken Q und Q' *affin äquivalent*, wenn es eine projektive Affinität F mit $F(Q) = Q'$ gibt.

Sind die projektiven Quadriken Q und Q' *affin äquivalent*, so auch die affinen Anteile Q_0 und Q'_0 . Ferner sind in diesem Fall die uneigentlichen Anteile Q_u und Q'_u projektiv äquivalent. ♦

Frage 499 Wie lautet der **Äquivalenzsatz für affine Quadriken**?

Antwort: Der Satz besagt:

Die projektiven Quadriken $Q_{\ell,k}^{(i)} \in \mathbb{P}_n(K)$ seien für $1 \leq \ell, k \leq n$ definiert durch die Gleichungen

$$x_1^2 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = \Delta^{(i)}$$

mit

$$\Delta^{(1)} = 0, \quad \Delta^{(2)} = x_0^2, \quad \Delta^{(3)} = -x_0^2, \quad \Delta^{(4)} = x_0 x_{k+1} \quad (\text{nur für } k < n).$$

Dann gilt: Jede projektive Quadrik $Q \in \mathbb{P}_n(K)$ ist zu genau einer Quadrik $Q_{\ell,k}^{(i)}$ affin äquivalent.

Beweis: Sei Q gegeben durch die Gleichung $\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$. Der uneigentliche Anteil Q_u von Q wird dann durch die Gleichung $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = 0$ beschrieben. Nach Frage 490 ist Q_u geometrisch äquivalent zu einer Quadrik Q'_u mit der Gleichung

$$x_1^2 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = 0.$$

Sei S^* die Darstellungsmatrix der Projektivität $f^*: \mathbb{P}_{n-1}(K) \rightarrow \mathbb{P}_{n-1}(K)$, die Q_u auf Q'_u abbildet. Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \\ & S^* \end{pmatrix}$$

beschreibt dann eine Fortsetzung von f^* zu einer affinen Projektivität $f: \mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$, die Q auf die affin äquivalente Quadrik Q' abbildet. Dabei wird Q' durch eine Gleichung der Form

$$x_1^2 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = b x_0^2 + \sum_{i=1}^n b_i x_0 x_i$$

beschrieben. Diese Gleichung lässt sich durch eine affine Transformation weiter vereinfachen. Die durch die Gleichungen

$$x'_i = \begin{cases} x_i - \frac{b_i}{2} x_0 & \text{für } i = 1, \dots, \ell \\ x_i + \frac{b_i}{2} x_0 & \text{für } i = \ell + 1, \dots, k \\ x_i & \text{für } i = 0 \text{ und } i > k \end{cases}$$

definierte projektive Affinität bildet Q' auf eine Quadrik Q'' mit der Gleichung

$$x_1^2 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = c x_0^2 + \sum_{i=k+1}^n b_i x_0 x_i$$

ab. Somit ist Q'' immer noch affin äquivalent zu Q . Nun sind folgende vier Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. $c = 0$ und $b_i = 0$ für $i = k + 1, \dots, n$

In diesem Fall ist Q'' bereits vom Typ 1.

Fall 2. $c > 0$ und $b_i = 0$ für $i = k + 1, \dots, n$

Durch $x'_0 = \sqrt{c}x_0$ und $x_i = x_i$ für $i = 1, \dots, n$ wird eine projektive Affinität $\mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$ beschrieben, die Q'' auf eine Quadrik $\tilde{Q}$ mit der Gleichung

$$x_1^2 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = x_0^2.$$

abbildet. Diese ist vom Typ 2.

Fall 3. $c < 0$ und $b_i = 0$ für $i = k + 1, \dots, n$

Durch $x'_0 = -\sqrt{-c}x_0$ und $x_i = x_i$ für $i = 1, \dots, n$ wird eine projektive Affinität $\mathbb{P}_n(K) \rightarrow \mathbb{P}_n(K)$ beschrieben, die Q'' auf eine Quadrik Q^* mit der Gleichung

$$x_1^2 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = -x_0^2.$$

abbildet. Diese ist vom Typ 3.

Fall 4. $b_i \neq 0$ für mindestens ein $i > k + 1$

Da eine Vertauschung der Variablen eine affine Projektivität ist, kann man $b_{k+1} \neq 0$ annehmen. Die durch

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{für } i \neq k + 1 \\ cx_0 + \sum_{\nu=k+1}^n b_\nu x_\nu & \text{für } i = k + 1 \end{cases}$$

definierte affine Projektivität bildet Q'' auf eine Quadrik Q^* mit der Gleichung

$$x_1 + \dots + x_\ell^2 - x_{\ell+1}^2 - \dots - x_k^2 = x_0 x_{k+1}$$

ab. Also ist Q^* vom Typ 4.

Da diese Fallunterscheidung vollständig ist, ist gezeigt, dass jede projektive Quadrik zu mindestens einer der Quadriken $Q_{\ell,k}^{(i)}$ affin äquivalent ist.

Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass die Quadriken $Q_{\ell,k}^{(i)}$ untereinander nicht affin äquivalent sind. Angenommen nämlich, die beiden Quadriken $Q_j := Q_{\ell_j,k_j}^{(i_j)}$ mit $j \in \{1, 2\}$ und $i_j \in \{1, 2, 3, 4\}$ sind affin äquivalent. Dann sind die uneigentlichen Anteile projektiv äquivalent, woraus $\ell_1 = \ell_2$ und $k_1 = k_2$ folgt. Ferner gilt für die Darstellungsmatrizen $A^{(j)}$ von $Q_{\ell,k}^{(j)}$

$$\operatorname{rg} A^{(1)} = k, \quad \operatorname{rg} A^{(2)} = k + 1 = \operatorname{rg} A^{(3)}, \quad \operatorname{rg} A^{(4)} = k + 2.$$

Damit könnten höchstens $Q_{\ell,k}^{(2)}$ und $Q_{\ell,k}^{(3)}$ untereinander affin äquivalent sein. Das ist aber ebenfalls ausgeschlossen, da wegen $|\operatorname{Sign} A^{(2)}| \neq |\operatorname{Sign} A^{(3)}|$ diese beiden Quadriken noch nicht einmal projektiv äquivalent sind. $\blacklozenge$

Frage 500 Können Sie eine vollständige Liste aller affin äquivalenter Quadriken in $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ angeben?

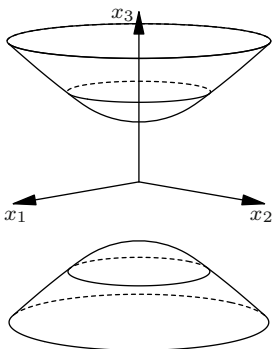
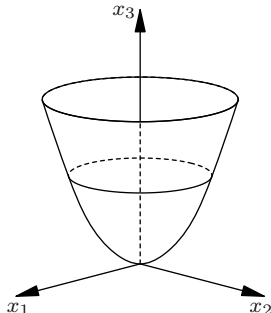
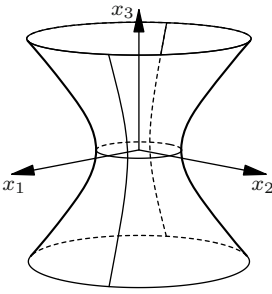
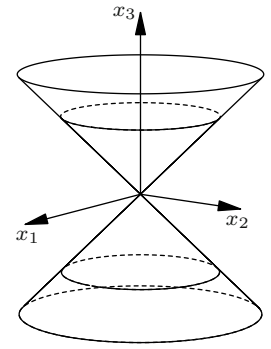
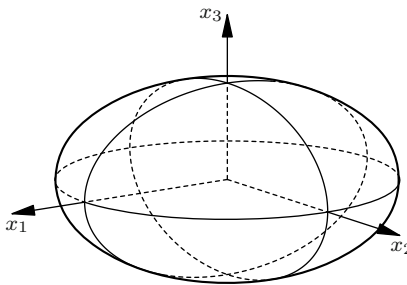
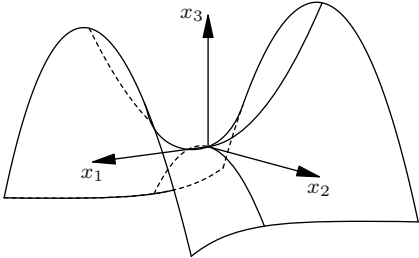
Antwort: Die Liste affin äquivalenter Quadriken ist eine Verfeinerung derjenigen für projektiv äquivalente Quadriken. Systematisch erhält man diese, indem man jede Klasse projektiv äquivalenter Quadriken noch hinsichtlich der projektiven Äquivalenz ihrer uneigentlichen Anteile differenziert. Das bedeutet, dass jede Zeile der Tabelle aus Frage 495 noch in die möglichen Kombinationen der Werte von $|\operatorname{rg} A'|$ und $|\operatorname{Sign} A'|$, wo A' die Darstellungsmatrix für den uneigentlichen Anteil von Q ist, verzweigt werden muss. In der reellen projektiven Ebene erhält man folgende 12 Klassen affin äquivalenter Quadriken:

Nr.	$\operatorname{rg} A$	$ \operatorname{Sign} A $	$\operatorname{rg} A'$	$ \operatorname{Sign} A' $	Gleichung	Bezeichnung
1	0	0	0	0	$0 = 0$	$\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$
2	1	0	0	0	$0 = x_0^2$	uneigentl. Gerade
3	1	0	1	0	$x_1^2 = 0$	eigentl. Gerade
4	2	0	0	0	$0 = x_0 x_1$	eigentl. und uneigentl. Gerade
5	2	0	1	1	$-x_1^2 = x_0^2$	uneigentl. Punkt
6	2	0	2	0	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	eigentl. Punkt
7	2	2	1	1	$x_1^2 = x_0^2$	Paar paralleler Geraden
8	2	2	2	2	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Geradenpaar mit eigentl. Schnittpunkt
9	3	1	1	1	$x_1^2 = x_0 x_2$	Parabel
10	3	1	2	0	$x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$	Hyperbel
11	3	1	2	2	$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$	Ellipse
12	3	3	2	2	$-x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$	$\emptyset$

Im projektiven Raum $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ gibt es zwanzig Klassen affin äquivalenter Quadriken.

Nr.	$\operatorname{rg} A$	$ \operatorname{Sign} A $	$\operatorname{rg} A'$	$ \operatorname{Sign} A' $	Gleichung	Bezeichnung
1	0	0	0	0	$0 = 0$	3-dim. Raum
2	1	1	0	0	$0 = x_0^2$	uneigentl. Ebene
3	1	1	1	1	$x_1^2 = 0$	eigentl. Ebene
4	2	0	0	0	$0 = x_0 x_1$	Ebenenpaar
5	2	0	1	1	$x_1^2 = x_0^2$	Paar paralleler Ebenen
6	2	0	2	0	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Ebenenpaar
7	2	2	1	1	$-x_1^2 = x_0^2$	uneigentliche Gerade
8	2	2	2	2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	eigentl. Gerade
9	3	0	1	1	$x_1^2 = x_0 x_2$	parabolischer Zylinder
10	3	1	2	0	$x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$	hyperbolischer Zylinder
11	3	1	2	2	$x_1^2 + x_2^2 = x_0^2$	elliptischer Zylinder
12	3	1	3	1	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Kegel
13	3	3	2	2	$-x_1^2 - x_2^2 = x_0^2$	uneigentl. Punkt
14	3	3	3	3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	eigentl. Punkt
15	4	0	2	0	$x_1^2 - x_2^2 = x_0 x_3$	hyperbolisches Paraboloid
16	4	0	3	1	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = x_0^2$	einschaliges Hyperboloid
17	4	1	3	3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_0^2$	Ellipsoid
18	4	2	2	2	$x_1^2 + x_2^2 = x_0 x_3$	elliptisches Paraboloid
19	4	2	3	1	$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x_0^2$	zweischaliges Hyperboloid
20	4	4	3	3	$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = x_0^2$	$\emptyset$

Die folgenden Abbildungen zeigen die affinen Anteile einiger Klassen.

	
Zweischaliges Hyperboloid	Elliptisches Paraboloid
	
Einschaliges Hyperboloid	Kegel
	
Ellipsoid	Hyperbolisches Paraboloid

