Florian Modler Martin Kreh

Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1

Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1

Florian Modler • Martin Kreh

Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1

Mathematatik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert

Spektrum
AKADEMISCHER VERLAG

Autoren

Florian Modler
Drosselweg 10
31157 Sarstedt
modler@mathestudium-tutor.de

Martin Kreh
Lortzingstr. 23
31228 Peine
kreh@mathestudium-tutor.de

Homepage: www.mathestudium-tutor.de

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

10 11 12 13 14 5 4 3 2 1

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Anja Groth
Redaktion: Bernhard Gerl
Satz: Florian Modler, Martin Kreh, Marco Daniel
Herstellung: Crest Premedia Solutions (P) Ltd, Pune, Maharashtra, India
Umschlaggestaltung: SpieszDesign, Neu–Ulm
Titelbildmotiv: © Carolyn Hall
Fotos/Zeichnungen: Thomas Epp und die Autoren

ISBN 978-3-8274-2345-0

Vorwort

Wieso dieses Buch?
Wenn ihr dieses Buch in den Händen haltet, werdet ihr euch vielleicht fragen, wieso wir den Markt mit einem weiteren Buch zur Analysis 1 und zur Linearen-Algebra 1 erweitern. Die Frage ist berechtigt. Gerade in Anbetracht der Tatsache, dass es wirklich schon eine Menge guter Lehrbücher zu diesen Anfängervorlesungen gibt. Wir wollen daher versuchen, unser Konzept, unsere Idee und letztendlich das Buch zu beschreiben. Denn dieses Buch ist anders als alle anderen Bücher, die ihr zu den Anfängervorlesungen kennt. Es geht schon bei den Autoren los. Wir sind (noch) keine ausgebildeteten Mathematiker, sondern noch „mathematische Babys“. Also können wir, so jedenfalls unsere Meinung, die Schwierigkeiten von Anfängern noch besser einschätzen als so mancher Professor, der sich schon sehr weit von den Studenten und deren Anfängerschwierigkeiten entfernt hat.

Gebrauchsanleitung
Der zweite Unterschied zu anderen, klassischen Lehrbüchern besteht im Aufbau. Das Buch ist kapitelweise zweigeteilt. Im ersten Teil, gekennzeichnet durch die Kapitelüberschriften „Definitionen“ und „Sätze und Beweise“ stellen wir euch alle wichtigen Definitionen und Sätze zur Verfügung, die ihr zum Beispiel für eine Prüfung einfach draufhaben müsst. Des Weiteren findet ihr dort auch die Beweise zu wichtigen Sätzen, damit ihr die Denkweise von Beweisen versteht, was sehr wichtig ist. Überspringt diese beim Lesen des Buches auf keinen Fall, auch wenn ihr denkt, dass ihr diese nicht braucht. Das ist Quatsch. Ihr studiert Mathematik und was ist denn das Schöne an der Mathematik? Doch wohl die Beweise ;-). In diesem ersten Teil ist also alles sehr streng mathematisch.
Im zweiten Teil, gekennzeichnet durch die Kapitelüberschriften „Erklärungen zu den Definitionen“ und „Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen“, erklären und kommentieren wir die Definitionen, Sätze und Beweise aus dem ersten Teil mit vielen Abbildungen und Beispielen. Dieser Teil ist eher als eine Art Tutorium zu verstehen, in dem wir die Begriffe motivieren und vor allem, so hoffen wir jedenfalls, verständlich erklären und die schwierige mathematische Strenge etwas mit Leben füllen. Solltet ihr also irgendeine Definition in der Vorlesung nicht auf Anhieb verstehen, schlagt ihr einfach im zweiten Teil nach und lest die Erklärungen.
Solch einen Aufbau gibt es noch in keinem Lehrbuch, und wir hoffen, dass wir damit vielen Studenten, die am Anfang Schwierigkeiten haben, bestens helfen können. Wichtig ist uns aber auch, dass ihr neben diesem Buch noch andere

Bücher zur Mathematik lest, gerade weil unser Aufbau nicht klassisch ist (An einigen Stellen benötigen wir Begriffe, die erst in späteren Kapiteln kommen. Wir verweisen aber immer auf die entsprechenden Stellen, sodass man bequem nachlesen kann), und ihr euch dennoch an den „herkömmlichen“ Lehrbuch-Stil gewöhnen sollt. Es soll eher begleitend zur Vorlesung eingesetzt werden.

Inhalt

Der Inhalt ist dagegen klassisch. Wir haben versucht, alle wichtigen Definitionen und Sätze in das Buch mit aufzunehmen, die in einer Analysis 1- und Linearen-Algebra 1-Vorlesung vorkommen und behandelt werden. Zunächst geben wir im ersten Teil „Grundlagen“ wichtige Begriffe an, die ihr sowohl in der Analysis als auch in der Linearen Algebra immer wieder braucht.
Im Analysis-Teil geht es danach mit Folgen und Reihen los. Weiter schreiten wir zur Stetigkeit und Differenzierbarkeit und beenden den Teil mit Integralen und Funktionenfolgen.
Im Abschnitt über Lineare Algebra starten wir erst harmlos mit dem Lösen von linearen Gleichungssystemen und gehen danach sofort zu den wichtigen linearen Abbildungen und den Modellen der Linearen Algebra über. Dieser Teil wird durch ein Kapitel über das Diagonalisieren von Matrizen und wichtigen Anwendungen abgeschlossen.
Natürlich wollen wir betonen, dass wir beim Schreiben des Buches Mut zur Lücke gezeigt haben, denn wir wollten das Buch nicht überladen und wirklich nur wichtige Dinge aufnehmen. Wir hoffen, dass uns dies gelungen ist.
Das Buch enthält keinen extra Abschnitt mit Übungsaufgaben, aber wir haben einige Aufgaben im laufenden Text eingestreut. Als wir noch im ersten Semester waren, haben wir uns darüber immer geärgert, wenn in einem Buch plötzlich stand: „Dies überlassen wir dem Leser als leichte Übungsaufgabe“. Aber glaubt uns: Blicken wir nun als Viertsemestler zurück, so sind wir froh, dass dies in diesen Büchern stand. Denn ihr solltet diesen Satz keinesfalls als Schikane ansehen, sondern nehmt die Herausforderung an und löst alle Übungsaufgaben, die im Buch verteilt sind, denn nur dadurch kann man sich selbst überprüfen, ob man den Stoff verstanden hat. Vielfach ist es nämlich so, dass man denkt, man hätte alles verstanden, aber blickt man dann auf eine Aufgabe, so steht man plötzlich auf dem Schlauch. Also ran an die Aufgaben!

Die Website zum Buch

Wir haben auch eine Website zum Buch eingerichtet. Diese ist unter der folgenden URL zu erreichen:

http://www.mathestudium-tutor.de

Diese Homepage soll dazu dienen, dass ihr Fragen zum Buch stellen könnt, wenn ihr irgendeine Stelle im Buch nicht verstanden habt oder ähnliches. Wir wollen aber darauf hinweisen, dass die Website bzw. das Forum nicht als Hausaufgabenhilfe genutzt werden kann. Es werden dort nur Fragen zum Buch beantwortet. Hausaufgabenhilfe bekommt ihr in anderen Foren, aber nicht bei uns. Weiterhin sollen auf dieser Homepage Hinweise auf Fehler gesammelt werden, die sich mit Sicherheit ins Buch eingeschlichen haben, denn der Fehlerteufel schläft bekanntlich nie. Auch Bonusmateriel, das keinen Platz mehr im Buch gefunden hat, wird dort zu finden sein, ebenso wie Hilfestellungen zu den Übungen, die wir im Buch verstreut haben (falls ihr die Hilfe benötigt). Außerdem würden wir uns freuen, wenn sich so eine Community zu unserem Buch entwickeln würde und wir euch sicher durch das erste Semester bringen können. Über konstruktive Kritik jeglicher Art freuen wir uns dann natürlich auch :-).

Danksagung

Ein Buch ist immer nur so gut, wie die Helfer, die zum Entstehen des Buches beigetragen haben, und das sind bei Weitem nicht nur die Autoren. Wir hatten von diesen Helfern zum Glück sehr viele und daher wird auch die Danksagung etwas länger ausfallen, denn ohne diese fleißigen Freunde, Bekannte und Mitarbeiter der Leibniz Universität Hannover wäre das Buch nicht so, wie ihr es gerade in euren Händen haltet. Wir haben eine Menge Leuten zu danken und hoffen, dass wir im Folgenden niemanden vergessen. Wenn dies trotzdem der Fall sein sollte, dann bitten wir dies zu entschuldigen und danken ihm/ihr trotzdem.

Da hätten wir einerseits unsere Korrekturleser Dr. Florian Leydecker, Stefan Keil, Stefan Hasselmann, Christoph Fuest, Dr. Dr. h.c. Norbert Herrmann, Prof Dr. Stefan Wewers und Arne Böttger, die uns auf viele kleinere und größere Ungereimtheiten und Fehler aufmerksam gemacht haben und die auch unter Zeitdruck alles andere verschoben haben, um erst einmal unser Manusskript zu lesen. Dafür sei allen herzlich gedankt.

Ein ganz großer Dank geht auch an Marco Daniel, der uns mit seinem unbegrenzten Wissen über LaTeX beim Erstellen des Textsatzes sehr unterstützt hat und auch nachts um vier Uhr noch bereit war, auf Fragen zu antworten und zu helfen. An dieser Stelle muss aber auch seiner Frau gedankt werden, die so oft auf ihn verzichten musste.

Weiterhin sei Carolyn Hall gedankt, die nach unseren Vorschlägen, die noch sehr schwammig und nicht gerade aussagekräftig waren, dieses wundervolle Coverbild erstellt hat, das ihr nun bewundern könnt.

Ein weiterer Dank geht an folgende Studenten, die das Buch vor dem Erscheinen daraufhin getestet haben, ob der Text für Erstsemestler auch geeignet ist: Katharina-Sophie Isleif, Simon Golchin-Nik, Susanne Begerow, Fabian Grünig, Mareike Antrick, Wiebke Telle, Helge Reddig, Nadine Geldermann und Esmere Krasniqi.

Ebenso danken wir Thomas Epp, der diese sehr gelungenen Grafiken im Buch erstellt hat und Susanne Hensel, Heidemarie Wolter und Bernhard Gerl für die umfangreichen Korrekturen!

Außerdem danken wir allen Studenten, die uns Hinweise dazu gegeben haben, was in dem Buch auf jeden Fall enthalten sein soll und was wir unbedingt ausführlich erklären sollen. Ein besonderer Dank geht an dieser Stelle an die Studenten, die am Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 im Wintersemester 08/09 beim Autor Florian Modler teilgenommen haben und damit uns Autoren mit den gut gestellten Fragen viele Hinweise für die Konzeption einzelner Kapitel gegeben haben.

Jetzt bleiben noch zwei Personenkreise übrig, denen wir danken möchten. Zum einen unseren Freunden, Bekannten und Familien, die des Öfteren auf uns, besonders in der letzten heißen Phase des Schreibens, verzichten mussten, da wir doch eher am Buch schreiben wollten als irgendetwas anderes zu machen, und zum anderen geht ein sehr großer Dank an den Spektrum-Verlag, vor allem an unsere Lektoren Dr. Andreas Rüdinger und Anja Groth, die das Projekt während der gesamten Zeit und der Entstehungsphase begleitet und vorbildlich betreut haben. Jede E-Mail wurde sofort beantwortet und glaubt uns, das waren einige. Vielen Dank für die sehr schöne, fast familiäre Zusammenarbeit, die uns sehr viel Spaß gebracht hat.
Und nun genug der Danksagung, viel Spaß mit unserem Buch!

Hannover, Juli 2009 Florian Modler und Martin Kreh

Inhaltsverzeichnis

1 Logik und mathematische Grundbegriffe

Übersicht

In diesem ersten Kapitel beschäftigen wir uns kurz mit einigen Grundbegriffen aus der Logik und wichtigen Symbolen, die euch im Verlauf eures Studiums immer wieder begegnen werden.

1.1 Definitionen

Definition 1.1 (Aussage, Wahrheitsgehalt)
Unter einer **Aussage** verstehen wir einen Satz, dem man einen **Wahrheitsgehalt** zuweisen kann, das heißt, der entweder **wahr** oder **falsch** ist. Dementsprechend definieren wir den Wahrheitsgehalt als w (wahr) oder f (falsch).

Definition 1.2 (Negation)
Ist A eine Aussage, so bezeichnet $\neg A$ (gesprochen: nicht A) ihre **Negation**, das heißt, wenn A den Wahrheitsgehalt w hat, so hat $\neg A$ den Wahrheitsgehalt f und umgekehrt.

Definition 1.3 (Konjunktion, Disjunktion, Junktoren)

1. Sind A und B Aussagen, so bezeichnen wir als **Konjunktion** von A und B die Aussage $A \wedge B$ (gesprochen: A und B). $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn A und B wahr sind.

2. Sind A und B Aussagen, so bezeichnen wir als **Disjunktion** von A und B die Aussage $A \vee B$ (gesprochen: A oder B). $A \vee B$ ist wahr, wenn A, B oder beide Aussagen A und B wahr sind.

Wir nennen $\wedge$ das „logische Und“ und $\vee$ das „logische Oder“. Die Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ nennt man auch **Junktoren**.

Definition 1.4 (Quantoren)

1. Man schreibt $\exists$ für „Es gibt (mindestens) ein“. Dieser Quantor heißt **Existenzquantor**.

2. Man schreibt $\exists!$ für „Es gibt genau ein“.

3. Man schreibt $\forall$ für „Für alle“. Dieser Quantor heißt **Allquantor**.

Definition 1.5 (Implikation, Äquivalenz)
Sind A und B Aussagen, so schreiben wir $A \Rightarrow B$ für „aus A folgt B“ und nennen dies **Implikation**. $A \Rightarrow B$ ist dabei nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Gilt $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$, so schreiben wir auch $A \Leftrightarrow B$ und nennen dies **Äquivalenz**.

Definition 1.6 (weitere Notation)

1. Wir schreiben $x := y$ für „*x ist per Definition gleich y*“.

2. Wir schreiben „:“ für „*sodass gilt*“.

3. Wir schreiben „ o.B.d.A.“ für „ ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ beziehungsweise „ OE“ für „ ohne Einschränkung“.

4. Wir schreiben $a|b$ für a teilt b.

1.2 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 1.1 der Aussage und dem Wahrheitsgehalt: Diese Definition grenzt die Aussage von anderen (grammatikalischen) Sätzen ab. Sie ist nämlich der einzige Satz, dem man einen Wahrheitsgehalt zuordnen kann. Ein Beispiel für eine Aussage wäre: „*Es regnet*“, denn man kann eindeutig sagen, ob dies wahr oder falsch ist. Keine Aussage dagegen wäre: „*Regnet es?*“ (logisch, denn das ist ja eine Frage) oder auch: „*Spinat schmeckt nicht*“, denn das empfindet jeder anders, man kann also nicht allgemein sagen, ob das wahr oder falsch ist (obwohl Spinat nunmal wirklich nicht schmeckt... und wehe es behauptet schon wieder jemand was anderes). Auch „Stefan ist schlau“ wäre zum Beispiel keine Aussage.

Zur Definition 1.2 der Negation: Die Negation einer Aussage ist salopp gesagt einfach das Gegenteil, das heißt: Ist A die Aussage „*Es regnet*“, so ist $\neg A$ die Aussage „*Es regnet nicht*“. Kompliziertere Aussagen sind natürlich auch komplizierter zu verneinen. Ist zum Beispiel B die Aussage „*Alle Franzosen essen Baguette*“, so ist $\neg B$ die Aussage „*Es gibt mindestens einen Franzosen, der kein Baguette isst*“, und nicht etwa „*Kein Franzose isst Baguette*“. Negiert man eine Aussage zweimal, so erhält man natürlich wieder die ursprüngliche Aussage: $\neg\neg A = A$.

Zur Definition 1.3 der Konjunktion, Disjunktion und Junktoren: Diese sogenannten Junktoren sind dazu da, zwei (oder mehrere) Aussagen zu verknüpfen. Es gibt noch mehr als die hier betrachteten, aber wir wollen uns einmal auf diese beiden beschränken, da diese am häufigsten auftreten.
Ist zum Beispiel A die Aussage „*Es brennt*“ und B die Aussage „*Die Feuerwehr ist da*“, so ist $A \wedge B$ die Aussage „*Es brennt und die Feuerwehr ist da*“ und $A \vee B$ die Aussage „*Es brennt oder die Feuerwehr ist da*“. (Wir ziehen ersteres vor.)
Haben wir es mit komplizierteren Aussagen zu tun, zum Beispiel sei

C : „*Es gibt einen Matrosen, der Angst vor Wasser hat*“,

D : „*Es gibt einen Elefanten, der nicht betrunken ist*“ und

E : „*Bei der Feuerwehr arbeitet ein Elefant*“, so ist

$C \vee D$ „*Es gibt einen Matrosen, der Angst vor Wasser hat oder es gibt einen Elefanten, der nicht betrunken ist*“ und $A \wedge B \wedge E \wedge \neg D$ wäre die Aussage „*Es brennt, die Feuerwehr ist da, bei der Feuerwehr arbeitet ein Elefant und alle Elefanten sind betrunken*“.
Sieht schlecht aus. Naja, wenigstens hat kein Matrose Angst vor Wasser. Zu bemerken ist noch, dass es bei der Verknüpfung von Aussagen nicht auf die Reihenfolge ankommt, so könnten wir oben zum Beispiel auch $B \wedge \neg D \wedge E \wedge A$ schreiben.

Tab. 1.1: Schematische Darstellung einer Wahrheitstafel.

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$A \wedge B$	$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$
w	w	f	w	w	f
w	f	f	w	f	w
f	w	w	w	f	f
f	f	w	f	f	w

Am einfachsten lassen sich kompliziertere Sachverhalte in *Wahrheitstafeln*, wie sie in Tabelle 1.1 zu sehen ist, darstellen. Dabei sind die beiden linken Einträge die Voraussetzungen und die restlichen die Konsequenzen aus den Voraussetzungen.

Ist zum Beispiel A wahr und B falsch (2. Zeile in Tabelle 1.1), so ist $\neg B$ wahr und damit auch $(A \vee \neg B)$. Außerdem ist $\neg A$ falsch, aber dennoch (da $\neg B$ wahr ist) $(\neg A \vee \neg B)$ wahr, und damit auch $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$. Ausführliche Beispiele hierzu findet ihr auch noch im Kapitel 5 „Beweistechniken" in den Beispielen 24 und 25. Wichtig ist anzumerken, dass bei $A \vee B$ A oder B oder beide Aussagen wahr sind. Das „Oder" wird also in der Mathematik anders verwendet als im deutschen Sprachgebrauch, denn bei uns ist es kein ausschließendes „Oder".

Zur Definition 1.4 der Quantoren: Wie wir oben bereits gesehen haben, können Aussagen teilweise recht lang sein. Da Mathematiker aber von Grund auf faul sind, wollen sie sich ein wenig die Arbeit erleichtern. Aus diesem Grund führt man die Quantoren ein. Mit ihrer Hilfe können wir Aussagen kürzer aufschreiben, zum Beispiel schreiben wir statt „*Es gibt einen Affen, der Christian heißt*" einfach „$\exists$: *Affe, der Christian heißt*".
Achtung: „*Es gibt einen...*" heißt dabei nicht, dass es genau einen gibt, sondern dass es mindestens einen gibt. Wollen wir sagen, dass es genau einen gibt, also zum Beispiel „*Es gibt genau einen Planeten, der Jupiter heißt*", so benutzen wir dafür das Zeichen $\exists!$: „$\exists!$ *Planet, der Jupiter heißt*".
Wollen wir sagen, dass etwas nicht existiert, so benutzen wir $\nexists$: „$\nexists$*Bier auf Hawaii*". Genauso schreiben wir ab sofort statt „*Für alle männlichen Katzen gilt, dass sie Kater sind*" nur noch „$\forall$ *männlichen Katzen gilt, dass sie Kater sind*".
In solch einfachen Sätzen scheint der Einsatz der Quantoren noch recht sinnlos, deshalb betrachten wir einmal ein Beispiel, das etwas komplexer und mathematischer ist. Sei F die Aussage: „*Für alle x existiert ein y, sodass kein n existiert mit $x = ny$*"; oder einfacher: „$\forall\ x\ \exists\ y$*,sodass* $\nexists\ n$ *mit* $x = ny$".
Quantoren erleichtern uns außerdem das Leben, weil man mit ihnen leichter Negationen bilden kann, denn negiert man den Allquantor $\forall$, so erhält man den Existenzquantor $\exists$ und umgekehrt. Ein Beispiel hierzu: Wir betrachten die Aussage: „*Alle Menschen sind grün*", oder mit Quantoren: „$\forall$*Menschen gilt, sie sind grün*".
Negiert man die Aussage, so erhält man: „*Es existiert ein Mensch, der nicht grün ist*", also: „$\exists$ *Mensch, der nicht grün ist*".

Zur Definition 1.5 der Implikation und Äquivalenz: Wir haben bereits oben gesehen, dass wir mit Junktoren Aussagen verknüpfen können. Wir betrachten nun Aussagen, die zueinander in Beziehung stehen.

Beispiel 1

Ist zum Beispiel G die Aussage: „*Es ist dunkel*" und H die Aussage „*Das Licht ist aus*", so folgt aus der ersten Aussage die zweite, denn wenn es dunkel ist, so kann kein Licht an sein. Wir schreiben $G \Rightarrow H$.

Es gilt allerdings nicht $H \Rightarrow G$, denn es könnte ja die Sonne scheinen. Würde auch noch $H \Rightarrow G$ gelten, so könnten wir $G \Leftrightarrow H$ schreiben.
Es wird euch mit Sicherheit oft passieren, dass ihr im Verlauf eures Studiums eine Äquivalenz zwischen zwei Aussagen zeigen müsst. Der (meist) einfachste Weg dies zu tun, ist beide Implikationen getrennt nachzuweisen.
Betrachten wir noch einmal obige Aussagen und bilden ihre Negationen, so erhalten wir $\neg G$:„*Es ist hell*" und $\neg H$:„*Das Licht ist an*". Es gilt also $\neg H \Rightarrow \neg G$ genau dann, wenn $G \Rightarrow H$; oder in mathematischer Schreibweise:

$$(G \Rightarrow H) \Leftrightarrow (\neg H \Rightarrow \neg G).$$

■

Gilt $A \Rightarrow B$, so sagt man auch, dass die Aussage A *hinreichend* für die Aussage B ist, das heißt, A allein reicht aus, sodass auch B gilt.
Gilt umgekehrt $A \Leftarrow B$, so nennt man die Aussage A für B *notwendig*, denn wenn B gilt, so muss zwangsweise auch A gelten. Beispiele zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen finden wir beispielsweise auch in Kapitel 11, wenn wir Extrema berechnen.

Zur Definition 1.6 weiterer mathematischer Notation: In der Mathematik kommt es sehr häufig vor, dass wir Ausdrücken, Formeln oder ähnlichem einfach einen Namen geben. Dies geschieht durch „:=". Im Prinzip hat dieses dieselbe Bedeutung wie ein normales Gleichheitszeichen, denn es zeigt auch an, dass zwei Ausdrücke gleich sind, aber man benutzt „:=", wenn man einen der Ausdrücke durch den anderen definiert. Zum Beispiel haben wir die Aussage „*Es scheint die Sonne*" und wollen diese Aussage jetzt A nennen, so schreiben wir $A :=$ „*Es scheint die Sonne*". Oder wir wollen die Variable x definieren als das Doppelte von y, dann schreiben wir $x := 2y$.
Das Zeichen „:" ist wieder eine Abkürzung für die bequemen Mathematiker. Wir wollen dieses Zeichen einfach durch ein Beispiel erklären und vereinfachen unser mathematisches Beispiel aus der Erklärung zu Definition 1.4: „$\forall\ x\ \exists\ y : \nexists\ n : x = ny$". Schön kurz, oder? :-)
Die Abkürzungen o.B.d.A. oder OE benutzt man oft in Beweisen, wenn man einen bestimmten Fall annimmt, weil der andere Fall entweder sowieso ersichtlich ist oder analog zu beweisen ist. Diese Abkürzungen werden euch im Verlauf des Buches noch häufiger begegnen.
Auch das Zeichen $|$ wollen wir kurz an einem Beispiel erläutern. Es gilt zum Beispiel $2|6$ aber nicht $2|5$ (dafür schreibt man dann auch $2 \nmid 5$).

Beispiele Im Bereich der Logik kann man viele schöne Aufgaben stellen. Wir schauen uns nun eine davon an.

Beispiel 2

Stell dir Folgendes vor: Du strandest an einer Insel und wirst von Kannibalen gefangen genommen. Zunächst wirst du eingesperrt, und die Kannibalen beraten, was mit dir geschehen soll. Nach kurzer Zeit kommt einer zu dir und erklärt dir: „*Wir werden dich töten, aber du kannst indirekt bestimmen, wie wir dich töten. Du darfst eine Aussage treffen: Ist diese wahr, so wirst du gekocht. Ist die Aussage falsch, dann grillen wir dich.*“. Was musst du sagen, um freizukommen? Zunächst sollten wir bemerken, dass ganz klar eine Aussage gefordert ist. Dennoch müssen wir anscheinend eine Aussage treffen, die weder wahr noch falsch sein kann, denn andernfalls geht es uns schlecht. Wie trifft man aber eine Aussage, die weder wahr noch falsch ist? Dazu betrachten wir die von Kannibalen vorgeschlagenen Tötungsmethoden und sagen: „*Ich werde gegrillt*“. Angenommen, die Aussage ist wahr, dann müsstest du gekocht werden, die Aussage ist also falsch. Angenommen die Aussage ist falsch, dann müsstest du gegrillt werden, dann wäre sie aber wahr. Also bleibt den Kannibalen nichts anderes übrig, als dich freizulassen.
Dies ist ein nettes Beispiel für einen Satz, der zunächst wie eine Aussage aussieht, aber keine ist, da ihm kein Wahrheitsgehalt zugeordnet werden kann. ■

Beispiel 3

Das folgende Rätsel ist ein schönes Beispiel für eine Logelei und wurde angeblich von Albert Einstein erdacht. Angeblich behauptete er auch, dass 98% der Bevölkerung nicht in der Lage wären, dieses Rätsel zu lösen. Beweist ihm also das Gegenteil :-). Hier die Aufgabe:

1. Es gibt fünf Häuser in je einer anderen Farbe.
2. In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität.
3. Jeder Hausbewohner bevorzugt ein bestimmtes Getränk, raucht etwas Bestimmtes und hält ein bestimmtes Haustier.
4. Keine der fünf Personen trinkt das gleiche Getränk, raucht das Gleiche oder hält das gleiche Tier wie einer seiner Nachbarn.

Weiterhin ist bekannt:

1. Der Brite lebt im roten Haus.
2. Der Schwede hält einen Hund.
3. Der Däne trinkt gerne Tee.
4. Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
5. Der Besitzer des grünen Hauses trinkt Kaffee.
6. Die Person, die Zigaretten raucht, hält einen Vogel.

7. Der Mann, der im mittleren Haus wohnt, trinkt Milch.
8. Der Besitzer des gelben Hauses raucht Zigarillos.
9. Der Norweger wohnt im ersten Haus.
10. Der Wasserpfeife-Raucher wohnt neben dem, der eine Katze hält.
11. Der Mann, der ein Pferd hält, wohnt neben dem, der Zigarillos raucht.
12. Der Zigarren-Raucher trinkt gerne Bier.
13. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
14. Der Deutsche raucht Pfeife.
15. Der Wasserpfeife-Raucher hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.

Wem gehört der Fisch?
Als erstes wollen wir in der folgenden Tabelle aufschreiben, was wir alles wissen. Dabei stehen mehrere Dinge in einer Zeile, wenn sie zusammen gehören. Wenn Dinge nicht in einer Zeile stehen, können sie dennoch zusammen gehören, nur wissen wir das dann noch nicht. Beginnen wir:

Tab. 1.2: Zusammenstellung der gegebenen Informationen in einer Übersichtstabelle.

Nationalität	Haustier	Getränk	Raucherartikel	Farbe	Nummer
Schwede	Hund				
Däne		Tee			
Brite				rot	
		Kaffee		grün	
	Vogel		Zigarette		
			Zigarillos	gelb	
Norweger					1
		Bier	Zigarre		
Deutscher			Pfeife		
		Milch			3
				blau	2

Wobei wir die letzte Zeile aus der Tatsache erhalten, dass der Norweger in Haus 1 wohnt und das einzige Haus neben Haus 1 die Nummer 2 ist. Außerdem wissen wir noch, dass das grüne Haus links neben dem weißen steht, und folgende Paare jeweils benachbart sind:

- Wasserpfeife - Katze
- Pferd - Zigarillos

- Wasserpfeife - Wasser

Durch Ausschlussverfahren erkennt man nun, dass der Norweger entweder im grünen oder im gelben Haus wohnt. Angenommen er wohnt im grünen Haus, dann folgt (da das grüne Haus links neben dem weißen steht), dass das Haus mit der Nummer 2 weiß ist. Dies ist aber schon blau, also kann unsere Annahme nicht stimmen. Deshalb wohnt der Norweger im gelben Haus und raucht damit Zigarillos. Ebenso wissen wir deswegen, dass der Besitzer von Haus 2 ein Pferd hat. Unsere neue Tabelle sieht nun so aus:

Tab. 1.3: Ergebnisse der ersten Logikkombinationen.

Nationalität	Haustier	Getränk	Raucherartikel	Farbe	Nummer
Schwede	Hund				
Däne		Tee			
Brite				rot	
		Kaffee		grün	
	Vogel		Zigarette		
Norweger			Zigarillos	gelb	1
		Bier	Zigarre		
Deutscher			Pfeife		
		Milch			3
	Pferd			blau	2

Wiederum durch Ausschlussverfahren ergibt sich, dass nur Folgendes möglich ist:

- Das blaue Haus mit der Nummer 2 mit dem Pferd gehört dem Deutschen oder dem Dänen.
- Der Kaffetrinker im grünen Haus ist Schwede oder Deutscher.
- Der zigaretten-rauchende Vogelbesitzer ist Däne oder Brite.
- Der biertrinkende Zigarren-Raucher ist Schwede oder Brite.
- Der Milchtrinker aus Haus 3 ist Schwede, Brite oder Deutscher.

Im Folgenden konstruieren wir nun Widersprüche durch Ausschlusskriterien. Angenommen, der Deutsche wohnt in Haus 2. Dann muss der Deutsche der Wassertrinker sein, und im Haus 3 wohnt der Wasserpfeifen-Raucher. Dann gilt also, dass in Haus 3 entweder der Schwede oder der Brite wohnt. Angenommen dort wohnt der Schwede. Dann muss dieses Haus weiß sein. Dann wäre aber Haus Nummer 2 grün, was ein Widerspruch ist. Angenommen, der Brite wohnt in Haus 3. Dann trinkt der Schwede Bier und raucht Zigarre. Dann kann aber keiner der Kaffetrinker im grünen Haus sein. Also war unsere Annahme falsch, und der Däne wohnt in Haus 2. Dann ist der Brite damit Zigaretten-Raucher und hat einen Vogel (nein, nicht das, was ihr jetzt denkt!), der Schwede trinkt Bier und raucht Zigarre, der Deutsche wohnt im grünen Haus und trinkt Kaffee, und der Brite ist der Milchtrinker aus Haus 3. Damit können wir unsere Tabelle nun schon gut füllen:

Tab. 1.4: Ergebnisse der zweiten Logikkombinationen.

Nationalität	Haustier	Getränk	Raucherartikel	Farbe	Nummer
Schwede	Hund	Bier	Zigarre		
Däne	Pferd	Tee		blau	2
Brite	Vogel	Milch	Zigarette	rot	3
Norweger			Zigarillo	gelb	1
Deutscher		Kaffee	Pfeife	grün	

Der Schwede muss also im weißen Haus wohnen, das überdies die Nummer 5 hat. Also wohnt der Deutsche im Haus 4. Der Wasserpfeifen-Raucher wohnt in Haus 2, und der Norweger trinkt Wasser und hat eine Katze. Und damit ist das Rätsel gelöst: Der Fisch gehört dem Deutschen. Hier noch die endgültige Tabelle:

Tab. 1.5: Endergebnisse der Logikkombinationen.

Nationalität	Haustier	Getränk	Raucherartikel	Farbe	Nummer
Schwede	Hund	Bier	Zigarre	weiß	5
Däne	Pferd	Tee	Wasserpfeife	blau	2
Brite	Vogel	Milch	Zigarette	rot	3
Norweger	Katze	Wasser	Zigarillo	gelb	1
Deutscher	**Fisch**	Kaffee	Pfeife	grün	4

■

2 Mengen

Übersicht

In diesem Kapitel führen wir Mengen ein und betrachten in diesem Zusammenhang einige Eigenschaften und vor allem viele Beispiele. Auch wichtige Begriffe, die man kennen sollte, kommen nicht zur kurz.

2.1 Definitionen

Definition 2.1 (Menge)
Unter einer **Menge** verstehen wir die Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Besitzt eine Menge keine Elemente, so nennen wir sie die **leere Menge** und schreiben $\{\}$ oder $\emptyset$.
Ist x Element der Menge A, so schreiben wir $x \in A$, falls x nicht Element von A ist, so schreiben wir $x \notin A$.

Definition 2.2 (Teilmenge)
A heißt **Teilmenge** von B, geschrieben

$$A \subset B$$

genau dann, wenn aus $x \in A$ auch $x \in B$ folgt. Mathematisch schreiben wir kürzer $x \in A \Rightarrow x \in B$. Entsprechend ist $A \not\subset B$ definiert.

Definition 2.3 (Durchschnitt zweier Mengen und disjunkt)
Der **Durchschnitt** zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}\,.$$

Zwei Mengen A und B heißen **disjunkt**, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Definition 2.4 (Vereinigung zweier Mengen)
Die **Vereinigung** zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Unter der **disjunkten Vereinigung** einer Menge A verstehen wir ein System $(A_i)_{i \in I}$ von Teilmengen $A_i \subset A$ mit den Eigenschaften:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$, falls $i \neq j$, das heißt, die A_i sind also paarweise disjunkt.
- $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, das heißt, A ist die Vereinigung aller Mengen A_i.

Wir schreiben dann $A = \dot{\bigcup}_{i \in I} A_i$.

Anmerkung: Hierbei ist I eine beliebige Menge, die man als Indexmenge bezeichnet. Wer sich darunter nichts vorstellen kann, dem sei ans Herz gelegt, sich erst einmal $I = \mathbb{N}$ zu merken. Aber es sollte klar sein, dass dies nicht zwingend immer so ist.

Definition 2.5 (Differenz zweier Mengen)
Die **Differenz** zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Definition 2.6 (Symmetrische Differenz zweier Mengen)
Die **symmetrische Differenz** zweier Mengen A und B ist definiert als

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Definition 2.7 (Potenzmenge)
Die Menge $\mathfrak{P}(M) := \{A : A \subset M\}$ einer Menge M nennt man die **Potenzmenge**, und sie ist die Menge aller Teilmengen von M.

Definition 2.8 (Kartesisches Produkt)
Das **kartesische Produkt** der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ ist definiert als

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Sind $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$, so schreiben wir $A^n := \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n-\text{mal}}$.

Definition 2.9 (Obere und untere Schranke)
Sei K ein angeordneter Körper, also zum Beispiel $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$. (Näheres in Kapitel 6 und 7) Eine nichtleere Teilmenge $A \subset K$ heißt nach **oben beschränkt**, wenn

es ein Element $M \in K$ gibt mit $x \leq M$ für alle $x \in A$. Ein solches Element M heißt **obere Schranke**.
Eine nichtleere Teilmenge $A \subset K$ heißt nach **unten beschränkt**, wenn es ein Element $m \in K$ gibt mit $x \geq m$ für alle $x \in A$. Ein solches Element m heißt **untere Schranke**.
Eine nichtleere Teilmenge $A \subset K$ heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Definition 2.10 (Supremum und Infimum)
Eine Zahl $M \in K$ bzw. $m \in K$ heißt **kleinste obere** bzw. **größte untere Schranke** einer nichtleeren Teilmenge $A \subset K$, wenn sie

1. eine obere bzw. eine untere Schranke ist und
2. es keine kleinere bzw. größere Schranke von A gibt.

Die kleinste obere Schranke einer Teilmenge $A \subset K$ nennen wir das **Supremum** von A, geschrieben $\sup A$. Die größte untere Schranke einer Teilmenge $A \subset K$ nennen wir das **Infimum** von A, geschrieben $\inf A$.
Ist die Menge A nicht beschränkt, so setzen wir $\sup A = \infty$ und $\inf A = -\infty$.

Definition 2.11 (Maximum und Minimum)
Sei $A \subset K$ nichtleer.

a) M heißt **Maximum** von A; wir schreiben $\max A = M$, wenn $M = \sup A$ und $M \in A$.
b) m heißt **Minimum** von A; wir schreiben $\min A = m$, wenn $m = \inf A$ und $m \in A$.

Wir sagen das Supremum und Infimum werden angenommen.

Definition 2.12 (Intervalle)
Für reelle Zahlen (siehe auch Kapitel 7) $a < b$ definieren wir die Intervalle

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Das Intervall $[a, b]$ heißt **abgeschlossen**, das Intervall (a, b) **offen** und die Intervalle $[a, b)$, $(a, b]$ **halboffen**. Weiterhin definieren wir für ein Intervall I, das eine der obigen Formen hat, $|I| := b - a$.

Definition 2.13 (Mächtigkeit)
Sei A eine Menge. Hat A endlich viele Elemente, so bezeichnen wir mit $|A|$ die Anzahl der Elemente von A. Sonst setzen wir $|A| = \infty$.

2.2 Sätze und Beweise

Satz 2.1 (Mächtigkeit der Potenzmenge)
Eine endliche Menge M mit n Elementen besitzt genau 2^n Teilmengen.

Beweis:

1. Variante: Für die erste Variante braucht ihr Kenntnisse aus Kapitel 3 über Abbildungen. Vor allem der Begriff der Bijektion (siehe Definition 3.3) sollte euch bekannt sein, um den Beweis zu verstehen.

   Sei $A := \{1, 2, \ldots, n\}$ eine Menge mit n Elementen. Dieser ordnen wir eindeutig das n-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ zu mit der Eigenschaft

$$a_i = 1 \Leftrightarrow i \in A$$
$$a_i = 0 \Leftrightarrow i \notin A$$

   Dies ist eine eineindeutige Darstellung und folglich eine Bijektion. Da es in jedem der n Schritte 2 Möglichkeiten gibt, gibt es davon genau 2^n solcher n-Tupel.

2. Variante: Für die zweite Variante des Beweises sind Mittel aus Kapitel 5 über die Beweistechniken nötig. Der Begriff der vollständigen Induktion (siehe Definition 5.3) muss bekannt sein.

   Induktionsanfang: Betrachten wir zunächst den Fall $n = 0$. Die Potenzmenge der leeren Menge enthält ein Element, nämlich die leere Menge selbst, also stimmt, dass die Mächtigkeit (Anzahl der Elemente der Menge) der Potenzmenge gerade $2^0 = 1$ ist.

   Induktionsschritt: Nun gehen wir von n auf $n+1$. Es habe $P(\{1, 2, \ldots, n\})$ 2^n Elemente. Wir betrachten jetzt $P(\{1, 2, \ldots, n, n+1\})$. Wir führen eine Fallunterscheidung durch. Sei U eine Teilmenge von $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Dann ist entweder $n+1 \in U$ oder $n+1 \notin U$.

   1. Fall $n+1 \notin U$: Wie viele solcher Teilmengen U gibt es überhaupt? Da sind alle Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, also nach Induktionsvoraussetzung gerade 2^n.
   2. Fall $n+1 \in U$: Übung: Überlegt euch, wie viele solcher Teilmengen U es gibt. Es sind natürlich auch wieder 2^n.

q.e.d.

Satz 2.2
Seien A_1 eine endliche Menge mit n_1 Elementen und A_2 eine endliche Menge mit n_2 Elementen gegeben. Dann besitzt das kartesische Produkt genau $n_1 \cdot n_2$ Elemente.

Beweis: Folgt so wie in Kapitel 5, Beispiel 45. Es ist eine einfach Überlegung, die wir euch als Übung überlassen. Und nun los, probiert euch dran! q.e.d.

2.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 2.1 einer Menge: Natürlich ist diese Definition sehr schwammig und nicht im mathematischen Sinne, denn was verstehen wir unter „unserer Anschauung" oder unter dem „Ganzen". Dennoch können wir uns unter dieser Definition etwas vorstellen, und dabei wollen wir es auch belassen.
Die Objekte, die zu einer Menge gehören, heißen *Elemente*. So können wir ganz verschiedene Objekte zu einer Menge zusammenfassen, zum Beispiel Zahlen, aber auch Buchstaben, Wörter oder Mengen selbst. Eine Menge wird mit einem großen Buchstaben bezeichnet. Die Objekte selbst gehören in geschweifte Klammern. So sind beispielsweise $A := \{a, b, c\}$, $B := \{1, 2, 3\}$ oder $C := \{\text{Hund, Katze, Maus}\}$ drei Mengen. Es ist dabei egal, in welcher Reihenfolge wir die Elemente in die Menge schreiben. Die Menge B könnten wir daher auch als $B = \{3, 2, 1\}$ schreiben. Die Reihenfolge spielt hier also keine Rolle. Anders beim kartesischen Produkt, wie wir in der Erklärung zur Definition 2.8 sehen werden.
Die Elemente einer Menge dagegen werden meist mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Ist ein Element x in einer Menge A enthalten, so schreiben wir $x \in A$, oder auch $A \ni x$. Wenn es nicht enthalten ist, dann $x \notin A$.
Es gibt nun im Wesentlichen zwei Möglichkeiten, Mengen aufzuschreiben. Entweder zählt man die einzelnen Elemente auf. Das bietet sich vor allem bei endlichen Mengen an, das heißt bei Mengen, die nur eine endliche Anzahl von Elementen besitzen (zum Beispiel $M := \{1, 2, 3\}$), oder man setzt bei nicht endlichen Mengen Pünktchen. Dazu muss aber klar sein, wie die weiteren Elemente der Menge heißen. So wäre zum Beispiel $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen oder $M_1 := \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ die Menge der Quadratzahlen. Aber so etwas wie $M_2 := \{8283, 72, 829, \ldots\}$ wäre nicht okay, denn keiner weiß, wie es weitergehen soll, oder?
Eine zweite Möglichkeit, Mengen zu notieren, ist $M = \{x : E(x)\}$ zu schreiben, wobei dies das Folgende bedeutet: M ist die Menge aller x, welche die Eigenschaft $E(x)$ besitzt.

Beispiel 4

- $M_3 := \{3, 4, 5, 6\} = \{x : x \text{ ist eine natürliche Zahl, die größer als 2 und kleiner als 7 ist }\} = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x < 7\}$
- $M_4 := \{x \in \mathbb{N} : x < 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $M_5 := \{n^3 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 8, 27, \ldots\}$ ■

Zur Definition 2.2 der Teilmenge: Dies ist anschaulich klar und bedarf nicht vieler Worte:

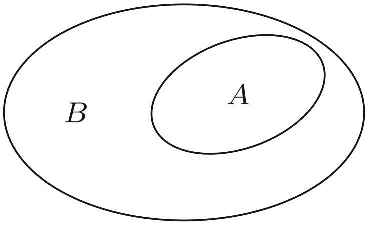

Abb. 2.1: Teilmenge A einer Menge B.

Zwei Anmerkungen seien uns noch gegönnt: Wenn ihr die Gleichheit zweier Mengen A und B zeigen wollt, dann zeigt man zunächst, dass $A \subset B$ und dann $B \subset A$. Siehe hierzu zum Beispiel den Beweis zu Satz 3.4.
Außerdem ist bei $A \subset B$ die Gleichheit $A = B$ der beiden Mengen durchaus erlaubt. Einige Autoren anderer Lehrbücher verwenden daher auch das Symbol „$\subseteq$“ und verwenden $\subset$, wenn die Gleichheit explizit ausgeschlossen ist, also eine sogenannte *echte Teilmenge* gemeint ist.

Zur Definition 2.3 des Durchschnitts zweier Mengen: Soll ein Element im Durchschnitt zweier Mengen liegen, so muss es sowohl in der einen als auch in der anderen Menge enthalten sein.

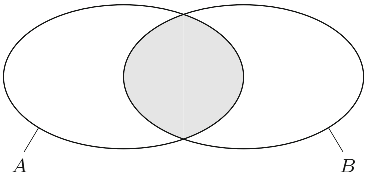

Abb. 2.2: Der Durchschnitt $A \cap B$ zweier Mengen.

Haben zwei Mengen kein Element gemeinsam, so nennt man sie disjunkt. Grafisch sieht das so aus:

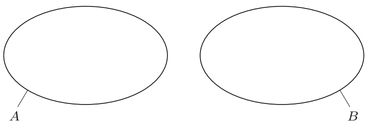

Abb. 2.3: Disjunkte Mengen.

Zur Definition 2.4 der Vereinigung zweier Mengen: Das „Oder“ in der Definition ist nicht so wie das gewöhnliche „Oder“ im deutschen Sprachgebrauch zu verstehen. Denn x kann entweder in A liegen, oder in B oder in beiden Mengen. Zeichnet man ein sogenanntes *Venn-Diagramm* (auch die Abbildungen 2.2 und 2.3 zeigten schon Venn-Diagramme), so wird der Sachverhalt deutlicher:

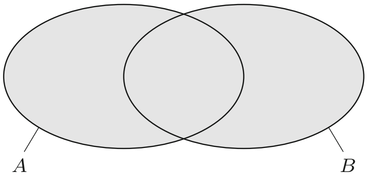

Abb. 2.4: Die Vereinigung $A \cup B$ zweier Mengen.

Zur Definition 2.5 der Differenz zweier Mengen: Die Definition kann man sich so veranschaulichen:

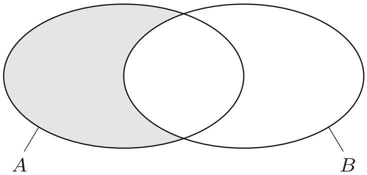

Abb. 2.5: Die Differenz $A \setminus B$ zweier Mengen.

Frage an unsere Leser: Wie sieht das Venn-Diagramm zur Differenz $B \setminus A$ aus?

Zur Definition 2.6 der symmetrischen Differenz zweier Mengen: Die Definition 2.6 der symmetrischen Differenz ist äquivalent zu $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Wie wir so etwas beweisen, werden wir in Kapitel 5 lernen.
Man vereinigt also die beiden Mengen und nimmt den Schnitt beider Mengen heraus. Das Element x liegt also entweder in A oder in B, aber nicht in beiden Mengen.

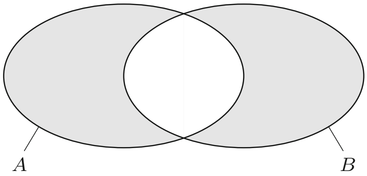

Abb. 2.6: Die symmetrische Differenz $A \triangle B$ zweier Mengen.

Betrachten wir noch ein Beispiel, um die Mengenoperationen einzuüben.

Beispiel 5

Gegeben seien die Mengen $A := \{2, 5, 6, 8\}$ und $B := \{7, 5, 6\}$. Zur Übung wollen wir Vereinigung, Durchschnitt, Differenz und die symmetrische Differenz dieser beiden Mengen bestimmen und ein Beispiel für den Begriff der Teilmenge anführen.

- *Vereinigung:* Wir wollen $A \cup B$ ermitteln. Das sind all die Elemente, die in A, in B oder in beiden Mengen liegen. Wir schreiben also die jeweiligen Elemente der Mengen in eine gemeinsame Menge (und doppelt auftretende Elemente nur einmal) hin und haben so die Vereinigung der beiden gebildet. Es gilt demnach $A \cup B = \{2, 5, 6, 7, 8\}$.
- *Durchschnitt:* Im Durchschnitt der beiden Mengen sind all die Elemente aufzuzählen, die in A *und* in B vorkommen. Wir suchen die Mengen also nach gemeinsamen Elementen ab. Es ist $A \cap B = \{5, 6\}$.
- *Differenz:* Bestimmen wir zunächst $A \setminus B$. Hier sind all die Elemente von A anzugeben, die nur in A, aber nicht in B vorkommen. Es ist dann $A \setminus B = \{2, 8\}$. Was wäre nun $B \setminus A$?
- *Symmetrische Differenz:* Die symmetrische Differenz ist noch etwas stärker als die „normale" Differenz. Wir müssen dort alle Elemente zu einer neuen Menge zusammenfassen, die nicht im Schnitt der beiden Mengen liegen. Entsprechend ist also $A \triangle B = \{2, 7, 8\}$.
- Noch ein Beispiel zur Teilmenge. Beispielsweise ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$ (zur genauen Definition siehe Kapitel 4, Definition 4.1) oder $\{2, 3, 5\} \subset \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$. Aber es ist $\{2, 3\} \not\subset \{7, 2\}$. ■

Zur Definition 2.7 der Potenzmenge einer Menge:

Beispiel 6

Wir betrachten die Menge $M := \{1, 2\}$. Die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ ist dann gegeben durch $\mathfrak{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Die leere Menge führt man auf, da diese stets Teilmenge jeder beliebigen Menge ist.
Wir sehen hier: Mengen selbst können Elemente von Mengen sein.
Wie sieht die Potenzmenge der Menge $N := \{\{1\}, 2, 3\}$ aus? Es gilt:

$$\mathfrak{P}(N) = \{\emptyset, \{\{1\}\}, \{2\}, \{3\}, \{\{1\}, 2\}, \{\{1\}, 3\}, \{2, 3\}, \{\{1\}, 2, 3\}\}\,.$$ ■

Wie bestimmt man also die Potenzmenge einer Menge? Indem man einfach alle Teilmengen der Menge selbst zusammenfasst. Dabei sollte man natürlich systematisch vorgehen, um keine Teilmenge zu vergessen. Also erst die Teilmengen mit gar keinem Element aufführen (die leere Menge), dann die Teilmengen mit genau einem Element, danach die mit genau zwei Elementen usw.

Zur Definition 2.8 des kartesischen Produkts: Während es bei Mengen nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, kommt es beim kartesischen Produkt auf die Reihenfolge ganz erheblich an. Man spricht auch von *geordneten Paaren.* Es gilt $(a', b') = (a, b)$ genau dann, wenn $a' = a$ und $b' = b$. Klingt erstmal kompliziert, daher schauen wir uns am besten ein Beispiel an.

Beispiel 7
Gegeben seien die beiden Mengen $A_1 := \{1, 3\}$ und $A_2 := \{1, 2, 3\}$. Von diesen beiden Mengen wollen wir das kartesische Produkt bilden. Dabei halten wir uns, wie soll es auch anders sein, an die Definition 2.8 des kartesischen Produkts und erhalten:

$$A_1 \times A_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}.$$

Es kommt also auf die Reihenfolge an! Um das zu sehen berechnen wir:

$$A_2 \times A_1 = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}.$$

Demnach ist also $A_1 \times A_2 \neq A_2 \times A_1$. Das Beispiel zeigt auch, dass der Satz 2.2 durchaus Sinn macht, denn es gilt gerade $|A_1 \times A_2| = 2 \cdot 3 = 6$. Ein weiteres Beispiel eines kartesisches Produkts ist das kartesische Koordinatensystem. Wir wollen dies noch etwas näher erläutern: Das kartesische Koordinatensystem ist $(\{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\})$. Die gesamte Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist ein Beispiel für ein kartesisches Produkt. ■

Zur Definition 2.9 der oberen und unteren Schranke: Die Definition 2.9 klingt vielleicht zunächst einmal etwas kompliziert, und man weiß gar nicht so genau, was überhaupt gemeint ist. Am besten verdeutlicht man sich diese Definition ebenfalls an einem Beispiel.

Beispiel 8
Wir betrachten die Teilmenge

$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \subset \mathbb{Q}.$$

Diese Menge enthält also alle rationalen Zahlen, deren Quadrat kleiner oder gleich 2 ist. Beispielsweise liegt 1 in dieser Menge, denn 1 ist rational und $1^2 = 1 \leq 2$. Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob diese Menge A nach oben beschränkt ist. In der Definition 2.9 einer oberen Schranke steht, dass man eine Menge A nach oben beschränkt nennt, wenn eine Zahl $M \in K = \mathbb{Q}$ existiert mit $x \leq M$ für alle $x \in A$. Wir müssen also solch eine Zahl M angeben. $M = 2$ beispielsweise erfüllt diese Bedingung, denn es gilt $x^2 \leq 2 < 4$ für alle $x \in A$ und somit ist also $x < 2$. Eine untere Schranke wäre zum Beispiel -2.

Aber $\sqrt{2}$ wäre keine obere Schranke. Sicherlich ist die Menge auch nach oben durch $\sqrt{2}$ beschränkt, aber wir müssen die Definition ganz genau lesen! Dort steht, dass die Schranke M ein Element von K sein soll. In unserem Beispiel ist $K = \mathbb{Q}$, und man lernt schon am Anfang seines Studiums, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Wir werden dies im Kapitel 5 über die Beweistechniken sogar selbst zeigen, siehe dazu Beispiel 29. ■

Zur Definition 2.10 des Supremums und Infimums: Nach Beispiel 8 sind wir also schon so weit, dass wir die Definition 2.9 der oberen und unteren Schranke verstanden haben. Wunderbar! Aber der Mathematiker ist natürlich an „besonderen“ oberen und unteren Schranken interessiert. Denn natürlich wäre in Beispiel 8 auch 1000 eine obere Schranke. Es gibt unendlich viele! Nach oben ist uns keine Grenze gesetzt, genauso wenig nach unten. Daher die Definition 2.10 des sogenannten Supremums und Infimums.
Diese klingt doch interessant, oder? Ist sie auch! Wenn ihr also *die* kleinste obere Schranke bzw. *die* größte untere Schranke angeben wollt, dann müsst ihr zwei Dinge überprüfen:

1.) Überprüft, ob eure gefundene Zahl wirklich eine obere (untere) Schranke ist.

2.) Zeigt, dass es keine kleinere bzw. größere Schranke als die von euch gefundene gibt.

Das Supremum und das Infimum müssen aber nicht immer zur Menge selbst gehören, wie das folgende Beispiel zeigt.
Anzumerken bleibt, dass eine Menge kein Supremum (und auch kein Infimum) besitzen braucht. Dies haben wir in Beispiel 8 gesehen.

Beispiel 9
Betrachten wir beispielsweise die Menge

$$B := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}.$$

Es sind alle Elemente aus $\mathbb{R}$, die zwischen 0 und 1 liegen. Man sieht sofort, dass diese Menge nach unten durch Null beschränkt ist. Es ist sogar die größte untere Schranke, also das Infimum. Das müsste man natürlich noch genauer zeigen, was wir an dieser Stelle aber nicht tun wollen. Die Null gehört nicht zur Menge, andernfalls müsste dort in der Menge $0 \leq x \leq 1$ stehen. Merken kann man sich also, dass das Infimum und das Supremum nicht zur Menge gehören müssen. Wenn sie zur Menge gehören, dann haben sie einen besonderen Namen, wie wir jetzt sehen werden. ■

Zur Definition 2.11 des Maximums und Minimums: Kommen wir nun zur Frage, was Definition 2.11 des Maximums und Minimums auf deutsch heißt. M heißt also Maximum einer Menge, wenn es das Supremum ist, aber gleichzeitig noch zur Menge gehört. Analog für das Minimum. In unserem letzten Beispiel 9 ist die Null also nur Infimum, aber kein Minimum, da sie nicht zur Menge gehört. Aber 1 ist von der Menge B sowohl das Supremum als auch das Maximum, denn es gehört zur Menge B. Wenn eine Menge kein Supremum oder Infimum besitzt, dann kann sie nach Definition 2.11 auch kein Maximum oder Minimum besitzen. Klar!
Da diese obigen Begriffe so wichtig sind, wollen wir uns nun an einem ganz konkreten Beispiel ausführlich anschauen, wie man bei einer gegebenen Menge das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum findet. Denn wir können euch garantieren, dass sowas irgendwann einmal eine Übungsaufgabe auf euren Übungszetteln sein wird. Oder vielleicht müsst ihr solch eine Aufgabe gerade bearbeiten, während ihr diese Zeilen lest? ;-)

Beispiel 10
Betrachten wir die Menge

$$C := \left\{ \frac{\sqrt{x+y}}{xy} : x, y \in \mathbb{R},\ x, y \geq 1 \right\} \subset \mathbb{R}.$$

Wow, sieht das kompliziert aus! Also genau das richtige Beispiel für uns, um die Begriffe einzuüben. Legen wir also los und bestimmen Supremum, Infimum und ggf. Minimum und Maximum, wenn diese denn existieren.

- *Bestimmung des Supremums:* Wie geht man an so eine Aufgabe heran? Zunächst könnte man ein paar Werte einsetzen. Setzen wir doch einfach mal die kleinstmöglichen x- bzw. y-Werte ein, also $x = y = 1$. Wir erhalten $\frac{\sqrt{1+1}}{1\cdot 1} = \sqrt{2}$. Sei als nächstes $x = y = 2$. Es ergibt sich $\frac{\sqrt{2+2}}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$. Die Werte werden anscheinend bei größeren Werten für x und y immer kleiner. Wir vermuten also, dass $\sqrt{2}$ eine obere Schranke sein könnte. Dies müssen wir nun aber natürlich mathematisch korrekt und sauber zeigen.

  Es gilt

  $$\frac{\sqrt{x+y}}{xy} = \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2y^2}} = \sqrt{\frac{x}{x^2y^2} + \frac{y}{x^2y^2}} = \sqrt{\frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y}} \leq \sqrt{2}.$$

  Im letzten Schritt ging ein, dass $x, y \geq 1$, und dass jeder Summand unter der Wurzel höchstens 1 ist. Die Summe unter der Wurzel ist damit also höchstens 2. Aus der Monotonie der Wurzelfunktion folgt demnach, dass der Gesamtausdruck höchstens $\sqrt{2}$ ist. Demnach ist $\sqrt{2}$ wirklich eine obere Schranke. Wir müssen jetzt aber noch zeigen, dass es keine kleinere obere Schranke gibt, dass also $\sqrt{2}$ wirklich die kleinste obere Schranke, also das Supremum ist. Wie macht man denn sowas?

Hierzu nehmen wir an, dass es eine kleinere obere Schranke gäbe. Sei dazu $d > 0$ (die Differenz zwischen $\sqrt{2}$ und eines eventuell anderen Supremums) und $\sqrt{2} - d$ unsere kleinere obere Schranke; wir ziehen ja von $\sqrt{2}$ noch etwas Positives ab. Es gelte dann also:

$$\sqrt{2} - d \geq \frac{\sqrt{x+y}}{xy}. \tag{2.1}$$

Dies müssen wir nun irgendwie zum Widerspruch führen. Da (2.1) für alle $x, y \geq 1$ gelten muss, reicht es, ein Gegenbeispiel anzugeben, in dem die Ungleichung (2.1) nicht stimmt. Wir wählen also einfach $x = y = 1$. Dann ergibt sich:

$$\sqrt{2} - d \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow -d \geq 0 \Leftrightarrow d \leq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme $d > 0$. Wir haben also gezeigt, dass es keine kleinere obere Schranke als $\sqrt{2}$ geben kann. Demnach ist $\sup C = \sqrt{2}$.

- *Bestimmung des Maximums:* Die Frage ist: Wird das Supremum sogar angenommen, das heißt, liegt es in der Menge C?

  Ja, das tut es. Das haben wir oben schon gesehen, denn für $x = y = 1$ ergibt sich gerade $\sqrt{2}$. Also ist $\sup C = \max C = \sqrt{2}$.

  Anmerkung: Da wir am Anfang schon gesehen haben, dass $\sqrt{2}$ angenommen ist und es eine obere Schranke ist, ist es automatisch Supremum und Maximum. Da dies aber im Allgemeinen nicht bekannt ist, haben wir hier einen anderen Weg gewählt.

- *Bestimmung des Infimums:* Durch weiteres Einsetzen von Werten für x und y kommt man zum Schluss, dass 0 eine untere Schranke der Menge C sein könnte. Es gilt natürlich:

$$\frac{\sqrt{x+y}}{xy} \geq 0,$$

  denn nach Voraussetzung sind $x, y \geq 1$. Wir zeigen nun analog, wie beim Supremum auch, dass es keine größere untere Schranke als 0 geben kann. Oder mit anderen Worten, dass 0 das Infimum der Menge C ist. Sei dazu $0 < d < 1$. Wir müssen $0 + d < \frac{\sqrt{x+y}}{xy}$ zum Widerspruch führen. Dazu sei $x = y = \frac{2}{d^2} > 1$. Woher kommt jetzt aber urplötzlich dieses $\frac{2}{d^2}$? Dieses erhält man erst, wenn man zuvor eine „Schmierblatt-Rechnung“ durchgeführt hat und bedenkt, dass wir ja einen Widerspruch konstruieren wollen. Probiert dies einmal! Einsetzen von x und y liefert nun:

$$d < \frac{\sqrt{\frac{2}{d^2} + \frac{2}{d^2}}}{\frac{2}{d^2} \cdot \frac{2}{d^2}} = \frac{\sqrt{\frac{4}{d^2}}}{\frac{4}{d^4}} = \frac{\frac{2}{d}}{\frac{4}{d^4}} = \frac{2}{d} \cdot \frac{d^4}{4} = \frac{d^3}{2}$$

Da wir nun $0 < d < 1$ vorausgesetzt hatten, ergibt sich:

$$d < \frac{d^3}{2} < d^3 < d.$$

Also insgesamt ein Widerspruch. Wunderbar! Demnach ist 0 tatsächlich das Infimum. Wir dürfen $\inf C = 0$ schreiben.

- *Bestimmung des Minimums:* Die Frage ist nun, ob das Infimum auch angenommen wird. Dann wäre es sogar das Minimum der Menge. Angenommen, 0 würde angenommen werden, dann müsste

$$0 = \frac{\sqrt{x+y}}{xy}$$

gelten. Dies führt aber zu $\sqrt{x+y} = 0 \Leftrightarrow x = -y$, was nicht erfüllbar ist unter unserer Voraussetzung $x, y \geq 1$. Also besitzt die Menge C kein Minimum. ■

3 Abbildungen und Relationen

Übersicht

Wir werden nun die wichtigen Begriffe einer Abbildung und Funktion einführen, uns mit deren Eigenschaften beschäftigen und die sogenannten Äquivalenzrelationen betrachten. Die für einige Studienanfänger schwierigen Begriffe der Injektivität, Surjektivität und Bijektivität werden ebenfalls nicht fehlen.

3.1 Definitionen

Definition 3.1 (Abbildung)
Sind A und B Mengen, so ist eine **Abbildung** (oder auch **Funktion** genannt) f von A nach B eine Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ zuordnet. Wir schreiben für eine Abbildung f von A nach B auch $f : A \to B, a \mapsto f(a)$.

Definition 3.2 (Bild, Urbild)

1. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so bezeichnen wir mit $\operatorname{im}(f) := \{b \in B : \exists\, a \in A : f(a) = b\}$ das **Bild** von f.
2. Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, $b \in B$, so bezeichnen wir mit $f^{-1}(b) := \{a \in A : f(a) = b\}$ das **Urbild** von b unter der Funktion f.

Definition 3.3 (Injektivität, Surjektivität und Bijektivität)
Sei $f : A \to B$ eine Abbildung.

1. f heißt **injektiv**, falls gilt: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$.
2. f heißt **surjektiv**, falls gilt: $\forall\, b \in B\ \exists\, a \in A : f(a) = b$.
3. f heißt **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Anmerkung: Bei der Injektivität kann man alternativ auch die Negation zeigen, das heißt: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$.

Definition 3.4 (besondere Abbildungen)

1. Die Abbildung $\mathrm{Id}_A : A \to A, a \mapsto a$ (oder einfach Id, falls klar ist, welche Menge A man betrachtet) heißt die **Identität** auf A.

2. Sind $f : A \to B, A \ni a \mapsto f(a)$ eine Abbildung und $C \subset A$, so nennt man $f_{|C} : C \to B, C \ni a \mapsto f(a)$ die **Einschränkung** von f auf C.

3. Seien A eine Menge und $B \subset A$. Dann nennen wir

$$1_B : A \to \{0,1\}, a \mapsto \begin{cases} 1, & a \in B \\ 0, & a \notin B \end{cases}$$

   die **charakteristische Funktion** von B. 1_B wird manchmal auch χ_B genannt.

4. Ist $A \subset B$, so nennen wir die Abbildung $i : A \to B, a \mapsto a$ **Inklusion**.

Definition 3.5 (Komposition von Abbildungen)
Sind $f : A \to B, a \mapsto f(a)$ und $g : B \to C, b \mapsto g(b)$ zwei Abbildungen, so nennen wir die Abbildung $g \circ f : A \to C, a \mapsto g(f(a))$ die **Komposition** von f und g.

Definition 3.6 (Umkehrabbildung)
Ist $f : A \to B$ bijektiv, so bezeichnen wir mit $f^{-1} : B \to A$ die eindeutige Abbildung, für die gilt: $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_B, f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_A$. Wir nennen f^{-1} die **Umkehrabbildung** von f.

Definition 3.7 (Relation)
Ist A eine Menge, so nennen wir $R \subset A \times A$ **Relation** auf A. Ist $(a,b) \in R$, so schreiben wir auch $a \sim_R b$ oder einfach $a \sim b$. Eine Relation wird oft auch direkt mit $\sim$ bezeichnet.

Definition 3.8 (reflexiv, symmetrisch, transitiv)
Sei R (bzw. $\sim$) eine Relation.

1. R heißt **reflexiv**, falls $a \sim a \; \forall \; a \in A$.

2. R heißt **symmetrisch**, falls aus $a \sim b$ auch $b \sim a$ folgt.

3. R heißt **transitiv**, falls aus $a \sim b$ und $b \sim c$ auch $a \sim c$ folgt.

Definition 3.9 (Äquivalenzrelation)

1. Eine Relation $\sim$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, nennt man **Äquivalenzrelation**.

2. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge A und $a \in A$, so nennen wir die Menge
$$[a] := \{b \in A : a \sim b\}$$
Äquivalenzklasse von A.

3. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation, so nennen wir
$$A/\sim := \{[a] : a \in A\}$$
die Menge der Äquivalenzklassen und nennen dies auch den **Quotientenraum**.

3.2 Sätze und Beweise

Satz 3.1 (Eigenschaften der Komposition)
Seien $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ Abbildungen. Dann gilt:

1. *Die Komposition ist assoziativ: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

2. *Sind f und g bijektiv, so ist auch $(g \circ f)$ bijektiv, und es gilt: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Beweis:

1. Dies folgt direkt aus der Definition 3.5. (Einen ausführlichen Beweis findet ihr in Kapitel 6 in Beispiel 48.)

2. $$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1} \circ (f \circ g) = \mathrm{Id} \quad &\overset{1.}{\Longleftrightarrow} \quad (f \circ g)^{-1} \circ f \circ g = \mathrm{Id} \\ &\overset{g \text{ bijektiv}}{\Longleftrightarrow} \quad (f \circ g)^{-1} \circ f = g^{-1} \\ &\overset{f \text{ bijektiv}}{\Longleftrightarrow} \quad (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 3.2 (Bijektivität)
Ist $f : A \to B$ eine Abbildung, so ist f genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g : B \to A$ gibt, mit $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ und $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Diese Abbildung g ist eindeutig. Wir schreiben nach Definition 3.6 $g := f^{-1}$ und nennen sie die Umkehrabbildung.

Beweis: Für die Richtung „$\Rightarrow$“ sei zunächst f bijektiv. Dann existiert für jedes $b \in B$ genau ein $a \in A$ mit $b = f(a)$ (Surjektivität). Definieren wir nun $g(b) = a$, so liefert g das Gewünschte.
Für die Richtung „$\Leftarrow$“ existiere eine solche Funktion g. Aus $f \circ g = \mathrm{Id}_B$ folgt sofort die Surjektivität von f. Sind nun $a, \tilde{a} \in A$ mit $f(a) = f(\tilde{a})$, so gilt $a = g(f(a)) = g(f(\tilde{a})) = \tilde{a}$. Also ist f auch injektiv, insgesamt also bijektiv. Sind g und h zwei solche Funktionen, so gilt

$$g = g \circ \mathrm{Id}_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{Id}_A \circ h = h.$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit. q.e.d.

Satz 3.3 (Injektivität, Surjektivität und Bijektivität auf endlichen Mengen)
Ist $f : A \to B$ eine Abbildung und gilt $|A| = |B| < \infty$, so gilt

$$f \textit{ ist injektiv} \Leftrightarrow f \textit{ ist surjektiv} \Leftrightarrow f \textit{ ist bijektiv.}$$

Beweis: Wir setzen $n := |A| = |B|$. Es genügt zu zeigen, dass gilt:
f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv.

„$\Rightarrow$“: Sei f injektiv, das heißt, $f(a) \neq f(b)$ falls $a \neq b$, das heißt, verschiedene Elemente aus A werden auf verschiedene Elemente aus B abgebildet. Da A n Elemente hat, werden diese aber auf n verschiedene Elemente aus B abgebildet. Da es dort genau n Elemente gibt ist f surjektiv.

„$\Leftarrow$“: Sei f surjektiv, das heißt, $\forall b \in B \exists a \in A$ mit $f(a) = b$, das heißt, jedes Element aus B hat ein Urbild in A. Da es in A n Elemente gibt und jedes dieser Elemente auf genau ein Element in B abgebildet wird, muss f injektiv sein. q.e.d.

Satz 3.4 (Disjunkte Zerlegung einer Menge durch Äquivalenzklassen)
Seien A eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Dann gilt:

$$A = \dot{\bigcup_{a \in A/\sim}} [a]. \tag{3.1}$$

Beweis: Wir zeigen zunächst $A = \bigcup_{a \in A/\sim} [a]$.

„$\subset$“: Sei $b \in A$. Dann ist $b \in [b]$ und $[b] \in A/\sim$, also ist $A \subseteq \bigcup_{a \in A/\sim} [a]$.

„$\supset$“: Sei $b \in \bigcup_{a \in A/\sim} [a]$, das heißt $b \in [a]$ für ein $a \in A$, also $b \in A$, da $[a] \subset A$. Damit folgt $A = \bigcup_{a \in A/\sim} [a]$.

Um (3.1) zu zeigen, müssen wir zeigen, dass für $a, b \in A$ entweder $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$ gilt. Dazu zeigen wir: Haben zwei Äquivalenzklassen ein gemeinsames Element, so sind sie gleich. Sei dazu $c \in [a], c \in [b]$. Dann gilt $c \sim a$ und $c \sim b$, also wegen der Symmetrie auch $a \sim c$ und wegen der Transitivität dann auch $a \sim b$, also $[a] = [b]$. q.e.d.

3.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 3.1 einer Abbildung: Diese Definition sollte aus der Schule noch bekannt sein, dort ist nur meist von Funktionen die Rede. Diese werden wir im Folgenden auch Abbildungen nennen. Der einzige Unterschied zu der gewohnten Definition einer Funktion bzw. Abbildung ist, dass die Mengen A und B nicht mehr zwingend die rellen Zahlen $\mathbb{R}$ sein müssen. Ist zum Beispiel $A := \{1{,}2{,}3\}$ und $B := \{4{,}5{,}6\}$, so wäre $f : A \to B$, $f(1) := 6, f(2) := 5, f(3) := 4$ eine Abbildung, $g : A \to B$, $g(1) := 6, g(2) := 5, g(2) := 4$ allerdings keine, denn einem Element aus A können nicht zwei Elemente aus B zugeordnet werden.

Zur Definition 3.2 von Bild und Urbild: Diese Definitionen veranschaulicht man am besten mit einem Bild (wobei die Mengen A und B jeweils die umrandeten Teilmengen der Ebene sind):

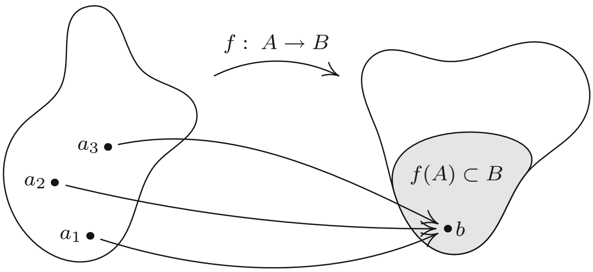

Abb. 3.1: Bild und Urbild einer Abbildung.

Das Bild einer Abbildung ist also einfach die Menge aller Werte, die angenommen werden (oben grau), das Urbild eines Punktes im Bild sind alle Punkte, die auf diesen abgebildet werden. Im obigen Bild ist also das Urbild von b die Menge $\{a_1, a_2, a_3\}$.

Beispiel 11

Seien $A := \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$ und $B := \{2{,}4{,}6\}$, und sei f die Abbildung $f : A \to B$,

$$f(1) := 2\ ,\ f(2) := 2\ ,\ f(3) := 6\ ,\ f(4) := 2\ ,\ f(5) := 2\ ,$$

so ist $im(f) = \{2{,}6\}$,

. $$f^{-1}(2) = \{1{,}2{,}4{,}5\}\ ,\ f^{-1}(4) = \emptyset\ ,\ f^{-1}(6) = \{3\}$$ ■

Beispiel 12
Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := x^4$. Da wir in diesem Fall mit reellen Zahlen rechnen, haben alle negativen Zahlen kein Urbild, alle positiven jedoch haben eines, es gilt also $im(g) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Das Urbild eines Punktes $y \in \mathbb{R},\ y \geq 0$, ist jede seiner reellen vierten Wurzeln (auf Wurzeln werden wir im Bereich Analysis (Kapitel 7) noch einmal ausführlicher eingehen). Zum Beispiel gilt also $f^{-1}(16) = \{-2,2\}$, da $(-2)^4 = 2^4 = 16$. ■

Beispiel 13
Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, h(x,y) := (x^2+y^2)+i(x^2+y^2)$. (Auf die komplexen Zahlen werden wir in Kapitel 4 nochmals explizit eingehen und diese näher untersuchen.) Da für $x, y \in \mathbb{R}$ immer $x^2 + y^2 \geq 0$ gilt, haben alle Punkte $z \in \mathbb{C}, z = (z_1, z_2)$ mit $z_1 < 0$ oder $z_2 < 0$ kein Urbild. Da außerdem $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z)$ für alle Bildpunkte von h gilt, ist $\mathrm{im}(h) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C} : z_1 = z_2 \geq 0\}$, und das Urbild eines Punktes $z = (c, c)$ sind alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x^2 + y^2 = c$, also die leere Menge, falls $c < 0$, $\{0,0\}$ falls $c = 0$ und der Kreis mit Radius $\sqrt{c}$ um den Ursprung, falls $c > 0$. ■

Zur Definition 3.3 von Injektivität, Surjektivität und Bijektivität: Auch diese Definitionen wollen wir uns zunächst einmal bildlich vorstellen und nehmen dabei zunächst an, dass A und B endliche Mengen sind, und übertragen unser Verständnis dann auf beliebige Mengen. In den nachstehenden Abbildungen 3.2-3.5 seien die Mengen A und B nicht die eingeschlossenen Flächen, sondern nur die markierten Punkte.

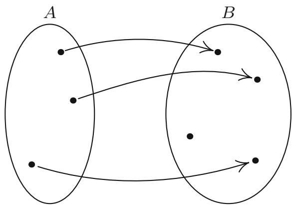

Abb. 3.2: Eine injektive Abbildung.

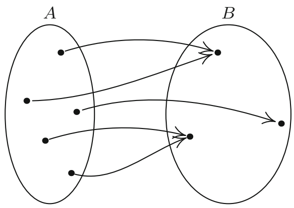

Abb. 3.3: Eine surjektive Abbildung.

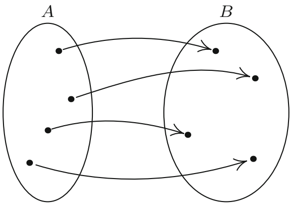

Abb. 3.4: Eine bijektive Abbildung.

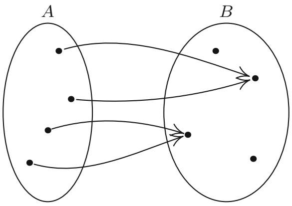

Abb. 3.5: Diese Abbildung ist weder injektiv, noch surjektiv.

Bei einer injektiven Funktion gibt es also für jedes $b \in B$ *genau* ein $a \in A$, sodass $f(a) = b$. Mit anderen Worten: Für jedes $b \in B$ hat also $f^{-1}(b)$ entweder ein oder kein Element, es gilt also: $\left|f^{-1}(b)\right| \in \{0,1\} \; \forall \; b \in B$.
Bei einer surjektiven Funktion wird jedes Element $b \in B$ von der Abbildung mindestens einmal „getroffen“, jedes Element hat also mindestens ein Urbild, es gilt also: $\left|f^{-1}(b)\right| \geq 1 \; \forall \; b \in B$, und das Bild von f ist ganz B, $im(f) = B$.
Bei einer bijektiven Funktion muss dies beides erfüllt sein, das heißt, dass wieder $im(f) = B$ gilt und außerdem $\left|f^{-1}(b)\right| = 1 \; \forall \; b \in B$, das heißt, jedes $b \in B$ hat genau ein Urbild, was wiederum bedeutet, dass für $a, \tilde{a} \in A$ gilt, dass
$f(a) \neq f(\tilde{a})$, falls $a \neq \tilde{a}$.
Sind A und B endliche Mengen, so kann deshalb $f : A \to B$ nur bijektiv sein, falls $|A| = |B|$.
Bei endlichen Mengen kann man sich Injektivität und Surjektivität noch sehr schön merken:
Wir stellen uns vor, wir befinden uns in einem Raum, in dem Stühle stehen, sagen wir n Stühle. Außerdem stehen dort Menschen, m an der Zahl. Jetzt wollen sich alle Menschen setzen, zuerst einmal jeder auf einen eigenen Stuhl, falls das nicht reicht, so müssen sich mehrere einen teilen.
Angenommen, es ist $n = m$. Dann findet jeder Mensch einen Stuhl und jeder Stuhl ist besetzt. Die Funktion, die jedem Menschen einen Stuhl zuordnet, ist bijektiv.
Ist $n < m$, so findet nicht jeder Mensch einen eigenen Stuhl, es gibt Menschen, die sich einen Stuhl teilen müssen. Die Funktion, die jedem Menschen einen Stuhl zuordnet, ist nicht injektiv, da es Menschen gibt, die sich einen Stuhl teilen müssen, aber sie ist surjektiv, da jeder Stuhl besetzt ist.

Angenommen, es ist $n > m$. Jetzt bekommt jeder wieder einen eigenen Stuhl, und es bleiben sogar Stühle frei. Hier handelt es sich also um eine injektive, aber nicht surjektive Funktion.

Beispiel 14
Seien $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ mit

1. $f_1(x) := x^2$
2. $f_2(x) := x + 3$
3. $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f_3(x) := \dfrac{1}{x}$

Wie können wir nun überprüfen, welche dieser Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind? Fangen wir mit f_1 an. Da wir uns in den reellen Zahlen bewegen, ist zum Beispiel die Wurzel aus -1 nicht definiert, -1 hat also kein Urbild, die Funktion kann nicht surjektiv sein. Da außerdem $f_1(-1) = f_1(1) = 1$ ist f_1 also auch nicht injektiv und damit natürlich auch nicht bijektiv. f_2 ist surjektiv, denn ist $y \in \mathbb{R}$, so hat y das Urbild $y - 3$, zum Beispiel gilt $f_2(2) = 5$. Außerdem ist f_2 auch injektiv, denn sei $f_2(x) = f_2(\tilde{x})$ so gilt:

$$f_2(x) = f_2(\tilde{x}) \Leftrightarrow x + 3 = \tilde{x} + 3 \Leftrightarrow x = \tilde{x}\ .$$

Also ist f_2 bijektiv. f_3 ist wegen eines ähnlichen Arguments injektiv, denn aus $\frac{1}{x} = \frac{1}{\tilde{x}}$ folgt $x = \tilde{x}$. Allerdings ist f_3 nicht surjektiv, denn es existiert kein $x \in \mathbb{R}$ mit $\frac{1}{x} = 0$. Also ist f_3 auch nicht bijektiv. ■

Zur Definition 3.4 besonderer Abbildungen: Die Identität ist die einfachste Abbildung, die es gibt. Sie bildet jeden Punkt wieder auf sich selbst ab. Wir kennen diese Funktion für $A = \mathbb{R}$ auch als $f(x) = x$. *Achtung:* Diese Funktion ist nur dann definiert, wenn die Ausgangsmenge und die Zielmenge identisch sind.
Ist f eine Abbildung, so ist die Wirkung der Einschränkung dieser Abbildung dieselbe, nur dass die Einschränkung auf einer kleineren Menge, nämlich auf einer Teilmenge der ursprünglichen Menge, definiert ist. Auch wenn die Funktion selbst und ihre Einschränkung dieselbe Wirkung haben, so sind diese Funktionen doch nicht identisch, da sie verschiedene Definitionsbereiche haben.
Die charakteristische Funktion einer Menge zeigt einfach an, welche Werte in dieser Menge liegen und welche nicht, am besten hierzu ein Beispiel für die charakteristische Funktion von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$:

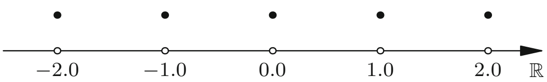

Abb. 3.6: Charakteristische Funktion von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$.

Die dargestellte Funktion aus Abbildung 3.6 ist 0 für nichtganzzahlige Werte und 1 bei ganzzahligen Werten. Die Inklusion schließlich ist so etwas ähnliches wie die Identität: Sie bildet jeden Punkt wieder auf sich selbst ab, nur dass in diesem Fall Definitionsbereich und Zielmenge nicht identisch sind, sondern der Definitionsbereich eine Teilmenge der Zielmenge ist.

Zur Definition 3.5 der Komposition: In dieser Definition wird die Verknüpfung von zwei Abbildungen als Hintereinanderausführung der beiden Abbildungen erklärt . Es ist wichtig zu bemerken, dass selbst wenn $g \circ f$ existiert, $f \circ g$ nicht existieren muss, da der Wertebereich von der zuerst ausgeführten Funktion mit dem Definitionsbereich der zweiten übereinstimmen muss. Diese Hintereinanderausführung kann man sich an folgender Abbildung 3.7 sehr gut verdeutlichen.

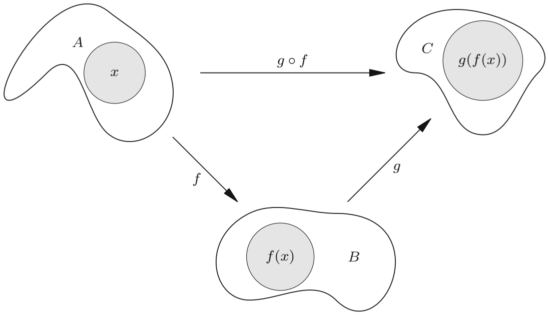

Abb. 3.7: Komposition zweier Funktionen f und g.

Beispiel 15

- Seien zum Beispiel $A = \{1,2,3\},\ B = \{2,3,4\},\ C = \{3,4,5\}$ und

$$f : A \to B, f(a) = a + 1,\ g : B \to C,\ g(b) = b + 1,$$

so ist $(g \circ f) : A \to C, (g \circ f)(a) = a + 2$, aber $f \circ g$ ist nicht definiert. Selbst wenn $f \circ g$ und $g \circ f$ definiert sind, so stimmen sie im Allgemeinen nicht überein, wie das folgende Beispiel zeigt.

- Sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \text{ und } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x + 1,$$

so ist

$$(g \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (g \circ f)(x) = g(x^2) = x^2 + 1$$

und

$$(f \circ g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (f \circ g)(x) = f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1\ .$$

Dies soll an Beispielen in diesem Zusammenhang erst einmal genügen. ■

Zur Definition 3.6 der Umkehrabbildung: Satz 3.2 erlaubt uns nun, für bijektive Funktionen eine Umkehrfunktion zu definieren. Diese ist die in dem Satz 3.2 definierte Funktion g, die wegen Satz 3.2 eindeutig ist und nur für bijektive Funktionen existiert. Dies kann man zum Beispiel an unseren Pfeildiagrammen (Abbildungen 3.2, 3.3, 3.4 und 3.5) oben sehen: Ist die Funktion nicht injektiv, so würden bei der Umkehrabbildung einem Punkt zwei verschiedene Werte zugeordnet werden, was nicht möglich ist. Ist die Abbildung nicht surjektiv, so wäre der Definitionsbereich der Umkehrabbildung nicht die gesamte Menge B, die Funktion wäre also nicht überall erklärt.

Beispiel 16

- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 9$. Diese Funktion ist bijektiv (dies kann man wie oben in den Erklärungen zur Definition 3.3 zeigen und sollte von euch als Übungsaufgabe genutzt werden ;-)). Wollen wir nun von dieser bijektiven Funktion die Umkehrfunktion berechnen, so schreiben wir zunächst $y = x^3 + 9$ und lösen dann diese Gleichung nach x auf. Also: $y = x^3 + 9 \Leftrightarrow y - 9 = x^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y-9}$. Haben wir die Gleichung nach x aufgelöst, vertauschen wir die Variablen x und y und sind fertig: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-9}$.

- Da wir dies später noch einmal brauchen werden, erwähnen wir, dass man die Umkehrfunktion zur Sinus-Funktion $\sin(x)$ mit dem Arcus-Sinus $\arcsin(x)$ bezeichnet und analog für den Kosinus $\cos(x)$ mit $\arccos(x)$.

■

Hierbei sollte noch bemerkt werden, dass wir das Symbol f^{-1} jetzt auf zwei verschiedene Arten benutzen, einmal als Urbild eines Wertes, und einmal für die Umkehrfunktion. Ist f jedoch bijektiv, und ist das Urbild von y der Punkt x, also $f^{-1}(y) = \{x\}$, so gilt, dass die Umkehrfunktion von f am Punkt y den Wert x annimmt, $f^{-1}(y) = x$. Wir werden daher bei bijektiven Funktionen, ohne Probleme befürchten zu müssen, f^{-1} sowohl für das Urbild als auch für die Umkehrfunktion benutzen.

Zur Definition 3.7 der Relation: Der Begriff der Relation ist am Anfang des Studiums noch recht abstrakt, wir wollen daher zunächst ein paar anschauliche Beispiele geben. Seien A die Menge aller Menschen und R_1 definiert als

$$R_1 := \{(a, b) \in A \times A : \ a \text{ und } b \text{ haben ein gemeinsames Kind}\}.$$

Da $R_1 \subset A \times A$, ist R_1 also eine Relation und es gilt $a \sim b \Leftrightarrow a$ und b haben ein gemeinsames Kind. Weitere Beispiele für Relationen sind:

- $R_2 := \{(a, b) \in A \times A : a \text{ und } b \text{ haben dieselbe Mutter}\}$.

- Wählen wir B als die Menge aller Städte mit mehr als 1000 Einwohnern, so können wir die Relation R_3 definieren mit:

$$R_3 := \{(c,d) \in B \times B : \text{ Es gibt eine Straße von } c \text{ nach } d\}.$$

- Natürlich können wir auch auf den natürlichen Zahlen Relationen definieren, zum Beispiel:

  - $R_4 := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m < n\}$,
  - $R_5 := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m > n\}$,
  - $R_6 := \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : m = n\}$ oder auch
  - $R_7 := \{(1{,}2), (2{,}3), (3{,}4), (4{,}5)\}$.

  Beispielsweise gilt also $(m,n) \in R_4 \Leftrightarrow m \sim_{R_4} n \Leftrightarrow m < n$. R_4 nennt man auch *Kleiner-Relation*, R_5 *Größer-Relation* und R_6 die *Gleichheits-Relation.*

Zur Definition 3.8 von reflexiv, transitiv und symmetrisch: Na gut, jetzt haben wir schon einmal Beispiele für Relationen gesehen. In der Definition 3.8 werden einige Eigenschaften von Relationen definiert, und wir wollen einmal unsere oben beschriebenen Relationen auf diese Eigenschaften überprüfen. Zum Beispiel ist R_1 nicht reflexiv, denn wer hat schon mit sich selbst ein Kind? R_1 ist allerdings symmetrisch, denn wenn a mit b ein Kind hat, dann auch b mit a. R_1 ist nicht transitiv, denn haben a und b ein gemeinsames Kind und b und c auch, so haben a und c dasselbe Geschlecht, können also (auf natürliche Weise) kein gemeinsames Kind haben. Betrachten wir nun R_2: Natürlich hat jeder Mensch dieselbe Mutter wie er selbst, also ist R_2 reflexiv. Wenn a und b dieselbe Mutter haben, dann auch b und a, R_2 ist also symmetrisch. R_2 ist außerdem transitiv, denn wenn a und b dieselbe Mutter haben und b und c, dann auch a und c. Auch R_3 ist sowohl reflexiv, symmetrisch und transitiv, die Aufgabe überlassen wir euch. Das kann man sich ähnlich wie oben überlegen. Kommen wir nun zu R_4: Ist $n \in \mathbb{N}$, so gilt natürlich nicht $n < n$, also ist R_4 nicht reflexiv. R_4 ist auch nicht symmetrisch, denn ist $m < n$, so kann ja nicht mehr $n < m$ gelten. Die Relation ist allerdings transitiv, denn ist $m < n$ und $n < p$, so ist auch $m < p$. Analog folgt dasselbe für R_5, auch hier dürft und sollt ihr gerne üben. Bei R_6 dagegen gilt Reflexivität, Transitivät und Symmetrie, bei R_7 nichts von alledem, was beides leicht nachzuprüfen ist.

Zur Definition 3.9 der Äquivalenzrelation: Ganz besonders interessieren uns nun die Äquivalenzrelationen, das heißt die Relationen, die reflexiv, symmetrisch und transitiv sind, also zum Beispiel die Relationen R_2, R_3 und R_6 von oben. In diesem Fall teilen wir die Menge A in sogenannte Äquivalenzklassen auf, Teilmengen von A, in dem jeweils „äquivalente", das heißt in Relation stehende Elemente sind. In unseren Beispielen von oben wären bei R_2 die Äquivalenzklassen alle Geschwister, also

$$[a] = \{b \in A : b \text{ ist Bruder oder Schwester von } a\},$$

da diese dieselbe Mutter haben. Bei der Relation R_3 sind die Äquivalenzklassen die Städte, die durch Straßen miteinander verbunden sind, also

$$[c] = \{d \in B : \text{Es führt eine Straße nach } c\}$$

und bei R_4 enthält jede Äquivalenzklasse nur ein Element, nämlich eine natürliche Zahl n, $[n] = n$. Die Menge $A/\sim$ enthält nun alle Äquivalenzklassen, das heißt $A/\sim_{R_4} = \{$ Geschwister $\}$ und $A/\sim_{R_6} = \mathbb{N}$. In einer Äquivalenzklasse $[a]$ sind also alle Elemente, die in Relation zu a stehen. Die Menge aller Äquivalenzklassen nennen wir einfach den Quotientenraum.

3.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 3.1 über die Eigenschaften der Komposition: Der erste Teil des Satzes besagt: Wenn man drei Funktionen in einer feststehenden Reihenfolge verknüpfen will, dann ist es egal, welche beiden man zuerst miteinander verknüpft, natürlich vorausgesetzt, dass man diese drei Funktionen verknüpfen kann. Hierzu ein Beispiel.

Beispiel 17
Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x - 7, \quad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \frac{2}{x^2+1}.$$

Dann ist $(f \circ g) : x \mapsto (x-7)^2$ und $(f \circ g) \circ h : x \mapsto \left(\frac{2}{x^2+1} - 7\right)^2$ und außerdem $(g \circ h) : x \mapsto \frac{2}{x^2+1} - 7$ und damit auch $f \circ (g \circ h) : x \mapsto \left(\frac{2}{x^2+1} - 7\right)^2$. ■

Da die Komposition als die Hintereinanderausführung der betreffenden Funktionen definiert ist, folgt diese Aussage sofort.
Die Aussage des ersten Teils von Satz 3.1 kann man sich auch noch einmal an einem Diagramm veranschaulichen. Dafür wollen wir zunächst den Begriff des *kommutativen Diagramms* erklären.
Die Abbildung 3.8 zeigt die einfachste Darstellung eines kommutativen Diagramms, welches wie folgt zu verstehen ist: Wenn wir in der Menge A starten und mit der Funktion f abbilden, so kommen wir in die Menge B und von dort mit der Funktion g nach C. Starten wir bei dem gleichen Element von A, so landen wir auch wieder bei dem gleichen Element von C, egal welchen Weg wir nehmen. Die Komposition $g \circ f$ ist identisch mit der Funktion h, mit der man

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Abb. 3.8: Einfaches Beispiel für ein kommutatives Diagramm.

direkt von A nach C kommt. Es gilt also für ein allgemeines kommutatives Diagramm: Wenn man in einer Menge X startet und in einer Menge Y ankommt, so ist es egal, welchen Weg man nimmt. Die Funktion, die man durch Verknüpfung der Wege erhält, ist immer dieselbe, oben also $h = g \circ f$.
Die Aussage des Satzes ist nun, dass das folgende Diagramm kommutiert. Das

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "\psi"] & D \\ B \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "\phi"] & C \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Abb. 3.9: Beispiel für ein kommutatives Diagramm.

heißt, $(h \circ g) \circ f = \phi \circ f = h \circ g \circ f = h \circ \psi = h \circ (g \circ f)$, also genau die erste Aussage des Satzes 3.1.
Der zweite Teil des Satzes besagt, dass man die Umkehrfunktion einer Komposition auch einfach durch die Umkehrfunktion der beiden Ausgangsfunktionen berechnen kann. Achtet darauf, dass sich die Reihenfolge der Komposition umdreht! Im Beweis benutzen wir den ersten Teil des Satzes und bringen dann systematisch die Funktionen auf die andere Seite der Gleichung. Als kleine Übungsaufgabe sollt ihr euch überlegen, dass $(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ im Allgemeinen *falsch* ist!

Zum Satz 3.2 über die Bijektivität: Dieser Satz gibt eine konkrete Methode an, wie man überprüfen kann, ob eine Funktion bijektiv ist oder nicht. Da die Aussage hier eine Äquivalenz ist, sind zwei Richtungen zu zeigen. Einmal konstruieren wir die Funktion g aus der Annahme, dass f bijektiv ist, in der anderen Richtung weisen wir getrennt zuerst die Surjektivität und dann die Injektivität nach. Als Letztes bringen wir noch die Annahme, dass zwei verschiedene Funktionen mit dieser Eigenschaft existieren, zum Widerspruch und zeigen somit die

Eindeutigkeit.
Dieser Satz erlaubt uns nun, wie in Definition 3.6 eine Umkehrabbildung zu jeder bijektiven Funktion zu bestimmmen. Dieser Satz findet außerdem Anwendung im Beweis von Satz 4.2 im kommenden Kapitel 4.

Zum Satz 3.3 über Injektivität, Surjektivität und Bijektivität auf endlichen Mengen: Dieser Satz ist ein sehr schöner und wichtiger Satz, denn nach ihm müssen wir unter gewissen Umständen, wenn wir Bijektiviät nachweisen wollen, nur Injektivität oder Surjektivität und nicht beides zeigen. Wir müssen hier nur zeigen, dass aus Surjektivität Injektivität folgt und umgekehrt, da die Funktion dann auch bijektiv ist. Wenn die Funktion bijektiv ist, dann ist sie sowieso schon injektiv und surjektiv. Diese Äquivalenz folgt aber unmitelbar aus der Tatsache, dass die beiden Mengen gleich viele Elemente besitzen, denn wenn alle Elemente aus B ein Urbild haben, so können nicht zwei Elemente aus A auf dasselbe Element abgebildet werden und umgekehrt.

Zum Satz 3.4 der disjunkten Zerlegung einer Menge in Äquivalenzklassen: Dieser Satz besagt anders formuliert, dass jedes Element $a \in A$ sich in genau einer Äquivalenzklasse befindet. Beim Beweis zeigen wir zunächst, dass die Menge sich (nicht notwendigerweise disjunkt) durch Äquivalenzklassen zerlegen lässt. Dies zeigen wir wie gewohnt dadurch, indem wir Inklusionen einzeln zeigen. Danach zeigen wir noch, dass diese Zerlegung tatsächlich disjunkt ist. Dies liegt einfach an der Tatsache, dass schon die Äquivalenzklassen selbst disjunkt sind.

Beispiel 18
Sei M die Menge aller Schüler einer Schule. Wir nennen zwei Schüler äquivalent, wenn sie in dieselbe Klasse gehen. Die Aq̈uivalenzklasse eines Schülers ist also die Menge seiner Mitschüler, die auch in seine Schulklasse gehen. Die Menge der Äquivalenzklassen (also der Quotientenraum) ist die Menge der Schulklassen. Man sieht sofort, dass die Äquivalenzklassen disjunkt sind, denn ein Schüler wird wohl nicht in zwei Klassen gleichzeitig gehen. Also bildet sie eine disjunkte Zerlegung der Menge M in Äquivalenzklassen. ■

4 Zahlen

Übersicht

In diesem Kapitel werden wir uns mit bereits bekannten, aber auch noch (zumindest den Meisten) unbekannten Zahlenbereichen beschäftigen und dabei das Hauptaugenmerk auf die komplexen Zahlen legen. Aber auch weitere wichtige Symbole wie das Summenzeichen oder das Produktzeichen werden eingeführt und erklärt.

4.1 Definitionen

Definition 4.1 (Natürliche Zahlen)
Wie nennen $\mathbb{N} := \{1,2,3,4,\ldots\}$ die **natürlichen Zahlen**,
$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,4,\ldots\}$ die natürlichen Zahlen mit 0 und setzen
$-\mathbb{N} := \{-1,-2,-3,-4,\ldots\}$.

Definition 4.2 (Ganze Zahlen)
Wir definieren die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup -\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Definition 4.3 (Rationale Zahlen)
Die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ sind definiert als $\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}\right\}$.

Definition 4.4 (Reelle Zahlen)
Die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{R} = \{\text{alle Dezimalzahlen}\}$. Damit sind also Dezimalzahlen gemeint, sowohl abbrechende, periodische als auch nicht periodische.

Anmerkung: Natürlich ist dies keine richtige Definition der reellen Zahlen. Wir werden aber im Kapitel 7 eine genaue Definition der reellen Zahlen geben.

Definition 4.5 (imaginäre Einheit)
Wir setzen $i^2 = -1$ und nennen i die **imaginäre Einheit**.

Anmerkung: Wie im Reellen ist natürlich auch hier $(-i)^2 = -1$. Hier wird wie bei den reellen Zahlen, vergleiche hierzu die Erklärung zu Satz 7.7, die „positive" Zahl als eindeutige Wurzel definiert.

Definition 4.6 (Komplexe Zahlen)
Wir definieren die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C} = \{a + b \cdot i : a, b \in \mathbb{R}\}$ mit i gemäß Definition 4.5. Die Form $z = a + b \cdot i$ nennt man auch **Normalform**, **algebraische Form** oder **kartesische Form**.

Definition 4.7 (Realteil, Imaginärteil)
Sei $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\mathbb{R} \ni \operatorname{Re}(z) := a$ der **Realteil** von z und $\mathbb{R} \ni \operatorname{Im}(z) := b$ der **Imaginärteil** von z.

Definition 4.8 (komplex Konjugierte)
Sei $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$. Dann heißt $\overline{z} = a - b \cdot i \in \mathbb{C}$ die **komplex Konjugierte** zu z.

Definition 4.9 (Absolutbetrag)
Wir setzen $|z| := \sqrt{z\overline{z}}$ und nennen $|z|$ den **Absolutbetrag** von z.

Definition 4.10 (Argument)
Für $z = a + b \cdot i$ setzen wir

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{undefiniert} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$

und nennen $\arg(z)$ das **Argument** von z.

Definition 4.11 (Polarkoordinaten)
Die (ebenen) Polarkoordinaten sind definiert als

$$\varphi : (0, \infty) \times (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, \ (r, \alpha) \mapsto (r \cos(\alpha), r \sin(\alpha)).$$

Definition 4.12 (Summenzeichen)
Sei I eine endliche Menge. Dann definieren wir $\sum_{k\in I} x_k$ als die Summe aller x_k, für die $k \in I$ gilt.

Definition 4.13 (Produktzeichen)
Sei I eine endliche Menge. Dann definieren wir $\prod_{k\in I} x_k$ als das Produkt aller x_k, für die $k \in I$ gilt.

Definition 4.14 (Fakultät)
Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n! := \prod_{k=1}^{n} k$ und nennen dies **Fakultät** n. Außerdem setzen wir $0! = 1$.

Definition 4.15 (Binomialkoeffizient)
Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$. Dann setzen wir

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}, \text{für } n \geq k \\ 0, \text{für } n < k \end{cases}$$

und nennen dies den **Binomialkoeffizienten**.

4.2 Sätze und Beweise

Satz 4.1 (Eigenschaften von komplexen Zahlen)
Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten:

1. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$.
2. $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$.
4. $\overline{\overline{z}} = z$.
5. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
6. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
7. $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$.

Beweis:

1. $\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))+(\mathrm{Re}(z)-i\mathrm{Im}(z))}{2} = \frac{2\mathrm{Re}(z)}{2} = \mathrm{Re}(z)$.
2. $\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{(\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))-(\mathrm{Re}(z)-i\mathrm{Im}(z))}{2i} = \frac{2i\mathrm{Im}(z)}{2i} = \mathrm{Im}(z)$.

3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow z = \overline{z}$.

4. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)}} = \overline{\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)} = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = z.$

5. $$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{\mathrm{Re}(z_1) + i\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + i\mathrm{Im}(z_2)} \\ &= \overline{(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) + i(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))} \\ &= (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) - i(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)) \\ &= (\mathrm{Re}(z_1) - i\mathrm{Im}(z_1)) + (\mathrm{Re}(z_2) - i\mathrm{Im}(z_2)) \\ &= \overline{z_1} + \overline{z_2}.\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}\overline{z_1 \cdot z_2} &= \overline{(\mathrm{Re}(z_1) + i\mathrm{Im}(z_1)) \cdot (\mathrm{Re}(z_2) + i\mathrm{Im}(z_2))} \\ &= \overline{\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) \cdot i} \\ &\quad \overline{+\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2) \cdot i - \mathrm{Im}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2)} \\ &= \mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_1) \cdot \mathrm{Re}(z_2) \cdot i \\ &\quad -\mathrm{Re}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2) \cdot i - \mathrm{Im}(z_1) \cdot \mathrm{Im}(z_2) \\ &= (\mathrm{Re}(z_1) - i\mathrm{Im}(z_1)) \cdot (\mathrm{Re}(z_2) - i\mathrm{Im}(z_2)) \\ &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{z\overline{z}} \\ &= \sqrt{(\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z))(\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z))} \\ &= \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + i\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) - i^2\mathrm{Im}(z)^2} \\ &= \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 4.2 (Umkehrabbbildung der Polarkoordinatenabbildung)
Die Polarkoordinatenabbildung φ ist bijektiv mit Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0{,}0)\} \to (0, \infty) \times (-\pi, \pi],\ (x, y) \mapsto \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arg(x + iy)\right).$$

Beweis: Wir benutzen Satz 3.2 und beweisen den Satz nur für $\arg(x + iy) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Es gilt erstens:

$$\begin{aligned}\varphi \circ \varphi^{-1}(x, y) &= \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\cos\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right), \sqrt{x^2 + y^2}\sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)\right) \\ &= \left(\sqrt{x^2 + y^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}, \sqrt{x^2 + y^2}\frac{\frac{y}{x}}{\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}}\right)\end{aligned}$$

$$= \left(\sqrt{x^2+y^2}\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}\frac{\frac{y}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2}}\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$= \left(\sqrt{x^2}, \frac{y}{x}\sqrt{x^2}\right)$$
$$= (x, y)$$

und zweitens:

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1} \circ \varphi(r, \varphi) &= \varphi^{-1}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \\
&= \left(\sqrt{r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)}, \arctan\left(\frac{r\sin(\varphi)}{r\cos(\varphi)}\right)\right) \\
&= \left(\sqrt{r^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}, \arctan\left(\frac{r\sin(\varphi)}{r\cos(\varphi)}\right)\right) \\
&= (\sqrt{r^2}, \arctan(\tan(\varphi))) \\
&= (r, \varphi),
\end{aligned}$$

und damit folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 4.3 (Eulersche Identiät)
Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi.$$

wobei e *die Eulersche Zahl und i die imaginäre Einheit bezeichnen.*

Beweis: Es gilt:

$$e^{i\varphi} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} = \sum_{\substack{k=2n\\n=0}}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} + \sum_{\substack{k=2n+1\\n=0}}^{\infty} \frac{i^k\varphi^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n}\varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1}\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\varphi^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} i = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

und damit folgt die Behauptung. q.e.d.

Anmerkung: Wir haben hier schon Reihen verwendet. Wem dies noch nichts sagt, der schaue in Kapitel 9 nach, beispielsweise in Definition 9.5.

Satz 4.4 (Multiplikation komplexer Zahlen)
Für $z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$, $w = s \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi))$ gilt:

$$z \cdot w = r \cdot s(\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)).$$

Beweis:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) \cdot s \cdot (\cos(\psi) + i \cdot \sin(\psi)) \\ &= r \cdot s(\cos(\varphi)\cos(\psi) + i \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi) \\ &\quad + i \cdot \sin(\psi) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)) \\ &= r \cdot s \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)), \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Additionstheoreme (siehe Kapitel 9, Satz 9.16) verwendet haben. q.e.d.

Satz 4.5 (Satz von de Moivre)
Für jedes $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\cos(z) + i \cdot \sin(z))^n = \cos(n \cdot z) + i \cdot \sin(n \cdot z). \tag{4.1}$$

Beweis: Wir beweisen dies mit vollständiger Induktion (siehe ggf. Kapitel 5 über die Beweistechniken). Der Induktionsanfang ist bereits durch Satz 4.4 gegeben.
Induktionsschritt: Gelte (4.1) für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist:

$$\begin{aligned} (\cos(z) + i \cdot \sin(z))^{n+1} &= (\cos(z) + i \cdot \sin(z))^n \cdot (\cos(z) + i \cdot \sin(z)) \\ &= (\cos(nz) + i \cdot \sin(nz)) \cdot (\cos(z) + i \cdot \sin(z)) \\ &= \cos(nz)\cos(z) + i\sin(z)\cos(nz) \\ &\quad + i\sin(nz)\cos(z) - \sin(nz)\sin(z) \\ &= \cos((n+1) \cdot z) + i \cdot \sin((n+1) \cdot z). \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 4.6 (Eigenschaften der Binomialkoeffizienten)
Für die Binomialkoeffizienten gilt:

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, *falls* $n > 0$
3. $\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \ \forall\ n, k \in \mathbb{N}$
4. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen folgen direkt aus dem binomischen Lehrsatz (siehe Kapitel 5, Beispiel 38), wenn man $x = y = 1$ bzw. $x = 1, y = -1$ setzt. Die dritte Aussage folgt aus Beispiel 28 in Kapitel 5 und die vierte direkt aus der Definition des Binomialkoeffizienten. q.e.d.

4.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zu den Definitionen 4.1 bis 4.4: Die Zahlenbereiche aus den Definitionen 4.1 bis 4.4 sind bereits aus der Schule bekannt, dennoch wollen wir noch einmal kurz darauf eingehen. Die natürlichen Zahlen sind einfach die Zahlen, die man beim Zählen benutzt. Wir verwenden hier die Konvention $0 \notin \mathbb{N}$, dies ist in manchen Fachbüchern anders. In der DIN-Norm zählt die Null zu den natürlichen Zahlen. Diese ist vor allem für die Ingenieure wichtig, daher erwähnen wir dies an dieser Stelle. Gebrauchen wir die natürlichen Zahlen einschließlich der 0, so nennen wir die Menge $\mathbb{N}_0$. Die Menge $-\mathbb{N}$ bezeichnet einfach alle negativen ganzen Zahlen, oder, in mehr mathematischer Sprechweise, die additiven Inversen der natürlichen Zahlen, das heißt alle Zahlen, deren Summe mit einer bestimmten natürlichen Zahl 0 ist.
Wie bereits bekannt, sind nun die ganzen Zahlen die Vereinigung der natürlichen Zahlen, der negativen natürlichen Zahlen und der 0, also die Menge $\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.
Die rationalen Zahlen sind die Menge aller (Dezimal-)Brüche, wobei man sich ab sofort angewöhnen sollte, statt Dezimalzahlen oder gemischten Brüchen, Brüche zu schreiben. Das ist sowohl übersichtlicher, als auch später einfacher. Konkret heißt das, dass wir statt 0,75 lieber $\frac{3}{4}$ und statt $1\frac{1}{2}$ lieber $\frac{3}{2}$ schreiben. Alle rationalen Zahlen lassen sich als Bruch darstellen, also in der unter Definition 4.3 angegebenen Form, wobei wir hier bemerken, dass es nützlich ist, dass wir $0 \notin \mathbb{N}$ angenommen haben, denn sonst würde man in dieser Definition durch 0 teilen, was bekanntlich nicht erlaubt ist.
Kommen wir nun zu den reellen Zahlen, den sowohl in der Schule als auch an der Universität gebräuchlichsten Zahlen. Zunächst sollte man bemerken, dass wir für die reellen Zahlen, anders als für die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, keine mathematisch präzise Definition, sondern nur einige Beispiele angegeben haben. Dies liegt an der Schwierigkeit, reelle Zahlen zu definieren. Aus diesem Grund ist diesem Thema ein ganzes Kapitel im Bereich Analysis gewidmet (siehe Kapitel 7, dort wird eine mathematische Definition nachgeliefert).

Zu den Definitionen 4.5 bis 4.6: Diese Definitionen werden für die meisten von euch noch unbekannt und eher ungewohnt sein. Die Wurzel aus -1? Das geht doch gar nicht. Hier muss man sich einfach damit abfinden, dass i so definiert ist, dass $i^2 = -1$. Wir erzeugen also künstlich die Wurzel aus -1. Dies ist vergleichbar mit der Einführung der rationalen Zahlen: Zuerst wird einem immer gesagt, dass zum Beispiel die Zahl 11 nicht durch 3 teilbar ist, die Division ergibt einen Rest: $11 : 3 = 3$ Rest 2. Später lernt man, dass $11 : 3 = {}^{11}/_{3}$. (Und bitte nicht $2^{2}/_{3}$ schreiben ;-). Achja, wo wir gerade dabei sind: Ihr solltet euch auch abgewöhnen $11 : 3$ zu schreiben, das sorgt in Gleichungen nur für Verwirrung. Stattdessen schreiben wir ab sofort, und ihr solltet das auch tun, ${}^{11}/_{3}$). Man sollte also den gleichen Transfer im Hinterkopf haben wie zu der Zeit, als die rationalen Zahlen eingeführt wurden und immer daran denken: i ist so definiert, wie wir es nun haben, man hätte genauso gut einen anderen Buchstaben nehmen können. Das i passt jedoch sehr gut, es steht für *imaginär*, i existiert also nicht wirklich, es ist nur „eingebildet“. Genauer müssten wir natürlich noch zeigen, dass die Definition der imaginären Einheit konsistent ist und für die definierten komplexen Zahlen die üblichen Grundrechenregeln gelten.

Die komplexen Zahlen sind nun einfach definiert als eine reelle Zahl a plus das reelle Vielfache b der imaginären Einheit i. Dadurch ist jede reelle Zahl durch a und b eindeutig bestimmt, man kann also eine komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ auch als reelles Zahlenpaar $z = (a, b)$ auffassen, was uns eine geometrische Interpretation der komplexen Zahlen erlaubt. Dazu erinnern wir uns zunächst an die geometrische Darstellung der reellen Zahlen, den *Zahlenstrahl*:

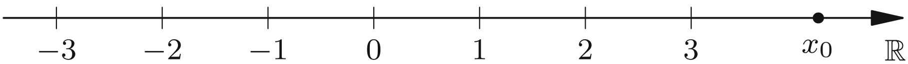

Abb. 4.1: Der reelle Zahlenstrahl.

Eine reelle Zahl lässt sich also durch einen Punkt auf dem Zahlenstrahl darstellen. Na gut, dann nehmen wir für das Paar (a, b) einfach zwei „Zahlenstrahle“, die senkrecht aufeinander stehen, und erhalten die sogenannte *Gaußsche Zahlenebene*, die nichts anderes ist als ein 2-dimensionales Koordinatensystem. Wir nennen die x-Achse die reelle Achse und die y-Achse die Imaginärachse. In dieser Zahlenebene können wir nun die komplexe Zahl $z = a + b \cdot i$ einfach einzeichnen, denn wir kennen ja den Realteil ($\widehat{=}$ x-Koordinate) und den Imaginärteil ($\widehat{=}$ y-Koordinate).

Zu den Definitionen 4.7 bis 4.11: Mit unserem neuen Verständnis der komplexen Zahlen als Zahlenpaar (a, b) bekommen auch die darauffolgenden Definitionen einen geometrischen Sinn:

Der Realteil ist einfach der x-Anteil der Zahl und der Imaginärteil der y-Anteil. Achtung! Obwohl es Imaginärteil heißt, ist $Im(z)$ eine reelle Zahl! Die komplex Konjugierte zu einer Zahl ist einfach die an der x-Achse, also der reellen Achse, gespiegelte Zahl, der Absolutbetrag ist der Abstand der Zahl vom Ursprung, und das Argument von z ist der Winkel, den z mit der x-Achse einschließt.

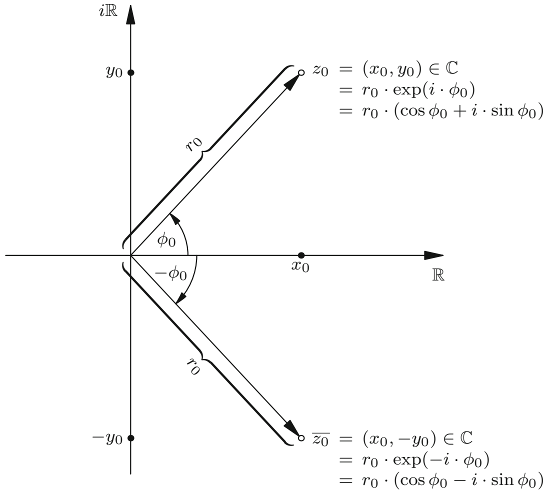

Abb. 4.2: Die Gaußsche Zahlenebene und die komplex Konjugierte.

Dies veranlasst uns auch zu der Definition der Polarkoordinaten: Statt eine Zahl durch die x- und y-Koordinate darzustellen, können wir auch einfach sagen, welchen Abstand diese Zahl vom Ursprung hat und wie groß ihr Winkel mit der x-Achse ist, das heißt, in welche Richtung die Zahl „zeigt". Und nichts anderes machen wir mit den Polarkoordinaten. Wir stellen einen Punkt durch Abstand und Winkel dar.

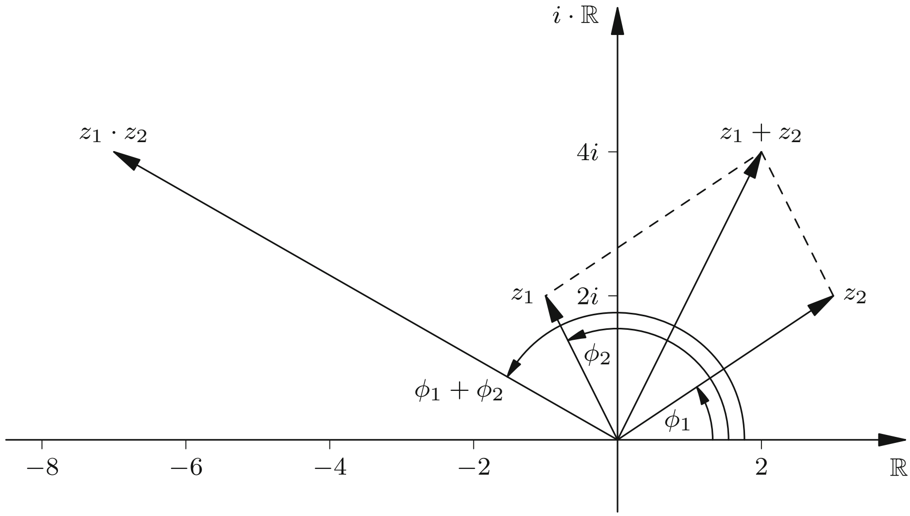

Abb. 4.3: Multiplikation und Addition von komplexen Zahlen.

Und wie rechnet man nun mit komplexen Zahlen? Dies soll die Abbildung 4.3 zeigen. Betrachten wir zunächst einmal die Addition. Da wir eine komplexe Zahl als reelles Zahlenpaar (a, b) aufgefasst haben, erklärt sich die Addition fast von selbst: Man addiert einfach die entsprechenden Komponenten, es entspricht also einfach der gewöhnlichen Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$. Ist zum Beispiel $z = 3+3\cdot i$ und $w = 1-2\cdot i$, so ist $z+w = 3+3\cdot i+1-2\cdot i = 4+i$ und $z-w = 3+3\cdot i-1+2\cdot i = 2+5\cdot i$. Für die Multiplikation müssen wir ausnutzen, dass $i^2 = -1$. Dann ist $z\cdot w = (3+3\cdot i)\cdot(1-2\cdot i) = 3+3\cdot i-6\cdot i-6\cdot i^2 = 3-3\cdot i+6 = 9-3\cdot i$. Komplizierter ist es, z/w zu berechnen. Schreiben wir zunächst einmal z/w auf: $(3+3\cdot i)/(1-2\cdot i)$. Jetzt wollen wir dies aber in die Normalform bringen, also in die Form $a+b\cdot i$. Und dabei wenden wir folgenden Trick an: Wir erweitern geschickt (das heißt mit dem konjugiert Komplexen), wenden die dritte binomische Formel an und rechnen danach weiter:

$$\frac{z}{w} = \frac{3+3\cdot i}{1-2\cdot i} = \frac{(3+3\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)}{(1-2\cdot i)\cdot(1+2\cdot i)} = \frac{3+3\cdot i+6\cdot i-6}{1-2\cdot i+2\cdot i+4} = -\frac{3}{5} + i\cdot\frac{9}{5}.$$

Durch dieses geschickte Erweitern bekommen wir also eine reelle Zahl im Nenner, wir wenden denselben Trick an wie beim Rationalmachen eines Nenners. *Also merken: Wann immer ihr zwei komplexe Zahlen durch einander teilt, müsst ihr, um die Normalform zu bekommen, die dritte binomische Formel anwenden und zuvor mit dem konjugiert Komplexen erweitern.*
Wir wollen nun einmal von unseren sechs Zahlen oben Realteil, Imaginärteil, komplex Konjugierte, Betrag und Argument berechnen. Fangen wir mit $3+3\cdot i$ an. Hier ist $Im(z) = 3, Re(z) = 3,\ \overline{z} = 3-3i$. Der Betrag ist

$$|z| = \sqrt{(3+3\cdot i)\cdot(3-3\cdot i)} = \sqrt{9+9\cdot i-9\cdot i+9} = \sqrt{18} = 3\cdot\sqrt{2}\ .$$

Das Argument ist $\arctan\left(\frac{3}{3}\right) = \arctan(1) = 45°$ bzw. $\pi/4$. Übt das Ganze noch einmal mit den restlichen fünf Zahlen. Man erhält dann

Tab. 4.1: Bestimmung von $Re(z), Im(z),\ \overline{z},\ |z|,\ \varphi$ ausgewählter komplexer Zahlen.

Zahl	Realteil	Imaginärteil	komplex konjugiert	Betrag	Argument
$3+3\cdot i$	3	3	$3-3\cdot i$	$3\cdot\sqrt{2}$	$\arctan(1)$
$1-2\cdot i$	1	-2	$1+2\cdot i$	$\sqrt{5}$	$\arctan(-2)$
$4+1\cdot i$	4	1	$4-1\cdot i$	$\sqrt{17}$	$\arctan\left(\frac{1}{4}\right)$
$2+5\cdot i$	2	5	$2-5\cdot i$	$\sqrt{29}$	$\arctan\left(\frac{5}{2}\right)$
$9-3\cdot i$	9	-3	$9+3\cdot i$	$3\cdot\sqrt{10}$	$\arctan\left(-\frac{1}{3}\right)$
$-\frac{3}{5}+\frac{9}{5}\cdot i$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{3}{5}-\frac{9}{5}\cdot i$	$3\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$	$\arctan(-3)$

Vielleicht ist ja dem einen oder anderen von euch bei diesen Werten etwas aufgefallen? Wenn wir zwei Zahlen addieren, so addieren sich auch einzeln Realteil und Imaginärteil (klar, so ist das ja auch definiert!). Wenn wir allerdings zwei

Zahlen multiplizieren, multiplizieren sich die Beträge, und die Argumente addieren sich. Es gilt also zum Beispiel $\arctan(1) + \arctan(-2) = \arctan\left(-1/3\right)$. Auf diese Weise können wir schöne Gleichheiten für den Arcustangens gewinnen. Aber warum gilt das jetzt? Um das zu zeigen, benutzen wir die Polarkoordinatendarstellung.

Beginnen wir zuerst einmal damit, eine komplexe Zahl in Polarkoordinatendarstellung zu bringen. Dabei bleiben wir einfach bei $z = 3+3\cdot i$, $w = 1-2\cdot i$. Um die Polarkoordinatendarstellung zu bestimmen, müssen wir nur den Betrag und das Argument berechnen. Aber das haben wir ja oben schon getan! Also gilt:

$$\begin{aligned} z &= 3\cdot\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right), \\ w &= \sqrt{5}\cdot\left(\cos(\arctan(-2)) + i\cdot\sin(\arctan(-2))\right). \end{aligned}$$

Und jetzt sagt doch Satz 4.4 schon das, was wir oben behauptet haben. Was haben wir also Wichtiges daraus gelernt? Wollen wir zwei Zahlen addieren, so benutzen wir die kartesische Schreibweise, zum Multiplizieren benutzen wir die Polarkoordinaten. Aber wie berechnen wir die kartesische Form einer komplexen Zahl, wenn wir die Polarkoordinatenform haben? Betrachten wir $z = 2\cdot(\cos(3)+i\cdot\sin(3))$. Wir wollen $z = x + i\cdot y$ berechnen. Dann gilt:

$$2^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{und} \qquad \tan(3) = \frac{y}{x}.$$

Auflösen der zweiten Gleichung nach y und Einsetzen in die erste Gleichung ergibt dann

$$x = \frac{2}{\sqrt{1+\tan^2(3)}} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{2\cdot\tan(3)}{\sqrt{1+\tan^2(3)}}. \tag{4.2}$$

(Wenn ihr solche Aufgaben als Übungsaufgaben bearbeiten müsst, werden natürlich meistens nicht so krumme Zahlen rauskommen, da dies aber durchaus vorkommen kann, haben wir hier bewusst auch so ein Beispiel gewählt.)

Zum Abschluss des Rechnens mit komplexen Zahlen wollen wir hier noch zwei verschiedene Arten von Gleichungen lösen. Und hier kommen sie schon:

Gleichung 1: $z^2 = 5 + 5i$

Wollen wir diese Gleichung lösen, so teilen wir zunächst mal z in Realteil und Imaginärteil auf: $z = x + i\cdot y$. Dann gilt $z^2 = (x+i\cdot y)^2 = x^2 - y^2 + 2\cdot i\cdot x\cdot y$, also:

$$\begin{aligned} & x^2 - y^2 = 5 \qquad \text{und} \qquad 2xy = 5 \\ \Rightarrow & \frac{25}{4y^2} - y^2 = 5 \quad \xrightarrow{t=y^2} \quad t^2 + 5t - \frac{25}{4} = 0 \\ \Rightarrow & t_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{5}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Da y der Imaginärteil von z ist, muss $y \in \mathbb{R}$ gelten, also auch $t > 0$. Also gilt

$$y = \sqrt{t} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)} \qquad \text{und} \qquad x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}\,.$$

Die beiden Lösungen der obigen Gleichung lauten also:

$$z \in \left\{\sqrt{\frac{5}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)} + i \cdot \frac{5}{2}\left(\sqrt{2}-1\right), -\sqrt{\frac{5}{2}\left(\sqrt{2}+1\right)} - i \cdot \frac{5}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right\}.$$

Gleichung 2: $z^3 - z^2 + 2 \cdot i \cdot z^2 + 3 \cdot z - 2 \cdot i \cdot z - 3 = 0$

So eine Art von Gleichung sollte euch aus der Schule bekannt vorkommen, zumindest, wenn ihr das z durch x ersetzt und alle Terme, die ein i beinhalten, weglasst. Wir haben es hier also mit einer Gleichung vom Grad 3 zu tun, versuchen wir es also mit Polynomdivision. Wir suchen zunächst einmal eine Nullstelle. Einsetzen von 1 in die Gleichung ergibt:

$$1 - 1 + 2i + 3 - 2i - 3 = 0.$$

Also ist 1 eine Lösung der Gleichung. Teilen wir die Gleichung durch $z-1$, so ergibt sich:

$$\frac{z^3 - z^2 + 2 \cdot i \cdot z^2 + 3 \cdot z - 2 \cdot i \cdot z - 3 = 0}{z-1} = z^2 + 2i \cdot z + 3$$

und mit der p, q-Formel oder der a, b, c-Formel erhalten wir die anderen beiden Lösungen $3 \cdot i$ und $-i$.

Zu den Definitionen 4.12 bis 4.13 von Summenzeichen und Produktzeichen: Diese beiden Definitionen dienen wieder zur Vereinfachung, man muss einfach weniger schreiben. Da das mit dieser Menge I allerdings wohl den meisten zu abstrakt sein kann, wollen wir hier die beiden wichtigsten Fälle erklären, und zwar $I = \{1, \ldots, n\}$ und $I = \mathbb{N}$. Im ersten der beiden Fälle läuft die Summe (oder das Produkt) über alle natürlichen Zahlen von 1 bis n, also

$$\sum_{k \in \{1,\ldots,n\}} x_k = x_1 + \cdots + x_n$$

Wir schreiben statt $\sum_{k \in \{1,\ldots,n\}} x_k$ einfach $\sum_{k=1}^{n} x_k$. Ähnlich ist es im zweiten Fall. Hier ist beispielsweise

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} x_k = x_1 \cdot \ \ldots \ \cdot x_n \cdot \ \ldots.$$

Es handelt sich also um ein unendliches Produkt. Deshalb schreiben wir hierfür auch $\prod_{k=1}^{\infty} x_k$.

Ab und zu benutzt man eine **Indexverschiebung**. Gerade bei Summen kann dies nützlich sein. Da wir dies in späteren Kapiteln noch benötigen werden, geben wir ein Beispiel an. Der Sinn einer solchen Indexverschiebung ist zumeist, die weitere Rechnung zu vereinfachen, wie wir sehen werden.

Beispiel 19

Sei $\sum_{k=1}^{3}(k+3) = (1+3)+(2+3)+(3+3) = 15$, und setzen wir nun $t := k+3$, erhält man für die Summanden $t = (k+3)$, für den ersten Index der Summe

$$k = 1 \Leftrightarrow t - 3 = 1 \Leftrightarrow t = 4$$

und für den letzten Index der Summe

$$k = 3 \Leftrightarrow t - 3 = 3 \Leftrightarrow t = 6.$$

Damit erhält man die neue Summendarstellung $\sum_{t=4}^{6} t = 4+5+6 = 15$. ■

Allgemein gilt:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m+z}^{n+z} a_{k-z}$$

und für das Produkt:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = \prod_{k=m+z}^{n+z} a_{k-z}.$$

Zu den Definitionen 4.14 bis 4.15 von Fakultät und Binomialkoeffizient: Auch diese Definitionen sollten aus der Schule bekannt sein, deswegen werden wir hier nicht weiter darauf eingehen als zu sagen, dass $n!$ einfach das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen ist, und eine der wichtigsten Eigenschaften für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ die Tatsache ist, dass er angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen. Wie man konkret mit der Fakultät und dem Binomialkoeffizienten rechnet, werden wir in Kapitel 5, genauer in den Beispielen 27 und 28, sehen.

4.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 4.1 über die Eigenschaften von komplexen Zahlen: Dieser Satz zählt eine der wichtigsten Eigenschaften von komplexen Zahlen auf. Die meisten sind selbsterklärend. Merken sollte man sich, dass es egal ist, ob man zuerst zwei komplexe Zahlen verknüpft (addiert oder multipliziert) und dann das Ergebnis konjugiert oder andersherum. Man sagt dazu auch, die *Konjugation* ist verträglich mit den Körperoperationen. Außerdem wichtig ist noch, dass man, wenn man ein Element zweimal konjugiert, wieder die ursprüngliche Zahl erhält. Man sagt die Konjugation ist *involutiv*.

In den Beweisen zerlegt man die komplexen Zahlen in ihren Realteil und Imaginärteil, ein sehr nützlicher Trick, den man sich merken sollte ;-).

Zum Satz 4.2 über die Umkehrabbildung zu den Polarkoordinaten: Dieser Satz ist wichtig um, wie wir bereits oben (in den Erklärungen zu den Definitionen 4.7-4.11) gesehen haben, kartesische Koordinaten in Polarkoordinaten umzurechnen. Der Beweis benutzt zunächst einmal einen Satz aus dem vorherigen Kapitel, der besagt, dass eine Funktion f die Inverse einer anderen Funktion g ist, wenn $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}$ gilt. Außerdem benutzt er Additionstheoreme, die erst im Kapitel 9 über Reihen bewiesen werden, und zwar in Satz 9.16. Das liegt daran, dass Kosinus und Sinus als Reihen definiert sind, und man so auch ihre Eigenschaften nachweist.

Zum Satz 4.3 über die Eulersche Identität: Dies ist ein sehr wichtiger Satz. Er zeigt, dass es im Komplexen einen Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen gibt. Dabei ist die Exponentialfunktion für komplexe Zahlen analog zum reelen Fall als Reihe (siehe auch Definition 9.5 in Kapitel 9) definiert. Sehr wichtig zu bemerken ist hier (da Sinus und Kosinus, wie wir noch aus der Schule wissen, periodisch sind), dass die Exponentialfunktion auf den komplexen Zahlen periodisch ist, ganz anders als im reellen Fall, wo diese streng monoton wachsend ist. Dies ist auch der Grund, warum wir hier keinen komplexen Logarithmus definieren (Wer hat es gemerkt? ;-)). Aufgrund der Periodizität ist die Exponentialfunktion einfach nicht bijektiv, man kann also keine Umkehrfunktion definieren (In der Funktionentheorie wird man diese Schwierigkeit überwinden, das würde hier allerdings zu weit führen).
Für den Beweis müssen wir natürlich auf die Reihendarstellung der drei Funktionen zurückgreifen. Man betrachtet die Exponentialfunktion und teilt die Reihe auf nach geradem und ungeradem n. Dann sieht man, dass der gerade Teil der Kosinus und der ungerade Teil genau der Sinus ist.

Zum Satz 4.4 über die Multiplikation von komplexen Zahlen: Dieser Satz besagt, was wir vorne schon beim Rechnen mit komplexen Zahlen gesehen haben: Multipliziert man zwei komplexe Zahlen (siehe die Erklärungen zu den Definitionen 4.7-4.11), so multiplizieren sich die Beträge und die Argumente addieren sich. Auch für diesen Beweis brauchen wir wieder die Additionstheoreme aus Kapitel 9, Satz 9.16.

Zum Satz 4.5 von de Moivre: Dieser Satz ist so etwas wie ein „verallgemeinerter Spezialfall“ des vorherigen Satzes: Wir betrachten diesmal nicht zwei Zahlen, sondern n, aber dafür immer dieselben. Die Aussage des Satzes bleibt natürlich die gleiche.

Für den Beweis benutzen wir vollständige Induktion über n (Definition und noch mehr Beispiele zur vollständigen Induktion findet ihr gleich im nächsten Kapitel 5) und die Additionstheoreme (Satz 9.16).
Hat man die Eulersche Identität (Satz 4.3) zur Verfügung, so kann man den Satz von de Moivre sehr einfach herleiten. Dies solltet ihr euch einmal überlegen.

Zum Satz 4.6 über die Eigenschaften des Binomialkoeffizienten: Hier wollen wir nun noch einmal kurz auf den Binomialkoeffizienten und seine Eigenschaften eingehen. Die Beweise dieser Aussagen sind sehr leicht. Das meiste folgt aus bereits bewiesenen Tatsachen, auch wenn diese erst in späteren Kapiteln stehen.
Die erste Aussage kann man sich auch anschaulich leicht klar machen. Wir haben in der Erklärung zur Definition 4.15 des Binomialkoeffizienten gesagt, dass $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge ist. Summieren wir nun über alle k, so erhalten wir auch alle Teilmengen. Und wir wissen bereits aus Satz 2.1 aus Kapitel 2, dass dies 2^n sind.
Besonders bemerkenswert ist Aussage 3. Obwohl die Binomialkoeffizienten als Bruch definiert sind, sind sie allesamt natürliche Zahlen. Dies gilt, da $\binom{n}{0}$ eine natürlich Zahl ist und aus der Rekursionsvorschrift aus Beispiel 27 aus Kapitel 5 über die Beweistechniken.
Die Symmetrie, also Aussage 4, folgt direkt aus der Definition, einfach mal genau hinschauen ;-).

5 Beweistechniken

Übersicht

Dieses Kapitel ist den drei wichtigsten Beweistechniken, dem direkten, dem indirekten Beweis und der vollständigen Induktion, gewidmet. Wir werden diese zuerst erklären und danach an sehr vielen Beispielen einüben.

5.1 Drei wichtige Beweistechniken

Definition 5.1 (Direkter Beweis)
Man geht von der (gegebenen, wahren) Voraussetzung (Aussage) A aus und zeigt durch Umformen oder Folgern, dass aus A die Aussage B folgt.
Mathematisch ausgedrückt untersucht man:

$$A \Rightarrow B$$

Definition 5.2 (Indirekter Beweis)
Der indirekte Beweis ist einer der elegantesten und auch einfachsten Beweise. Man geht dabei so vor:

1. Man geht vom Gegenteil der Behauptung aus (dies ist die Annahme).
2. Man versucht diese Annahme zu einem Widerspruch zu führen.
3. Wenn der Beweisgang legitim und logisch war, muss die Annahme falsch gewesen sein und damit die Behauptung wahr.

Definition 5.3 (Vollständige Induktion)
Wir möchten uns der vollständigen Induktion nun mithilfe der sogenannten Peano-Axiome annähern, die Folgendes besagen:
Die natürlichen Zahlen können durch die folgenden Axiome charakterisiert werden:

1. Jede natürliche Zahl n hat genau einen Nachfolger. Zu jedem n existiert also ein $n+1$.
2. 1 ist die kleinste natürliche Zahl.
3. Jede nichtleere Teilmenge der natürlichen Zahlen besitzt ein kleinstes Element.
4. Zwischen zwei natürlichen Zahlen liegen nur endlich viele weitere natürliche Zahlen.
5. Durch Abzählung, beginnend bei 1, durchläuft man in Einerschritten alle natürlichen Zahlen.

Diese Peano-Axiome macht man sich bei der vollständigen Induktion zunutze. $A(n)$ sei eine Aussage, die für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ getroffen wird.

1. Man zeigt zuerst, dass die Aussage für ein bestimmtes n_0 gilt (zum Beispiel für $n_0 = 1$) (**Induktionsanfang**).
2. Man zeige, dass wenn $A(n)$ gilt, auch $A(n+1)$ gültig ist (**Induktionsschritt**).

Und das ist der ganze Trick bei der vollständigen Induktion. Denn wenn man zeigt, dass die Aussage auch für den entsprechenden Nachfolger gilt, hat man die Aussage für alle $n \geq n_0$ bewiesen.

5.2 Erklärungen zu den Beweistechniken

Zum direkten Beweis: Das Prinzip des direkten Beweises sollte durch Definition 5.1 klar geworden sein. Bevor wir zu einigen Beispielen kommen, möchten wir noch eine wichtige Anmerkung machen: Und zwar beweist man Äquivalenzen, also Behauptungen der Form $A \Leftrightarrow B$, indem man zuerst die Richtung $\Rightarrow$ beweist. Also die Aussagen von A als gegeben voraussetzt und die Aussage B zeigt. Danach zeigt man die Richtung $\Leftarrow$, indem man die Aussagen aus B voraussetzt und die Aussagen aus A zeigt.
Mehrere Äquivalenzen beweist man meist mit einem sogenannten *Ringschluss*. Gegeben seien also zum Beispiel drei Aussagen A, B und C, die alle äquivalent sind. Zunächst beweist man die Richtung $A \Rightarrow B$, danach $B \Rightarrow C$ und dann $C \Rightarrow A$. Damit hat man alles gezeigt.
Wir betrachten nun ein paar Beispiele zum direkten Beweis.

Beispiel 20
Bekanntlich gilt: *Die Summe zweier gerader ganzer Zahlen ist gerade.*

Wie wird solch ein Beweis genau geführt? Wir nehmen uns einfach zwei gerade ganze Zahlen, aber machen das allgemein. Genauer: Für beliebige gerade ganze Zahlen.

Beweis: Seien x und y gerade ganze Zahlen (unsere Voraussetzung). Weil x gerade sein soll, wissen wir, dass x durch 2 teilbar ist, d.h 2 teilt x oder anders geschrieben $2|x$. Dasselbe machen wir mit y. Weil y gerade ist, wissen wir, dass y durch 2 teilbar ist, d.h 2 teilt y oder $2|y$. Weil $2|x$ gilt, gibt es eine ganze Zahl a, so dass $x = 2a$ ist. Weiterhin gibt es wegen $2|y$ eine ganze Zahl b, so dass $y = 2b$ ist.
Um uns das zu verdeutlichen, nehmen wir uns zwei ganz bestimmte gerade Zahlen x und y:

- Seien $x = 4$ und $y = 6$ gerade ganze Zahlen (unsere Voraussetzung).
- Weil $x = 4$ ist, wissen wir, dass 4 durch 2 teilbar ist, das heißt, 2 teilt 4 oder $2|4$.
- Weil $y = 6$ ist, wissen wir, dass 6 durch 2 teilbar ist, das heißt, 2 teilt 6 oder $2|6$.
- Weil $2|4$ gilt, gibt es eine weitere ganze Zahl a, sodass $4 = 2a$ ist. (Hier ist $a = 2$.)
- Weil $2|6$ gilt, gibt es eine weitere ganze Zahl b sodass $6 = 2b$ ist. (Hier ist $b = 3$.)

Nun führen wir unseren Beweis fort: Durch Einsetzen und Ausklammern erhalten wir:

$$x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$$

Es gibt also eine ganze Zahl c, nämlich $c := a + b$, sodass $x + y = 2c$. Daher gilt $2|(x + y)$ und $x + y$ ist damit gerade. Damit haben wir unseren Satz bewiesen. Für unser spezielles Beispiel heißt das: Durch Einsetzen und Ausklammern erhalten wir:

$$4 + 6 = 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot (2 + 3)$$

Es gibt also eine ganze Zahl c, nämlich $c := 2 + 3$, so dass $4 + 6 = 2 \cdot 5$. Daher gilt $2|4 + 6$ und $4 + 6$ ist gerade. q.e.d.

■

Beispiel 21 (Dritte binomische Formel)
Wir beweisen die Gültigkeit der dritten binomischen Formel.

$$\begin{aligned}(a-b)\cdot(a+b) &= a\cdot a + a\cdot b - b\cdot a - b\cdot b\\ &= a^2 + a\cdot b - b\cdot a - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Es gilt also:

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

■

Beispiel 22 (Quadrate ungerader Zahlen sind ungerade.)
Man beweise die Behauptung: *Das Quadrat einer ungeraden natürlichen Zahl n ist ungerade.*

Beweis: n sei eine ungerade Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als $n = 2k - 1$ darstellen (k ist eine natürliche Zahl. Daraus folgert man:

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\cdot(2k^2+2k)+1$$

$\Rightarrow n^2$ ist ungerade, weil aus $k \in \mathbb{N}_0$ leicht $(2k^2+2k) \in \mathbb{N}_0$ folgt. q.e.d.

■

Beispiel 23 (Quadrate gerader Zahlen sind gerade.)
Man beweise: *Das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl n ist gerade.*

Beweis: n sei eine gerade natürliche Zahl. Somit lässt sich n eindeutig als $n = 2k$ darstellen (k ist eine natürliche Zahl aus $\mathbb{N}$ ohne die Null). Daraus folgert man:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2\cdot 2k^2.$$

Da aus $k \in \mathbb{N}$ leicht $2k^2 \in \mathbb{N}$ folgt, ist n^2 das Doppelte einer natürlichen Zahl und damit gerade. q.e.d.

■

Jetzt wollen wir noch einige Beispiele für direkte Beweise aus der Mengenlehre und der Aussagenlogik geben, um die Vielfalt des direkten Beweises deutlich zu machen.

Beispiel 24 (Aussagenlogik)
Beweise: *Seien A und B Aussagen, dann gilt: $A \vee (A \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$.*
Das hört sich erst einmal sehr schwierig an, aber mit einer Wahrheitstafel kann dies sehr leicht gelöst werden: Schritt für Schritt müssen die Wahrheitswerte eingetragen und jeder Fall betrachtet werden. Wir machen es vor.

Beweis:

1. Schritt: Wir tragen bekannte Wahrheitswerte ein:

A	B	A	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\Leftrightarrow A$
w	w	w		w			$\Leftrightarrow$ **w**
w	f	w		w			$\Leftrightarrow$ **w**
f	w	f		f			$\Leftrightarrow$ **f**
f	f	f		f			$\Leftrightarrow$ **f**

2. Schritt: Auch die Wahrheitswerte der Negation können ohne Probleme eingetragen werden:

A	B	A	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\Leftrightarrow A$
w	w	w		w		f	$\Leftrightarrow$ **w**
w	f	w		w		w	$\Leftrightarrow$ **w**
f	w	f		f		f	$\Leftrightarrow$ **f**
f	f	f		f		w	$\Leftrightarrow$ **f**

3. Schritt: Wir überlegen uns, was die Konjunktion bedeutet.

A	B	A	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\Leftrightarrow A$
w	w	w		w	f	f	$\Leftrightarrow$ **w**
w	f	w		w	w	w	$\Leftrightarrow$ **w**
f	w	f		f	f	f	$\Leftrightarrow$ **f**
f	f	f		f	f	w	$\Leftrightarrow$ **f**

4. Schritt: Was bedeutet die Disjunktion, also das „Oder“?

A	B	A	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\Leftrightarrow A$
w	w	w	**w**	w	f	f	$\Leftrightarrow$ **w**
w	f	w	**w**	w	w	w	$\Leftrightarrow$ **w**
f	w	f	**f**	f	f	f	$\Leftrightarrow$ **f**
f	f	f	**f**	f	f	w	$\Leftrightarrow$ **f**

5. Schritt: Nun bleibt noch die Äquivalenz zu untersuchen. Das bedeutet, wir müssen schauen, ob die in der vorigen Tabelle fett markierten Wahrheitswerte übereinstimmen:

A	B	A	$\vee$	$(A$	$\wedge$	$\neg B)$	$\Leftrightarrow A$
w	w	w	**w**	w	f	f	$\overset{w}{\Leftrightarrow}$ **w**
w	f	w	**w**	w	w	w	$\overset{w}{\Leftrightarrow}$ **w**
f	w	f	**f**	f	f	f	$\overset{w}{\Leftrightarrow}$ **f**
f	f	f	**f**	f	f	w	$\overset{w}{\Leftrightarrow}$ **f**

Die w's über den Äquivalenzpfeilen sollen andeuten, dass die Äquivalenzen wirklich wahr sind. Es stimmt also alles überein. Und damit ist die Aussage bewiesen.

q.e.d.

■

Dieses schrittweise Verfahren müssen wir nun aber üben.

Beispiel 25 (Gesetze der Aussagenlogik)
Beweise mithilfe von Wahrheitstafeln die folgenden Aussagen:

a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

c) $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$

d) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

e) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

a) und b) stellen die sogenannten *De Morganschen Gesetze* dar.

Beweis: Da man ganz einfach, so wie oben beschrieben, vorgehen kann, zeigen wir hier nur die fertigen Wahrheitstafeln auf, aber auch das, was wir zuletzt vergleichen müssen. Überprüft bitte jeden Schritt einzeln und vollzieht diesen vor allem nach.

a)

A	B	$\neg$	$(A$	$\wedge$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	A	$\vee$	$\neg$	$B)$
w	w	**f**	w	w	w	**w**	f	w	**f**	f	w
w	f	**w**	w	f	f	**w**	f	w	**w**	w	f
f	w	**w**	f	f	w	**w**	w	f	**w**	f	w
f	f	**w**	f	f	f	**w**	w	f	**w**	f	f

b)

A	B	$\neg$	$(A$	$\vee$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	A	$\wedge$	$\neg$	$B)$
w	w	**f**	w	w	w	**w**	f	w	**f**	f	w
w	f	**f**	w	w	f	**w**	f	w	**f**	w	f
f	w	**f**	f	w	w	**w**	w	f	**f**	f	w
f	f	**w**	f	f	f	**w**	w	f	**w**	w	f

c)

A	B	A	$\wedge$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Rightarrow$	B
w	w	w	**w**	w	w	w	**w**	**w**
w	f	w	**f**	w	f	f	**w**	**f**
f	w	f	**f**	f	w	w	**w**	**w**
f	f	f	**f**	f	w	f	**w**	**f**

d)

A	B	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(\neg$	A	$\vee$	$B)$
w	w	w	**w**	w	**w**	f	w	**w**	w
w	f	w	**f**	f	**w**	f	w	**f**	f
f	w	f	**w**	w	**w**	w	f	**w**	w
f	f	f	**w**	f	**w**	w	f	**w**	f

e)

A	B	$(A$	$\Leftrightarrow$	$B)$	$\Leftrightarrow$	$(A$	$\Rightarrow$	$B)$	$\wedge$	$(B$	$\Rightarrow$	$A)$
w	w	w	**w**	w	**w**	w	w	w	**w**	w	w	w
w	f	w	**f**	f	**w**	w	f	f	**f**	f	w	w
f	w	f	**f**	w	**w**	f	w	w	**f**	w	f	f
f	f	f	**w**	f	**w**	f	w	f	**w**	f	w	f

q.e.d.

■

So, nun haben wir also Beweise mit Wahrheitstafeln geführt. Die Aussagen wurden durch logische Schlussfolgerungen bewiesen. Wir fassen zusammen: *Beim direkten Beweis beweist man die Aussage durch logische Schlussfolgerungen.* Genau dies wollen wir anhand der Mengenlehre nochmal einüben.

Beispiel 26 (Mengenlehre)
Zeige Folgendes:

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Seien $A \subseteq \Omega$ und $B \subseteq \Omega$, dann gilt:

c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \Omega \setminus B$.

d) $A \subseteq \Omega \setminus B \Leftrightarrow B \subseteq \Omega \setminus A$.

Beweis:

a) Zu zeigen ist aufgrund der Definition der Verknüpfungen:

$$x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C):$$

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

b) Zu zeigen ist aufgrund der Definition der Verknüpfungen:

$$x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C):$$

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

c) Zu zeigen ist: $x \in A \Rightarrow x \in \Omega \setminus B$. $x \in A \Rightarrow x \in \Omega$, da $A \subseteq \Omega$ und $x \notin B$, da $A \cap B = \emptyset$. Aus diesen beiden Erkenntnissen folgt nun $x \in \Omega \setminus B$.

d) Zu zeigen ist einmal: $x \in B \Rightarrow x \in \Omega \setminus A$. $x \in B \Rightarrow x \in \Omega$, da $B \subseteq \Omega$ und $x \notin A$, da $A \subseteq \Omega \setminus B$. Aus diesen beiden Erkenntnissen folgt nun $x \in \Omega \setminus A$.

Für die andere Richtung müssen wir zeigen, dass $x \in A \Rightarrow x \in \Omega \setminus B$. $x \in A \Rightarrow x \in \Omega$, da $A \subseteq \Omega$ und $x \notin B$, da $B \subseteq \Omega \setminus A$. Aus diesen beiden Erkenntnisse folgt nun $x \in \Omega \setminus B$. q.e.d.

■

Beispiel 27 (Fakultät und Binomialkoeffizient)
Zu beweisen: *Es seien* $k, n \in \mathbb{N}$ *mit* $1 \leq k \leq n$*. Dann ist* $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Beweis: Dies kann man durch direktes Nachrechnen leicht zeigen, wir rechnen die rechte Seite einfach aus.

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!}\end{aligned}$$

Jetzt bedenken wir, dass wir ja am Ende irgendetwas stehen haben wollen wie $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$. Wir bringen die beiden Brüche also auf den Hauptnenner.

$$\begin{aligned}&\overset{(*)}{=} \frac{k(n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{(n-k) \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{k(n-1)! + (n-k) \cdot (n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{(n-1)! \cdot (k+n-k)}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \cdot k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

Wir hoffen, dass jeder von euch den Schritt $(*)$ versteht? Eigentlich ganz einfach, man muss nur Folgendes bedenken:

$$\frac{k}{k!} = \frac{k}{k(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!}$$

$$\text{bzw.} \qquad \frac{n-k}{(n-k)!} = \frac{n-k}{(n-k) \cdot (n-k-1)!} = \frac{1}{(n-k-1)!}$$

Alles klar? q.e.d.

■

Beispiel 28 (Bildungsgesetz des Pascalschen Dreiecks)
Mit derselben Idee zeigen wir nun noch:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Wir wollen aber anmerken, dass wir diese Aussage sofort aus Beispiel 27 erhalten, wenn wir die Variablen umbenennen.

Beweis: Wir rechnen auch hier die linke Seite einfach aus.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} + \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} \\
&= \frac{(k+1) \cdot n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} + \frac{(n-k) \cdot n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} \\
&= \frac{(k+1) \cdot n! + (n-k) \cdot n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} \\
&= \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)! \cdot (k+1)!} \\
&= \frac{(n+1) \cdot n!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-k)! \cdot (k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

Das war der direkte Beweis. Was wir eben gerade bewiesen haben, ist das Bildungsgesetz im Pascalschen Dreieck, das so aussieht:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

Das Pascalsche Dreieck ist ein Zahlenschema, in dem jede neue Zahl die Summe der diagonal darüber stehenden ist. Auf dem obersten Platz steht eine 1.
So ist der Zusammenhang zu den Binomialkoeffizienten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \vdots & & & &
\end{array}$$

■

Zum indirekten Beweis: Das Prinzip des indirekten Beweises, siehe Definition 5.2, ist ein sehr wichtiges. Wir gehen vom Gegenteil der Behauptung aus und führen dies dann zum Widerspruch. Somit muss unsere Annahme falsch und damit die Behauptung richtig sein. Schauen wir uns Beispiele an, die das Prinzip verdeutlichen.

Beispiel 29 (Wurzel aus 2 ist nicht rational)
Behauptung: $\sqrt{2}$ *ist nicht rational.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt, nehmen also das Gegenteil an und führen dies zu einem Widerspruch.
Annahme: $\sqrt{2}$ *ist rational.*
Wenn $\sqrt{2}$ rational ist, dann lässt sie sich als Bruch zweier ganzer Zahlen p und q darstellen. Also $\sqrt{2} = p/q$. Dabei seien p, q schon gekürzt, insbesondere also teilerfremd. Nun können wir $\sqrt{2} = p/q$ umschreiben zu

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 2 \cdot q^2 \tag{5.1}$$

Daraus ergibt sich, dass p gerade ist. Damit lässt sich p also auch als $2 \cdot n$ (wobei $n \in \mathbb{Z}$) schreiben. Einsetzen in (5.1) liefert:

$$(2n)^2 = 2 \cdot q^2 \Leftrightarrow 4 \cdot n^2 = 2 \cdot q^2 \Leftrightarrow 2 \cdot n^2 = q^2$$

Hieraus ergibt sich, dass auch q gerade ist. Insbesondere haben p und q damit den gemeinsamen Teiler 2. Wir hatten aber angenommen, dass p und q teilerfremd sind. Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme. Und da eine Behauptung (also die Aussage, die dahintersteckt, siehe auch Kapitel 1, Definition 1.1) entweder richtig oder falsch ist, folgt die Richtigkeit der Behauptung.
q.e.d.

Raffiniert oder? ;-) ■

Beispiel 30 (Es gibt unendlich viele Primzahlen)
Jetzt zu einem Beweis, den Euklid schon vor ca. 2300 Jahren angab. Es gibt durchaus viele Möglichkeiten die folgende Behauptung zu beweisen (so stehen in [AZ03] (ein sehr lesenswertes Buch!) insgesamt sechs verschiedene Beweise für die folgende Behauptung), aber dennoch wollen wir den Widerspruchsbeweis von Euklid angeben:
Behauptung: *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt. Nehmen also das Gegenteil an und führen dies zu einem Widerspruch. Annahme: *Es gibt nur endlich viele Primzahlen.* Wenn es nur endlich viele Primzahlen geben würde, dann könnten wir diese in einer endlichen Menge $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ von Primzahlen zusammenfassen. Nun können wir eine neue Zahl konstruieren, indem wir die Primzahlen

multiplizieren und 1 addieren. Diese neue Zahl sei $n := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$ und p sei ein Primteiler von n. Man sieht aber, dass p von allen p_i verschieden ist, da sonst p sowohl die Zahl n als auch das Produkt $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$ teilen würde, was nicht sein kann (da sich immer Rest 1 ergibt). Und hier haben wir unseren Widerspruch! Es kann also nicht endlich viele Primzahlen geben.
Damit muss es unendlich viele Primzahlen geben. q.e.d.

Vielleicht war das etwas zu viel des Guten: Hier nochmal etwas langsamer für diejenigen, die mit den obigen Ausführungen nicht so recht etwas anfangen konnten: Wenn der Satz nicht gilt, dann gibt es nur endlich viele Primzahlen:

$$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ \ldots,\ p_r,$$

wobei p_r die größte Primzahl sei. Man bildet das Produkt aller Primzahlen und addiert 1:

$$n := p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot p_5 \cdot \ldots \cdot p_r + 1.$$

Die entstehende Zahl n ist keine Primzahl, weil sie größer ist als die größte Primzahl p_r. Sie muss sich daher aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ multiplikativ zusammensetzen. n muss daher durch mindestens eine der Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ teilbar sein. Anderseits erkennt man bei Division von n durch eine Primzahl, dass n wegen der Addition von 1 durch keine Primzahl teilbar ist. $\lightning$
(Anmerkung: Wenn man einen Widerspruch andeuten will, dann setzt man diesen Pfeil $\lightning$.) ■

Zur vollständigen Induktion: Jeder von euch hat sicherlich schon einmal Domino-Day gesehen. Wenn ihr aber zufällig wieder mal reinschaut, dann werdet ihr eventuell eine vollständige Induktion sehen. Das Prinzip der vollständigen Induktion kann man mit dem Umfallen von Dominosteinen vergleichen. Wenn der Anfangsstein fällt, fallen auch alle anderen! (So jedenfalls in der Theorie.)
Mathematisch betrachtet bedeutet das gerade: Wenn die Aussage $A(n)$ für ein n_0 und ein beliebiges n gilt, dann gilt sie auch für den Nachfolger, also für $A(n+1)$. Die nachfolgenden Dominosteine $(n+1)$ fallen aber nur dann, wenn die Reihe der Dominosteine richtig aufgebaut wurde. Wenn zum Beispiel der Abstand von einem zum anderen Stein zu groß ist, dann kann der andere Stein auch nicht fallen, und damit wäre die Induktion zu Ende.
Dem Prinzip der vollständigen Induktion werdet ihr noch sehr oft im Studium und dem ersten Semester begegnen. Es ist daher sehr wichtig, sich die Idee klarzumachen.
Wir müssen nun einige Beispiele behandeln, damit das klar wird, und werden uns zunächst dabei auf die klassischen Beispiele beschränken. Darüber hinaus werdet ihr sehen, dass die Induktion als Hilfsmittel eine breite Anwendung in der Mathematik findet.

Beispiel 31 (Der kleine Gauß)
Beweise: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dazu gibt es auch eine nette kleine Geschichte: Der Lehrer von Gauß soll einmal seinen Schülern die Aufgabe gegeben haben (da er keine Lust auf Unterricht hatte) die ersten 100 natürlichen Zahlen aufzusummieren. Nach ein paar Minuten meldete sich dann der kleine Gauß und nannte dem Lehrer das richtige Ergebnis, 5050.
Anmerkung: Gauß führte damals noch keine vollständige Induktion durch, sondern sortierte die Zahlen zu Zweierpaaren, deren Summe 101 *ergibt, und stellte fest, dass es hiervon genau* 50 *gibt, also* $101 \cdot 50 = 5050$.

Beweis:
Induktionsanfang für $n = 1$*:*

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \text{ (linke Seite)} \quad \text{und} \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \text{ (rechte Seite)}$$

Beide Seiten stimmen überein. Der Induktionsanfang ist erfüllt.
Induktionsschritt: *Von* n *auf* $n+1$:
Dabei sei $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ wahr (*Induktionsvoraussetzung*). Im Folgenden steht (IV) für die Induktionsvoraussetzung.
Zu zeigen ist also, dass gilt:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \; .$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) && |\text{Anwendung der IV} \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Und genau dies hatten wir zu zeigen. q.e.d.

■

Beispiel 32
Zeige: Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist n^2. Also:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

(Alternativ kann auch $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)=n^2$ gezeigt werden.)

Beweis:
Induktionsanfang für $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1)=2\cdot 1-1=1 \text{ (linke Seite)} \quad \text{und} \quad 1^2=1 \text{ (rechte Seite)}.$$

Beide Seiten stimmen überein. Der Induktionsanfang ist erfüllt.
Induktionsschritt: *Von n auf $n+1$*: Dabei sei $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$ für ein $n\in\mathbb{N}$ wahr (*Induktionsvoraussetzung*). Zu zeigen ist also, dass gilt: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)=(n+1)^2$. Wir haben:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)&=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2(n+1)-1 && |\text{Anwendung der IV}\\ &=n^2+2(n+1)-1\\ &=n^2+2n+2-1\\ &=n^2+2n+1=(n+1)^2.\end{aligned}$$

Und genau dies war zu zeigen. q.e.d.

■

Beispiel 33 (Bernoullische Ungleichung)
Beweise: Für $n\in\mathbb{N}, a\in\mathbb{R}, a\geq -1$ gilt: $(1+a)^n\geq 1+na$.

Beweis:
Induktionsanfang für $n=1$:

$$(1+a)^1\geq 1+1\cdot a \Leftrightarrow 1+a\geq 1+a.$$

Beide Seiten stimmen überein, bzw. wir erhalten eine wahre Aussage, da ja auch die Gleichheit zugelassen wird. Der Induktionsanfang ist damit erfüllt.

Induktionsschritt: *Von n auf $n+1$*: Dabei sei $(1+a)^n\geq 1+na$ wahr (*Induktionsvoraussetzung*). Zu zeigen ist also, dass gilt $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)a$. Es ist wegen $1+a\geq 0$:

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1}&=(1+a)^n\cdot(1+a) && |\text{Anwendung der IV}\\ &\geq(1+na)\cdot(1+a)\\ &=1+na+a+na^2\\ &=1+(n+1)a+na^2.\end{aligned}$$

Da nun $na^2\geq 0$ gilt, folgt:

$$1+(n+1)a+na^2\geq 1+(n+1)a.$$

Tja, und das hatten wir zu zeigen! Also haben wir die Bernoullische Ungleichung bewiesen. q.e.d.

■

Beispiel 34

Zeige: Für $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$ gilt: $2^n > n^2$.

Beweis: Dieses Beispiel zeigt, dass der Induktionsanfang nicht immer mit 0 oder 1 beginnen muss. *Induktionsanfang für* $n = 5$:

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

Wahre Aussage. Der Induktionsanfang ist also erfüllt.

Induktionsschritt: Dabei sei $2^n > n^2$ wahr (IV). Zu zeigen ist also, dass gilt $2^{n+1} > (n+1)^2$. Es gilt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \overset{(\mathrm{IV})}{>} 2n^2 = n^2 + n^2 \overset{(*)}{\geq} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

(*) Hier nutzen wir aus, dass für $n \geq 3$ gilt: $n^2 \geq 2n + 1$. Dies kann ebenfalls mit vollständiger Induktion bewiesen werden (Übung für euch). Also sind wir fertig. q.e.d.

■

Beispiel 35

Für alle $n \geq 4$ gilt: $n! > 2^n$.

Beweis:

Induktionsanfang für $n = 4$*:*

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 > 16 = 2^4.$$

Der Induktionsanfang ist damit erfüllt.

Induktionsschritt: Von n *auf* $n+1$

Zu zeigen ist, dass unter der Induktionsvoraussetzung (IV) $n! > 2^n$ für ein n gilt, die Ungleichung $(n+1)! > 2^{n+1}$ gültig ist. Wir starten:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{(\mathrm{IV})}{>} (n+1) \cdot 2^n > 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n.$$

Den letzten Schritt verifizieren wir noch:

$$(n+1) \cdot 2^n > 2 \cdot 2^n \quad \Leftrightarrow \quad n + 1 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad n > 1.$$

was offenbar wahr ist. q.e.d.

■

Beispiel 36

Wir wollen zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{2 \cdot k - 3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}.$$

Beweis:

Induktionsanfang für $n = 2$: Für die linke Seite erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{2 \cdot k - 3}{3^k} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{3^2} = \frac{1}{9}$$

und für die rechte Seite

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} = \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}.$$

Der Induktionsanfang ist damit also erfüllt.

Induktionsschritt: Von n auf $n+1$:

Wir müssen nun zeigen, dass $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}$ und zwar unter der Induktionsvoraussetzung (IV), dass $\sum_{k=2}^{n} \frac{2 \cdot k - 3}{3^k} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n}$ für ein n schon bewiesen ist.

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2 \cdot k - 3}{3^k} + \frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}} =$$

Nun folgt mit (IV):

$$\begin{aligned} \ldots &= \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2n-1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{3n}{3^{n+1}} + \frac{2n-1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

q.e.d.

■

Beispiel 37

Wir behaupten, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

Beweis:

Induktionsanfang für $n = 0$ bzw. $n = 1$:

$$n = 0 : \sum_{k=0}^{0} k \cdot k! = 0 \cdot 0! = 0 = 1 - 1 = (0+1)! - 1.$$

$$n = 1 : \sum_{k=0}^{1} k \cdot k! = 0 \cdot 0! + 1 \cdot 1! = 1 = 2 - 1 = (1+1)! - 1.$$

Der Induktionsanfang ist damit erfüllt.
Induktionsschritt non n auf $n+1$:
Wir müssen zeigen, dass $\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1$ unter der Induktionsvoraussetzung (IV), dass $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$ für ein n schon bewiesen ist. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot k! + (n+1) \cdot (n+1)! \qquad |\text{Anwendung der IV} \\ &= 1 \cdot (n+1)! - 1 + (n+1)!(n+1) \\ &= (n+1)!(1+n+1) - 1 = (n+2)(n+1)! - 1 = (n+2)! - 1.\end{aligned}$$

Damit ist auch diese Aufgabe gelöst. q.e.d.

■

Beispiel 38 (Binomischer Lehrsatz)
Als weiteres Beispiel wollen wir den *binomischen Lehrsatz* beweisen. Dieser lautet:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \ \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Wir wenden die Induktion an:

Beweis: *Induktionsanfang*: Für $n = 0$ ergibt sich:

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} \cdot 1 \cdot 1 = \binom{0}{0} \cdot x^{0-0} \cdot y^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} \cdot x^{0-k} y^k.$$

Wir führen den Induktionsanfang nochmals für $n = 1$ durch:

$$(x+1)^1 = x + y = \binom{1}{0} \cdot x \cdot y^0 + \binom{1}{1} \cdot x^0 \cdot y^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \cdot x^{0-k} \cdot y^k.$$

Induktionsschritt: *Von n auf $n+1$*: Wir müssen zeigen, dass

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

und zwar unter der Induktionsvoraussetzung, dass

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

für ein n schon bewiesen ist. Es gilt:

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)^n \cdot (x+y)^1.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
\ldots &= (x+y)^1 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x \cdot x^{n-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot y \cdot y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}
\end{aligned}$$

Wir substituieren im zweiten Summanden $k' = k+1$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n}{k'-1} x^{n-k'+1} y^{k'} \\
&= \binom{n}{0} \cdot x^{n+1} \cdot y^0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^{n-k+1} y^k .
\end{aligned}$$

Mit $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$ (siehe Beispiel 27 bzw. 28) folgt die Behauptung. Als Übungsaufgabe vervollständigt bitte den Beweis. q.e.d.

Ein Spezialfall des binomischen Lehrsatzes ist zum Beispiel die erste binomische Formel für $n = 2$. Wir erhalten demnach:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 &= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} \cdot x^{2-k} \cdot y^k \\
&= \binom{2}{0} \cdot x^2 \cdot y^0 + \binom{2}{1} \cdot x^1 \cdot y^1 + \binom{2}{2} \cdot x^0 \cdot y^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 .
\end{aligned}$$

Weiter erhält man:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1, \\
(x+y)^1 &= x + y, \\
(x+y)^2 &= x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2, \\
(x+y)^3 &= x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3, \\
(x+y)^4 &= x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot y + 6 \cdot x^2 \cdot y^2 + 4 \cdot x \cdot y^3 + y^4 \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Das Schöne ist, dass wir uns das gar nicht alles merken brauchen, denn wenn wir den binomischen Lehrsatz kennen, dann können wir uns alles ohne Probleme in ein paar Minuten herleiten.

Und die Koeffizienten werdet ihr alle im Pascalschen Dreieck wiederfinden (siehe Beispiel 27). :-) Für die, denen der Beweis des binomischen Lehrsatzes zu schnell ging, hier nochmal eine ausführlichere Version des Induktionsschrittes:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1} \\
&= (x+y)\cdot(x+y)^n \\
&= (x+y)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^{n-k}\cdot y^k \\
&= (x+y)\cdot\left[\binom{n}{0}\cdot x^n+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot y+\binom{n}{2}\cdot x^{n-2}\cdot y^2+\ldots+\binom{n}{n}\cdot y^n\right] \\
&= \binom{n}{0}\cdot x^{n+1}+\binom{n}{0}\cdot x^n\cdot y+\binom{n}{1}\cdot x^n\cdot y+\binom{n}{1}\cdot x^{n-1}\cdot y^2 \\
&+\ldots+\binom{n}{n}\cdot x\cdot y^n+\binom{n}{n}\cdot y^{n+1} \\
&= x^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]\cdot x^n\cdot y+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]\cdot x^{n-1}\cdot y^2 \\
&+\ldots+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]\cdot x\cdot y^n+y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}\cdot x^{n+1}+\binom{n+1}{1}\cdot x^n\cdot y+\binom{n+1}{2}\cdot x^{n-1}\cdot y^2 \\
&+\ldots+\binom{n+1}{n}\cdot x\cdot y^n+\binom{n+1}{n+1}\cdot y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\cdot x^{n+1-k}\cdot y^k.
\end{aligned}$$

■

Beispiel 39 (Verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung)
Wir wollen die verallgemeinerte Bernoullische Ungleichung beweisen:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\geq 1+\sum_{k=1}^{n}x_k,$$

wobei $x_1,\ldots,x_n\geq 0$, $n\in\mathbb{N}$ fest.

Beweis: *Induktionsanfang für* $n=1$:

$$\prod_{k=1}^{1}(1+x_k)=1+x_1\geq 1+\sum_{k=1}^{1}x_k=1+x_1.$$

Da bei der Ungleichung auch die Gleichheit zugelassen ist, ist der Induktionsanfang erfüllt.

Induktionsschritt von n auf $n+1$: Zu zeigen ist

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

unter der Induktionsvoraussetzung, dass

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} x_k$$

für ein n bewiesen ist.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) &= \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\cdot(1+x_{n+1}) && |\text{Anwendung der IV}\\
&\geq \left(1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\cdot(1+x_{n+1})\\
&\geq 1+x_{n+1}+\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\\
&= 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k\\
&\geq 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k,
\end{aligned}$$

da $x_{n+1}\cdot\sum_{k=1}^{n} x_k \geq 0$. Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

■

Beispiel 40 (Geometrische Summenformel)
Beweise die geometrische Summenformel

$$a^{n+1}-b^{n+1} = (a-b)\cdot\sum_{k=0}^{n} a^k\cdot b^{n-k}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis: Diese kann mittels vollständiger Induktion bewiesen werden.
Induktionsanfang für $n=0$

$$\begin{aligned}
a^{0+1}-b^{0+1} &= (a-b)\cdot\sum_{k=0}^{0} a^k\cdot b^{0-k} && \Leftrightarrow\\
a^1-b^1 &= (a-b)\cdot(a^0\cdot b^{0-0}) && \Leftrightarrow\\
a-b &= (a-b)\cdot 1 = a-b
\end{aligned}$$

Der Induktionsanfang ist damit erfüllt.

Induktionsschritt von n auf $n+1$: Wir müssen zeigen, dass $a^{n+2} - b^{n+2} = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n+1} a^k \cdot b^{n+1-k}$ gilt und zwar unter der Induktionsvoraussetzung (IV), dass $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n-k}$ für ein n schon bewiesen ist:

$$\begin{aligned}
(a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n+1} a^k \cdot b^{n+1-k} &= (a-b) \cdot \left[\sum_{k=0}^{n} a^k \cdot b^{n+1-k} + a^{n+1} \cdot b^{n+1-(n+1)}\right] \\
&= (a-b) \cdot \left[\sum_{k=0}^{n+1} a^k \cdot b \cdot b^{n-k} + a^{n+1} \cdot b^{n+1-n-1}\right] \\
&= (a-b) \cdot \left[b \cdot \sum_{k=0}^{n+1} a^k \cdot b^{n-k} + a^{n+1} \cdot b^0\right] \\
&= (a-b) \cdot \left[b \cdot \sum_{k=0}^{n+1} a^k \cdot b^{n-k} + a^{n+1} \cdot 1\right] \\
&= b \cdot (a-b) \cdot \sum_{k=0}^{n+1} a^k \cdot b^{n-k} + (a-b)a^{n+1}.
\end{aligned}$$

Nach der Induktionsvorausetzung folgt:

$$\begin{aligned}
\ldots &= b \cdot \left(a^{n+1} - b^{n+1}\right) + (a-b) \cdot a^{n+1} \\
&= b \cdot a^{n+1} - b^{n+2} + a^{n+2} - b \cdot a^{n+1} \\
&= a^{n+2} - b^{n+2}.
\end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

■

Beispiel 41 (Verallgemeinerte Dreiecksungleichung)
Für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| \,.$$

Beweis:
Induktionsanfang für $n = 1$:

$$\left|\sum_{k=1}^{1} a_k\right| = |a_1| \leq |a_1| = \sum_{k=1}^{1} |a_k| \quad \checkmark.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Induktionsvoraussetzung: $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ für ein $n \in \mathbb{N}$ schon bewiesen.
Zu zeigen: Die Behauptung gilt auch für $(n+1)$, also $\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Induktionsschluss: Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|\,.\end{aligned}$$

q.e.d.

■

Beispiel 42

Beweise durch vollständige Induktion:

$$4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = \prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n\cdot(n+1)} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

Induktionsanfang für $n = 1$:

linke Seite:	$4^1 = 4$
rechte Seite:	$2^{1\cdot(1+1)} = 4 \quad \checkmark.$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Induktionsvoraussetzung:

$$4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \ldots \cdot 4^n = \prod_{k=1}^{n} 4^k = 2^{n\cdot(n+1)}.$$

Induktionsschluss: Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} 4^k &= \left(\prod_{k=1}^{n} 4^k\right) \cdot 4^{n+1} \\ &= 2^{n\cdot(n+1)} \cdot 2^{2(n+1)} \\ &= 2^{n^2+n} \cdot 2^{2n+2} \\ &= 2^{n^2+3n+2} \\ &= 2^{(n+1)\cdot(n+2)}.\end{aligned}$$

q.e.d.

■

Beispiel 43

Man zeige: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n^2 + n$ eine gerade (das heißt durch 2 teilbare) Zahl.

Beweis: *Induktionsanfang für* $n = 1$: $1^2 + 1 = 2$ ist eine gerade Zahl.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Induktionsvoraussetzung: $n^2 + n$ ist eine gerade Zahl.
Zu zeigen: Die Behauptung gilt auch für $(n+1)$, also: $(n+1)^2 + (n+1)$ ist eine gerade Zahl.
Induktionsschluss:

$$(n+1)^2 + (n+1) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + 3n + 2 = (n^2 + n) + 2 \cdot (n+1).$$

Dies ist eine gerade Zahl, weil der erste Summand nach Induktionsvoraussetzung gerade ist und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 2 ist.
q.e.d.
■

Dass die Induktion sehr vielfältig eingesetzt werden kann, zeigen die folgenden Beispiele.

Beispiel 44
Man zeige: Für jedes $n \geq 0$ ist $n^3 - 6n^2 + 14n$ durch 3 teilbar.

Beweis:
Induktionsanfang für $n = 0$: $0^3 - 6 \cdot 0^2 + 14 \cdot 0 = 0$ ist trivialerweise durch 3 ohne Rest teilbar.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte die Induktionsvoraussetzung: $n^3 - 6n^2 + 14n$ ist durch 3 teilbar.
Zu zeigen: Die Behauptung gilt auch für $(n+1)$, also: $(n+1)^3 - 6 \cdot (n+1)^2 + 14 \cdot (n+1)$ ist durch 3 teilbar.
Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 6 \cdot (n+1)^2 + 14 \cdot (n+1) &= (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 6(n^2 + 2n + 1) \\ &\quad +14 \cdot (n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 6n^2 - 12n - 6 \\ &\quad +14n + 14 \\ &= n^3 - 3n^2 + 5n + 9 \\ &= n^3 - 6n^2 + 14n + 3n^2 - 9n + 9 \\ &= (n^3 - 6n^2 + 14n) + 3 \cdot (n^2 - 3n + 3)\end{aligned}$$

und wie wir sehen können, ist das durch 3 teilbar, da der erste Summand nach IV durch 3 teilbar ist und der zweite Summand ein ganzzahliges Vielfaches von 3 ist.
q.e.d.
■

Beispiel 45
Zeige: n Elemente kann man auf $n!$ verschiedene Arten anordnen.
Das kann man wieder mit der vollständigen Induktion beweisen.

Beweis:
Induktionsanfang für $n = 1$ (also ein Element): Ein Element lässt sich auf eine Art anordnen: $1 = 1$. Supi das haben wir! ✓
Induktionsschluss: Nun müssen wir ein wenig allgemeiner werden. Geben wir uns einfach Elemente vor: Gegeben seien die Elemente M_1 bis M_n. Diese lassen sich nach Induktionsvoraussetzung auf $n!$ Arten anordnen.
Nun kommt ein neues Element M_{n+1} hinzu. Für die $(n+1)$ Elemente stehen also $(n+1)$ Plätze zur Verfügung. Das Element M_{n+1} kann auf irgend einen dieser $(n+1)$ Plätze gesetzt werden. Für die restlichen Elemente M_1 bis M_n stehen nun noch jeweils n Plätze zur Verfügung. Dafür gibt es nach Induktionsvoraussetzung $n!$ Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es also für alle Elemente M_1 bis M_{n+1} $(n+1) \cdot n! = (n+1)!$ Möglichkeiten. Der Beweis ist vollzogen und die Aufgabe damit erledigt.
q.e.d.
■

Beispiel 46 (Induktion mit falschem Induktionsschritt)
Wir wollen noch zeigen, dass es wichtig ist, dass sowohl Induktionsanfang als auch Induktionsschritt überprüft werden und es nicht ausreicht, nur eines von beiden zu zeigen. Daher stellt euch Folgendes vor.
Wir behaupten: *Alle Menschen sind gleich groß* . Wir wollen dies mit Induktion „beweisen“ und betrachten dazu einen Raum mit n Personen.
Induktionsanfang: Für eine Person klar erfüllt. Sie ist gleich groß wie sie selbst.
Induktionsschritt: Die Induktionsvoraussetzung ist, dass n Personen in einem Raum dieselbe Größe haben. Wenn nun $n + 1$ Personen in einem Raum sind, so geht eine Person raus, die restlichen n sind nach Voraussetzung gleich groß. Um sicher zu gehen, dass die hinausgegangene Person gleich groß ist wie die anderen, lassen wir sie wieder herein und schicken eine andere Person hinaus, sodass wieder n Personen im Raum sind, die nach Voraussetzung wieder gleich groß sind. Also sind, wie wir schon immer gedacht haben, alle Menschen gleich groß. Wo ist der Fehler? Der Fehler liegt darin, dass der Schluss von n auf $n+1$ hier erst für $n > 2$ möglich ist, da sonst die Argumentation mit den im Raum zurückbleibenden Personen nicht klappt. Zwar sind auch unter 0 Personen alle gleich groß, aber der verwendete Schluss setzt voraus, dass die beiden Personen, die nacheinander den Raum verlassen, gleich groß mit den zurückbleibenden Personen sind, und das funktioniert hier nicht. ■

Beispiel 47 (Induktion mit fehlendem Induktionsanfang)
Das folgende Beispiel zeigt, dass auch nicht auf den Induktionsanfang verzichtet werden kann, auch wenn der Induktionsschritt gelingt. Dazu betrachten wir die Ungleichung $n + 1 < n$ und führen den Induktionsschritt durch, indem wir annehmen, dass $n + 1 < n$ schon für ein n bewiesen wurde, dann gilt $n + 2 = n + 1 + 1 < n + 1$. Der Induktionsschritt gelingt also, der Induktionsanfang ist aber für kein n erfüllt, und die Behauptung ja auch offensichtlich falsch. ■

6 Gruppen, Ringe, Körper

Übersicht

Begriffe wie Gruppen, Ringe und Körper werden euch im Studium immer wieder begegnen. Ein sicherer Umgang mit diesen Objekten ist daher sehr wichtig. Wir werden diese also definieren und an einigen Beispielen erklären.

6.1 Definitionen

Definition 6.1 (Gruppe)
Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ : G \times G \to G$, die folgende Bedingungen erfüllt:

(G1) $\circ : G \times G \to G$ ist assoziativ, das heißt, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)\ \forall a, b, c \in G$.

(G2) Es gibt ein neutrales Element $e \in G$ mit $e \circ a = a \circ e = a\ \forall a \in G$.

(G3) Jedes Element $a \in G$ besitzt ein inverses Element. Wir bezeichnen es mit a^{-1}, und es gilt dann $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e\ \forall a \in G$.

Ist die Verknüpfung noch kommutativ (abelsch), das heißt gilt $a \circ b = b \circ a\ \forall a, b \in G$, so nennt man die Gruppe $(G, \circ)$ **kommutativ** oder **abelsch**.

Anmerkung: Die Axiome $(G1)$ bis $(G3)$ sind nicht minimal. Es genügt zum Beispiel nur ein linksneutrales bzw. linksinverses Element zu fordern. Die Begriffe „linksneutral“ und „linksinvers“ bedeuten dabei einfach nur, dass $e \circ a = a$ bzw. $a^{-1} \circ a = e$. So wird eine Gruppe zum Beispiel in [Bos08] definiert.

Definition 6.2 (Untergruppe)
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Eine nichtleere Teilmenge $U \subset G$ heißt **Untergruppe** der Gruppe G, wenn Folgendes gilt:

(U1) Es existiert ein neutrales Element $e \in U$
(es ist dasselbe wie in der Gruppe G).
(U2) Ist $a \in U$, so existiert auch das Inverse, das heißt, $a^{-1} \in U$.
(U3) $a, b \in U \Rightarrow a \circ b \in U$ (Abgeschlossenheit).

Definition 6.3 (Gruppenhomomorphismus)
Seien $(G, *)$ und $(H, \cdot)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $f : G \to H$ heißt **Gruppenhomomorphismus** genau dann, wenn für alle $a, b \in G$ gilt

$$f(a * b) = f(a) \cdot f(b).$$

Definition 6.4 (Kern und Bild eines Gruppenhomomorphismus)
Seien $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und e_G, e_H die neutralen Elemente von G bzw. H.

1. Der Kern von f ist definiert als
$$\ker(f) := \{g \in G : f(g) = e_H\}.$$
2. Das Bild von f ist definiert als
$$\mathrm{im}(f) := f(G) = \{f(g) \in H : g \in G\}.$$

Anmerkung: Auf Morphismen werden wir noch genauer in Kapitel 18 eingehen. Um keinen Bruch in der Struktur des Buches zu erhalten, führen wir diese hier schon einmal an. Wer einen umfassenden Überblick erhalten möchte, schlage im Kapitel 18 über Morphismen nach.

Definition 6.5 (Ring)
Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+, \cdot$. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt **Ring** genau dann, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:
(R1) $(R, +)$ bildet eine abelsche Gruppe.
(R2) Für alle $a, b, c \in R$ gilt die Assoziativität der Multiplikation: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
(R3) Es gibt ein Einselement, das wir mit 1 bezeichnen, d.h
$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \ \forall a \in R$.
(R4) Es gelten die Distributivgesetze, das heißt für alle $a, b, c \in R$ gilt:
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Der Ring heißt **kommutativ** oder **abelsch**, wenn $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in R$.

Definition 6.6 (Ringhomomorphismus)
Seien R und R' zwei Ringe. Eine Abbildung $f : R \to R'$ heißt ein **Ringhomomorphismus**, falls für alle $a, b \in R$ gilt:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

Definition 6.7 (Körper)
Ein **Körper** ist ein kommutativer Ring $(K, +, \cdot)$ mit Einselement, für den zusätzlich gilt: Für jedes $a \in K, a \neq 0$, wobei 0 das neutrale Element der Addition in $(K, +)$ ist, gibt es ein $a^{-1} \in K$ mit $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = 1$, wobei 1 das Einselement von K ist. Man sagt: Jedes Element außer der Null besitzt ein **Inverses**.
Anders formuliert: Ein Körper ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, für das gilt:
(K1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(K2) Ist 0 das neutrale Element von $(K, +)$, so bildet $(K \setminus \{0\}, \cdot) =: K^*$ eine abelsche Gruppe.
(K3) Es gilt das Distributivgesetz: Für alle $a, b, c \in K$ gilt:
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Anmerkung: Das andere Distributivgesetz $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *folgt sofort aus der Kommutativität.*

Definition 6.8 (Körperhomomorphismus)
Seien K und K' zwei Körper. Eine Abbildung $f : K \to K'$ heißt ein **Körperhomomorphismus**, falls für alle $a, b \in K$ gilt:

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \ f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b).$$

6.2 Sätze und Beweise

Satz 6.1 (Eindeutigkeit des neutralen Elements einer Gruppe)
Das neutrale Element einer Gruppe G ist eindeutig bestimmt.

Anmerkung: Der Satz kann auch auf Ringe und Körper übertragen werden. Weiterhin bemerken wir, dass das Wort „eindeutig“ sich sehr mächtig anhört. Wir meinen aber nur, dass es ein einziges neutrales Element gibt.

Beweis: Seien e und e' zwei neutrale Elemente der Gruppe G. Dann gilt:

$$e = e \circ e' = e'.$$

q.e.d.

Satz 6.2 (Eindeutigkeit inverser Elemente)
Das inverse Element a^{-1} zu einem Element $a \in G$ der Gruppe G ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Seien a^{-1} und a'^{-1} zwei inverse Elemente zum Element $a \in G$. Dann gilt:

$$a^{-1} = a^{-1} \circ e = a^{-1} \circ (a \circ a'^{-1}) = (a^{-1} \circ a) \circ a'^{-1} = e \circ a'^{-1} = a'^{-1}.$$

q.e.d.

Satz 6.3 (Untergruppenkriterium)
Eine nichtleere Teilmenge U einer Gruppe G ist eine Untergruppe genau dann, wenn $\forall a, b \in U \Rightarrow a \circ b^{-1} \in U$.

Beweis: Die Richtung „⇒“ ist trivial und folgt sofort aus den Axiomen (U1)-(U3) aus der Definition 6.2 einer Untergruppe.
Für die Richtung „⇐“ müssen wir nachweisen, dass die Axiome (U1) bis (U3) erfüllt sind.
Zu (U1): Sei $a := b$, dann gilt $a \circ b^{-1} = b \circ b^{-1} = e \in U$.
Zu (U2): Sei $a := e$, dann gilt $a \circ b^{-1} = e \circ b^{-1} = b^{-1} \in U$.
Zu (U3): Übungsaufgabe. (Das wollten wir immer schon einmal schreiben. :-))

q.e.d.

Satz 6.4 (Eigenschaften eines Gruppenhomomorphismus)
Es sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt:
1. *$f(e_G) = e_H$, wobei e_G das neutrale Element der Gruppe G und e_H das der Gruppe H ist.*
2. *$f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ $\forall a \in G$.*

Beweis:
Zu 1.: Da f nach Voraussetzung ein Gruppenhomomorphismus ist, gilt

$$f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G) f(e_G) \Rightarrow e_H = f(e_G).$$

Zu 2.: Dies folgt aus a) mit

$$f(a) f(a^{-1}) = f(a a^{-1}) = f(e_G) = e_H \Rightarrow f(a)^{-1} = f(a^{-1}).$$

q.e.d.

6.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 6.1 einer Gruppe: Um zu zeigen, dass eine Menge mit einer Verknüpfung eine Gruppe bildet, müssen wir nur die Axiome (G1) bis (G3) aus Definition 6.1 nachweisen. Dabei ist auch wichtig zu zeigen, dass die Menge abgeschlossen ist, das heißt, dass die Verknüpfung nicht aus der „Menge herausführt“. Dies sagt gerade $\circ : G \times G \to G$ aus. Schauen wir uns Beispiele an.

Beispiel 48

- Sei K ein Körper (siehe Definition 6.7) mit der additiven Verknüpfung $+$ und der multiplikativen Verküpfung $\cdot$. Dann sind $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppen. Dies folgt sofort aus den Definitionen. Vergleicht dazu die Definition 6.7 eines Körpers mit der Definition 6.1 einer Gruppe. Bei $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ müssen wir die Null ausschließen, da zur Null kein Inverses existiert.

- Sei R ein Ring (siehe Definition 6.5) mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$. Dann ist $(R, +)$ ebenfalls eine Gruppe. Auch dies folgt sofort aus den Definitionen. $(R, \cdot)$ dagegen ist keine Gruppe, da nicht jedes Element ein Inverses besitzen muss.

- Die Menge der ganzen Zahlen mit der Addition $+$ als Verknüpfung bildet eine abelsche Gruppe. Wir geben eine „Beweisskizze“ (dieser müsste natürlich noch mathematisch viel strenger ausgeführt werden, wir belassen es an dieser Stelle aber dabei): Zunächst ist die Verknüpfung $+ : G \times G \to G$ abgeschlossen. Wenn wir zwei ganze Zahlen addieren, erhalten wir wieder eine ganze Zahl. Ebenfalls überzeugt man sich leicht, dass (G1)-(G3) aus Definition 6.1 erfüllt sind, denn es gilt:

$$\begin{aligned} &(G1) && (a+b)+c = a+(b+c)\ \forall a,b,c \in \mathbb{Z}, \\ &(G2) && a+0 = 0+a = a\ \forall a \in \mathbb{Z}, \\ &(G3) && a+(-a) = -a+a = 0\ \forall a \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe, da nicht jedes Element ein inverses Element besitzt. Beispielsweise besitzt die 2 kein Inverses, da $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

- Weitere Gruppen sind $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{C}, +), (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$. Die Details möge unser interessierter Leser sich selbst überlegen.

- $(\mathbb{N}, +)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ bilden keine Gruppen.

- Sei X eine Menge. Mit $Abb(X, X)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen der Form $f : X \to X$. Sind $f, g \in Abb(X, X)$, so bezeichnet $f \circ g$ die Komposition von f und g, also die Abbildung

$$f \circ g : X \to X,\ x \mapsto f(g(x)).$$

Die Frage, die sich nun stellt, ist, ob $Abb(X, X)$ mit der Komposition $\circ$ als Verknüpfung eine Gruppe bildet? Na, versuchen wir mal die Axiome nachzuweisen:

(G1) Die Assoziativität ist erfüllt, wie man so einsieht:

$$(f\circ(g\circ h))(a) = (f\circ(g(h(a)))) = f(g(h(a))) = (f\circ g)(h(a)) = ((f\circ g)\circ h)(a).$$

(G2) ist ebenfalls erfüllt. Die Identität $x \mapsto x$ ist das neutrale Element.

(G3) ist nicht immer erfüllt. Es muss ja eine Umkehrabbildung geben. Aber diese existiert nicht immer, sondern nur genau dann, wenn f bijektiv ist.

Im Allgemeinen ist $(Abb(X, X), \circ)$ also keine Gruppe. Schränkt man sie jedoch auf

$$S(X) := \{f \in Abb(X, X) : f \text{ bijektiv}\}$$

ein, so bildet $(S(X), \circ)$ eine Gruppe. Sie heißt die *symmetrische Gruppe* (siehe dazu auch Definition 19.1). In den nächsten Beispielen greifen wir schon einmal voraus und nehmen an, dass ihr schon wisst, was man unter einer Matrix versteht. Sollte das nicht der Fall sein, so schlagt einfach im Kapitel 15 nach oder überspringt die Beispiele.

- Die Menge aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über einem Körper K mit Matrizenmultiplikation bildet eine Gruppe. Wir schreiben $(GL_n(K), \cdot)$ und nennen diese die *allgemeine lineare Gruppe (general linear group)*. Wir werden im Kapitel 15 über die Matrizen sehen, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ ist. Das neutrale Element ist die Einheitsmatrix und das Inverse zu einer Matrix $A \in (GL_n(K), \cdot)$ ist die inverse Matrix A^{-1}, denn es gilt dann $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$, wobei E_n die Einheitsmatrix bezeichnen soll. Dazu aber später im Kapitel 15 über Matrizen mehr.

- Für die Leser, die schon wissen, was man unter einer Determinante versteht (siehe auch Kapitel 20), haben wir noch ein Beispiel, und zwar die *spezielle lineare Gruppe (special linear group)* $/SL_n(K), \cdot)$. Das ist die Menge aller Matrizen, die die Determinante 1 besitzen. Die Abgeschlossenheit folgt aus dem Multiplikationssatz (Kapitel 20, Satz 20.2, Eigenschaft 6) für Matrizen,

  $$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1.$$

  Spätestens nach dem Kapitel 15 über Matrizen versteht ihr diese Ausführungen :-).

- Sei $G = \mathbb{R}$ mit folgender Verknüpfung gegeben:

  $$* : \begin{cases} G \times G \to G \\ (a, b) \mapsto a * b := \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

$(G, *)$ bildet keine Gruppe, da die Verknüpfung nicht assoziativ ist, wie folgende Rechnungen zeigen:

$$(a * b) * c = \left(\frac{a+b}{2}\right) * c = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) * c = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) + \frac{c}{2} = \frac{a}{4} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2}.$$

$$a * (b * c) = a * \left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{4}.$$

Schon für $a = 1, b = c = 0$ ist die Assoziativität nicht erfüllt.

- $(M := \{1, -1\}, +)$ ist keine Gruppe, denn sie ist nicht abgeschlossen, weil $-1 + 1 = 0 \notin M$.

■

Zur Definition 6.2 einer Untergruppe: Um zu zeigen, dass eine nichtleere Teilmenge einer Gruppe eine Untergruppe ist, können wir entweder die Axiome (U1)-(U3) aus Definition 6.1 nachweisen oder das Untergruppenkriterium (Satz 6.3) anwenden. Man sollte von Fall zu Fall unterscheiden, was am einfachsten ist.

Beispiel 49

- Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und seien $H_1, H_2 \subset G$ zwei Untergruppen. Wir zeigen, dass dann $H_1 \cap H_2$ eine Untergruppe ist. Wir verwenden das Untergruppenkriterium (Satz 6.3). Zunächst zeigen wir aber, dass $H_1 \cap H_2$ nichtleer ist. Es ist $e \in H_1 \cap H_2$, da $e \in H_1$ und $e \in H_2$, also liegt es auch im Schnitt.

  Nun wenden wir das Untergruppenkriterium an. Seien $a, b \in H_1 \cup H_2$. Da H_1 und H_2 nach Voraussetzung Untergruppen sind, ist $a \circ b^{-1} \in H_1$ und $a \circ b^{-1} \in H_2$. Es gilt nun $a \circ b^{-1} \in H_1 \cap H_2$. Wir sind fertig.

- Seien $H_1, H_2 \subset G$ zwei Untergruppen von $(G, \circ)$ und G eine Gruppe. Ist $H_1 \cup H_2$ wieder eine Untergruppe? Dies ist nicht der Fall. Um zu zeigen, dass dies im Allgemeinen nicht sein kann, führen wir ein Gegenbeispiel an:

  $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$ ist eine Gruppe, und seien $H_1 = 2\mathbb{Z} = \{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}$ und $H_2 = 3\mathbb{Z} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$ zwei Untergruppen von G. Dann ist $H_1 \cup H_2 = \{..., -6, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 6, ...\}$. Diese Menge ist nicht abgeschlossen, denn $2 + 3 = 5 \notin H_1 \cup H_2$, und damit noch nicht einmal eine Gruppe, geschweige denn eine Untergruppe.

- Sei T die Menge der invertierbaren oberen (2×2)-Dreiecksmatrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \ (a, d \neq 0).$$

$(T, \cdot)$, wobei $\cdot$ die Matrizenmultiplikation darstellen soll, und bildet eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe $GL_2(\mathbb{R})$. Um dies zu zeigen, verwenden wir das Untergruppenkriterium. Seien

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & h \end{pmatrix}.$$

Dann sind zunächst $e, h \neq 0$, da sonst die Matrix nicht invertierbar ist (dies werdet ihr spätestens im Kapitel 15 lernen). Dann ist

$$B^{-1} = \frac{1}{eh} \begin{pmatrix} h & -f \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/e & -f/eh \\ 0 & 1/h \end{pmatrix}.$$

Ist dann $A \cdot B^{-1} \in T$? Es muss also wieder von der Form

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad (x, z \neq 0)$$

sein. Rechnen wir es aus:

$$A \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/e & -f/eh \\ 0 & 1/h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a/e & -fa/eh + b/h \\ 0 & -fd/eh + d/h \end{pmatrix} \in T.$$

Es hat also wieder die gewünschte Form und ist damit in T. ■

Zur Definition 6.3 eines Gruppenhomomorphismus: Die Definition 6.3 eines Gruppenhomomorphismus sagt also aus, dass es egal ist, ob wir erst die Elemente $a, b \in G$ verknüpfen und dann abbilden oder ob wir erst jedes Element $a, b \in G$ einzeln abbilden und dann verknüpfen. Schauen wir uns ein Beispiel an.

Beispiel 50

Die Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $a \mapsto 4a$ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es gilt:

$$f(a + b) = 4(a + b) = 4a + 4b = f(a) + f(b).$$

■

Zur Definition 6.4 des Kerns und Bildes eines Gruppenhomomorphismus: Betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 51

Wem Matrizen und Drehmatrizen noch nichts sagen, den verweisen wir auf Kapitel 15 und das Beispiel 143 der linearen Abbildung in Kapitel 17.

Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathbb{R} \to GL_2(\mathbb{R})$ mit

$$\alpha \mapsto A_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

die einer reellen Zahl α die Matrix der Drehung der Ebene um den Winkel α zu ordnet. Es gilt

$$\phi(\alpha + \beta) = A_{\alpha+\beta} = A_\alpha \cdot A_\beta = \phi(\alpha) \cdot \phi(\beta).$$

Also ist ϕ ein Gruppenhomomorphismus. Weiterhin bestimmen wir Kern und Bild von ϕ:

- Das Bild von ϕ ist die Gruppe der orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 (siehe auch Beispiel 48).
- Es ist $\ker(\phi) = 2\pi\mathbb{Z} := \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$, das der Sinus 0 genau für alle Vielfachen von π ist und der Kosinus 1 genau für alle Vielfachen von 2π. ■

Zur Definition 6.5 eines Rings: Beim Ring gibt es nun also zwei Verknüpfungen und nicht nur eine, wie das bei der Gruppe (siehe Definition 6.1) der Fall ist.

Beispiel 52

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind kommutative Ringe.
- Die Menge aller Matrizen mit Matrixaddition und Matrixmultiplikation bildet einen Ring, der jedoch bzgl. der Multiplikation nicht kommutativ ist. Das Einselement ist die Einheitsmatrix.

■

Zur Definition 6.6 eines Ringhomomorphismus: Wir merken nur an, dass wir nun die für die Addition und die Multiplikation in der Ursprungs- und Zielstruktur mit demselben Symbol $+$ und $\cdot$ bezeichnen, wobei aber klargestellt werden muss, dass dies nicht zwingend dieselben Verknüpfungen sein müssen. So ersparen wir uns aber Schreibarbeit :-). Näheres zu den Morphismen in Kapitel 18.

Zur Definition 6.7 eines Körpers: Der Unterschied eines Körpers zu der Definition eines Ringes (siehe Definition 6.5) besteht darin, dass es auch zu jedem Element (außer der Null) ein multiplikatives Inverses gibt und dass die multiplikative Verknüpfung kommutativ sein muss. Damit ist natürlich jeder Körper ein Ring, aber nicht jeder Ring ein Körper.

Beispiel 53

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

- Der kleinste Körper ist der Körper mit den zwei Elementen 0 und 1. Man bezeichnet ihn mit $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$. Addition und Multiplikation sind wie folgt erklärt:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Tab. 6.1: Darstellung der Addition und Multiplikation in $\mathbb{F}_2$ (v.l.n.r.).

Alle Einträge sollten klar sein. Nur über $1 + 1 = 0$ könnte man stolpern. Hat man nicht gelernt, dass $1 + 1 = 2$ ist? Ja, das stimmt schon, aber in dem Körper reduzieren wir modulo 2, betrachten also nur die Reste, und wenn wir $1 + 1 = 2$ durch 2 teilen, erhalten wir den Rest 0. Daher steht dort keine 2, sondern eine Null. Um die Sache relativ leicht zu gestalten, kann man sich die Null zunächst als eine „gerade Zahl" und die Eins als eine „ungerade Zahl" vorstellen. Geht die Tabellen nochmals durch und überlegt euch, dass dies Sinn macht, da „ungerade+ungerade=gerade". Allgemeiner steckt dort das Prinzip der Reduktion modulo p dahinter. Dort betrachten wir nur die Reste. Stellt euch einen Bierkasten vor mit zum Beispiel sieben Flaschen Bier (man muss ja auch mal Alternativen zum 6-Pack haben :-)). Wenn ein Freund nun aber 12 Flaschen mitbringt, dann können wir den Kasten füllen, aber es bleiben fünf Flaschen übrig. Es ist also $12 \mod 7 = 5$. Wir sind sicher: Wenn ihr euch die Reduktion modulo einer Zahl immer so vorstellt, werdet ihr keine Probleme haben ;-).

- Einen interessanten Körper haben wir schon in Kapitel 4 kennengelernt: Den Körper der komplexen Zahlen. ■

6.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 6.1 der Eindeutigkeit des neutralen Elements einer Gruppe: Der Beweis ist sehr leicht. Wir gehen davon aus, dass zwei neutrale Elemente e und e' der Gruppe G existieren und zeigen, dass diese gleich sind. Einerseits gilt natürlich $e \circ e' = e$, da e' ein neutrales Element ist, anderseits gilt aber auch $e \circ e' = e'$, da e ein neutrales Element ist. Ingesamt folgt also $e' = e$. Das war zu zeigen.

Zum Satz 6.2 der Eindeutigkeit inverser Elemente: Wir wollen uns nochmal anschauen, was wir in jedem Schritt des Beweises dieses Satzes benutzt haben.

Die Grundidee ist wieder anzunehmen, dass zu einem Element $a \in G$ zwei inverse Elemente a^{-1} und $a'^{\,-1}$ existieren, und zu zeigen, dass dann aber schon $a^{-1} = a'^{\,-1}$ gilt.
e ist das neutrale Element der Gruppe G. Wir können es daher, ohne etwas zu verändern, mit a^{-1} verknüpfen.

$$a^{-1} = a^{-1} \circ e$$

$a'^{\,-1}$ ist ebenfalls ein inverses Element zu a, daher ist $a \circ a'^{\,-1} = e$.

$$= a^{-1} \circ (a \circ a'^{\,-1})$$

Die Gruppe G ist assoziativ, wir können daher umklammern.

$$= (a^{-1} \circ a) \circ a'^{\,-1}$$

Auch a^{-1} ist ein inverses Element von a, also ist $a^{-1} \circ a = e$.

$$= e \circ a'^{\,-1}.$$

Insgesamt ergibt sich daher die Behauptung $a^{-1} = a'^{\,-1}$.

7 Reelle Zahlen

Übersicht

In diesem Kapitel werden wir uns nun näher mit den reellen Zahlen beschäftigen und definieren, was diese eigentlich sind. Die Sätze in diesem Kapitel sind sehr technisch, hier ist es nicht so (wie beispielsweise im Kapitel 5 über Beweistechniken oder im Kapitel 8 über Folgen, dass euch Aufgaben dieser Art immer wieder begleiten, deswegen werden die Erklärungen etwas kürzer ausfallen als in den anderen Kapiteln, und wir legen das Augenmerk auf das Wesentliche.

7.1 Definitionen

Definition 7.1 (Angeordneter Körper)
Sei K ein Körper. Wir nennen K **angeordnet**, wenn es eine Relation $<$ gibt, für die die folgenden drei **Anordnungsaxiome** gelten:

(A1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen:
$$x = 0,\ 0 < x,\ x < 0 \text{ (}\textbf{Trichotonie}\text{).}$$

(A2) Gilt für zwei Elemente $x, y \in K$ $0 < x$ und $0 < y$, so gilt auch
$$0 < x + y \text{ (}\textbf{Monotonie der Addition}\text{).}$$

(A3) Gilt für zwei Elemente $x, y \in K$ $0 < x$ und $0 < y$, so gilt auch
$$0 < xy \text{ (}\textbf{Monotonie der Multiplikation}\text{).}$$

Wir nennen ein Element $x \in K$ **positiv**, falls $0 < x$ und **negativ**, wenn $x < 0$.

Definition 7.2 (Größer, größergleich und kleinergleich)
Wir schreiben statt $0 < x$ auch $x > 0$. Wenn $0 < y - x$ gilt, so schreiben wir auch $x < y$ oder $y > x$. Weiterhin bedeutet $x \leq 0$, dass entweder $x < 0$ oder $x = 0$ gilt und $x \geq 0$, dass entweder $x > 0$ oder $x = 0$ gilt.

Definition 7.3 (Betrag, Signum)
Sei K ein angeordneter Körper. Dann definieren wir:

$$|x| := \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \qquad \operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Wir nennen $|x|$ den **Betrag** von x und $\operatorname{sign}(x)$ das **Signum** von x.

Definition 7.4 (vollständiger Körper)
Ein angeordneter Körper K heißt **vollständig**, wenn in ihm das **Vollständigkeitsaxiom** gilt:
Jede nichtleere, nach oben (unten) beschränkte Menge $A \subset K$ hat ein Supremum (Infimum).

Definition 7.5 (Intervallschachtelung)
Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen. Wir nennen $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine **Intervallschachtelung**, wenn gilt $I_{n+1} \subset I_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$.

7.2 Sätze und Beweise

Satz 7.1 (Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen aus Definition 7.1)
In einem angeordneten Körper K gilt:

1. *Aus $x > y$ und $y > z$ folgt auch $x > z$ (**Transitivität**).*
2. $x < y \iff -y < -x$.
3. $x \neq 0 \iff x^2 > 0$.
4. $1 > 0$.
5. $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$.
6. $xy > 0 \iff (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$
   $xy < 0 \iff (x < 0 \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y < 0)$.
7. $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow zx > zy$.
8. *Aus $x^2 < y^2$ mit $x \geq 0$ und $y > 0$ folgt $x < y$.*
9. *Gelte $x > y$ und $a > b$, dann gilt auch $x + a > y + b$.*

Beweis:

1. $x - y > 0$ und $y - z > 0 \overset{(A2)}{\Longrightarrow} x - y + y - z > 0 \Rightarrow x - z > 0 \Rightarrow x > z$.
2. $x < y \Leftrightarrow 0 < y - x \Leftrightarrow 0 < (-x) - (-y) \Leftrightarrow -y < -x$.
3. $x \neq 0 \overset{(A1)}{\Rightarrow} x > 0 \vee -x > 0$. Weiterhin gilt: $x \cdot x = x^2 = (-x) \cdot (-x)$, also wegen (A3) $x^2 > 0$.
4. Dies folgt aus Punkt 3, denn $1 \neq 0$ und $1^2 = 1$, also $1 > 0$.
5. Sei also $x > 0$. Aus (A1) folgt $x \neq 0$, also existiert $\frac{1}{x}$. Angenommen es gilt $0 < -\frac{1}{x}$. Dann gilt aber wegen (A3) auch $0 < x \cdot (-\frac{1}{x}) = -1$. Dies ist ein Widerspruch zu $1 > 0$. Da $\frac{1}{x} \neq 0$ muss wegen (A1) $0 < \frac{1}{x}$ gelten.

Die restlichen vier Aussagen des Satzes überlassen wir euch als Übungsaufgaben.

q.e.d.

Satz 7.2 (Eigenschaften von Betrag und Signum)
Für einen angeordneten Körper K gilt:

1. $x = |x| \operatorname{sign}(x)$, $|x| = x \cdot \operatorname{sign}(x)$.
2. $|x| = |-x|$.
3. $x \leq |x|$.
4. $|xy| = |x|\,|y|$.
5. $|x| \geq 0$.
6. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
7. $|x - y| < \varepsilon \Leftrightarrow y - \varepsilon < x < y + \varepsilon$, *mit* $\varepsilon > 0$.
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$ ***(Dreiecksungleichung)***.

Beweis: Die ersten sechs Aussagen sind wieder Übungsaufgaben für euch, wir zeigen hier die beiden letzten.

Punkt 7 von Satz 7.2: Sei zunächst $x - y \geq 0$. Dann folgt $x - y < \varepsilon$, also $x < y + \varepsilon$. Die zweite Ungleichung folgt analog, wenn man $x - y < 0$ annimmt.

Punkt 8 von Satz 7.2: Sei zunächst $x + y \geq 0$. Dann gilt : $|x + y| \overset{5.}{=} x + y \overset{3.}{\leq} |x| + |y|$. Wenn $x + y < 0$ ist, so gilt $-(x + y) > 0$ und damit $|x + y| = |-(x + y)| = |(-x) + (-y)| \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|$.

q.e.d.

Satz 7.3 (Satz über Intervallschachtelungen)
Sei $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(I_n \subset \mathbb{R})$ *eine Intervallschachtelung. Dann existiert genau ein* $x \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}.$$

Beweis: *Zur Existenz:* Sei $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n < b_n$, dann gilt $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$. Wir definieren $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $b := \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt $a_n \leq a \leq b \leq b_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Also auch $0 \leq b - a \leq b_n - a_n \to 0 \Rightarrow a = b$.
Zur Eindeutigkeit: Angenommen, für $c \in \mathbb{R}$ gilt $c \in I_n \; \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $a_n \leq c \leq b_n \Rightarrow a \leq c \leq b \Rightarrow a = b = c$. q.e.d.

Satz 7.4 (Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen)
Es gibt bis auf Isomorphie genau einen angeordneten vollständigen Körper. Diesen nennen wir den Körper der reellen Zahlen und bezeichnen ihn mit $\mathbb{R}$.

Satz 7.5 (Der Satz von Archimedes)
Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ *existiert ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > x$.

Satz 7.6 (Approximation einer reellen Zahl durch rationale Zahlen)
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ *und* $\varepsilon > 0$ *existiert ein* $r \in \mathbb{Q}$ *mit* $|r - x| < \varepsilon$.

Anmerkung: Man sagt auch „$\mathbb{Q}$ ***liegt dicht*** *in* $\mathbb{R}$*“.*

Beweis: Wir beweisen dies unter Zuhilfenahme einer Intervallschachtelung (siehe Definition 7.5). Wir wählen zunächst $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 < x < b_1$ und definieren $I_1 := [a_1, b_1]$. Falls $I_n := [a_n, b_n]$ gilt, so setzen wir iterativ $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ mit:

$$I_{n+1} := \begin{cases} \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right], & \text{falls} \quad \dfrac{a_n + b_n}{2} > x \\ \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right], & \text{falls} \quad \dfrac{a_n + b_n}{2} \leq x. \end{cases}$$

Dann gilt $x = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Da $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ folgt $a_n, b_n \in \mathbb{Q} \; \forall n$ und damit die Behauptung. q.e.d.

Satz 7.7 (Existenz und Eindeutigkeit der positiven n-ten Wurzel)
Seien $\mathbb{R} \ni a > 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *beliebig. Dann existiert genau ein* $s > 0$ *mit* $s^n = a$. *Wir nennen* s *die* n*-te positive Wurzel von* a *und schreiben* $s = \sqrt[n]{a}$.

Beweis: Wir definieren rekursiv eine Folge (siehe bei Bedarf Kapitel 8 über Folgen) durch $a_1 := a+1, a_{k+1} := a_k \left(1 + \frac{a - a_k^n}{n a_k^n}\right) \forall k \in \mathbb{N}$. Wir wollen nun durch Induktion zeigen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $a_k > 0$.
b) $a_k < a_{k-1}$.
c) $a_k^n > a$.

Natürlich gilt die Behauptung für $k = 1$ (Induktionsanfang). Seien nun die drei Bedingungen für ein $k \in \mathbb{N}$ erfüllt. Dann folgt daraus:

$$a_{k+1} - a_k = a_k \left(1 + \frac{a - a_k^n}{na_k^n}\right) - a_k = a_k \left(1 + \frac{a - a_k^n}{na_k^n} - 1\right) = a_k \frac{a - a_k^n}{na_k^n} < 0.$$

Dies zeigt *b)* für $k + 1$. Außerdem folgt:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k \left(1 + \frac{a - a_k^n}{na_k^n}\right) = a_k \frac{na_k^n + a - a_k^n}{na_k^n} \\ &\overset{(IV)}{>} a_k \frac{a + a - a}{na} = \frac{1}{n} a_k > 0. \end{aligned}$$

und damit *a)* für $k+1$. Aus der Bernoulli-Ungleichung (siehe Kapitel 5, Beispiel 33) folgt weiter:

$$\begin{aligned} a_{k+1}^n &= a_k^n \left(1 + \frac{a - a_k^n}{na_k^n}\right)^n \geq a_k^n \left(1 + n \frac{a - a_k^n}{na_k^n}\right) \\ &= a_k^n \left(\frac{na_k^n + na - na_k^n}{na_k^n}\right) = \frac{a_k^n \cdot na}{na_k^n} = a \end{aligned}$$

und damit auch *c)* für $k + 1$.
$(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist also monoton fallend und nach unten beschränkt, damit also nach Satz 8.6 aus Kapitel 8 konvergent mit $\lim_{k \to \infty} a_k = s$. Weiterhin gilt:

$$na_k^{n-1} a_{k+1} = na_k^n + a - a_k^n$$

und damit beim Grenzübergang $k \to \infty$:

$$ns^{n-1} s = ns^n + a - s^n \Rightarrow s^k = a$$

und da $a > 0$, gilt auch $s > 0$, und damit folgt die Existenz der n-ten positiven Wurzel. Angenommen, es existiert ein $t > 0$ mit $a = t^n$ so folgt mit der geometrischen Summenformel (siehe Kapitel 5, Beispiel 40):

$$0 = s^n - t^n = (s - t) \sum_{i=0}^{n-1} s^i t^{n-1-i}$$

und damit $s - t = 0 \Leftrightarrow s = t$, also die Eindeutigkeit. q.e.d.

7.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 7.1 eines angeordneten Körpers: Hier betrachten wir eine spezielle Art von Körpern: die angeordneten Körper. Sie haben ihren Namen aus dem folgenden Grund: Wenn man zwei verschiedene Elemente aus dem Körper hat, so kann man eindeutig sagen, welches Element größer und welches kleiner ist.

Bedingung $(A1)$ aus Definition 7.1 sagt einfach, dass man für jedes Element aus dem Körper eindeutig sagen kann, ob es größer, kleiner oder gleich 0 ist. Auch wenn das zunächst klar erscheint, da ihr in der Schule wohl bisher nur angeordnete Körper betrachtet habt, gibt es Körper in denen das nicht gilt, dazu kommen wir gleich.
Die Bedingungen $(A2)$ und $(A3)$ sagen aus, dass die Summe und das Produkt zweier positiver Zahlen wieder positiv ist. Auch das erscheint zuerst klar, aber auch dies ist nicht in allen Körpern erfüllt.

Beispiel 54

- Beispiele für angeordnete Körper sind $\mathbb{Q}$ und eben auch $\mathbb{R}$.
- Die wichtigsten nicht angeordneten Körper sind $\mathbb{C}$ (siehe Kapitel 4) und $\mathbb{F}_2$ (siehe Kapitel 6, Beispiel 53). Wir wollen uns kurz klar machen, dass diese wirklich nicht angeordnet sind. Zunächst einmal gilt in $\mathbb{F}_2$ ja $1 = -1$ und $1 + 1 = 0$, womit schon die erste und die dritte Bedingung $(A1)$ und $(A3)$ aus Definition 7.1 verletzt sind. Bei den komplexen Zahlen haben ja die Zahlen 1 und i denselben Abstand von der 0 in positiver Richtung, welche von den beiden soll dann größer sein? Aufgrund dieser Schwierigkeit lässt sich auch $\mathbb{C}$ nicht anordnen.

■

Zur Definition 7.2 von „größer", „größergleich" und „kleinergleich": „Was sollen diese Definitionen jetzt?", werdet ihr euch vieleicht fragen. Oder ganz laut denken: „Das ist ja alles klar". Ist es auch, aber einem Mathematiker reicht das eben nicht, er muss alles definieren. Und da in der Definition eines angeordneten Körpers nur die Kleinerrelation erwähnt ist, werden hier die anderen drei definiert. Wir wollen hier allerdings nicht weiter darauf eingehen und gleich auf die nächste Definition eingehen.

Zur Definition 7.3 von Betrag und Signum: Wenn wir einen Körper anordnen können, so können wir auch diese beiden Funktionen Signum und den Betrag auf ihm definieren. Diese erklären sich fast von selbst: Der Betrag einer Zahl x gibt den Abstand dieser Zahl zur 0 an, und das Signum von x beschreibt einfach das Vorzeichen, wobei wir der 0 wegen $+0 = -0$ kein Vorzeichen, also einfach die Zahl 0 zuordnen.
Ist zum Beispiel $x = 7$ so ist $|x| = 7$ und $\operatorname{sign}(x) = 1$, bei $x = -\frac{5}{2}$ ist $|x| = \frac{5}{2}$ und $\operatorname{sign}(x) = -1$.

Zur Definition 7.4 eines vollständigen Körpers: Auch der angeordnete Körper reicht uns noch nicht, um die reellen Zahlen zu definieren, denn wie wir gesehen haben, ist ja auch $\mathbb{Q}$ angeordnet. Uns fehlt also noch ein weiteres Axiom: das Vollständigkeitsaxiom. Dieses Axiom aus Definition 7.4 macht den Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ so besonders und einzigartig. Wir sehen an dem Axiom auch, dass $\mathbb{Q}$ nicht vollständig ist (siehe auch Kapitel 2, Beispiel 8). Dass $\mathbb{R}$ tatsächlich vollständig ist, wollen wir hier allerdings nicht zeigen. Wir verweisen beispielsweise auf [AE08], [Beh08] oder [For08] im Literaturverzeichnis.

Zur Definition 7.5 der Intervallschachtelung: An dieser Stelle definieren wir die Intervallschachtelung als eine Folge von Intervallen mit bestimmen Eigenschaften. Da wir bisher Folgen nicht definiert haben, empfehlen wir euch zumindest die Definitionen 8.1 und 8.2 im nächsten Kapitel zu lesen und zu verstehen.
Für diese Folge von Intervallen soll nun gelten, dass jedes Intervall ganz in dem vorherigen enthalten ist, und dass die Intervalle beliebig klein werden. Grafisch sieht das dann so aus:

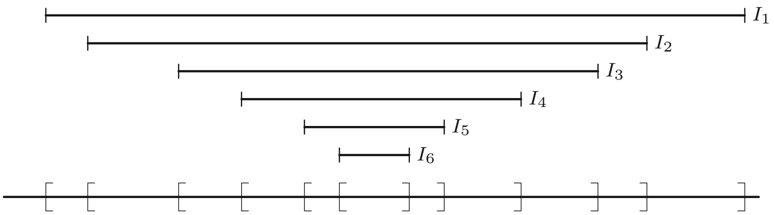

Abb. 7.1: Intervallschachtelung.

Hier geht die Intervallgröße gegen 0.

7.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 7.1 der Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen: In diesem Satz 7.1 wollen wir nun einige Eigenschaften von angeordneten Körpern beweisen. Für den Beweis dürfen dabei immer nur die bereits bekannten Tatsachen aus dem Kapitel 6 über Körper, die drei Anordnungsaxiome und bereits bewiesene Aussagen dieses Satzes 7.1 verwendet werden. Alle diese Aussagen erscheinen wieder als offensichtlich richtig, weil man bisher meist nur die reellen Zahlen betrachtet hat.
Die erste Aussage sagt aus, dass die Größerrelation, und damit auch die Kleinerrelation, transitiv ist. Zum Beispiel folgt aus $7 > 4$ und $4 > 3$ auch $7 > 3$. Für den Beweis benutzt man die Monotonie der Addition (A2).
Die zweite Aussage sagt aus, dass für die additiven Inversen die umgekehrte Relation gilt wie für die Ausgangszahlen, zum Beispiel gilt $5 > 2$ und damit auch $-2 > -5$. Außerdem besagt diese zweite Aussage, dass man in Ungleichungen das Ungleichheitszeichen umdrehen muss, wenn man die gesamte Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine dividiert. In der dritten Aussage sehen wir, dass das Quadrat von jeder Zahl, die ungleich 0 ist, größer als 0 ist, also gibt es nur positive Quadratzahlen, und man kann aus negativen

Zahlen nicht die Wurzel ziehen. Dies scheint ein Widerspruch zur Definition der komplexen Zahlen (siehe Definition 4.6 aus Kapitel 4) zu sein, allerdings sollte man bedenken, dass diese Aussage nur für angeordnete Körper gilt und sich $\mathbb{C}$, wie wir schon gesehen haben (in Kapitel 4 und in den Erklärungen zur Definition 7.1), nicht anordnen lässt. Der Beweis dieser Aussage benutzt die Trichotonie (A1) und die Monotonie der Multiplikation (A3).
Die nächste Aussage folgt dann direkt aus Teil 3, wenn man für $x = 1$ einsetzt.
Die Aussage 5 sagt, dass das multiplikative Inverse einer Zahl und die Zahl selbst dasselbe Vorzeichen haben. Hierbei benutzt man die schon bewiesene Aussage $1 > 0$.
Die letzten vier Aussagen haben wir nicht bewiesen, das könnt und solltet ihr als Übung machen, benutzt einfach wieder die drei Anordnungsaxiome. *Hinweis: Einmal werdet ihr noch eine binomische Formel brauchen.*
Die sechste Aussage sagt aus, dass das Produkt von zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen positiv, das von zwei Zahlen mit unterschiedlichem Vorzeichen negativ ist.
Teil 7 ist noch einmal eine Verallgemeinerung von Teil 2.

Zum Satz 7.2 der Eigenschaften von Betrag und Signum: Auch hier lassen wir acht Aufgaben für euch. Diese folgen fast direkt aus den Definitionen. Manchmal wird vielleicht eine Fallunterscheidung ganz nützlich sein.
Die Aussagen an sich sollten klar sein. Wichtig ist vor allem die letzte, die Dreiecksungleichung, die häufig zum Abschätzen benutzt wird. Beispiele werden wir fortlaufend in diesem Buch sehen.

Zum Satz 7.3 über Intervallschachtelungen: Dieser Satz besagt einfach, dass bei jeder Intervallschachtelung gilt, dass im Durchschnitt aller Intervalle genau ein Element enthalten ist. *Achtung: Dies gilt nicht mehr, wenn wir $x \in \mathbb{Q}$ annehmen. Deswegen heißt $\mathbb{R}$ auch vollständig.*
Auch für diesen Beweis benötigt man Wissen über Folgen aus Kapitel 8. Man zeigt zuerst durch Betrachtung der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dass diese einen gemeinsamen Grenzwert haben und dieser genau x entspricht. Danach zeigt man durch eine Abschätzung, dass dieses x eindeutig ist.

Zum Satz 7.4 über die Existenz und Eindeutigkeit der reellen Zahlen: Dieses ist der wohl wichtigste Satz in diesem Kapitel: Wir wissen nun, dass die reellen Zahlen wirklich existieren und in gewisser Weise eindeutig sind. (Zum Begriff Isomorphismus siehe auch Definition 18.4). Da der Beweis zu aufwendig wäre, lassen wir ihn an dieser Stelle weg und verweisen auf die Analysis-Bücher im Literaturverzeichnis, zum Beispiel auf [AE08], [Beh08] oder [For08].

Zum Satz 7.5 von Archimedes: Der Satz von Archimedes besagt ganz einfach, dass es zu jeder reellen Zahl x eine natürliche Zahl gibt, die größer als x ist. Das bedeutet im Endeffekt, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Der Beweis ist ein indirekter Beweis, den wir hier allerdings nicht ausführen werden. Wir nehmen an, es gäbe ein x, für das es keine größere natürliche Zahl gibt und führen dies zum Widerspruch.

Zum Satz 7.6 zur Approximation einer reellen Zahl durch rationale Zahlen: Die Aussage des Satzes 7.6 ist, dass man jede reelle Zahl durch rationale Zahlen beliebig genau annähern kann. Das heißt, jede Cauchy-Folge rationaler Zahlen (zum Folgenbegriff siehe Definition 8.1 und Definition 8.9) konvergiert gegen eine reelle Zahl.
Um diesen Satz zu beweisen, benutzen wir eine Intervallschachtelung: Wir geben ein Intervall vor, in dem sich x befindet, und dessen Intervallgrenzen ganze Zahlen sind. Dann halbieren wir das Intervall immer wieder und betrachten nur die Hälfte, in der x liegt. Dadurch geht die Intervalllänge gegen 0, es liegt also tatsächlich eine Intervallschachtelung vor, das heißt nach Satz 7.3 existiert genau ein $s \in \mathbb{R}$, das in allen Intervallen liegt. Da wir aber jedes Intervall immer so wählen, dass x in ihm liegt, muss $s = x$ gelten. Da die Intervalllänge gegen 0 geht, kommen die Intervallgrenzen auch beliebig nah an x heran, und da wir mit Werten in $\mathbb{Z}$ gestartet sind und nur Brüche als Intervallgrenzen haben, sind diese immer rationale Zahlen.

Zum Satz 7.7 zur Existenz und Eindeutigkeit der positiven n-ten Wurzel: Hier wollen wir nun zeigen, dass jede positive Zahl eine eindeutig bestimmte, positive n-te Wurzel hat. Dafür definieren wir rekursiv eine Folge und wollen zeigen, dass diese konvergiert (Zur Konvergenz von rekursiv definierten Folgen siehe auch Satz 8.6 aus Kapitel 8). Wir zeigen also, dass diese Folge monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Mithilfe der Induktion und der Bernoulli-Ungleichung (Kapitel 5, Beispiel 33) zeigen wir die Konvergenz und dann durch Grenzwertübergang, dass der Grenzwert tatsächlich die n-te positive Wurzel ist. Aus der geometrischen Summenformel (da aus $s, t > 0$ auch $\sum_{i=0}^{n-1} s^i t^{n-1-i} > 0$ folgt, also insbesondere $\sum_{i=0}^{n-1} s^i t^{n-1-i} \neq 0$) ergibt sich die Eindeutigkeit.
Wichtig ist hier zu bemerken: Die n-te Wurzel ist also per Definition immer positiv. Das heißt zum Beispiel: Die Wurzel aus 4 ist nur die 2 und nicht auch noch -2. Natürlich ist auch $(-2)^2 = 4$, aber per Definition ist eine Wurzel immer größer als 0.

9 Reihen

Übersicht

Dieses Kapitel widmet sich den Reihen. Es soll vor allem deutlich werden, was Folgen und Reihen gemeinsam haben und wie man Reihen auf Konvergenz oder Divergenz untersuchen kann. Dafür werden wir einige Verfahren zur Konvergenz- bzw. Divergenzuntersuchung vorführen und an Beispielen illustrieren. Wir wollen uns dabei wieder ganz auf die reellen Zahlen beschränken.

9.1 Definitionen

Definition 9.1 (Reihe)
Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ der Partialsummen (Teilsummen) $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ heißt **Reihe**.
Eine Reihe heißt **konvergent**, wenn die Partialsummenfolge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

Definition 9.2 (Absolut konvergent)
Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Definition 9.3 (Potenzreihe)
Unter einer **Potenzreihe** verstehen wir eine Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

mit einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ wird dabei der **Entwicklungspunkt**, und a_n für $n \in \mathbb{N}$ werden die **Koeffizienten** genannt.

Hinsichtlich der Konvergenz sind drei Fälle möglich: Die Potenzreihe konvergiert entweder nur für

- $x = x_0$ oder
- auf einem Intervall (symmetrisch um x_0) oder
- auf ganz $\mathbb{R}$.

Anmerkung: Man kann Potenzreihen auch für komplexe Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ definieren. Dabei kann man sich die Konvergenz etwas besser „vorstellen“. Der Vollständigkeit halber wollen wir dies erwähnen, aber im Folgenden nur mit reellen Folgen rechnen:
Eine (komplexe) Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ mit komplexer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert entweder für

- *$x = x_0$ oder*
- *auf einer Kreisscheibe mit Mittelpunkt x_0 oder*
- *auf ganz $\mathbb{C}$.*

Mehr dazu in der Funktionentheorie.

Definition 9.4 (Konvergenzradius einer Potenzreihe)
Als **Konvergenzradius** einer Potenzreihe an der Stelle x_0 definieren wir die größte Zahl $r > 0$, für welche die Potenzreihe für alle x mit $|x - x_0| < r$ konvergiert. Der Konvergenzradius ist also der Radius des Konvergenzkreises (bei komplexen Potenzreihen). Falls die Reihe nur für x_0 konvergiert, so ist der Konvergenzradius 0. Konvergiert sie für alle x, so ist der Konvergenzradius ∞. Mit $(x_0 - r, x_0 + r)$ bezeichnen wir das **Konvergenzintervall**.

Definition 9.5 (Exponentialreihe)
Unter der **Exponentialreihe** verstehen wir die Reihe

$$e^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

mit $x \in \mathbb{R}$.

Definition 9.6 (Eulersche Zahl)
Die Zahl $e := e^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ heißt **Eulersche Zahl**.

Anmerkung: Die Eulersche Zahl kann man auch als Grenzwert
$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definieren.

Definition 9.7 (Exponentialfunktion)
Die Funktion $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ heißt die **Exponentialfunktion**.

Definition 9.8 (Sinus und Kosinus)
Die **Sinusfunktion** ist definiert als

$$\sin(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Entsprechend ist die **Kosinusfunktion** definiert als

$$\cos(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Anmerkung: Vergleicht man die Definition von Exponentialreihe mit der von Sinus und Kosinus, so erkennt man Ähnlichkeiten. Es gilt nämlich (wie wir im Kapitel 4 bereits gesehen haben), dass der Kosinus der Realteil und der Sinus der Imaginärteil der komplexen Exponentialfunktion ist.

9.2 Sätze und Beweise

Satz 9.1 (Trivialkriterium)
Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so gilt* $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k) = 0$.

Beweis: Voraussetzung: Die Reihe konvergiert, das heißt, auch $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergiert. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} S_n =: b$. Offenbar gilt dann auch $S_{n+1} \to b$. Wegen $a_n = S_{n+1} - S_n$ haben wir $a_n \to b - b = 0$. Also insgesamt $a_k \to 0$. q.e.d.

Satz 9.2 (Konvergenzkriterium nach Cauchy)
$\sum a_k$ *konvergent* $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \; \forall m \geq n \geq n_0 : \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon$

Beweis: Die Reihe ist genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert (nach Definition der Konvergenz einer Reihe, siehe auch Definition 9.1) und dies ist genau dann der Fall, wenn die Folge $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ eine Cauchy-Folge ist, siehe dazu Satz 8.9.
Die Behauptung folgt damit sofort aus

$$|S_n - S_{m-1}| = \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right|$$

und $n \geq m$. q.e.d.

Satz 9.3 (Leibniz-Konvergenzkriterium)
Ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge reeller Zahlen mit $a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}_0$, und ist $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ (das heißt, die Folge ist eine Nullfolge), so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot a_k$.

Anmerkung: Dies ist eine alternierende Reihe, deren Vorzeichen bei den Summanden immer zwischen + und − wechselt.

Beweis: Für die Konvergenz ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m > n \geq n_0 : \left|\sum_{k=n}^{m}(-1)^k \cdot a_k\right| < \varepsilon.$$

Da a_k monoton fallend ist, gilt $a_j - a_{j+1} \geq 0$ für alle j. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m}(-1)^k \cdot a_k\right| &= \left|(-1)^n \cdot a_n + (-1)^{n+1} \cdot a_{n+1} + \ldots\right| \\ &= |(-1)^n \cdot (a_n - a_{n+1} + a_{n+2} \pm \ldots)| \\ &= (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \ldots \\ &= a_n - (a_{n+1} - a_{n+2}) - (a_{n+3} - a_{n+4} - \ldots) \\ &\leq a_n = |a_n|\,.\end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $a_n \to 0$ gibt es ein n_0, sodass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ ist.
Nach der obigen Abschätzung folgt:

$$\left|\sum_{k=n}^{m}(-1)^k \cdot a_k\right| \leq |a_n| \leq \varepsilon$$

für alle $n > n_0$. q.e.d.

Satz 9.4 (Majoranten- und Minorantenkriterium)
Seien $\sum a_k, \sum b_k$ zwei Reihen.

1. *Gilt $0 \leq |a_k| \leq b_k$ ab einem k_0, und ist die Majorante $\sum b_k$ konvergent, so konvergiert $\sum a_k$ absolut.*
2. *Gilt $0 \leq a_k \leq b_k$ ab einem k_0, und ist die Minorante $\sum a_k$ divergent, so divergiert $\sum b_k$.*

Beweis: Zu 1.: Da $\sum b_k$ konvergiert gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0\ \forall m \geq n \geq k_0 : \left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| < \varepsilon.$$

Ab diesem k_0 gilt dann $0 \leq |a_k| \leq b_k$, also:

$$\sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} b_k < \varepsilon.$$

Zu 2.: Dies folgt analog. q.e.d.

Satz 9.5 (Quotientenkriterium)
Sei $\sum a_k$ eine Reihe, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, *dann konvergiert die Reihe absolut.*
2. *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$, *dann liefert das Quotientenkriterium über Konvergenz und Divergenz keine Aussage.*
3. *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$, *dann divergiert die Reihe.*

Beweis: Wegen $\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$, gibt es ein $q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < q$ für alle $k > N$. Es gilt also:

$$|a_k| = \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \cdot \left|\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\frac{a_{N-1}}{a_N}\right| \leq q^{k-N} \cdot |a_N| = \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^k.$$

Wir haben damit eine konvergente Majorante (siehe auch Satz 9.4) $\sum \frac{|a_N|}{q^N} \cdot q^k$ gefunden.
Für $\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = 1$ ist keine Aussage möglich.
Für $\limsup \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ gibt es ein $N \geq k_0$ mit

$$|a_k| \geq |a_{k-1}| \geq \ldots \geq |a_N| \;\; \forall k \geq N.$$

Es ergibt sich, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist. Dementsprechend ist also keine Konvergenz möglich (Trivialkriterium, Satz 9.1). q.e.d.

Satz 9.6 (Wurzelkriterium)
Sei $\sum a_k$ eine Reihe. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1$, *dann konvergiert die Reihe absolut.*
2. *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, *dann liefert das Wurzelkriterium über Konvergenz und Divergenz keine Aussage.*
3. *Wenn* $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, *dann divergiert die Reihe.*

Beweis: $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \Rightarrow \exists q \in (0,1)$ und $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| < q^k\ \forall k \geq N$. Nach dem Majorantenkriterium (Satz 9.4) konvergiert die Reihe $\sum a_k$ absolut, weil die geometrische Reihe $\sum q^k$ konvergiert (siehe das später in den Erklärungen kommende Beispiel 75). Falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 1$, ist keine Aussage möglich. Für den Fall $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} > 1$ können wir mit dem Minorantenkriterium die Divergenz nachweisen. q.e.d.

Satz 9.7 (Integralvergleichskriterium)
Sei $f : [1,\infty) \to [0,\infty)$ monoton fallend, dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

Anmerkung: An dieser Stelle haben wir zwar den Integralbegriff noch nicht eingeführt, dennoch macht es der Vollständigkeit halber Sinn, dieses Kriterium an dieser Stelle zu erwähnen. Für alle, die noch keine Integrale kennen, verweisen wir auf Kapitel 12.

Beweis: Für $k-1 \leq x \leq k$ gilt:

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$$

und somit auch:

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{k-1}^{k} f(k-1)dx = f(k-1).$$

Durch Summation über k erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung:

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=2}^{n} f(k-1).$$

Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ konvergent, so gilt:

$$0 \leq \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty.$$

Die Folge $\left(\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt und damit konvergent (vergleiche Begriffe im Kapitel 8 über Folgen und insbesondere Satz 8.6). Wenn $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + \sum_{k=2}^{\infty} f(k) \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Damit ist alles gezeigt. q.e.d.

Satz 9.8 (Vergleichskriterium)
Hat die Folge (b_n) für $n \geq n_0$ stets dasselbe Vorzeichen, so gilt:

1. *Ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergent, und gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ *mit* $c \neq 0$*, so konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. *Ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergent, und gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ *mit* $c \neq 0$*, so divergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 9.9 (Summe konvergenter Reihen)
Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ *zwei konvergente Reihen und* $\lambda \in \mathbb{R}$*, dann ist auch die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + \lambda \cdot b_k)$ *konvergent.*

Beweis: Der Satz folgt sofort aus den Grenzwertsätzen für die Folgen der Partialsummen. Siehe gegebenenfalls nochmal den Satz 8.3. q.e.d.

Satz 9.10 (Konvergenz der Exponentialreihe)
Die Exponentialreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ *absolut, und es gilt die Restgliedabschätzung:*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_{n+1}(x),$$

wobei $|r_{n+1}(x)| \leq 2 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Anmerkung: Dies gilt sogar für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis: Die absolute Konvergenz der Exponentialreihe folgt direkt mithilfe des Quotientenkriteriums (Satz 9.5):

$$\left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} \right| = \left| \frac{x^{k+1} \cdot k!}{x^k \cdot (k+1)!} \right| = \left| \frac{x}{k+1} \right| \leq \frac{1}{2} \quad \forall k \geq 2 \cdot |x|\,.$$

Für den Beweis der Restgliedabschätzung verwenden wir die geometrische Reihe (Beispiel 75). Wir setzen $r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ an.

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\left|x^k\right|}{k!} \\ &= \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{|x|}{n+2} + \ldots + \frac{|x|^j}{(n+2) \cdot \ldots \cdot (n+j+1)} + \ldots\right) \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{n+2}\right)^k . \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt für $\frac{|x|}{n+2} < \frac{1}{2} < 1$, denn dann ist

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{|x|}{n+2}\right)^k \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 2 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Genau das war zu zeigen. q.e.d.

Satz 9.11 (Das Cauchy-Produkt)
Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \cdot b_k$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ absolut, und es gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Satz 9.12 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)
Es gilt $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \; \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Beweis: Übungsaufgabe. Bei Problemen einfach in die Erklärungen schauen! q.e.d.

Satz 9.13 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)
Für die Exponentialfunktion gilt:

1. *$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$.*
2. *Insbesondere ist $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$, wobei $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.*
3. *Die Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend.*
4. *Die Exponentialfunktion ist überall stetig.*

Beweis:

1. Es gilt $e^0 = 1$, denn

$$e^0 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)_{x=0} = 1 + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + \ldots = 1.$$

   Es gilt entsprechend $e^0 = e^{x+(-x)}$ und nach der Funktionalgleichung (Satz 9.12):

$$1 = e^0 = e^{x+(-x)} = e^x \cdot e^{-x} \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{e^x}.$$

   Das war zu zeigen.

2. Zuerst bleibt zu zeigen, dass $e^x > 0 \; \forall x \geq 0$. Dies folgt aber sofort aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion. Nach 1. gilt nun $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ bzw. $e^x = \frac{1}{e^{-x}} > 0 \; \forall x < 0$, was wiederum die Behauptung impliziert.

3. Es seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und weiterhin $x_1 < x_2$. Wir müssen nun zeigen, dass $e^{x_1} < e^{x_2}$. Einfache Umformungen und Anwenden der Funktionalgleichung liefert:

$$e^{x_1} - e^{x_2} = e^{x_1} \cdot \left(1 - \frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}\right) = e^{x_1} \cdot \left(1 - e^{x_2+(-x_1)}\right) = e^{x_1} \cdot \left(1 - e^{x_2-x_1}\right).$$

Nun sind $e^{x_1} > 0$ und $e^{x_2-x_1} > 1$, da $x_1 < x_2$ nach Voraussetzung. Damit ist $1 - e^{x_2-x_1} < 0$. Insgesamt ergibt sich $e^{x_1-x_2} < 1$, was die Behauptung $e^{x_1} < e^{x_2}$ impliziert. *Anmerkung: Dass $e^a > 1$ für $a > 0$ ist, folgt aus der Definition über die Potenzreihe.*

4. Zeigen wir im nächsten Kapitel 10 über die Stetigkeit. Siehe dazu die Beispiele 93 und 94, jeweils ganz unten im Beispiel. q.e.d.

Satz 9.14 (Logarithmusfunktion)
Die Exponentialfunktion $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_{>0}$ ab. Die Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und erfüllt die Funktionalgleichung

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Beweis: Wir beweisen nur die wichtige Funktionalgleichung. Sie folgt sofort aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz 9.12). Wir setzen $a := \ln(x)$ und $b := \ln(y)$. Nach Defintion sind damit $e^a = x$ und $e^b = y$. Es folgt nun:

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b = xy.$$

Nach Definition der Umkehrfunktion folgt die Behauptung mit

$$\ln(xy) = a + b = \ln(x) + \ln(y).$$

q.e.d.

Satz 9.15 (Formeln von Cauchy-Hadamard und Euler)
*Für den Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ gilt die **Formel von Cauchy-Hadamard:***

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}.$$

In vielen Fällen kann der Konvergenzradius einfacher durch die folgende Formel von Euler berechnet werden:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

sofern der Limes existiert. Es gilt nun:

1. *$|x - x_0| < r \Rightarrow$ Die Potenzreihe konvergiert absolut.*
2. *$|x - x_0| > r \Rightarrow$ Die Potenzreihe ist divergent.*
3. *$|x - x_0| = r \Rightarrow$ Dieser Fall kann alles bedeuten. Er muss separat für alle x untersucht werden.*

Satz 9.16 (Die Additionstheoreme)
Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\cos(x+y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y),$$
$$\sin(x+y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y).$$

Beweis: Die Beweise folgen sofort durch Nachrechnen, der Definition von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ (siehe Definition 9.8) und dem Cauchy-Produkt (siehe Satz 9.11). Wir beweisen nur das erste Additionstheorem und überlassen das zweite dem Leser als Übungsaufgabe.

$$\begin{aligned}
\cos(x) \cdot \cos(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \cdot (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)}}{(2(n-k))!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2(n-k)}, \\
\sin(x) \cdot \sin(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot (-1)^{n-k} \frac{y^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+2}{2k+1} x^{2k+1} y^{2(n-k)+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1} y^{2(n-k)-2}.
\end{aligned}$$

Nun gilt für $\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$:

$$\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sum_{k=0}^{n-1} T_k + x^{2n} \right) \\
&\quad \text{mit} \quad T_k = \binom{2n}{2k} x^{2k} y^{2(n-k)} + \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1} y^{2(n-k)-1} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j y^{2n-j} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (x+y)^{2n} = \cos(x+y).
\end{aligned}$$

q.e.d.

Anmerkung: Dies kann man auch mithilfe der Exponentialfunktion zeigen. Versucht es doch einmal ;-).

9.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 9.1 einer Reihe: Was bedeutet die Definition 9.1 einer Reihe konkret? Bevor man überhaupt eine Reihe bilden kann, benötigt man eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Hier bilden wir die Partialsummen, das heißt, wir summieren die Folgenglieder auf:

$$S_0 = a_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k, \qquad S_1 = a_0 + a_1 = \sum_{k=0}^{1} a_k,$$

$$S_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \sum_{k=0}^{2} a_k, \qquad \ldots$$

$$S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Konvergiert die Reihe für $n \to \infty$, so bezeichnen wir den Grenzwert mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Eine Reihe konvergiert, wenn die Partialsummenfolge konvergiert, also wenn $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ mit $S \in \mathbb{R}$. Damit sehen wir aber, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine doppelte Bedeutung hat. Einmal als Grenzwert und einmal als Reihe selbst.
Wir sind nun an einem Punkt angelangt, an dem wir uns die ersten einfachen Beispiele für Reihen anschauen sollten.
Wir wollen zwei Beispiele betrachten und zwar für eine Reihe, die divergiert und für eine, die konvergiert.

Beispiel 74 (Harmonische Reihe)
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ hat einen besonderen Namen. Man nennt sie die *harmonische Reihe*. Es ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \ldots. \tag{9.1}$$

Einige könnten jetzt denken, dass diese Reihe doch konvergieren müsste, da wir immer etwas Kleineres addieren. Aber weit gefehlt. Wir werden zeigen, dass diese Reihe divergent ist. Dies ist auch gar nicht mal schlimm, denn dieses Wissen werden wir vor allem beim Minorantenkriterium (siehe Satz 9.4) ausnutzen. Das heißt, wir werden mittels der harmonischen Reihe die Divergenz anderer Reihen zeigen können. Wir wollen den Beweis für die Divergenz der harmonischen Reihe kurz skizzieren: In Gleichung (9.1) klammern wir die Summanden etwas anders

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots$$

In der ersten Klammer stehen $2^1 = 2$ Summanden, in der zweiten $2^2 = 4$ und in der dritten würden dann $2^3 = 8$ Summanden stehen. So klammern wir weiter. Jetzt kann man zeigen, dass die Summe der Summanden in den jeweiligen Klammern immer größer als $\frac{1}{2}$ ist. Für die erste Klammer gilt beispielsweise:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Wir addieren also immer eine Zahl, die größer als $\frac{1}{2}$ ist, und dies unendlich oft. Diese skizzenhafte Darstellung des eigentlichen Beweises zeigt die Divergenz der harmonischen Reihe. Ein ausführlicher Beweis befindet sich beispielsweise in [For08]. ■

Beispiel 75 (Geometrische Reihe)
Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

heißt die *geometrische Reihe*. Diese konvergiert genau dann, wenn $|x| < 1$, und in diesem Fall kann man den Wert der Reihe sogar direkt angeben. Er lautet $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. Bevor wir dies beweisen, betrachten wir zunächst einige andere Fälle.

- Der Fall $x = 1$: Wenn $x = 1$, dann erhalten wir gerade:

  $$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots .$$

  Es ist klar, dass diese Reihe divergent ist, denn die Folge $a_k = 1$ ist keine Nullfolge. Damit versagt das Trivialkriterium, siehe auch Satz 9.1.

- Der Fall $x = -1$: Hier ergibt sich die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$. Auch hier liefert das Trivialkriterium die Divergenz der Reihe, denn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0} = ((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist keine Nullfolge, und damit kann die Reihe nicht konvergieren.

- Der Fall $|x| > 1$: Wenn $|x| > 1$, können wir dasselbe Argument verwenden, denn auch dann bildet die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und auch hier ist somit die Reihe divergent.

- Der interessante Fall $|x| < 1$: Es gilt für $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ die Gleichung:

  $$\begin{aligned}(x-1)\cdot S_n &= (x-1)\cdot\sum_{k=0}^{n} x^k = x\cdot\sum_{k=0}^{n} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=0}^{n} x\cdot x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = x^{n+1} - x^0.\end{aligned}$$

  Daraus ergibt sich nun das Gewünschte

  $$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

  Und wenn jetzt $|x| < 1$, dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$, da $x^{n+1} \to 0$. ■

In diesem Beispiel haben wir sogenannte *Teleskopsummen* gesehen (ohne es vielleicht zu merken :-)). Und zwar gilt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^{n} x^k = x^1 + \ldots + x^n + x^{n+1} - x^0 - x^1 - \ldots - x^n = x^{n+1} - 1.$$

Es fallen also sehr viele Terme weg. Solche Teleskopsummen sind also wirklich sehr schön und hilfreich.

Beispiel 76

Aus den obigen Überlegungen bietet die geometrische Reihe eine Möglichkeit, nicht nur zu zeigen, dass eine Reihe konvergiert, sondern auch den Grenzwert zu berechnen. So gilt beispielsweise

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3,$$

da $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$. ■

Zur Definition 9.2 der absoluten Konvergenz einer Reihe: Jede absolut konvergente Reihe ist natürlich auch konvergent. Die absolute Konvergenz ist also eine stärkere Eigenschaft als die „normale" Konvergenz aus Definition 9.1. Die Umkehrung gilt nicht!

Beispiel 77

Dazu betrachten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{1}{k}$. Diese Reihe ist nach dem Leibnizkriterium (siehe Satz 9.3) konvergent, denn $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$ bildet eine monoton fallende Nullfolge. Die Reihe ist aber nicht absolut konvergent, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^k \cdot \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Wir erhalten damit die harmonische Reihe. In Beispiel 74 haben wir aber gezeigt, dass diese divergiert. Merke also: Aus „normaler" Konvergenz kann man nicht die absolute Konvergenz folgern. Aber: Aus absoluter Konvergenz folgt die „normale" Konvergenz! ■

Zur Definition 9.3 einer Potenzreihe: Jede Polynomfunktion lässt sich als Potenzreihe mit Konvergenzradius ∞ auffassen, wobei alle Koeffizienten a_n mit Ausnahme von endlich vielen gleich 0 sind. Wichtige andere Beispiele sind Laurent-Reihen (in der Funktionentheorie) oder Taylorreihen, auf die wir noch im Kapitel 11 der Differenzierbarkeit eingehen werden. Als Beispiele wollen wir noch Reihenentwicklungen einiger bekannter Funktionen angeben.

Beispiel 78

- *Exponentialfunktion:* (siehe auch Definition 9.7)

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

In Beispiel 79 werden wir sehen, dass der Konvergenzradius der Exponentialreihe ∞ beträgt.

- *Logarithmusfunktion:*

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots \ \forall -1 < x \leq 1.$$

Der Konvergenzradius beträgt gerade $r = 1$. Für $x = 1$ ist die Reihe konvergent, und für $x = -1$ ist sie divergent, wie aus dem Leibnizkriterium (siehe Satz 9.3) und der harmonischen Reihe (siehe Beispiel 74) folgt.

- *Wurzelfunktion:*

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 \mp \dots \ \forall -1 \leq x \leq 1.$$

Der Konvergenzradius beträgt gerade $r = 1$. Sowohl für $x = 1$ als auch $x = -1$ ist die Reihe konvergent. ■

Zur Definition 9.4 des Konvergenzradius einer Potenzreihe:

Beispiel 79

- Wir wollen den Konvergenzradius der Exponentialreihe $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ berechnen. Dazu verwenden wir nicht die Formel von Cauchy-Hadamard, sondern die Formel von Euler, die im Satz 9.15 aufgeführt ist:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

das heißt, die Exponentialreihe konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$.

- Wir berechnen den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k! x^k$ mithilfe der Formel von Euler und erhalten:

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{k!}{(k+1)!} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0,$$

das heißt die Potenzreihe konvergiert nur für $x = 0$.

- Den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)^n x^n$ bestimmen wir mit der Formel von Cauchy-Hadamard:

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(2 - \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}.$$

- In diesem Beispiel wollen wir die beiden Formeln zur Berechnung des Konvergenzradius (Cauchy-Hadamard und Euler) vergleichen, indem wir den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} x^n$ erst mit Euler und danach mit Cauchy-Hadamard berechnen:

$$\begin{aligned} r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n\cdot 2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)2^{n+1}}{n \cdot 2^n} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| 2\frac{n+1}{n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right| = 2. \end{aligned}$$

Mit der Formel von Cauchy-Hadamard fällt die Rechnung wesentlich kürzer aus. Dabei erinnern wir an den bekannten Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n\cdot 2^n}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot \sqrt[n]{2^n}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Wir sehen also, dass man sich von Fall zu Fall entscheiden sollte, welche Formel man verwendet.

- Wir wollen den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} x^k$ berechnen. Mit Cauchy-Hadamard folgt sofort:

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

- Wie lautet der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$? Wir müssen hier aufpassen, dass dort nicht x^k, sondern x^{2k} steht und uns fragen, was wir nun zu tun haben. Damit es nicht zu einfach wird (:-P), betrachten wir das Ganze allgemeiner und fragen nach einer Formel für den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{2n}.$$

Wir setzen zunächst $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^{2n} =: \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x_n$, wobei jetzt

$$b_n := \begin{cases} a_k, & \text{für } n = 2k \\ 0, & \text{für } n = 2k+1. \end{cases}$$

Den Konvergenzradius können wir nun zu $r = \frac{1}{\limsup b_n^{\frac{1}{n}}}$ für $n \to \infty$ berechnen. Es folgt:

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[2k]{|a_k|}}.$$

Und jetzt sollte es ein Leichtes für euch sein, den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$ zu berechnen, oder?

- Als letztes Beispiel betrachten wir die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$ und berechnen den Konvergenzradius mit der Formel von Euler:

$$\begin{aligned}
r &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\binom{2k}{k}}{\binom{2k+2}{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{(2k)!}{k!k!}}{\frac{(2k+2)!}{(k+1)!(k+1)!}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(2k)!\cdot(k+1)!\cdot(k+1)!}{(2k+2)!\cdot k!\cdot k!}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)(k+1)}{(2k+2)(2k+1)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+1}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k^2\left(1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}\right)}{k^2\left(4+\frac{6}{k}+\frac{1}{k^2}\right)}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1+\frac{2}{k}+\frac{1}{k^2}}{4+\frac{6}{k}+\frac{1}{k^2}}\right| = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

An Beispielen soll uns dies erst einmal genügen. ■

Zur Definition 9.5 bis 9.8: Die Definition der Exponentialfunktion bzw. des Sinus und Kosinus ist etwas anders, als ihr dies aus der Schule kennt. Wir definieren e^x zunächst als eine Potenzreihe, zeigen die Konvergenz und gewisse Eigenschaften der Exponentialfunktion über die Darstellung von e^x als Reihe. Danach definieren wir den Sinus und den Kosinus ebenfalls als Reihen und zeigen, dass diese die bekannte Periodizitätseigenschaft besitzen.
Die Zahl π können wir einerseits geometrisch als Umfang eines Kreises vom Durchmesser 1 definieren. Eine andere Definition wäre die Definition von π als Fläche des Kreises mit Radius 1. Anderseits können wir π aber auch analytisch definieren und zwar als das doppelte der ersten Nullstelle des Kosinus. Danach weist man die elementaren trigonometrischen Eigenschaften von Sinus und Kosinus nach und zeigt, dass diese Definition von π äquivalent zu den geometrischen Definitionen ist. Eine genaue Ausführung dieser Bemerkungen steht in [For08]. Wir wollen an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen.

9.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Trivialkriterium (Satz 9.1): Mit dem Trivialkriterium haben wir schon einmal ein erstes Konvergenzkriterium zur Untersuchung einer Reihe auf Konvergenz. Eigentlich besagt es das Folgende: Wenn die Summanden der Reihe nicht gegen Null konvergieren, so kann die Reihe selbst nicht konvergieren. Wichtig ist anzumerken, dass ihr mit diesem Kriterium nur die Divergenz, aber nicht die Konvergenz einer Reihe nachweisen könnt, das heißt, die Umkehrung des Satzes gilt nicht. Daher ist das Kriterium nur notwendig und nicht hinreichend.
Als Gegenbeispiel betrachten wir wieder die berühmte harmonische Reihe aus Beispiel 74. Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist zwar eine Nullfolge, aber die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent. Also ist mit diesem Kriterium etwas Vorsicht geboten.

Beispiel 80

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$? Nein, denn das Trivialkriterium ist nicht erfüllt. Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := ((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist alles andere als eine Nullfolge. Daraus folgt sofort die Divergenz der Reihe. ■

Beispiel 81

Ein tolles Ergebnis, das wir nur erwähnen wollen, ist, dass die alternierenden Kehrwerte der ungeraden Zahlen etwas mit π zu tun haben, genauer gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

■

Weitere Beispiele habt ihr schon kennengelernt (Beispiel 75).

Zum Leibnizkriterium (Satz 9.3): Wenn ihr eine alternierende Reihe der Art $\sum(-1)^k a_k$ gegeben habt, dann bietet sich dort fast immer das Leibnizkriterium zur Konvergenzuntersuchung an. Um die Konvergenz zu zeigen, müsst ihr nur nachweisen, dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend ist und gegen Null konvergiert.

Beispiel 82

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, denn die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\frac{1}{k^2})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge.

- Zeigen wir nun nochmal, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{k^3+1}$ konvergiert. Wenn wir Leibniz anwenden wollen, dann müssen wir also nur zeigen, dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := \left(\frac{k}{k^3+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und monoton fallend ist.

  Der Nachweis der Nullfolge folgt sofort aus den Grenzwertsätzen. Ihr könnt euch aber auch mal an einem (ε-n_0)-Beweis versuchen. Wir verzichten an dieser Stelle darauf. Für die Monotonie ist zu zeigen, dass $a_{k+1} < a_k$, genauer $\frac{k+1}{(k+1)^3+1} < \frac{k}{k^3+1}$. Dies ist eine einfache Rechnung, die wir euch auch als Übungsaufgabe überlassen wollen. ■

Zum Majoranten- und Minorantenkriterium (Satz 9.4): Beim Majoranten- und Minorantenkriterium geht man so vor:

- *Majorantenkriterium:* Sei eine Reihe $\sum a_k$ gegeben, die ihr auf Konvergenz untersuchen wollt. Um die Konvergenz der Reihe zu zeigen, müsst ihr $|a_k|$ nach oben durch eine Folge b_k abschätzen. Wenn die Reihe $\sum b_k$ konvergiert, dann folgt nach dem Majorantenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe $\sum a_k$.

- *Minorantenkriterium:* Sei eine Reihe $\sum b_k$ gegeben, die ihr auf Divergenz untersuchen wollt. Um die Divergenz der Reihe zu zeigen, müsst ihr $|b_k|$ nach unten durch eine Folge a_k abschätzen. Wenn die Reihe $\sum a_k$ divergiert, so folgt nach dem Minorantenkriterium die Divergenz der Reihe $\sum b_k$.

Mit dem Minorantenkriterium zeigt man also die Divergenz der Reihe. Das Majorantenkriterium verwendet man zum Nachweis der Konvergenz. Klingt vielleicht noch etwas kompliziert. Schauen wir uns schnell Beispiele an.

Beispiel 83

- Wir behaupten, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k > 1,\ k \in \mathbb{N}$, konvergent ist. Der Fall $k = 1$ führt zur divergenten harmonischen Reihe (siehe Beispiel 74).
  Für $k > 1$ und $n \geq 1$ gilt die folgende Abschätzung:
  $$\frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)}.$$
  Man überlegt sich nun leicht, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergiert. Wie sieht man dies? Dazu schreiben wir die Reihe etwas um und bedenken, dass $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Es gilt nun (wir erhalten eine Teleskopsumme):
  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \mp \ldots.$$
  Folglich haben wir eine konvergente Majorante gefunden. Mit dem Majorantenkriterium (Satz 9.4) folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k > 1$.

- In Beispiel 82 haben wir schon die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot k}{k^3+1}$ mithilfe des Leibnizkriteriums nachgewiesen. Es ist aber auch möglich, die Konvergenz mittels des Majorantenkriteriums zu zeigen. Dazu schätzen wir $\frac{(-1)^k \cdot k}{k^3+1}$ wie folgt ab:
  $$\left| \frac{(-1)^k \cdot k}{k^3+1} \right| = \frac{k}{k^3+1} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}.$$
  Wir hatten schon gesehen, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert. Damit haben wir also eine konvergente Majorante gefunden und daraus folgt sofort die Konvergenz der Reihe, die es zu untersuchen galt. Den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ kann man sogar ausrechnen zu $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ■

Beim Majorantenkriterium schätzen wir also nach oben durch eine konvergente Reihe (die sogenannte Majorante) ab.

Beispiel 84

- Wir wollen die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ auf Konvergenz untersuchen. Wir wenden folgende Abschätzung an, um das Majorantenkriterium anwenden zu können:

$$a_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = \frac{2}{n^2} =: b_n$$

Da uns die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ aus Beispiel 83 schon bekannt ist, haben wir eine konvergente Majorante gefunden und damit die Konvergenz nachgewiesen.

- Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$?
Wir schätzen $\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$ wie folgt ab:

$$\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(k+1) \cdot (k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2}} = \frac{1}{k+1}$$

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ ist divergent, da sie sich nur im ersten Term von der harmonischen Reihe (siehe Beispiel 74) unterscheidet. Wir haben also eine divergente Reihe (unsere gesuchte Minorante) gefunden. ∎

Beim Minorantenkriterium schätzen wir die Reihe also gegen eine divergente Reihe (die sogenannte Minorante) nach unten ab.

Zum Quotientenkriterium (Satz 9.5): Um uns das Quotientenkriterium zu verdeutlichen, betrachten wir ein schwieriges Beispiel:

Beispiel 85

- Wir zeigen die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ und zwar mithilfe des Quotientenkriteriums. Dafür berechnen wir für die Folge $a_k := \frac{k^2}{2^k}$ den Grenzwert $\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$. Es gilt:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}}\right| = \left|\frac{(k+1)^2 \cdot 2^k}{k^2 \cdot 2^{k+1}}\right| = \left|\frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|\left(\frac{k+1}{k}\right)^2\right| = \frac{1}{2}\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)^2\right| \to \frac{1}{2},$$

wenn $k \to \infty$.

- Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$? Ja, denn es gilt gerade:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}}\right| = \left|\frac{(n+1) \cdot n! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}}\right|$$
$$= \left|\frac{(n+1) \cdot n^n}{(n+1)^1 \cdot (n+1)^n}\right| = \left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| \to \frac{1}{e} < 1,$$

wenn $n \to \infty$. Das Quotientenkriterium liefert also die Konvergenz der Reihe. Auch mit dem Majorantenkriterium kann man die Konvergenz der Reihe zeigen, siehe dazu das Beispiel 83.

- Was passiert, wenn wir im obigen Beispiel Zähler und Nenner einfach mal vertauschen? Das heißt, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$?
  Diese Reihe divergiert, wie wir uns leicht mit dem Quotientenkriterium und folgender Rechnung überlegen:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right| &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= (n+1) \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n!}{(n+1) \cdot n!} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e > 1.\end{aligned}$$

  Für $n \to \infty$ geht der Grenzwert also gegen die Eulersche Zahl e, welche größer 1 ist. ■

Zum Wurzelkriterium (Satz 9.6): Um uns das Wurzelkriterium zu verdeutlichen, betrachten wir ebenfalls ein einfaches Beispiel.

Beispiel 86

- Wie zeigen wir, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{k}\right)^k$ konvergiert oder divergiert? Hier bietet sich natürlich das Wurzelkriterium an. Es gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\left(2 + \frac{1}{k}\right)^k} = 2 + \frac{1}{k} \to 2 > 0,$$

  wenn $k \to \infty$. Also divergiert die Reihe.

- Wir betrachten nun noch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k}.$$

  Wir wenden das Wurzelkriterium an, und es ergibt sich die Divergenz, denn

$$\sqrt[k]{\left|\frac{(k+1)^{k^2}}{k^{k^2} 2^k}\right|} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \to \frac{e}{2} > 1.$$

Das soll an Beispielen genügen. ■

Zum Integralvergleichskriterium (Satz 9.7): Sei $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ eine Reihe. Um die Konvergenz der Reihe mit dem Integralvergleichskriterium nachzuweisen, zeigt ihr, dass das Integral $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert. Existiert es nicht, so folgt die Divergenz der Reihe.
Im Beispiel 83 haben wir die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k > 1$ mittels des Majorantenkriteriums nachgewiesen. Wir wollen dies nochmals mithilfe des Integralvergleichskriteriums zeigen.

Beispiel 87
Mithilfe des Integralvergleichskriteriums zeigt man auch relativ leicht, dass die harmonische Reihe divergiert, da das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ nicht existiert. Weiterhin überlegt man sich, dass die uneigentlichen Integrale $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x$ für $k > 1$ sehr wohl existieren. Und daraus folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ für $k > 1$. Mehr dazu im Kapitel 12 über die Integrale. ■

Zum Vergleichskriterium (Satz 9.8): Mit dem Vergleichskriterium kann man die Konvergenzuntersuchung oft auf einfachere Reihen zurückführen.

Beispiel 88
Wir zeigen die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 4\cos(n^3) + \ln(n)}{n^3 - e^{-n} - 8n^4}.$$

Das sieht ja erstmal richtig schwer aus. Mit dem Vergleichskriterium zeigt sich die Konvergenz aber ganz leicht: Die am schnellsten wachsenden Glieder sind im Zähler n^2 und im Nenner der Term $-8n^4$. Also wird a_n für große n aussehen wie $\frac{n^2}{-8n^4} = -\frac{1}{8n^2}$. Mit $b_n = \frac{1}{n^2}$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{b_n} &= \frac{n^2(n^2 - 4\cos(n^3) + \ln(n))}{n^3 - e^{-n} - 8n^4} \\ &= \frac{1 - 4\frac{\cos(n^3)}{n^2} + \frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n^4} - 8} \to \frac{1-0+0}{0-0-8} = -\frac{1}{8} \neq 0.\end{aligned}$$

Damit konvergiert die zu untersuchende Reihe, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert und stets $b_n > 0$ gilt.
Um das Vergleichskriterium einzuüben, solltet ihr noch einmal versuchen, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4\pi}$ auf Konvergenz zu untersuchen. ■

Zum Satz 9.9 über die Summe konvergenter Reihen: Um den Satz 9.9 zu beweisen, wenden wir die Grenzwertsätze für Folgen (siehe Satz 8.3) auf die Folgen

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k, T_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda \cdot b_k$$

an und sind dann fertig, weil wir die Behauptung schon bewiesen haben.

Ein ausführliches Beispiel:

Beispiel 89
Zu bestimmen sind alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k+2}}$ konvergiert.

- Wenn $x = -1$, erhalten wir die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+2}}$. Diese Reihe konvergiert nach dem Leibniz-Kriterium. Was müssen wir also tun, um dies zu zeigen? Wir müssen nur zeigen, dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} := (\frac{1}{\sqrt{k+2}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

  Für die Monotonie ist zu zeigen, dass $a_{k+1} < a_k$, also genauer $\frac{1}{\sqrt{k+3}} < \frac{1}{\sqrt{k+2}}$. Dies ist trivialerweise erfüllt, denn $\frac{1}{k+3} < \frac{1}{k+2}$. Dies ist äquivalent zu $k+2 < k+3$ und damit $2 < 3$, was offenbar wahr ist.

  Auch dass die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ist klar.

- Für $x = 1$ ergibt sich die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{\sqrt{k+2}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+2}}$. Konvergiert oder divergiert diese Reihe? In diesem Fall würde sich das Majoranten- und Minorantenkriterium ganz gut anwenden lassen. Dazu müssen wir uns aber erstmal klar machen, ob wir $\frac{1}{\sqrt{k+2}}$ nach unten (bei Divergenz) oder nach oben (bei Konvergenz) abschätzen müssen.

  Es gilt ja offensichtlich $\frac{1}{\sqrt{k+2}} > \frac{1}{k+2}$ und wir wissen, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+2}$ divergiert, denn es handelt sich hier um eine „Variante" der harmonischen Reihe (siehe Beispiel 74). Wir haben demnach eine divergente Minorante gefunden, und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+2}}$ divergiert also.

- Wenn $|x| > 1$, dann divergiert die Reihe, denn die Folge $a_k := \frac{x^k}{\sqrt{k+2}}$ bildet dann keine Nullfolge mehr, und damit ist das Trivialkriterium (Satz 9.1) verletzt.

- Wenn $|x| < 1$, dann ... Übungsaufgabe :-).

∎

Zum Cauchy-Produkt (Satz 9.11): Beim Cauchy-Produkt ist es wichtig, dass die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren, damit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ dann auch absolut konvergiert. Es reicht aber für die Konvergenz des Cauchy-Produkts aus, dass eine der beiden beteiligten Reihen absolut konvergiert. Es reicht aber nicht die „normale" Konvergenz aus, wie wir an dem folgendem Beispiel sehen werden.

Beispiel 90
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := b_n := \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$. Die Konvergenz der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ folgt sofort mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums. Diese beiden Reihen sind aber nicht absolut konvergent, da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ nicht konvergiert.

Wir wollen nun das Cauchy-Produkt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ berechnen und zeigen, dass diese Reihe nicht konvergiert.

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}.$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1,$$

ist diese Reihe divergent. Die Koeffizienten bilden keine Nullfolge. ■

Zur Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Satz 9.12): Wir wollen noch einmal ausführlich beweisen, dass die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion wirklich gilt. Und zwar berechnen wir mithilfe des Cauchy-Produkts $e^x \cdot e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}$.
Da die Exponentialreihe absolut konvergent ist (siehe Satz 9.10), gilt zunächst einmal $e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Geschicktes Erweitern mit $n!$ ermöglicht die Anwendung des Binomischen Lehrsatzes (siehe Kapitel 5, Beispiel 38):

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{y^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n! x^{n-k} \cdot y^k}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

Nun folgt also:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

Genau das hatten wir zu zeigen.

10 Grenzwerte und Stetigkeit

Übersicht

Den Begriff des Grenzwertes kennen wir schon aus Kapitel 8 über Folgen, wo wir die Konvergenz von Folgen definiert haben. Wenn eine Folge gegen eine Zahl konvergiert, so nennen wir die Zahl den Grenzwert der Folge. Auch im vorherigen Kapitel über Reihen haben wir den Begriff des Grenzwertes verwendet. Diesen kann man auch auf Funktionen übertragen und genau das werden wir in diesem Kapitel tun. Weiterhin werden wir uns die Stetigkeit von Funktionen anschauen.

10.1 Definitionen

Definition 10.1 (Grenzwert einer Funktion)
Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
Wir setzen:

$$\overline{D} := \left\{ a \in \mathbb{R} : \exists \text{ Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ und } x_n \in D \right\}.$$

Wir schreiben $\lim_{x\to a} f(x) = c$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ und nennen dies den **Grenzwert** der Funktion. Hierbei ist $c \in \mathbb{R}$ und $a \in \overline{D}$.
$\overline{D}$ nennen wir den **Abschluss** von D.

Definition 10.2 (Rechtsseitiger und linksseitiger Grenzwert)
Gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n > a$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, so schreiben wir $\lim_{x\downarrow a} f(x) = c$ und nennen dies den **rechtsseitigen Grenzwert**.

Analog bedeutet $\lim_{x\uparrow a} f(x) = c$, dass für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $x_n < a$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Wir nennen dies dann den **linksseitigen Grenzwert**.
In dieser Definition bedeutet $\lim_{n\to\infty} f(x) = c$, dass für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$. Analog ist $\lim_{n\to-\infty} f(x) = c$ definiert.

Definition 10.3 (Punktweise Stetigkeit, 1. Definition: mit Folgen)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **(punktweise) stetig im Punkt** $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist. f heißt **stetig** in D, falls die Funktion in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist. Ist eine Funktion nicht stetig, so nennen wir sie **unstetig**.

Definition 10.4 (Punktweise Stetigkeit, 2. Definition: $\varepsilon - \delta$)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **(punktweise) stetig in** $x_0 \in D$, wenn Folgendes gilt

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ ,\ \text{sodass}\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in D\ \text{mit}\ |x - x_0| < \delta.$$

Kürzer steht dort:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x \in D : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)\,.$$

Nicht-Stetigkeit bedeutet gerade die Negation, also:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x \in D : (|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)\,.$$

Definition 10.5 (Gleichmäßige Stetigkeit)
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **gleichmäßig stetig** in D, wenn Folgendes gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Mit den Quantoren schreibt man:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x, y \in D : (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Die Negation lautet:

$$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, y \in D : (|x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)\,.$$

Anmerkung: Hier wie auch bei Definition 10.4 kann man statt $< \varepsilon$ auch $\leq \varepsilon$ benutzen.

Definition 10.6 (α-Hölder-Stetigkeit)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ gegeben mit $0 < \alpha \leq 1$. Dann heißt f in D **α-Hölder-stetig**, wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq M \cdot |x - y|^\alpha\ \ \forall x, y \in D$$

mit einer Konstanten $M > 0$.

Definition 10.7 (Lipschitz-Stetigkeit)
Gilt in der Definition zur α-Hölder-Stetigkeit (siehe Definition 10.6) $\alpha = 1$, dann nennt man die Funktion **lipschitz-stetig**. Genauer: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **lipschitz-stetig**, wenn

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \;\; \forall x, y \in D$$

mit einer Konstanten $L > 0$. Dies ist die sogenannte **Lipschitz-Konstante**.

10.2 Sätze und Beweise

Satz 10.1 (Summe, Differenz, Produkt und Quotient stetiger Funktionen sind wieder stetig.)
Seien f und g zwei Funktionen mit $f, g : D \to \mathbb{R}$, die in $x_0 \in D$ stetig sind und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sind auch die Funktionen $f + g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ stetig. Gilt zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann ist auch die Funktion $\frac{f}{g} : D_{g \neq 0} \to \mathbb{R}$ stetig, wobei $D_{g \neq 0} := \{x \in D : g(x) \neq 0\}$.

Beweis: Seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ eine Folge und $\lim_{n \to \infty} x_n = a$. Es ist zu zeigen, dass

$$\lim_{n \to \infty} (f + g)(x_n) = (f + g)(a), \qquad \lim_{n \to \infty} (f \cdot g)(x_n) = (f \cdot g)(a),$$
$$\lim_{n \to \infty} (\lambda \cdot f)(x_n) = (\lambda \cdot f)(a), \qquad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \left(\frac{f}{g}\right)(a).$$

Dies folgt aber unmittelbar aus den Grenzwertsätzen für Folgen (siehe Satz 8.3), da $f(x_n)$ wieder eine Folge ist. q.e.d.

Satz 10.2 (Verkettung stetiger Funktionen ist stetig.)
Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, wobei $f(D) \subset E$. Ist f in $x_0 \in D$ stetig und ist g in $y_0 := f(x_0)$ stetig, so ist die Funktion $g \circ f$ in x_0 stetig.

Beweis: Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$. Nach Voraussetzung gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Wir setzen $y_n = f(x_n) \in E$. Es ist also $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ eine Folge mit $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$. Nach Voraussetzung ist jetzt auch $\lim_{n \to \infty} g(y_n) = g(y_0)$. Insgesamt erhalten wir somit:

$$\lim_{n \to \infty} (g \circ f)(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(f(x_n)) = \lim_{n \to \infty} g(y_n) = g(y_0) = (g \circ f)(x_0).$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig war, ist $g \circ f$ stetig in x_0. q.e.d.

Satz 10.3 (Zwischenwertsatz)
Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 0$.

Beweis: Für den Beweis dieses Satzes benutzen wir eine Intervallschachtelung. Wir setzen $I_1 := [a,b]$ und definieren $I_n = [a_n, b_n]$ durch

$$I_{n+1} := \begin{cases} [a_n, \frac{a_n+b_n}{2}] & \text{falls} \quad f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0 \\ [\frac{a_n+b_n}{2}, b_n], & \text{falls} \quad f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0. \end{cases}$$

Wegen $I_{n+1} \subset I_n$ und $|I_n| = 2^{-(n-1)}(b-a)$ liegt hier tatsächlich eine Intervallschachtelung vor. Also konvergieren die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert ξ. Da f stetig ist, gilt außerdem

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\lim_{n\to\infty}(a_n)) = f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Außerdem gilt nach Konstruktion unserer Intervalle immer $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$. Nun folgt aus der Monotonie der Konvergenz, dass

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty}(a_n)) \leq 0 \leq f(\lim_{n\to\infty}(b_n)) = f(\xi)$$

und damit $f(\xi) = 0$ mit $\xi \in [a,b]$. Da $f(a) \neq 0$ und $f(b) \neq 0$, gilt sogar $\xi \in (a,b)$. q.e.d.

Satz 10.4 (Korollar zum Zwischenwertsatz)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert zu jedem $c \in [f(a), f(b)]$ ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = c$.

Beweis: Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $c \in (f(a), f(b))$. Wäre $c \in [f(a), f(b)]$, dann könnte c durchaus den Wert $f(a)$ oder $f(b)$ annehmen, dann wäre aber $\xi = a$ bzw. $\xi = b$ und wir wären fertig.
Wir setzen nun $g(x) := f(x) - c$, das heißt, wir verschieben die Funktion. Auf die Funktion $g(x)$ wenden wir nun den Zwischenwertsatz (Satz 10.3) an. Dann folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 10.5 (Jede gleichmäßig stetige Funktion ist punktweise stetig.)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig in D, so ist sie dort auch punktweise stetig. Jede gleichmäßig stetige Funktion ist also punktweise stetig.

Beweis: Seien f gleichmäßig stetig in D und $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta > 0$, sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \; \forall x$ mit $y \in D$ und $|x - y| < \delta$. Insbesondere gilt für alle $x \in D$ mit $|x - y| < \delta$ auch $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ und somit für jedes x_0 die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. q.e.d.

Satz 10.6 (Stetige Funktionen sind auf kompakten Intervallen gleichmäßig stetig.)
Gegeben sei eine auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall (das heißt kompakten Intervall) $[a, b]$ stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f dort auch gleichmäßig stetig.

Beweis: Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen f sei nicht gleichmäßig stetig im kompakten Intervall $[a, b]$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils zwei Werte $x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ existieren.
Da die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{y\in\mathbb{N}}$ beschränkt sind (denn es ist $a \leq x_n \leq b$ bzw. $a \leq y_n \leq b$), existieren nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 8.5) zwei konvergente Teilfolgen $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen Werte aus dem Intervall $[a, b]$ konvergieren. Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ gilt dann:

$$\xi := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_{n_k}.$$

Da die Funktion stetig ist und $\xi \in [a, b]$, gilt:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(\xi),$$

das heißt:

$$\lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = f(\xi) - f(\xi) = 0 \Rightarrow |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = 0.$$

Aber nach Voraussetzung ist $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| > \varepsilon$. Dieser Widerspruch beweist den Satz. q.e.d.

Satz 10.7
Jede lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

10.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 10.1 des Grenzwertes einer Funktion: Pflücken wir die Definition 10.1 des Grenzwertes einer Funktion auseinander, damit sie verständlicher wird. Dabei gehen wir jeden einzelnen Satz einfach mal durch:

Wieso man dieses $\overline{D}$ definiert, versteht man eigentlich erst richtig, wenn man die ganze Definition durchgeschaut hat. In diesem $\overline{D}$ sind Elemente $a \in \mathbb{R}$ enthalten, mit der Eigenschaft, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass eine Folge gegen dieses a konvergiert.
Wir schreiben $\lim_{x\to a} f(x) = c$, wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Nun gilt $\lim_{x\to a} f(x) = c$, also in Worten: Die Funktion konvergiert gegen c, wenn x gegen a strebt und wenn $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gilt, und zwar für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei der Grenzwert der Folge a ist. Also genau die Stelle, gegen die x läuft.
Da wir den Grenzwert einer Funktion mithilfe von Folgenkonvergenz definiert haben, gelten natürlich auch hier die Grenzwertsätze. Schauen wir uns am besten zwei Beispiele an.

Beispiel 91

- Wir betrachten die Funktion $f(x) := x - \sqrt{x^2+3x}$ und möchten wissen, was mit dem Funktionswert $f(x)$ passiert, wenn $x \to \infty$. Rechnen wir es aus:
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+3x}\right) &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x-\sqrt{x^2+3x})(x+\sqrt{x^2+3x})}{x+\sqrt{x^2+3x}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-(x^2+3x)}{x+\sqrt{x^2+3x}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x+\sqrt{x^2+3x}}\right)\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{x}}}\right) = -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

- Wir berechnen den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}}$. Hierbei ist $\left(\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlich eine Folge. Dazu erinnern wir an die bekannten Grenzwerte $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ und $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Es folgt:
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)^n}{n^{2n}} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right)^n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}\cdot e = 1.\end{aligned}$$

- Ein sehr wichtiger Grenzwert, den man kennen muss, ist $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$. Aber wie zeigt man das? Dies folgt direkt aus dem Vergleichskriterium mit der Ungleichung $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\frac{2}{\sqrt{n}}$. Dabei gilt die rechte Ungleichung aufgrund der binomischen Formel
$$1 \leq n \leq 1 + n\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{4}{n} + \ldots.$$

Aus der Produktregel für den Grenzwert folgt allgemeiner:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^k} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}^k = 1$$

für $k \in \mathbb{N}$. Auch durch Hinzufügen von Termen niedrigerer Ordnung bleibt der Grenzwert unverändert.

Für ein Polynom $p(n) = a_k \cdot n^k + ... + a_0,\ a_k > 0$ ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = \lim_{n\to\infty} a_k$.

■

Zur Definition 10.2 des rechts- und linksseitigen Grenzwertes:

Beispiel 92 (Signumfunktion)
Wir betrachten die sogenannte Signumfunktion $\operatorname{sign}(x) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

und $\overline{D} = \mathbb{R}$ (denn die Funktion ist überall erklärt). Zu den Eigenschaften dieser Funktion siehe auch Kapitel 7, Definition 7.3 und Satz 7.2.

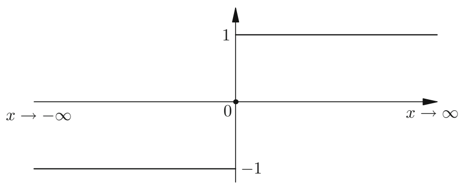

Abb. 10.1: Die Signumfunktion.

Hier gilt $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = 1$ und $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = -1$, was anschaulich an Abbildung 10.1 sehr schön deutlich wird. Das bedeutet, dass der Grenzwert an der Stelle $x = 0$ nicht existiert, da rechts- und linksseitiger Grenzwert nicht übereinstimmen. Sobald ihr mit dem Begriff der Stetigkeit umgehen könnt, könnt ihr nun folgern, dass die Signumfunktion an der Stelle $x = 0$ unstetig ist. ■

Übrigens: Auch die Schreibweise $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = 1$ bzw. $\lim_{x\swarrow 0} f(x) = -1$ ist für den rechtsseitigen bzw. linksseitigen Grenzwert durchaus möglich.

Zur Definition 10.3 der (punktweisen) Stetigkeit mittels Folgen: Wir wollen anmerken, dass die (punktweise) Stetigkeit erst einmal eine lokale Eigenschaft ist, das heißt in einem Punkt des Definitionsbereichs vorliegen kann oder eben nicht. Eine Funktion nennt man stetig, wenn sie in jedem Punkt des Definitionsbereichs stetig ist. Wir wollen die Definition 10.3 der (punktweisen) Stetigkeit mittels Folgen etwas auseinanderpflücken und uns klar machen, was wir darunter überhaupt verstehen wollen.

Für jede beliebige Folge im Definitionsbereich der Funktion, die gegen x_0 konvergiert, müssen auch die Funktionswerte der Folgenglieder gegen den Funktionswert von x_0, also gegen $f(x_0)$ konvergieren. Ein paar Beispiele.

Beispiel 93

- Betrachten wir die Abbildung 10.2

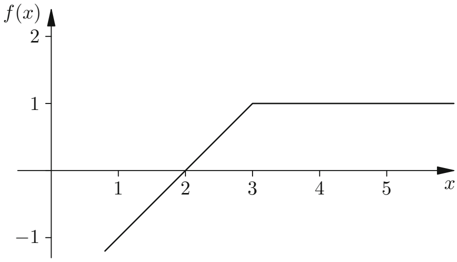

Abb. 10.2: Stetigkeit an der Stelle $x = 3$.

  In diesem Beispiel sehen wir sehr leicht, dass die Funktion an der Stelle $x = 3$ stetig ist, da für jede Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen 3 konvergiert, die Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ gegen den Funktionswert $f(3) = 1$ konvergiert.

- Nun betrachten wir eine ähnliche Funktion, die aber an einer bestimmten Stelle unstetig ist.

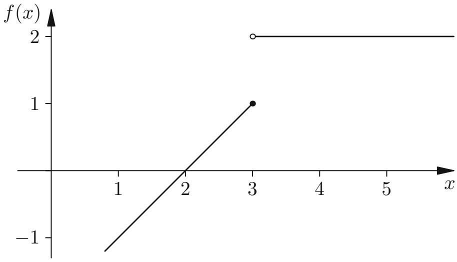

Abb. 10.3: Unstetigkeit an der Stelle $x = 3$.

  Wir betrachten jetzt zwei Folgen, die gegen die Stelle $x = 3$ konvergieren. Nämlich die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(3 - \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{bzw.} \qquad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(3 + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

  Betrachtet man jedoch die Funktionswerte der Folgen, so sieht man, dass

$$f(a_n) = 3 - \frac{1}{n} - 2 = 1 - \frac{1}{n} \to 1.$$

  Das heißt also, dass $f(a_n)$ gegen den Wert 1 konvergiert. Dies entspricht dem Funktionswert an der Stelle $x = 3$.

Für die zweite Folge gilt aber $f(b_n) \to 2$, siehe Abbildung 10.3. Die Folge $f(b_n)$ konvergiert also gegen den Wert 2, und dies entspricht nicht dem Funktionswert an der Stelle $x = 3$. Daraus folgt insgesamt, dass die Funktion an der Stelle $x = 3$ unstetig ist. Dies entspricht dem, was wir in der Schule gelernt haben. Dort habt ihr vielleicht schon mal gehört, dass man eine Funktion stetig nennt, wenn man sie ohne Absetzen des Bleistiftes zeichnen kann. Dies ist natürlich keine mathematische Definition, klar. Aber bei unserem Beispiel stimmt sie irgendwie, dennoch solltet ihr diese Vorstellung nie verwenden.

- Die konstanten Funktionen $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ und die Identität $f(x) = x$ sind stetige Funktionen.
- Der Absolutbetrag $f(x) = |x|$ ist stetig in ganz $\mathbb{R}$. Wie weisen wir dies nach? Zeichnen wir uns erst einmal die Funktion.

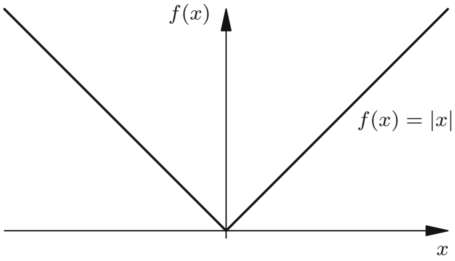

Abb. 10.4: Die Betragsfunktion.

Wir müssen hier insgesamt drei Fälle betrachten:

1. Fall: Seien $a < 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Da $x_n \to a < 0$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n < 0\ \forall n \geq n_0$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} -x_n = -\lim_{n\to\infty} x_n = -a = |a|.$$

Für $a < 0$ ist der Absolutbetrag also stetig.

2. Fall: Seien $a > 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Da $x_n \to a > 0$, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n > 0\ \forall n \geq n_0$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n| = \lim_{n\to\infty} x_n = a = |a|.$$

Für $a > 0$ ist der Absolutbetrag also stetig.

3. Fall: Seien $a = 0$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Da $x_n \to a = 0$, existieren ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $|x_n| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} |x_n| \leq \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ für jede Folge. Damit ist der Absolutbetrag für $a = 0$ stetig. Damit ist gezeigt, dass die gesamte Betragsfunktion stetig auf D ist.

- Die Dirichlet-Funktion ist wie folgt definiert

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

  Diese Funktion ist uns in Definition 3.4 schon einmal begegnet. Die Dirichlet-Funktion ist in keinem Punkt stetig. Für den Beweis benötigt man die Tatsache, dass die rationalen Zahlen in der Menge der reellen Zahlen dicht liegen. (Satz 7.6) Wir wollen den Beweis nur skizzieren: Man nimmt sich irgendeine Zahl x. Dann gibt es eine Folge aus nur rationalen Zahlen, die gegen x geht und eine aus irrationalen Zahlen, die auch gegen x geht. Die erste Folge besitzt am Grenzwert den Funktionswert 1 und die zweite den Wert 0. Also kann die Funktion nicht stetig sein.

- Wir zeigen noch die Stetigkeit der Exponentialfunktion. Im noch folgenden Beispiel 94 (letzter Unterpunkt) werden wir einen weiteren Beweis hierfür mittels unserer 2. Definition von Stetigkeit (siehe Definition 10.4) liefern.

  Wir beweisen zunächst, dass die Exponentialfunktion $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ im Nullpunkt stetig ist und folgern hieraus gleich die Stetigkeit im gesamten Definitionsbereich. Wir betrachten hierzu eine beliebige Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die wir ohne Einschränkung annehmen können, dass $|a_n| \leq 1$ gelte. Wegen

$$\begin{aligned} |e^{a_n} - 1| &= \left|1 + a_n + \frac{a_n^2}{2!} + \ldots - 1\right| = |a_n| \cdot \left|1 + \frac{a_n}{2!} + \frac{a_n^2}{3!} + \ldots\right| \\ &\leq |a_n| \cdot \left(1 + \frac{|a_n|}{2!} + \frac{|a_n^2|}{3!} + \ldots\right) \\ &\leq |a_n| \cdot \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right) = |a_n| \cdot \left(e^1 - 1\right) \leq 2 \cdot |a_n| \end{aligned}$$

  ist $e^{a_n} - 1$ eine Nullfolge. Demnach ist $\lim_{n\to\infty} e^{a_n} = 1 = e^0$ für jede Folge $a_n \to 0$, was die Stetigkeit im Nullpunkt beweist.

  Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge. Wegen der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (siehe Kapitel 9, Satz 9.12) und der gerade gezeigten Stetigkeit der Exponentialfunktion im Nullpunkt, folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} e^{x+a_n} &= \lim_{n\to\infty} e^x \cdot e^{a_n} = e^x \cdot \lim_{n\to\infty} e^{a_n} \\ &= e^x \cdot e^{\lim_{n\to\infty} a_n} = e^x \cdot e^0 = e^x. \end{aligned}$$

Das soll uns an Beispielen erst einmal genügen. ■

Zur Definition 10.4 der (punktweisen) Stetigkeit (2. Definition): Die Definition 10.4 werden wir uns gleich an einem Bild (siehe Abbildung 10.5) klar machen. Stetigkeitsnachweise mittels dieser Definition treiben den meisten Studenten erfahrungsgemäß den Angstschweiß auf die Stirn. Wir werden also unser Bestes geben, um euch die Angst davor zu nehmen! Zunächst eine Anmerkung: Definition 10.3 und Definition 10.4 sind äquivalent. Wir hätten also die zweite Definition 10.4 auch als Satz formulieren und mithilfe der ersten Definition beweisen können.
Anschaulich (siehe Abbildung 10.5) kann man sich die Definition am besten so vorstellen: Eine Funktion f ist genau dann stetig, wenn eine geringe Abweichung vom x-Wert auch nur eine geringe Abweichung vom $f(x)$-Wert zur Folge hat. Es sei dabei aber dahingestellt, was wir mit „gering“ genau meinen.

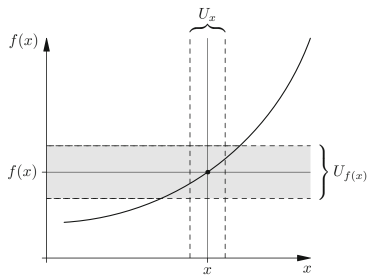

Abb. 10.5: Anschauliche Vorstellung von Definition 10.4.

Ausformuliert bedeutet die Definition 10.4 der punktweisen Stetigkeit, dass man zu jeder noch so kleinen Umgebung, wir schreiben $U_{f(x)}$, um den Funktionswert $f(x)$ eine kleine Umgebung U_x um den x-Wert finden kann, sodass diese Umgebung U_x komplett in die Umgebung $U_{f(x)}$ abgebildet wird.

Für die Unstetigkeit bedeutet das gerade:

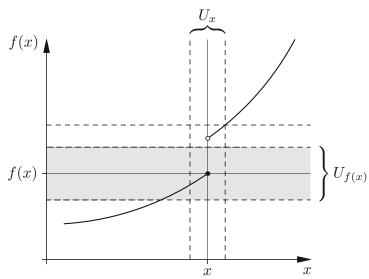

Abb. 10.6: Anschauliche Vorstellung von Unstetigkeit.

Für nichtstetige Funktionen führt das also dazu, dass man eine ε-Umgebung um $f(x)$ finden kann, zu der man keine passende δ-Umgebung um x finden kann. Welche Definition verwendet man jetzt aber wann?

Unstetigkeit einer Funktion kann man sehr gut mit der ersten Definition 10.3 der Stetigkeit über Folgen nachweisen. So haben wir dies auch in Beispiel 93 getan. Man muss dann nur eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finden, die gegen die Stelle x_0 konvergiert, deren Funktionswerte $f(x_n)$ jedoch nicht gegen den Wert $f(x)$ konvergieren.
Will man jedoch Stetigkeit zeigen, dann sollte man die zweite Definition 10.4 verwenden. Auch wenn man erst einmal eine gewisse Zeit braucht, um diese Definition zu verstehen und anzuwenden. Mittels der ersten Definition 10.3 ist es eigentlich kaum möglich, Stetigkeit nachzuweisen, denn möchte man die Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 nachweisen, so muss man für jede gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nachweisen, dass die Folge $f(x_n)$ auch gegen den Wert $f(x)$ konvergiert. Es gibt jedoch im Allgemeinen unendlich vieler solcher gegen x_0 konvergierenden Folgen. Und alle nachzuprüfen, ist wohl unmöglich :-). Das heißt, ihr müsst euch an die zweite Definition 10.4 gewöhnen. Aber keine Angst. Wir werden uns jetzt einige Beispiele anschauen, wie man diese Definition konkret bei Funktionen anwendet.

Beispiel 94

- Wir wollen zeigen, dass die Funktion $f(x) := \frac{x}{1+x}$ im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist. Dazu setzen wir $|f(x) - f(x_0)|$ an, denn nach Definition der Stetigkeit 10.4 müssen wir ja zeigen, dass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt, dass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Wir müssen daher $|f(x) - f(x_0)|$ geschickt abschätzen. Weiterhin setzen wir voraus, dass $|x - x_0| < \delta$ gilt; genauer für unsere Aufgabe, dass $|x - 1| < \delta$, denn es ist ja $x_0 = 1$. Anfangen sollte man einen Stetigkeitsbeweis immer mit „Sei $\varepsilon > 0$. Setze $\delta := \ldots$“ . Die Pünktchen können wir aber erst nach der folgenden Untersuchung vervollständigen:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left|\frac{x}{1+x} - f(1)\right| = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-(1+x)}{2(1+x)}\right| \\ &= \left|\frac{2x-1-x}{2(1+x)}\right| = \left|\frac{-1+x}{2(1+x)}\right| = \left|\frac{x-1}{2(1+x)}\right| = \frac{|x-1|}{|2(1+x)|}. \end{aligned}$$

  Das sieht doch schon mal gut aus. Wieso? Na, da steht doch schon mal etwas mit $|x - 1|$, und wir wissen, dass $|x - 1| < \delta$. Also gilt:

$$\ldots = \frac{|x-1|}{|2(1+x)|} < \frac{\delta}{|2(1+x)|}.$$

  Und dies kann man doch weiter abschätzen zu dem Folgenden, weil wir o.B.d.A. annehmen können, dass $1 + x > 1$:

$$\ldots < \frac{\delta}{|2(1+x)|} < \frac{\delta}{2},$$

  Dies soll jetzt kleiner-gleich als ε sein, also:

$$\ldots < \frac{\delta}{|2(1+x)|} < \frac{\delta}{2} \overset{!}{\leq} \varepsilon.$$

Dies können wir aber nur so machen, wenn wir am Anfang unser δ entsprechend gewählt haben. Wir können jetzt also δ angeben. Und da $\frac{\delta}{2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta \leq 2 \cdot \varepsilon$ wählen wir $\delta := \min\{1, 2\varepsilon\}$.

Also den Stetigkeitsbeweis nochmal in korrekter Reihenfolge:

Seien $\varepsilon > 0$ und $\delta := \min\{1, 2\varepsilon\}$. Dann gilt für alle x mit $|x-1| < \delta \leq 1$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= \left|\frac{x}{1+x} - f(1)\right| = \left|\frac{x}{1+x} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-(1+x)}{2(1+x)}\right| \\ &= \left|\frac{2x-1-x}{2(1+x)}\right| = \left|\frac{-1+x}{2(1+x)}\right| = \left|\frac{x-1}{2(1+x)}\right| = \frac{|x-1|}{|2(1+x)|} \\ &< \frac{\delta}{|2(1+x)|} < \frac{\delta}{2} \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Damit haben wir alles gezeigt. Solche Abschätzungen erfordern vor allem etwas Übung und Training. Zusammengefasst: Wir führen also erstmal unsere Abschätzung durch und geben danach konkret ein δ an. Und wenn wir den Beweis aufschreiben, tun wir so, als ob wir dieses δ schon von Anfang an kennen.

- Wir wollen die Stetigkeit der Funktion $f(x) := \frac{1}{x^2}$ für $x > 0$ nachweisen. Zunächst wieder unsere Lösungsidee, und am Ende geben wir den Beweis nochmals in kompletter Vollständigkeit und im Zusammenhang an. Wir schätzen also $|f(x) - f(x_0)|$ ab.

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{x_0^2 - x^2}{x^2 x_0^2}\right| = \left|\frac{(x_0 - x)\cdot(x_0+x)}{x^2 x_0^2}\right|.$$

Jetzt ist nach Voraussetzung $|x - x_0| < \delta$, aber natürlich ist auch $|x_0 - x| < \delta$. Also folgt schon mal:

$$\ldots = \frac{|x+x_0|\,|x_0 - x|}{x^2 \cdot x_0^2} < \delta \cdot \frac{|x+x_0|}{x^2 \cdot x_0^2}$$

Sieht doch schon mal ganz schick aus, oder? Aber wie geht es nun weiter? Jetzt stört uns doch nur das x, da δ nur von ε und x_0 abhängen darf. Dieses x muss noch verschwinden. Das x_0 darf natürlich durchaus stehen bleiben, denn δ darf ruhig von x_0 abhängen. Dies ist, wie wir noch sehen werden, der Unterschied zur gleichmäßigen Stetigkeit (siehe Definition 10.5). Dort darf das δ nicht von x_0 abhängen. Aber soweit sind wir noch nicht. Erst einmal zurück zu unserem Problem: Wir schätzen nun einfach mit $0 < \delta < \frac{x_0}{2}$ ab.

Jetzt fragen sich bestimmt die Hälfte unserer Leser, wieso man dies einfach so machen darf? Das haben wir uns auch gefragt, als wir solche Dinge im ersten Semester gesehen haben und sie nicht erklärt wurden. Wir versuchen daher das Geheimnis zu lüften: Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\delta < \frac{x_0}{2}$, was wegen $|x - x_0| < \delta$ ja gerade $x_0 \in \left(\frac{x_0}{2}, \frac{3x_0}{2}\right)$ bedeutet. Das x im Nenner werden wir dann mit $x > \frac{x_0}{2}$ abschätzen und das im Zähler mit $x < \frac{3x_0}{2}$.

Wie kann man sich aber diese o.B.d.A.-Wahl klar machen? Um uns dies zu verdeutlichen, greifen wir in die ε-δ-Trickkiste, in der für solche Fälle zwei Möglichkeiten liegen.

1.) Wähle o.B.d.A. $\delta < 1$, das heißt $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$. Das geht natürlich immer dann (und nur dann!), wenn der Definitionsbereich der Funktion, die wir untersuchen, keine Lücken aufweist oder der Abstand der zu untersuchenden Stelle groß genug zu der Lücke ist. Das haben wir in dem Beispiel hier vorgemacht :-).
2.) Wähle o.B.d.A. $\delta < |\frac{x_0}{2}|$, das heißt $\frac{x_0}{2} < |x| < \frac{3|x_0|}{2}$. Das geht immer dann, wenn 0 *nicht* im Definitionsbereich liegt, also $x_0 \neq 0$ gilt.

Warum machen wir aber diese o.B.d.A.-Annahmen? Wir sind ja nur an Punkten in einer kleinen Umgebung von x_0 interessiert, also können wir δ jederzeit nach oben beschränken. Warum aber gerade 1 und $\frac{x_0}{2}$? Da könnten wir natürlich auch 0,0005 oder $\frac{x_0}{3}$ verwenden, aber mit den beiden von uns gewählten Werten rechnet es sich am einfachsten :-).

So, nun aber zurück zur Aufgabe. Es ergibt sich:

$$\delta \cdot \frac{|x + x_0|}{x^2 \cdot x_0^2} < \delta \cdot \frac{\frac{x_0}{2} + x_0}{\frac{x_0^2}{4} \cdot x_0^2} = \delta \cdot \frac{\frac{3 \cdot x_0}{2}}{\frac{x_0^4}{4}} = \frac{6 \cdot \delta}{x_0^3}.$$

Nun soll $\frac{6 \cdot \delta}{x_0^3} \leq \varepsilon$ gelten. Damit wählen wir einfach $\delta := \min\left\{\frac{x_0}{2}, \varepsilon\frac{x_0^3}{6}\right\}$, denn es ist $\frac{6\delta}{x_0^3} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta \leq \varepsilon\frac{x_0^3}{6}$.

Jetzt schreibt man den Beweis nochmal neu auf. Seien $\varepsilon > 0$ und $\delta := \min\{\frac{x_0}{2}, \varepsilon \cdot \frac{x_0^3}{6}\}$. Mit obiger Abschätzung folgt dann das Gewünschte, nämlich:

$$|f(x) - f(x_0)| < \ldots < \frac{6 \cdot \delta}{x_0^3} \leq \varepsilon.$$

Also ist f im Punkt x_0 stetig.

- Wir zeigen die Stetigkeit der Parabel $f(x) := x^2$. Hier verwenden wir dieselbe Abschätzung wie im letzten Beispiel beschrieben.

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= \left|x^2 - x_0^2\right| = |(x - x_0) \cdot (x + x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \\ &< \delta \cdot |x + x_0| < \delta \cdot \left(\frac{x_0}{2} + x_0\right) = \frac{3}{2}\delta \cdot x_0.\end{aligned}$$

Sei nun also $\frac{3}{2}\delta \cdot x_0 \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta < \frac{2\varepsilon}{3 \cdot x_0}$.

Wir wählen also $\delta := \min\left\{\frac{x_0}{2}, \frac{2 \cdot \varepsilon}{3 \cdot x_0}\right\}$. Und jetzt schreibt den Beweis nochmal selbst sauber auf.

- Wir wollen die Stetigkeit der Funktion $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ beweisen. Daher zeigen wir zunächst für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$ die Ungleichung

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| \leq \sqrt[3]{|x - y|}$$

und benutzten diese dann, um mit einem ε-δ-Beweis die Stetigkeit der Funktion $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ in allen Punkten $x_0 > 0$ zu zeigen.

Für den Beweis der Ungleichung sei o.B.d.A. $x > y$ (sonst Variablentausch). Damit können wir die Beträge weglassen und erhalten

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} \leq \sqrt[3]{x-y} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} &\leq \sqrt[3]{x-y} + \sqrt[3]{y} \\ &\Leftrightarrow x \leq x - y + y + \underbrace{3(\sqrt[3]{x-y})^2\sqrt[3]{y} + 3\sqrt[3]{x-y}(\sqrt[3]{y})^2}_{>0}.\end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung bewiesen.

Zur Stetigkeit: Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wir schätzen (für $|x - x_0| < \delta$) mit dieser Ungleichung ab:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x_0}}\right| = \frac{|\sqrt[3]{x_0} - \sqrt[3]{x}|}{\sqrt[3]{xx_0}} \leq \frac{\sqrt[3]{|x - x_0|}}{\sqrt[3]{xx_0}} < \sqrt[3]{\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{xx_0}}$$

Sei nun o.B.d.A $\delta \leq \frac{1}{2}x_0$, das heißt $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq \frac{3}{2}x_0$. Damit können wir weiter abschätzen (und so das x eliminieren):

$$\ldots \leq \sqrt[3]{\delta}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}x_0^2}} = \sqrt[3]{\delta}\sqrt[3]{\frac{2}{x_0^2}} \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \delta \leq \frac{x_0^2}{2}\varepsilon^3.$$

Also liefert $\delta := \min\{\frac{1}{2}x_0, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon^3\}$ das Gewünschte.

- Wir zeigen mit einem ε-δ-Beweis, dass die Funktion

$$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

in jedem $x_0 \in (-1,1)$ stetig ist.

Seien $\varepsilon > 0$ vorgegeben, $x_0 \in (-1,1)$. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= \left|\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x_0^2}\right| \\ &= \left|\frac{\left(\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x_0^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x_0^2}\right)}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x_0^2}}\right| \\ &= \left|\frac{x_0^2 - x^2}{\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x_0^2}}\right| \\ &\leq \frac{|x - x_0||x + x_0|}{\sqrt{1-x_0^2}} \overset{x,x_0 \in (-1,1)}{<} \delta\frac{2}{\sqrt{1-x_0^2}} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Somit liefert $\delta := \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{2}\varepsilon$ gerade $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
Anmerkung: Wenn wir $x_0 = 1$ oder $x_0 = -1$ zulassen würden, wäre obige Abschätzung nicht möglich (es würde 0 im Nenner stehen). Allerdings können wir mit weiteren ε-δ-Beweisen die Stetigkeit in -1 und 1 zeigen. Insgesamt haben wir dann Stetigkeit auf dem vollständigen kompakten Intervall $[-1,1]$, und nach Satz 10.6 sind stetige Funktionen auf kompakten Intervallen sogar gleichmäßig stetig. Eine interessante Aufgabe wäre es vielleicht noch, sich einen einzigen ε-δ-Beweis für die gleichmäßige Stetigkeit auf dem gesamten Intervall $[-1,1]$ zu überlegen. Dies ist übrigens eine lieb gemeinte Aufforderung :-P.

- Wir wollen zeigen, dass die durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ q \in \mathbb{N},\ p, q \text{ teilerfremd} \\ 1, & \text{falls } x = 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $\mathbb{Q}$ unstetig ist. Wie zeigt man dies? Hier müssen wir die Unstetigkeit zeigen. Wir müssen daher die Negation der Stetigkeitsdefinition nachweisen:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in D : (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)\,.$$

Sei zunächst $x_0 \in \mathbb{Q}$. Dann ist $f(x_0) > 0$. Da die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegen (Satz 7.6), gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine irrationale Zahl ξ_n mit $|\xi_n - x_0| < \frac{1}{n}$, also eine Folge irrationaler Zahlen $\xi_n \to x_0$. Aber es ist

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n) = 0 \neq f(x_0)$$

nach Definition von f. Also ist f in x_0 unstetig.

- Wir zeigen noch einmal, dass die Exponentialfunktion $e^x := \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ im gesamten Definitionsbereich stetig ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass zu jedem $a \in \mathbb{R}$ ein $L > 0$ existiert mit:

$$x, y \leq a \Rightarrow |e^x - e^y| \leq L\,|x - y|\,. \tag{10.1}$$

Wir überlassen dies dem Leser als kleine Übungsaufgabe. Jetzt kann es losgehen: Es sei $b \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Wir setzen $a := b + 1$. Weiterhin sei $L > 0$ die Konstante, die zu a nach der Aussage bzw. Gleichung (10.1) existiert. Außerdem sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\delta := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{L}\right)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - b| < \delta$:

$$\left|e^x - e^b\right| \leq L\,|x - b| < L \cdot \delta = L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Damit folgt die Stetigkeit der Exponentialfunktion. ■

Zur Definition 10.5 der gleichmäßigen Stetigkeit: Einige fragen sich vielleicht, wieso es nun noch eine „andere" Definition der Stetigkeit gibt. Die eine ist doch schon schwierig genug. Erstmal abwarten! Wir werden sehen, dass die gleichmäßige Stetigkeit viel stärker ist als die punktweise Stetigkeit (siehe Definition 10.3 und 10.4). Aber machen wir uns zuerst einmal klar, was gleichmäßige Stetigkeit überhaupt bedeutet:

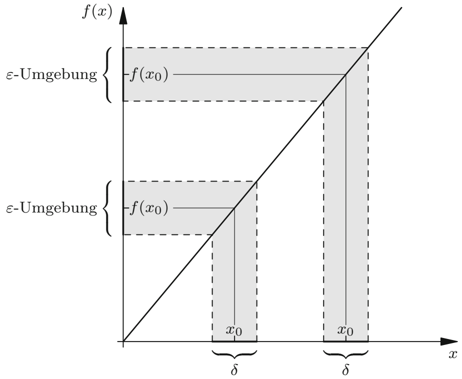

Abb. 10.7: Anschauliche Darstellung der gleichmäßigen Stetigkeit.

Die Besonderheit der gleichmäßigen Stetigkeit besteht also darin, dass das δ nur von ε abhängig ist und nicht, wie bei der punktweisen Stetigkeit, auch von der Stelle x_0.
Anschaulich bedeutet das: Zu jeder noch so kleinen senkrechten Rechteckseite ε kann man eine hinreichend kleine waagerechte Rechteckseite δ finden, sodass, wenn man das Rechteck mit den Seiten ε und δ geeignet auf dem Funktionsgraphen entlang führt, dieser immer nur die senkrechten Rechteckseiten schneidet. Bei der punktweisen Stetigkeit (Definition 10.4) hängt das δ noch vom x_0 ab, also von der Stelle, die wir auf Stetigkeit untersuchen. Wenn es uns aber gelingt, ein δ anzugeben, das nur vom ε abhängt, dann haben wir es geschafft und gezeigt, dass eine Funktion gleichmäßig stetig ist. Punktweise Stetigkeit ist also eine lokale und gleichmäßige Stetigkeit eine globale Eigenschaft.
Es wird also deutlich, dass die gleichmäßige Stetigkeit eine viel stärkere Eigenschaft ist als die punktweise Stetigkeit. Satz 10.5 sagt gerade, dass aus gleichmäßiger Stetigkeit die punktweise Stetigkeit folgt. Die Umkehrung ist dagegen falsch.

Beispiel 95

- Die Funktion $f(x) = x^2$ ist nach den Beispielen 94 punktweise stetig. Sie ist aber auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig, wie ihr euch als Übungsaufgabe überlegen sollt.

- Wir zeigen, dass die Funktion $f(x) := \cos(x^2)$ in jedem Intervall $[0, a) \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist, aber nicht im Intervall $[0, \infty)$.

Beginnen wir mit dem ersten Teil: f ist stetig, da f aus zwei stetigen Funktionen zusammengesetzt ist (Satz 10.2). Stetige Funktionen sind, wie Satz 10.6 zeigt, auf kompakten Intervallen sogar gleichmäßig stetig. Also ist f auch auf jedem Intervall der Form $[0, a]$ und damit auf jedem kleineren Intervall und daher auf $(0, a) \subset \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Nun zum schwierigeren, zweiten Teil: Wir zeigen nun, dass f im Intervall $[0, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left|\sqrt{(n+1)\cdot\pi} - \sqrt{n\cdot\pi}\right| \\
&= \left|\frac{\left(\sqrt{(n+1)\cdot\pi} - \sqrt{n\cdot\pi}\right)\left(\sqrt{(n+1)\cdot\pi} + \sqrt{n\cdot\pi}\right)}{\sqrt{(n+1)\cdot\pi} + \sqrt{n\cdot\pi}}\right| \\
&= \left|\frac{\pi}{\sqrt{(n+1)\cdot\pi} + \sqrt{n\cdot\pi}}\right| \to 0, \text{ wenn } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Anderseits ist

$$\left|f(\sqrt{(n+1)\cdot\pi}) - f(\sqrt{n\cdot\pi})\right| = |\cos((n+1)\cdot\pi) - \cos(n\cdot\pi)| = 2\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seien nun $\varepsilon := 1$ und $\delta > 0$ beliebig. Dann gibt es $x := \sqrt{(n+1)\cdot\pi}$ und $y := \sqrt{n\cdot\pi} \in [0, \infty)$ mit $|x - y| < \delta$ und $|f(x) - f(y)| = 2 > \varepsilon$. Dies zeigt, dass f im Intervall $[0, \infty)$ nicht gleichmäßig stetig ist.

- Wir wollen nun zeigen, dass die Sinusfunktion $f(x) := \sin(x)$ in ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist. Um gleichmäßige Stetigkeit nachzuweisen, ist es oft hilfreich für die Abschätzung $|f(x) - f(y)|$, den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe Kapitel 11, Satz 11.5) anzuwenden. Wir werden diesen zwar erst im nächsten Kapitel einführen, ihn aber jetzt schon verwenden. Wer ihn noch nicht kennt, der schaue doch bitte kurz im nächsten Kapitel nach. Außerdem werden wir die gleichmäßige Stetigkeit der Sinusfunktion auch mithilfe der Additionstheoreme beweisen. (Für die Leute, die gerade keine Lust haben, nachzuschlagen, was der Mittelwertsatz aussagt :-).)

  a) Wir verwenden den Mittelwertsatz, um $|f(x) - f(y)|$ abzuschätzen. Nach dem Mittelwertsatz gilt:

  $$|f(x) - f(y)| = |\sin(x) - \sin(y)| = (\sin(\xi))' \, |x - y| = \cos(\xi) \, |x - y|$$

  für ein ξ zwischen x und y. Nun sei also $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Weiterhin wählen wir $\delta := \varepsilon$. Mit obiger Abschätzung erhalten wir dann:

  $$|\sin(x) - \sin(y)| < \varepsilon \ \forall \, |x - y| < \delta.$$

  Damit ist alles gezeigt.

b) Wie beweisen wir die gleichmäßige Stetigkeit der Sinusfunktion ohne den Mittelwertsatz? Naja, auch hier müssen wir abschätzen. Wir verwenden nur andere Methoden. Es bieten sich nämlich auch die Additionstheoreme bzw. die Folgerungen daraus (siehe Kapitel 9, Satz 9.16) an.

$$\begin{aligned}|\sin(x) - \sin(y)| &= 2 \cdot \left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \\ &\leq 2 \cdot \frac{|x-y|}{2} = |x-y| \,.\end{aligned}$$

Mit obiger Wahl in a) von δ folgt ebenfalls die gleichmäßige Stetigkeit.

- Als vorletztes Beispiel in diesem Zusammenhang zeigen wir die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x) = \ln(x)$ in einem Intervall der Form $[a, \infty)$ mit $a > 0$. Wir verwenden den Mittelwertsatz (Satz 11.5). Nach diesem existiert ein ξ zwischen x und y wie folgt:

$$|\ln(x) - \ln(y)| = (\ln(\xi))' \cdot |x-y| = \frac{1}{\xi} \cdot |x-y| < \frac{\delta}{a}.$$

Es ist also klar, wie wir δ zu wählen haben, nämlich als $\delta := \varepsilon \cdot a$. Und so würde man den Beweis in einer Klausur oder in einem Lehrbuch aufschreiben:

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei weiterhin $\delta := \varepsilon \cdot a$, dann gilt $\forall x, y \geq a$ und mit $|x-y| < \delta$ und mit $\xi \in [x, y]$, also $\xi \geq a$:

$$|\ln(x) - \ln(y)| = (\ln(\xi))' \cdot |x-y| = \frac{1}{\xi} \cdot |x-y| < \frac{\delta}{a} \leq \varepsilon.$$

Damit sind wir fertig.

- Wir zeigen: Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist nicht auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ gleichmäßig stetig. Hierzu haben wir die Negation der gleichmäßigen Stetigkeit zu zeigen:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in D : (|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon)\,.$$

Seien $\varepsilon := \frac{\ln(2)}{2}$ und $\delta > 0$ beliebig. Wir wählen $x := \delta$ und $y := \frac{\delta}{2}$. Dann ist einerseits $|x-y| < \delta$ und anderseits

$$|\ln(x) - \ln(y)| = \ln\left(\frac{x}{x/2}\right) = \ln(2) \geq \varepsilon.$$

Damit folgt, dass die Funktion $f(x) = \ln(x)$ nicht auf ganz $\mathbb{R}_{>0}$ gleichmäßig stetig ist. ■

Zur Definition 10.6 der α-Hölder-Stetigkeit:

Beispiel 96

Wir behaupten: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) := x^{\frac{1}{n}}$$

$\frac{1}{n}$-Hölder-stetig. Wir zeigen, dass

$$\left|x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}\right| \leq |x - y|^{\frac{1}{n}} \quad \forall x, y \geq 0, n \in \mathbb{N}.$$

O.B.d.A. sei $x < y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left|x^{\frac{1}{n}} - y^{\frac{1}{n}}\right| \leq |x - y|^{\frac{1}{n}} &\Leftrightarrow \left(y^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}}\right)^n \leq y - x \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^n \leq 1 - \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ging die Bernoulli-Ungleichung aus Kapitel 5, Beispiel 33 ein. Zur Abschätzung schreiben wir $t := \frac{x}{y}$ und müssen $\left(1 - t^{\frac{1}{n}}\right)^n \leq 1 - t$ für alle $t \in [0, 1)$ zeigen. Für dieses t ist aber $t^{\frac{1}{n}} \geq t$ und somit

$$\left(1 - t^{\frac{1}{n}}\right)^n \leq (1 - t)^n \leq 1 - t,$$

da $(1 - t) \in (0, 1]$. Damit sind wir fertig. ■

Zur Definition 10.7 der Lipschitz-Stetigkeit: Lipschitz-Stetigkeit ist oft einfach nachzuweisen, wenn man zeigt, dass (bei einer differenzierbaren Funktion) die Ableitung beschränkt ist. Schaut man sich die Definition 10.7 ganz genau an, so kann man den Differenzenquotienten (siehe Definition 11.2 aus Kapitel 11) in eine ähnliche Form bringen. Den Differenzenquotienten selbst werden wir erst im nächsten Kapitel einführen. Um die folgenden Beispiele zu verstehen, lohnt es sich aber mal nachzuschlagen, sollte man davon noch nie etwas gehört haben. Wir halten aber fest: Eine differenzierbare Funktion ist genau dann lipschitz-stetig, wenn die erste Ableitung beschränkt ist.

Beispiel 97

- Wir wollen zeigen, dass die Sinusfunktion auf ganz $\mathbb{R}$ lipschitz-stetig ist und eine geeignete Lipschitz-Konstante bestimmen.

  1. Möglichkeit: Wir wenden „direkt“ die Definition der Lipschitz-Stetigkeit 10.7 an und verwenden den Mittelwertsatz (siehe Satz 11.5). Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Der Mittelwertsatz liefert die Existenz eines ξ zwischen x und y mit $\sin(x) - \sin(y) = \cos(\xi) \cdot (x - y)$. Damit gilt:

  $$|\sin(x) - \sin(y)| = |\cos(\xi)| \cdot |x - y| \leq |x - y|,$$

denn die Kosinusfunktion ist beschränkt mit $|\cos(\xi)| \leq 1$. Es ergibt sich also die Lipschitz-Stetigkeit mit der Lipschitz-Konstanten $L = 1$.

2. Möglichkeit: Die Sinusfunktion ist differenzierbar. Folglich existiert die Ableitung. Wir zeigen, dass die Ableitung beschränkt ist. Es gilt $\left|f'(x)\right| = |\cos(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Also ist der Sinus lipschitz-stetig.

- Wir zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \sqrt{4+x^2}$ lipschitz-stetig ist. Folgende Abschätzung beweist die Behauptung:

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \left|\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+y^2}\right| \\
&= \left|\frac{\left(\sqrt{4+x^2} - \sqrt{4+y^2}\right)\left(\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2}\right)}{\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2}}\right| \\
&= \left|\frac{(4+x^2) - (4+y^2)}{\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2}}\right| = \left|\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2}}\right| \\
&= \frac{|(x-y)(x+y)|}{\left|\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2}\right|} = \frac{|x+y|}{\left|\sqrt{4+x^2} + \sqrt{4+y^2}\right|} \cdot |x-y| \\
&\leq \frac{|x+y|}{|x+y|} \cdot |x-y| = 1 \cdot |x-y|
\end{aligned}$$

Die Lipschitz-Konstante ist also $L = 1$.

■

10.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 10.1, dass die Summe, das Produkt, der Quotient stetiger Funktionen wieder stetig sind: Der Satz 10.1 besagt: Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient stetiger Funktionen sind wieder stetig. Es ist ein sehr nützlicher Satz, um Stetigkeit zu zeigen. Man braucht dann nicht immer diese ε-δ-Beweise durchzuführen, wenn die Stetigkeit gewisser Funktionen bekannt ist.

Beispiel 98

Es seien $p(x) := a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ und $q(x) := b_m \cdot x^m + \ldots + b_1 \cdot x + b_0$ zwei Polynome. So ist die rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$, falls $q(x) \neq 0$ gilt, ebenfalls stetig. Dies ergibt sich sofort durch wiederholte Anwendung von Satz 10.1 auf Beispiel 93 ($f(x) = x, f(x) = c$). ■

Zum Satz 10.2, dass die Verkettung stetiger Funktionen wieder stetig ist: Der Satz 10.2 ist genauso wichtig wie Satz 10.1.

Beispiel 99

Bekanntlich sind $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $g(x) := e^x$ zwei stetige Funktionen. Daher sind auch die Funktionen $(f \circ g)(x) = (e^x)^2 = e^{2x}$ und $(g \circ f)(x) = e^{x^2}$ stetig. ■

Zum Zwischenwertsatz (Satz 10.3): Wichtig beim Zwischenwertsatz (Satz 10.3) ist die Stetigkeit der Funktion, wie die Abbildungen 10.8 und 10.9 zeigen:

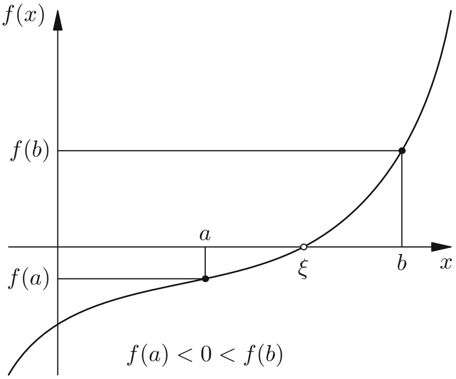

Abb. 10.8: Der Zwischenwertsatz anschaulich.

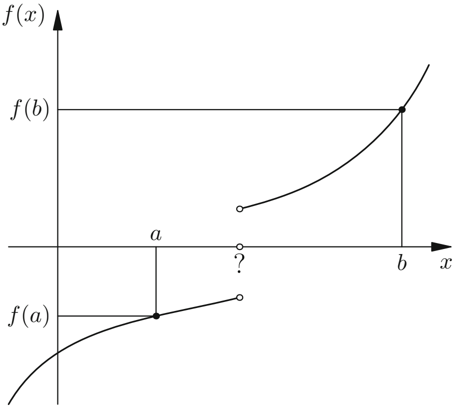

Abb. 10.9: Der Zwischenwertsatz gilt nicht für unstetige Funktionen.

Wir wollen weiter anmerken, dass die Aussage falsch wird, wenn wir nur innerhalb der rationalen Zahlen arbeiten. Sei etwa $D := \{x \in \mathbb{Q} : 1 \leq x \leq 2\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ die stetige Funktion $f(x) = x^2 - 2$, dann gilt $f(1) = -1 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$, aber es gibt kein ξ mit $f(\xi) = 0$, denn $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, wie wir im Kapitel 5 über die Beweistechniken in Beispiel 29 gesehen haben.

Beispiel 100

Mithilfe des Zwischenwertsatzes können wir zeigen, dass jedes Polynom ungeraden Gerades $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + ... + a_{n-1} \cdot x + a_n$ mindestens eine reelle Nullstelle besitzt, denn es gilt $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Damit existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < 0 < f(b)$. Deshalb existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = 0$. Ein Polynom geraden Gerades dagegen braucht keine reelle Nullstelle besitzen, wie $f(x) = x^{2k} + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$ zeigt. ■

Zum Korollar aus dem Zwischenwertsatz (Satz 10.4): Zur Erklärung ein Bild:

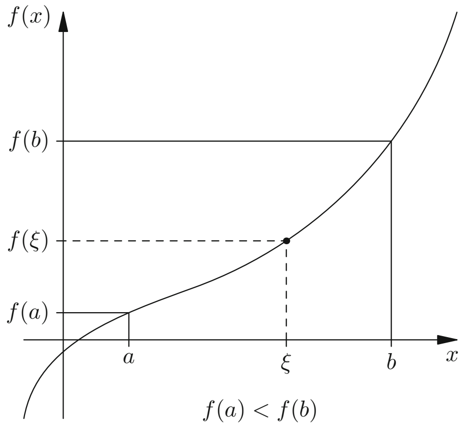

Abb. 10.10: Zum Korollar aus dem Zwischenwertsatz.

Beim Beweis des Satzes 10.4 haben wir die Funktion einfach nur geschickt verschoben, sodass wir den Zwischenwertsatz anwenden konnten. Mehr ist da eigentlich nicht passiert.

8 Folgen

Übersicht

In diesem Kapitel behandeln wir eines der wichtigsten Konzepte der Analysis, den Grenzwertprozess. Diesen werden wir mittels Folgen einführen. Wichtige Sätze und Beispiele werden nicht zu kurz kommen. Ihr solltet allerdings beachten, dass die hier bewiesenen Sätze meist nur für reelle Folgen gelten!

8.1 Definitionen

Definition 8.1 (Folge)
Unter einer **endlichen Folge** verstehen wir eine Abbildung $\{1, 2, ..., n\} \to M$ und unter einer **Folge** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ allgemein eine Abbildung von der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge M, also eine Abbildung der Form $\mathbb{N} \to M$.

Anmerkung: Im Folgenden werden wir nur reelle Folgen betrachten, das heißt $M \subset \mathbb{R}$. *Die zugrunde liegenden Konzepte können aber auch auf komplexe Folgen ohne Probleme übertragen werden. Der Unterschied ist nur der, dass die Folgenglieder (also die Elemente der Folge) dann komplexe Zahlen sind.*

Definition 8.2 (Folgenkonvergenz)
Eine Folge a_n heißt konvergent gegen a, falls gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Hierbei bezeichnet a den **Grenzwert der Folge**.
Mit den schönen Quantoren wird das ganz übersichtlich so geschrieben:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n) = a \Leftrightarrow a_n \to a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Ist eine Folge nicht konvergent, so nennt man sie **divergent**.

Eine äquivalente Definition zur Folgenkonvergenz ist die folgende:

Definition 8.3 (Äquivalente Definition zur Folgenkonvergenz)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt **konvergent** gegen a, wenn es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, für welche die Folge $(|a_n - a|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, das heißt, für die $|a_n - a| \to 0$ gilt.

Definition 8.4 (Uneigentlich konvergent, bestimmt divergent)
Falls es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt $a_n > M \ \forall n \geq n_0$, dann sagen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert uneigentlich** (oder ist **bestimmt divergent**) gegen Unendlich und schreiben $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$.
Analog schreiben wir $\lim_{n\to\infty}(a_n) = -\infty$, wenn es zu jedem $m \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass gilt $a_n < m \ \forall n \geq n_0$.

Definition 8.5 (Beschränktheit einer Folge)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \leq S \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \geq s \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Eine Folge heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Definition 8.6 (Monotonie von Folgen)
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton wachsend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \leq a_{n+1}$. Sie heißt **streng monoton wachsend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n < a_{n+1}$.
Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **monoton fallend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n \geq a_{n+1}$. Sie heißt **streng monoton fallend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_n > a_{n+1}$.

Definition 8.7 (Teilfolge)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge und $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung, das heißt, es gelte $\phi(m) > \phi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > n$, dann nennen wir die Folge $(a_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. In den meisten Fällen setzen wir $n_k := \phi(k)$ und schreiben $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ statt $(a_{\phi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$.

Definition 8.8 (Häufungspunkt)
Eine reelle Zahl x heißt **Häufungspunkt** einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen x konvergiert.

Definition 8.9 (Cauchy-Folge)
Eine Folge reeller Zahlen heißt **Cauchy-Folge**, wenn Folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \ \forall m, n \geq n_0.$$

Definition 8.10 (Limes superior und Limes inferior)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und $H(a_n)$ die Menge aller Häufungspunkte der Folge.

1. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt und $H(a_n) \neq \emptyset$, so nennen wir $\limsup_{n\to\infty} a_n := \sup H(a_n)$ den **Limes superior**.
2. Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt und $H(a_n) \neq \emptyset$, so nennen wir $\liminf_{n\to\infty} a_n := \inf H(a_n)$ den **Limes inferior**.

8.2 Sätze und Beweise

Satz 8.1 (Eindeutigkeit des Grenzwertes einer Folge)
Eine konvergente Folge besitzt genau einen Grenzwert.

Beweis: Seien a und a' zwei Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N_1.$$

Da aber auch a' ein Grenzwert der Folge sein soll, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq N_2.$$

Die Abschätzung

$$|a-a'| = |a-a_n+a_n-a'| \leq |a-a_n|+|a_n-a'| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall n \geq \ \max\{N_1, N_2\}$$

ergibt:

$$a - a' = 0 \Rightarrow a = a'.$$

Und dies beweist den Satz. q.e.d.

Satz 8.2
Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, die gegen a konvergiert. Da die Folge konvergent ist, können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0.$$

Wir wählen $\varepsilon = 1$.

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \ \forall n \geq n_0.$$

Der erste Summand ist durch ε (in unserem Fall durch 1) beschränkt, und $|a|$ ist sowieso beschränkt (da fest). Da außerdem die Menge $\{a_1, \ldots, a_{n_0}\}$ durch Maximum und Minimum der Menge beschränkt ist, ist also die Folge beschränkt.

q.e.d.

Satz 8.3 (Grenzwertsätze)
Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit den Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(b_n) = b$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. *Die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_n) = a + b.$$

2. *Die Folge $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) - \lim_{n\to\infty}(b_n) = a - b.$$

3. *Die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(b_n) = a \cdot b.$$

4. *Ist zusätzlich $b \neq 0$, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0 \ \forall n \geq m$, und für die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}_{\geq m}}$ gilt: Sie konvergiert und es ist*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)} = \frac{a}{b}.$$

Beweis: Wir zeigen die erste Aussage: Sei $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_1 \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_2.$$

Nun gilt für alle $n \geq \max\{n_1, n_2\}$

$$|a_n + b_n - (a + b)| = |a_n - a + b_n - b| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

q.e.d.

Der Rest der Beweise befindet sich im Abschnitt 8.4 mit den Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen.

Satz 8.4
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n).$$

Beweis: Folgt sofort aus den Grenzwertsätzen, Satz 8.3. q.e.d.

Satz 8.5 (Der Satz von Bolzano-Weierstraß)
Jede beschränkte Folge besitzt mindestens eine konvergente Teilfolge, das heißt mindestens einen Häufungspunkt.

Beweis: Wir wollen die Beweisidee kurz skizzieren. Ausführliche Beweise befinden sich zum Beispiel in [For08] und [AE08].
Beim Beweis des Satzes für beschränkte reelle Zahlenfolgen geht man in der Regel wie folgt vor:

- Wir beginnen mit einem Intervall $[-L, L]$, das alle Folgenglieder enthält. Dies ist möglich, da die Folge ja beschränkt ist. Wir wählen a_1 als erstes Glied der zu bestimmenden Teilfolge.
- Danach halbieren wir das Intervall (den Mittelpunkt des Intervalls ordnen wir dabei beliebig einem der beiden Teilintervalle zu). Es ist nun aber klar, dass mindestens eine Hälfte unendlich viele Folgenglieder enthalten muss. Diese Hälfte bezeichnen wir nun mit I. Jetzt wählen wir als nächstes Glied der Teilfolge das erste Element, das in I liegt und dessen Index größer ist als der des zuvor gewählten Elements.
- Diese Schritte wiederholen wir unendlich oft. Das betrachtete Intervall wird dabei immer kleiner, sodass die Teilfolge gegen den einzigen Punkt konvergieren muss, der in allen Intervallen liegt. Dieser existiert als gemeinsamer Punkt einer Intervallschachtelung (siehe Kapitel 7, Definition 7.5). q.e.d.

Satz 8.6
Eine monoton wachsende (fallende) Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie nach oben (nach unten) beschränkt ist.

Beweis: Wir zeigen den Satz nur für eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen. Der Beweis für eine monoton fallende Folge geht analog.

Die Richtung „⇒“ zeigt sich fast von selbst. Voraussetzung ist, dass wir eine monoton wachsende Folge haben, die konvergent ist. Nach Satz 8.2 folgt, dass eine konvergente Folge beschränkt ist. Damit ist die erste Richtung ohne Probleme gezeigt.
Die Richtung „⇐“ dagegen erfordert etwas Arbeit.
Wir zeigen nun: Eine monoton wachsende und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent. Es sei $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dies existiert, da die Folge beschränkt ist. Da a die kleinste obere Schranke der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein a_N mit $a - \varepsilon < a_N$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist, folgt auch $a - \varepsilon < a_n \ \forall n \geq N$. Außerdem ist $a_n < a + \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$, da $a = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ingesamt folgt also für beliebiges ε, dass $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$ und damit die Konvergenz der Folge. q.e.d.

Satz 8.7
Für monoton wachsende reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt stets:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in (\mathbb{R} \cup \{\infty\}).$$

Für monoton fallende reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt stets:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}).$$

Satz 8.8
Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und N der laut Definition zu $\varepsilon = 1$ existierende Index $n_0(\varepsilon)$, ab dem der Abstand beliebiger Folgenglieder kleiner als 1 ist.
Für alle $n \geq N$ gilt dann:

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_n - a_N| + |a_N| < 1 + |a_N|.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt daraus:

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, ..., |a_{N-1}|, |a_N| + 1\} < \infty.$$

q.e.d.

Satz 8.9
Eine reelle Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Beweis: Zur Richtung „⇒“ : Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Es existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geq n_0.$$

Daraus folgt:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da dies für alle $m, n \geq n_0$ gilt, ist gezeigt, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
Zur Richtung „$\Leftarrow$“ : Für diese Richtung gehen wir davon aus, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Nach Satz 8.8 ist die Cauchy-Folge beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weiterstraß, siehe Satz 8.5, existiert mindestens eine konvergente Teilfolge, das heißt mindestens ein Häufungspunkt. Es gelte also etwa $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) = a$. Wir zeigen, dass sogar die gesamte Folge gegen a konvergiert, also $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}(a_n) = a$.
Zu $\varepsilon > 0$ existiert nämlich ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit (nach Definition der konvergenten Teilfolge)

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall k \geq k_0. \tag{8.1}$$

Da die Folge eine Cauchy-Folge ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall m, n \geq N. \tag{8.2}$$

Insgesamt ergibt sich mit Abschätzung (8.1) und (8.2) für alle $n \geq n_0 := \max\{N, n_{k_0}\}$:

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

q.e.d.

8.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 8.1 einer (reellen) Folge: Die harte mathematische Definition 8.1 einer Folge versteht man erst, wenn man sich dazu ein paar Beispiele angeschaut hat.

Beispiel 55 (Beispiele für Folgen)

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 4, 8, \ldots)$.
- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$.
- $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$. ■

Wir setzen also für n nacheinander die natürlichen Zahlen ein und berechnen so die *Glieder* der Folge.
Die obigen Beispiele 55 zeigen Folgen, deren Abbildungsvorschrift direkt angegeben ist. Wenn wir jetzt sagen würden, dass ihr doch mal das 837. Folgenglied der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ berechnen sollt, dann setzt ihr einfach für $n = 837$ ein und nennt uns das 837. Folgenglied, nämlich $b_{837} = \frac{1}{837}$, und wir sind glücklich.

Man kann eine Folge aber auch rekursiv definieren. Das heißt man gibt einen Startwert vor und dann eine Vorschrift, wie das folgende Glied berechnet werden soll.
Damit ist es dann schwer, das 837. Folgenglied zu berechnen. Ihr müsstet nämlich 836 Rechnungen durchführen, da ihr erst alle Vorgänger ausrechnen müsst. Na dann viel Spaß...
Dies sind sogenannte *rekursiv definierte Folgen*, die wir noch ausführlich in den Beispielen 68, 69, 70 und 71 behandeln werden. Dennoch wollen wir uns schon einmal eine rekursiv definierte Folge anschauen, die euch eventuell zu Weltruhm verhelfen könnte.
Sei $a_0 \in \mathbb{N}$ beliebig, und die Folge rekursiv definiert durch:

$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{für } a_n \text{ gerade} \\ 3 \cdot a_n + 1, & \text{für } a_n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese Folge ist in der Mathematik als *Collatz-Folge* bekannt. Nehmen wir doch mal den Startwert $a_0 = 3$ und berechnen die ersten Folgenglieder durch einfaches Einsetzen:

$$a_1 = 10,\ a_2 = 5,\ a_3 = 16,\ a_4 = 8,\ a_5 = 4,\ a_6 = 2,\ a_7 = 1,\ a_8 = 4,\ \ldots$$

Merkt ihr was? Wir befinden uns in einer Art „Schleife“.
Die Frage, die sich aufzwingt, ist, ob das für jeden Startwert so ist. Probieren wir es noch einmal mit $a_0 = 7$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} &a_0 = 7,\ a_1 = 22,\ a_2 = 11,\ a_3 = 34,\ a_4 = 17,\ a_5 = 52,\ a_6 = 26,\ a_7 = 13, \\ &a_8 = 40,\ a_9 = 20,\ a_{10} = 10,\ a_{11} = 5,\ a_{12} = 16,\ a_{13} = 8,\ a_{14} = 4,\ a_{15} = 2, \\ &a_{16} = 1, a_{17} = 4, \ldots \end{aligned}$$

Auch hier gelangen wir wieder in diese „Schleife“. Bis jetzt ist dies noch ein ungelöstes mathematisches Problem und noch nicht bewiesen, ob das für jeden Anfangswert a_0 gilt. Man vermutet aber, dass dies der Fall ist.
Also, was zögert ihr noch? Schnappt euch Papier und Stift und macht euch an einen Beweis. Sagt uns Bescheid, wenn ihr es geschafft habt :-).

Zur Definition 8.2 der Folgenkonvergenz: Die Definition 8.2 der Folgenkonvergenz, also wie man einer Folge „ansehen“ kann, ob sie konvergiert oder nicht, macht Anfängern erfahrungsgemäß große Probleme, obwohl man sie sich anschaulich sehr gut klar machen kann.
Was bedeutet Definition 8.2 anschaulich?
$|a_n - a|$ misst den Abstand eines Folgenglieds zum Grenzwert der Folge, falls er existiert. Und genau dieser Abstand soll ab einem bestimmten Folgenglied beliebig klein werden. Pflücken wir die Definition also nochmal auseinander:

Ab einem bestimmten Folgenglied (also ab einem *hinreichend* großem Index n_0) wird der Abstand der Folgenglieder zum Grenzwert der Folge *beliebig* klein, fast Null.
Malt euch doch einfach mal ein Bildchen, was man sich darunter „anschaulich" vorstellen kann. Wir haben das in Abbildung 8.1 auch getan.

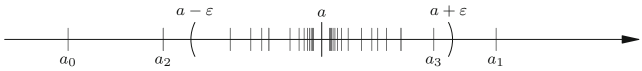

Abb. 8.1: Konvergenz einer Folge anschaulich.

In jeder ε-Umgebung des Grenzwertes a liegen fast alle Glieder der Folge, außerhalb entsprechend nur endlich viele. „Fast alle" bedeutet also „bis auf endlich viele". Ab einem n_0 liegen dann aber alle weiteren Glieder in dieser Umgebung. Der Nachteil bei dieser Definition ist, dass man den Grenzwert der Folge erst einmal kennen muss, um nachzuweisen, dass die Folge konvergiert. Im Satz 8.3 haben wir aber schon die sogenannten Grenzwertsätze kennengelernt, mit denen der Grenzwert der Folge, sollte er existieren, meist sehr leicht berechnet werden kann. Wir werden in den Erklärungen zu den Grenzwertsätzen nochmals explizit darauf eingehen. Außerdem werden wir die sogenannten Cauchy-Folgen kennenlernen, bei denen wir den Grenzwert der Folge erst gar nicht kennen müssen, betrachte die Definition 8.9. Es bleibt also noch spannend!
Konvergenz nachzuweisen, ist am Anfang ungewohnt und schwierig. Daher wollen wir dies nun an einigen Beispielen einüben.

Beispiel 56

- Betrachten wir die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Zum Beispiel ist also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2)_{n\in\mathbb{N}} = (2, 2, 2, 2, ...)$.

  Diese Folge konvergiert gegen 2 und allgemein gegen a. Was uns anschaulich so klar ist, muss aber natürlich nachgewiesen werden. Dazu wenden wir einfach die Definition 8.2 der Folgenkonvergenz an.

  Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann gilt $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ $\forall n \geq 0$.

  Schon ab dem ersten Folgenglied ist dies also erfüllt, man kann jedes $n_0 \geq 0$ wählen. Damit ist die Konvergenz der Folge gegen den Grenzwert a nachgewiesen. Wir schreiben: $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$.

- Betrachten wir die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Schreibt man sich einige Folgenglieder auf, so könnte man den Grenzwert vermuten. Die Brüche werden immer kleiner. Vermutlich konvergiert die Folge also gegen Null. Weisen wir dies nach:

  Wir geben ein beliebiges $\varepsilon > 0$ vor, dann gilt:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Wir müssen jetzt zeigen, dass $\frac{1}{n} < \varepsilon$. In der Definition der Folgenkonvergenz steht, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert. Dann geben wir doch einfach eins an!

Wir wählen n_0 so, dass $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ ist, also $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Damit ergibt sich insgesamt für $n \geq n_0$, und damit: $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$,

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Folglich haben wir die Konvergenz der Folge gegen Null nachgewiesen.

Ach so, noch eine Anmerkung: Hinter $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ steckt der Satz von Archimedes (Kapitel 7, Satz 7.5). Als kleine Übungsaufgabe solltet ihr euch klar machen, wieso.

Nun haben wir dieses n_0 also gefunden und können den Beweis nochmal neu und sauber aufschreiben:

Nach dem Satz des Archimedes existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ auch $n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ und somit $|a_n - a| < \varepsilon$.

Was man an diesem Beispiel sieht, ist, dass man also zunächst einmal das n_0 bestimmt und danach den Beweis nochmals sauber von vorne aufschreibt.

- Die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, denn die Folge ist nicht beschränkt. Aber Beschränktheit ist ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Folge, wie der Satz 8.2 sagt. Diese Folge ist sogar bestimmt divergent.

- Die Folge $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, da die Folge zwei Häufungspunkte besitzt. Eine konvergente Folge besitzt aber nur genau einen Häufungspunkt und zwar den Grenzwert der Folge. Siehe dazu auch das noch kommende Beispiel 57. ■

Zur Definition 8.4 von uneigentlich konvergent: Um die Begriffe „uneigentlich konvergent" und „bestimmt divergent" aus Definition 8.4 zu verstehen, wollen wir uns ein paar Beispiele ansehen und diese Begriffe vom Divergenzbegriff abgrenzen.

Beispiel 57

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (1, -1, 1, -1, 1, ...)$ ist divergent. Sie konvergiert gegen keinen Grenzwert. Man sagt hier in diesem Fall, sie ist *alternierend.*

- Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)$ ist *bestimmt divergent* (oder *uneigentlich konvergent)*, da die Folgenglieder beliebig groß werden und zu jedem $M \in \mathbb{R}$ alle Folgenglieder ab a_M größer als M sind. Das ist genau das, was Definition 8.4 aussagt. ■

Zur Definition 8.5 der Beschränktheit von Folgen: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl S gibt, sodass kein Folgenglied größer als S ist, und nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl s gibt, sodass kein Folgenglied kleiner als s ist.

Beispiel 58

- Das klassische Beispiel einer beschränkten Folge ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese ist nach oben durch 1 und nach unten durch -1 beschränkt, was sofort klar ist.
- Wir betrachten die Folge $(a_n) := \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und wollen zeigen, dass diese beschränkt ist. Dies zeigt die folgende Rechnung:
$$a_n = \frac{2n+1}{n+1} = \frac{(2n+2)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}.$$
Man sieht jetzt sofort, dass $a_n < 2 \ \forall n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge tatsächlich nach oben durch 2 beschränkt. ■

Zur Definition 8.6 der Monotonie von Folgen: Wie wir konkret Monotonie an Folgen nachweisen, werden die folgenden Beispiele im Verlauf der Erklärungen zeigen. Wir möchten an dieser Stelle nur darauf hinweisen, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, Monotonie zu zeigen. Wir beschränken uns auf den Fall, dass wir zeigen sollen, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist. Das bedeutet nach Definition, dass $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Dies ist aber äquivalent zu:

- $a_{n+1} - a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, falls $a_n \neq 0$.
- $a_{n+1} \geq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Zur Definition 8.7 einer Teilfolge: Wow! Die Definition 8.7 einer Teilfolge klingt aber erst einmal kompliziert. Ist sie aber gar nicht. Wir versuchen es einmal anschaulich zu erklären, was es mit diesen k auf sich hat, indem wir uns ein Beispiel anschauen.

Beispiel 59

Nehmen wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$. Setzt man nacheinander für n die natürlichen Zahlen ein, so erhält man die Folgenglieder der Folge. Also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots)$.
Nun kann man einschränken, was man für n einsetzen möchte. Dann sagt man sich: Ich möchte nur gerade natürliche Zahlen einsetzen. Also würde man die Teilfolge $(2, 4, 6, 8, \ldots)$ erhalten. Dies muss man aber natürlich mathematisch irgendwie aufschreiben, und dafür sind diese k gut, wenn wir das so salopp ausdrücken dürfen.

Man will für n nur gerade natürliche Zahlen einsetzen. Wie erhält man eine gerade natürliche Zahl? Klar, wenn man eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit zwei multipliziert. Also ist $n_k = 2k$, sprich $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (2, 4, 6, 8, ...)$.

Ist euch klar, wieso?
Das k durchläuft jetzt alle natürlichen Zahlen.

Für $k = 1$ ergibt sich $n_1 = 2 \cdot 1 = 2$.

Für $k = 2$ ergibt sich $n_2 = 2 \cdot 2 = 4$.

Für $k = 3$ ergibt sich $n_3 = 2 \cdot 3 = 6$.

usw.

Das sind jetzt die neuen n, die man in die Folge einsetzen muss, und gerade so erhält man die Teilfolge.
Frage an unsere eifrigen Leser: Wie erhält man die Teilfolge $(1, 3, 5, 7, ...)$?
Wie lautet dann n_k? ■

Beispiel 60

- Gegeben sei die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Welche Teilfolgen besitzt diese Folge?
  Dies ist sehr leicht, denn die Folgenglieder lauten doch $(1, -1, 1, -1, \ldots)$. Es gibt zum Beispiel die Teilfolgen $(1, 1, 1, \ldots)$ und $(-1, -1, -1, -1, \ldots)$. Aber wie schreiben wir dies auf? Wir definieren uns wieder n_k erst einmal als $n_k := 2k$ und erhalten damit nur die geraden Exponenten, die wir für n in $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ einsetzen. Also ist $n_1 = 2 \cdot 1 = 2$, $n_2 = 2 \cdot 2 = 4$ usw. und damit $(a_{2k}) = ((-1)^{2k}) = (1, 1, 1, \ldots)$. Und schon haben wir unsere erste Teilfolge. Die zweite bestimmen wir ganz ähnlich. Hier gilt dann nun $n_k := 2k - 1$ und entsprechend $n_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$, $n_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3, \ldots$ für $k \in \mathbb{N}$.
  Analog ergibt sich jetzt die zweite Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = ((-1)^{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1, -1, -1, -1, ...)$.

- Noch was „Exotisches“: Wir betrachten die Folge

$$c_n := \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{für } n \text{ gerade} \\ n, & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

  Diese Folge ist unbeschränkt. Sie besitzt aber Teilfolgen, und eine davon, nämlich $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ist sogar konvergent gegen 0. ■

Zur Definition 8.8 eines Häufungspunktes: Um uns die Definition 8.8 eines Häufungspunktes zu verdeutlichen, betrachten wir die Folgen aus Beispiel 59 und Beispiel 60. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ hatte die Teilfolge $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (2, 4, 6, 8, \ldots)$. Wir brauchen uns gar nicht die Mühe zu machen, nach einem Häufungspunkt zu suchen, denn dieser kann doch gar nicht existieren, denn die Folge ist uneigentlich konvergent. Dann kann es keinen Häufungspunkt, geschweige denn eine konvergente Teilfolge geben.
Betrachten wir nun die Folge aus Beispiel 60, genauer die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Auch diese Folge ist divergent. Dennoch können wir hier zwei Häufungspunkte angeben. Die Folge besitzt doch die beiden Teilfolgen $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, ...)$ bzw. $(b_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}} = (-1, -1, -1, ...)$. Beide Teilfolgen sind konvergent. Die eine konvergiert gegen 1 und die andere gegen -1.
Genau das ist der Grund, wieso $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

Zur Definition 8.9 einer Cauchy-Folge: Wo ist jetzt der Unterschied der Cauchy-Folge zur „normalen" Konvergenz 8.2?
Der Unterschied besteht darin, dass wir bei der Definition der Cauchy-Folge nicht den Grenzwert kennen müssen, denn $|a_n - a_m|$ misst den Abstand zwischen zwei beliebigen Folgengliedern. Wie wertvoll diese Definition ist, werden wir noch sehen.

Beispiel 61 (Cauchy-Folge und keine Cauchy-Folge)

- Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir behaupten, dass dies eine Cauchy-Folge ist. Sei also $\varepsilon > 0$ und n_0 so gewählt, dass $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. Mit $n \geq m \geq n_0$ beliebig, gilt:

$$|a_m - a_n| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \left|\frac{n-m}{mn}\right| \leq \frac{n}{mn} = \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

  Im vorletzten Schritt ging ein, dass $n \geq m \geq n_0$.

- Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{1}{n^2+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Seien $\varepsilon > 0$ und $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ und $n, m \in \mathbb{N}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $n \geq m > n_0$. Dann folgt sofort:

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &= \left|\frac{n^2+n-m^2-m}{(m^2+m)(n^2+n)}\right| \leq \left|\frac{n^2+n}{(m^2+m)(n^2+n)}\right| \\ &= \left|\frac{1}{m^2+m}\right| \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.\end{aligned}$$

  Über eine Kleinigkeit könntet ihr eventuell im Beweis stolpern: Wieso können wir o.B.d.A. annehmen, dass $n \geq m > n_0$? Es gilt immer $|x-y| = |y-x| = \ldots$. Deshalb haben wir $n \geq m$ geschrieben, was wir später verwenden konnten, damit $n^2+n-m^2-m \geq 0$ und damit $n^2+n-m^2-m \leq n^2+n$ gilt.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge. Seien dazu $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und n_0 beliebig. Dann wählen wir $m = n_0 + 1$ und $n = m + 1$ und erhalten:

$$|a_n - a_m| = |n - m| = 1 > \varepsilon.$$

Also ist die Folge keine Cauchy-Folge.

Mit Satz 8.9 hätten wir es natürlich auch leichter haben können und einfach nur die Divergenz nachweisen müssen. Es ist klar, dass eine reelle Folge, die divergiert, keine Cauchy-Folge sein kann. ■

Wir bemerken: In $\mathbb{Q}$ gibt es Folgen, die nicht gegen einen Grenzwert in $\mathbb{Q}$ konvergieren, aber die Cauchy-Eigenschaft erfüllen. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel:

Beispiel 62

Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch:

$$a_0 := 1, a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Man überlegt sich (Übung), dass diese Folge die Cauchy-Eigenschaft erfüllt. Der Grenzwert lautet aber $\sqrt{2}$ und liegt damit nicht in $\mathbb{Q}$. ■

Zur Definition 8.10 des Limes superior und Limes inferior: Die Definition 8.10 wollen wir an einem Beispiel einüben.

Beispiel 63 (Limes superior und Limes inferior)

Wir betrachten die relle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (2 + 3(-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Elemente der Folge können wir sofort hinschreiben. Ist n gerade, so lautet das Folgenelement $2+3 = 5$. Ist n ungerade, so lautet das Folgenelement $2-3 = -1$. Demnach ist $\limsup a_n = 5$ und $\liminf a_n = -1$.

Wir bemerken: Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so existieren der Limes superior und der Limes inferior. Die Folge ist genau dann konvergent, wenn $\limsup a_n = \liminf a_n$. Der gemeinsame Grenzwert entspricht dann dem Grenzwert der Folge. ■

8.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 8.1 über die Eindeutigkeit des Grenzwertes: Wer sagt uns eigentlich, dass eine Folge nicht zwei, drei oder sogar unendlich viele Grenzwerte besitzen kann? Der Satz 8.1 sagt gerade aus, dass der Grenzwert eindeutig ist. Dies müssen und wollen wir nun beweisen. Aber keine Angst! Der Beweis ist relativ leicht.

Beweis: Wir nehmen einfach mal an, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Grenzwerte a und a' besitzt und zeigen mittels der Definition der Folgenkonvergenz 8.2, dass $a = a'$ ist. Damit hätten wir die Eindeutigkeit gezeigt. Aber der Reihe nach: Seien a und a' zwei Grenzwerte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \;\forall n \geq N_1.$$

Da aber auch a' ein Grenzwert der Folge sein soll, existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} \;\forall n \geq N_2.$$

Jetzt wenden wir einen Trick an, den ihr euch unbedingt merken solltet. Wir addieren nämlich Null. Klingt erstmal sinnlos, ist aber sehr raffiniert. Das heißt genauer: $|a - a_n + a_n - a'|$. Danach wenden wir die Dreiecksungleichung an. Insgesamt ergibt sich für $|a - a'|$ das Folgende:

$$|a-a'| = |a-a_n+a_n-a'| \leq |a-a_n|+|a_n-a'| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \;\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Daraus ergibt sich $a - a' = 0 \Rightarrow a = a'$. q.e.d.

Zum Satz 8.2: Der Satz 8.2 liefert ein notwendiges Kriterium für die Folgenkonvergenz. Das heißt: *Wenn* eine Folge konvergiert, dann muss sie auf jeden Fall beschränkt sein. Wichtig ist, dass die Umkehrung *nicht* gilt. Es gilt also *nicht*, dass jede beschränkte Folge konvergent ist. Als Gegenbeispiel betrachte man das

Beispiel 64

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben durch 1 und nach unten durch -1 beschränkt, aber nach den Beispielen 55 und 60 nicht konvergent. ■

Der Satz 8.2 gibt aber schon einmal ein erstes Konvergenzkriterium für Folgen. So können wir nämlich begründen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, da sie nicht beschränkt ist. Nun aber zum Beweis von Satz 8.2. Wir führen ihn mit Erklärungen nochmals aus:

Beweis: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge, die gegen a konvergiert. Da die Folge konvergent ist, können wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finden mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \;\forall n \geq n_0.$$

Also wählen wir beispielsweise $\varepsilon = 1$. Daraus folgt aber unter Anwendung des Tricks „Addieren von Null“:

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| \;\forall n \geq n_0.$$

Hier haben wir die Dreiecksungleichung und $|a_n - a| < \varepsilon = 1$ ausgenutzt. Wir sehen nun, dass der erste Summand durch ε (in unserem Fall durch 1) beschränkt ist (da die Folge konvergiert), und $|a|$ ist sowieso beschränkt. Insgesamt ist also die Folge beschränkt. Wir sind fertig. q.e.d.

Zu den Grenzwertsätzen Satz (8.3): Wir wollen jetzt noch die drei anderen Grenzwertsätze aus dem Satz 8.3 mit einigen Erklärungen beweisen.

- Der erste Grenzwertsatz wurde schon ausführlich unter Satz 8.3 bewiesen. Beim Beweis haben wir nur die Dreiecksungleichung benutzt. Mehr ist dazu nicht zu sagen.

- Die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind nach Voraussetzung konvergent und damit insbesondere beschränkt. Daher existiert ein $M > 0$ mit $|a| \leq M$, $|a_n| \leq M$, $|b| \leq M$ und $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

  Ferner existieren zu $\varepsilon > 0$ ein N_1 und ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

  $$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \text{ und } |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \ \forall n > N_1, N_2.$$

  Wieso wir hier gerade $\frac{\varepsilon}{2M}$ wählen, wird gleich deutlich werden. Es gilt nun für alle $n \geq n_0 := \max\{N_1, N_2\}$:

  $$|a_n \cdot b_n - ab| = |a_n \cdot b_n - ab_n + ab_n - ab|\,.$$

  In diesem Schritt haben wir wieder geschickt Null addiert. Der Sinn wird gleich klar.

  $$\begin{aligned} |b_n \cdot (a_n - a) + a \cdot (b_n - b)| &\leq |b_n \cdot (a_n - a)| + |a \cdot (b_n - b)| \\ &= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \ldots \end{aligned}$$

  Hier haben wir nur die Dreiecksungleichung und die Tatsache, dass $|ab| = |a||b|$ angewendet. Und jetzt können wir die obigen Abschätzungen verwenden, und es wird nun auch ganz klar werden, wieso wir gerade $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}$ gewählt hatten.

  $$\ldots < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \forall n \geq n_0.$$

  Es geht am Ende also wunderbar auf. Natürlich hätten wir nicht $\frac{\varepsilon}{2M}$ wählen müssen. Dann hätten wir gegebenenfalls 2ε erhalten. Das wäre auch okay gewesen, denn wenn ε gegen 0 geht, dann tut dies natürlich auch 2ε. Aber so ist es doch schöner, oder? Das macht man bei vielen Beweisen so, die euch im ersten Semester begegnen werden. Man schaut erst einmal, was rauskommt und formuliert dann erst den endgültigen Beweis, den ihr in der Vorlesung vorgesetzt bekommt. Insgesamt erhalten wir also

  $$|a_n \cdot b_n - ab| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0.$$

  Damit haben wir gezeigt, dass die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ab konvergiert.

- Es ist $b \neq 0$. Damit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$|b_n - b| < \frac{|b|^2}{2} =: \varepsilon \ \forall n \geq n_0,$$

denn die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent. Auch hier definieren wir das ε gerade wieder so, dass es am Ende „schön" aufgeht. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$|b| = |b - (b_n - b_n)| = |(b - b_n) + b_n| \leq |b - b_n| + |b_n| < \frac{|b|^2}{2} + |b_n|,$$

wobei wir hier wieder geschickt Null addiert und die Dreiecksungleichung angewendet haben. Im letzten Schritt haben wir gerade $|b_n - b|$ durch $\frac{|b|^2}{2}$ nach oben abgeschätzt, so wie wir es gewählt hatten.

Also ist $|b_n|$ fast immer ungleich 0 (ab einem N) und es gilt fast immer:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b \cdot b_n}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b| \cdot |b_n|} \leq \frac{2}{|b|^2} \cdot |b_n - b|.$$

Aber es gilt auch $|b_n - b| < \varepsilon \frac{|b|^2}{2}$, also

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$$

für fast alle n. Der Rest folgt aus den schon bewiesenen Grenzwertsätzen (8.3), da $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$.

Die Grenzwertsätze versteht man erst richtig, wenn man ein paar Beispiele dazu gesehen hat. Legen wir also los!

Beispiel 65

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist diese Folge konvergent?

Angenommen, die Folge wäre konvergent. Dann können wir mittels der Grenzwertsätze den Grenzwert sofort ohne Probleme bestimmen:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2 \cdot (2 - \frac{3}{n^2})}{n^2 \cdot (3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2})}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2 - \frac{3}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2 - \frac{3}{n^2})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2})} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}} = \frac{2-0}{3+0-0} = \frac{2}{3}.$$

Nun wissen wir also, dass die Folge gegen $\frac{2}{3}$ konvergiert.

Zur Übung weisen wir dies nochmals mit unserer Definition 8.2 nach. Wir müssen also zeigen: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n - a| = \left|\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0.$$

Also los: Dazu formen wir $|\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}-\frac{2}{3}|$ erst einmal durch Hauptnennerbildung um:

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{3(2n^2-3)}{3(3n^2+2n-1)}-\frac{2(3n^2+2n-1)}{3(3n^2+2n-1)}\right|\\ &= \left|\frac{3(2n^2-3)-2(3n^2+2n-1)}{3(3n^2+2n-1)}\right| = \left|\frac{6n^2-9-6n^2-4n+2}{3(3n^2+2n-1)}\right|\\ &= \left|\frac{-4n-7}{3(3n^2+2n-1)}\right|\end{aligned}$$

Jetzt können wir ganz grob abschätzen, da wir ja nicht an einem möglichst kleinen n_0 interessiert sind:

$$\left|\frac{-4n-7}{3(3n^2+2n-1)}\right| < \frac{4n}{3n^2} < \frac{4}{n}.$$

Jetzt wissen wir, wo wir hin müssen und können den Beweis nochmal „neu“ aufschreiben, also so, wie er auch in eurer Klausur oder auf eurer Lösung zum Übungszettel stehen sollte.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass $\frac{4}{n_0} < \varepsilon \Leftrightarrow n_0 > \frac{4}{\varepsilon}$. So ein n_0 existiert nach dem Satz von Archimedes. Nach der obigen Abschätzung gilt dann:

$$\left|\frac{2n^2-3}{3n^2+2n-1}-\frac{2}{3}\right| < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{n_0} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Das war ein Standardbeispiel, das ihr mit Sicherheit schon einmal in der Vorlesung gesehen habt, oder noch sehen werdet. Kommen wir zu einem weiteren Beispiel, das uns einen Trick verrät, der immer wieder mal gebraucht wird.

Beispiel 66

Wir betrachten die Folge $b_n := \sqrt{n^2+n}-n$. Zunächst einmal wollen wir den Grenzwert wieder mittels der Grenzwertsätze bestimmen und gehen davon aus, dass die Folge konvergiert. Dazu formen wir etwas um, indem wir geschickt erweitern. Das ist der Trick, von dem wir gesprochen haben und den man sich merken sollte.

$$\begin{aligned}&\sqrt{n^2+n}-n = \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{\sqrt{n^2\cdot(1+\frac{1}{n})}+n} = \frac{n}{n\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.\end{aligned}$$

Lassen wir n nun beliebig groß werden, das heißt $n \to \infty$, so ergibt sich der Grenzwert $\frac{1}{2}$, denn es geht $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{2}$ für $n \to \infty$.

Nun wenden wir wieder zur Übung die Definition 8.2 der Konvergenz an. Wir schätzen also $|b_n - \frac{1}{2}|$ ab:

$$\begin{aligned}\left|b_n - \frac{1}{2}\right| &= \left|\sqrt{n^2+n} - n - \frac{1}{2}\right| \\ &= \left|\sqrt{n^2+n} - (n + \frac{1}{2})\right| = \left|\frac{(\sqrt{n^2+n} - (n+\frac{1}{2}))\cdot(\sqrt{n^2+n}+n+\frac{1}{2}))}{\sqrt{n^2+n}+(n+\frac{1}{2})}\right| \\ &= \left|\frac{n^2+n-(n^2+n+\frac{1}{4})}{\sqrt{n^2+n}+(n+\frac{1}{2})}\right| = \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{n^2+n}+(n+\frac{1}{2})} \leq \frac{\frac{1}{4}}{n} = \frac{1}{4n}.\end{aligned}$$

Und von vorne: Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0 > \frac{1}{4\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\left|b_n - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{4n_0} < \varepsilon.$$

Damit ist alles gezeigt. ■

Wir empfehlen euch: Rechnet so viele Beispiele wie möglich durch und habt keine Angst vor diesen ε-n_0-Beweisen. Irgendwann, nach etwas Übung, werdet ihr über solche Aufgaben lachen können, da sie euch einfach von der Hand gehen werden.

Des Weiteren wollen wir nochmals ausdrücklich darauf hinweisen, dass die Grenzwertsätze *nur* für konvergente Folgen gelten. Um euch dies zu „beweisen“, betrachten wir das folgende

Beispiel 67

Wir betrachten die divergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Es gilt also $a_n \cdot b_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Nun ist $a_n \cdot b_n \to 1$ für $n \to \infty$.

Aber: $a_n = n \to \infty$ für $n \to \infty$ und $b_n \to 0$ für $n \to \infty$. Was ist aber „$\infty \cdot 0$“? Es ist nicht etwa 1, sondern unbestimmt! ■

Zum Satz 8.4: Dass $\lim_{n\to\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty}(a_n)$ gilt, folgt sofort aus den Grenzwertsätzen (Satz 8.3), wenn wir beispielsweise $b_n := \lambda$ setzen.

Zum Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 8.5): Zum Satz von Bolzano-Weierstraß wollen wir nicht allzu viel sagen. Nur, dass aus diesem Satz zwei wichtige Sätze folgen, wie wir noch sehen werden. Nämlich einmal, dass jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert (Satz 8.6), und dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall ein Maximum bzw. Mininum annimmt. Wir werden dies im Kapitel 10 über die Stetigkeit und im Kapitel 11 zur Differenzierbarkeit genauer sehen.

Zum Satz 8.6: Dies hatten wir schon angedeutet: Die Beschränktheit ist ein notwendiges Kriterium für die Folgenkonvergenz. Das heißt, wenn eine Folge konvergiert, muss sie auf jeden Fall beschränkt sein. Das bedeutet aber für uns: *Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie nicht konvergent sein.*
Der Satz 8.6 findet vor allem Anwendungen bei den rekursiv definierten Folgen, wie wir jetzt sehen werden:
Weiter oben haben wir festgestellt (zum Beispiel an der Collatz-Folge), dass Folgen rekursiv definiert sein können. Als motivierendes Beispiel betrachte man die Fibonacci-Folge.

Beispiel 68 (Fibonacci-Folge)
Seien $F_1 := 1, F_2 := 1$ und $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$. Wir erhalten die rekursiv definierte Folge der *Fibonacci-Zahlen*:

$$(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots).$$

Benannt ist diese Folge nach Leonardo Fibonacci, der damit 1202 das Wachstum einer Kaninchenpopulation beschrieb. Die Reihe war aber schon in der indischen und westlichen Antike bekannt. ∎

Aber wie bestimmt man den Grenzwert von diesen rekursiv definierten Folgen? Wie kann man Aussagen darüber treffen, ob die rekursiv definierte Folge konvergiert oder nicht?
Diese Fragen wollen wir nun nacheinander und ganz in Ruhe beantworten, indem wir uns ein paar Beispiele anschauen.

Beispiel 69
Zeige, dass die durch

$$a_{n+1} := \frac{a_n}{2} + 1$$

rekursiv definierte Folge konvergiert und bestimme ihren Grenzwert. Der Startwert sei $a_0 = 1$.
Wir stellen uns einfach erst einmal blöd und gehen davon aus, dass die Folge gegen den Grenzwert a konvergiere. Dann gilt also $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ bzw. auch $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = a$.
Insgesamt erhalten wir also eine einfache Gleichung, indem man einfach alle Indizes streicht, und können so den möglichen Grenzwert bestimmen:

$$a = \frac{a}{2} + 1 \Leftrightarrow 2a = a + 2 \Leftrightarrow a = 2.$$

Wenn die Folge konvergiert, dann also gegen 2.
Warum haben wir das Ganze jetzt vorher schon gemacht? Ganz einfach: Wir zeigen jetzt, dass die Folge nach oben durch 2 beschränkt und streng monoton wachsend ist. Dann folgt sofort die Konvergenz der Folge aus Satz 8.6.

Wir hätten natürlich auch erst einmal durch Einsetzen von ein paar Werten eine obere Schranke ermitteln bzw. vermuten können. So sind zum Beispiel 3 oder 518 auch obere Schranken der Folge. Dennoch bietet sich erst einmal an, den möglichen Grenzwert der Folge in Gedanken oder auf einem Schmierzettel zu berechnen.

- *Nachweis der Beschränktheit:* Wir müssen zeigen, dass $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Und wenn wir etwas für alle natürlichen Zahlen zeigen sollen, bietet sich doch die vollständige Induktion an, die wir in Kapitel 5 über die Beweistechniken besprochen haben. Also fangen wir an:

  Induktionsanfang für $n = 0$: Dort müssen wir also a_0 angeben. Dies ist aber gerade unser Startwert. Es gilt $a_0 = 1 \leq 2$. Der Induktionsanfang ist damit erfüllt.

  Induktionsschritt: Von n auf $n+1$:

  Wir müssen zeigen, dass $a_{n+1} \leq 2$ und zwar unter der Induktionsvoraussetzung (IV), dass $a_n \leq 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt ist. Wir setzen an:

  Es ist $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1$. Nach der Induktionsvoraussetzung ergibt sich letztendlich
  $$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \leq \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2.$$
  Auch der Induktionsschritt ist damit erfüllt.

- *Nachweis der Monotonie:* Wenn es uns jetzt noch gelingt, zu zeigen, dass die Folge monoton wachsend ist, so haben wir die Konvergenz gezeigt. Wir müssen hierfür zeigen, dass $a_{n+1} \geq a_n$ oder das dazu äquivalente $a_{n+1} - a_n \geq 0$. Also:
  $$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + 1 - a_n = 1 - \frac{a_n}{2} = \frac{2 - a_n}{2} \geq 0.$$
  Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Folge nach oben durch 2 beschränkt ist. Also ist die Folge auch monoton wachsend, und die Folge konvergiert insgesamt gegen 2.

  An dieser Stelle könnten wir jetzt also wie oben den Grenzwert ausrechnen, da wir wissen, dass er existiert. ■

Schieben wir gleich noch ein Beispiel hinterher, denn nur Übung macht den Meister.

Beispiel 70

Wir betrachten die rekursiv definierte Folge
$$a_{n+1} := \ln(1 + a_n)$$
mit $a_0 = 1$. Wir tun auch hier erstmal wieder so, als wäre die Folge konvergent, das heißt, es würden $\lim_{n\to\infty}(a_n) = a$ und $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}) = a$ gelten.

Wir erhalten also folgenden möglichen Grenzwert:

$$a = \ln(1+a) \Leftrightarrow e^a = e^{\ln(1+a)} \Leftrightarrow e^a = 1 + a.$$

Diese Gleichung ist nur für $a = 0$ erfüllt, wie wir in Kapitel 11 noch sehen werden, wenn wir die Exponential- und Logarithmusfunktion einführen.
Es liegt also nahe, zu vermuten, dass die Folge nach unten durch 0 beschränkt ist, dass also $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Auch dies weisen wir mittels Induktion nach:

- *Nachweis der Beschränktheit:* Beginnen wir mit dem

  Induktionsanfang für $n = 0$: Mit unserem Startwert $a_0 = 1$ folgt $a_0 = 1 \geq 0$. Der Induktionsanfang ist damit erfüllt.

  Induktionsschritt: Von n auf $n+1$:

  Wir zeigen $a_{n+1} \geq 0$ unter der Induktionsvoraussetzung, dass $a_n \geq 0$ für ein n wahr ist. Es ist nun $a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \geq 0$.

  Dies folgt sofort aus der Induktionsvoraussetzung und aus der Eigenschaft der Logarithmusfunktion. Damit ist also auch der Induktionsschritt erbracht und die Behauptung bewiesen.

- *Nachweis der Monotonie:* Wir zeigen, dass die Folge monoton fallend ist. Hieraus und aus der Beschränktheit folgt dann sofort die Konvergenz der Folge, da eine monoton fallende Folge genau dann konvergiert, wenn sie nach unten beschränkt ist. Wir müssen $a_{n+1} < a_n$ bzw. $a_{n+1} - a_n < 0$ zeigen. Mit der Ungleichung $\ln(1+x) \leq x$ für $x \geq -1$ ergibt sich auch $\ln(1 + a_n) < a_n$ und damit die Behauptung. ■

Wir wollen auf eines nochmal *ausdrücklich hinweisen:* Es reicht natürlich nicht, einfach nur den Grenzwert nach obigem Muster zu berechnen und zu sagen, dass die Folge doch konvergent gegen diesen Grenzwert sein muss. Warum das nicht ausreicht, zeigt folgendes Gegenbeispiel.

Beispiel 71

Wir betrachten die rekursiv durch $a_{n+1} := a_n^2$ definierte Folge. Diese ist mit Sicherheit nicht konvergent, wenn der Betrag des Startwertes größer als 1 ist.
Die Folge scheint unter dieser Voraussetzung nicht beschränkt zu sein, und Beschränktheit ist nun mal ein notwendiges Kriterium für die Konvergenz einer Folge. Wenn wir den Grenzwert nach obigem Schema aber berechneten, erhielten wir $a = a^2$, und dies ist für $a = 0$ und für $a = 1$ erfüllt. Man kann also „etwas“ ausrechnen, aber die Folge ist nicht konvergent. Was lernen wir daraus? *Bei rekursiv definierten Folgen weist ihr erstmal nach, dass die Folge beschränkt und monoton ist, und könnt dann den Grenzwert berechnen, da man aus Monotonie und Beschränktheit Folgenkonvergenz folgern kann (siehe Satz 8.6).* ■

Zum Satz 8.7 über monoton wachsende und fallende reelle Folgen: Was bedeutet Satz 8.7? Ganz einfach:
Eine monoton wachsende Folge konvergiert gegen ihr Supremum, wenn die Folge nach oben beschränkt ist, andernfalls „konvergiert" sie gegen ∞. Sie konvergiert dann uneigentlich. Analog für das Infimum.

Zum Satz 8.9, dass jede Cauchy-Folge konvergent ist: Der Satz 8.9 sagt, dass im Reellen die konvergenten Folgen gerade die Cauchy-Folgen sind.
Bei Cauchy-Folgen muss man dennoch etwas vorsichtig sein. Man kann sich leicht ein Beispiel für eine Folge überlegen, für die $|a_n - a_{n+1}|$ eine Nullfolge ist, also so ähnlich wie Cauchy aussieht, aber nicht konvergent ist. Betrachten wir ein solches Beispiel als Warnung.

Beispiel 72
Wir nehmen die Partialsummen der harmonischen Reihe und zeigen mittels des Cauchy-Kriteriums, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist. Für die Divergenz ist die Negation der Folgenkonvergenz zu zeigen, also:

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \exists m > n \geq n_0 : |a_m - a_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \right| > \varepsilon.$$

Wähle $\varepsilon := \frac{1}{2}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir wählen dann $n := n_0$ und $m := 2n$, dann gilt $m > n \geq n_0$ und

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

■

Im Kapitel 9 über Reihen, werden wir einen anderen Beweis geben, wieso die harmonische Reihe $\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}$ divergiert. Hier werden wir Reihen dann auch ordentlich definieren und mit Leben füllen. Betrachtet dieses Beispiel also als Vorgeschmack auf das nächste Kapitel.

Ein ausführliches Beispiel: Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir eine Folge nochmals auf Konvergenz untersuchen.

Beispiel 73
Es sei $x \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man sieht schon sehr schnell, dass die Folgenkonvergenz von x abhängig ist. Wir müssen also ein paar Fälle unterscheiden:

- Wenn $x = 1$ bzw. $x = 0$, dann erhalten wir die konstanten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese konvergieren trivialerweise gegen 1 bzw. gegen 0, denn die Folgen haben ja nur die Folgenglieder 1 bzw. 0.

- Wenn $x = -1$, dann erhalten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese Folge ist divergent, weil sie zwei konvergente Teilfolgen, sprich zwei Häufungspunkte besitzt. Eine konvergente Folge besitzt aber nur genau einen, siehe auch das Beispiel 60.

- Wenn $|x| > 1$ (zum Beispiel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2^n)_{n\in\mathbb{N}}$), dann ist die Folge nicht beschränkt. Die Folgenglieder werden beliebig groß, und daher kann die Folge nicht konvergieren.

- Bleibt nur noch der Fall $0 < |x| < 1$ zu betrachten. Hierfür konvergiert die Folge, wie wir jetzt sehen werden. Dies kostet etwas Arbeit.

  Aus der Bernoullischen Ungleichung (siehe Kapitel 5, Beispiel 33) folgt:

  $$\frac{1}{|x|^n} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{|x|} - 1\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(\frac{1}{|x|} - 1\right).$$

  Sei $\varepsilon > 0$. Nun wählen wir $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass $1 + n_0 \cdot \left(\frac{1}{|x|} - 1\right) > \frac{1}{\varepsilon}$ gilt, also:

  $$n_0 > \frac{\frac{1}{\varepsilon} - 1}{\frac{1}{|x|} - 1}.$$

  Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

  $$\frac{1}{|x|^n} \geq 1 + n \cdot \left(\frac{1}{|x|} - 1\right) \geq 1 + n_0 \cdot \left(\frac{1}{|x|} - 1\right) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

  Es gilt $|x^n - 0| = |x^n| < \varepsilon$.

  Und da steht das Gewünschte. Aber wie kommen wir darauf? Ganz einfach: Aus $\frac{1}{|x|^n} > \frac{1}{\varepsilon}$ folgt durch Umstellen doch $\varepsilon > |x|^n$.

  Noch eine Anmerkung: Die Konvergenz von x^n mit $0 < x < 1$ könnten wir viel schneller zeigen, wenn wir den Logarithmus verwenden dürften (Wie nämlich? Tipp: Für beliebiges $0 < \varepsilon < 1$ können wir dann $n = \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(x)}$ setzen.) Den Logarithmus hat man bei der Einführung der Folgen aber meistens noch nicht zur Verfügung. Der Aufbau der Analysis, das werdet ihr an eurer Vorlesung merken, geschieht aber schrittweise. Man darf nur das verwenden, was wir auch bewiesen haben, sonst ergeben sich böse Zirkelschlüsse. Daher mussten wir den Beweis in diesem Fall mit elementaren Mitteln, wie der Bernoulli-Ungleichung, führen. ■

11 Differenzierbarkeit

Übersicht

Differenzierbarkeit ist einer der Hauptaspekte der Analysis 1. Wir werden uns daher ausführlich damit beschäftigen. Viele von euch denken vielleicht, dass schon alles aus der Schule bekannt ist, aber ihr werdet sehen, dass es Sinn macht, die Begriffe nochmals exakt einzuführen und zu definieren.

11.1 Definitionen

Definition 11.1 (Differenzierbarkeit)
Es sei $D \subset \mathbb{R}$, D offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen f ist im Punkt $x_0 \in D$ **differenzierbar**, wenn der folgende Grenzwert existiert:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

In diesem Fall schreiben wir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

oder auch:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

und nennen $f'(x_0)$ die **Ableitung** (den Differentialquotient, das Differential) von f an der Stelle x_0. f heißt in D differenzierbar, falls f im Punkt x_0 differenzierbar ist für alle $x_0 \in D$.

Definition 11.2 (Differenzenquotient)
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ nennen wir den **Differenzenquotienten**.

Definition 11.3 (Höhere Ableitungen)
Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ sei in D differenzierbar. Wenn die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ von f in $x_0 \in D$ differenzierbar ist, so heißt die Ableitung von f' die **zweite Ableitung** von f im Punkt $x_0 \in D$. Wir schreiben dann:

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x_0)}{\mathrm{d}x^2} := f''(x_0) := f^{(2)}(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Dies können wir für höhere Ableitungen fortsetzen. Die **k-te Ableitung** schreiben wir dann als:

$$\frac{\mathrm{d}^k f(x_0)}{\mathrm{d}x^k} := f^{(k)}(x_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{(k-1)} f(x)}{\mathrm{d}x^{(k-1)}}\right).$$

f heißt in D **k-mal differenzierbar**, wenn f für alle $x_0 \in D$ k-mal differenzierbar ist. f heißt in D k-mal **stetig differenzierbar**, wenn zusätzlich zur k-maligen Differenzierbarkeit die k-te Ableitung $f^{(k)}$ stetig in D ist. Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $C^k(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist in } D\ k\text{-mal stetig differenzierbar}\}$. Weiterhin setzen wir $C^\infty(D) := \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist in } D \text{ beliebig oft differenzierbar}\}$, und mit C^0 bezeichnen wir den Raum aller stetigen Funktionen.

Anmerkung: Was wir in der Definition und in den kommenden Definitionen genau unter einer offenen Menge verstehen, wollen wir an dieser Stelle nicht weiter ausführen, sondern verweisen auf die Literatur, beispielsweise auf [AE08].

Definition 11.4 (Extrempunkt)
Seien $D \subset \mathbb{R}$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen die Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Gilt für diese x sogar die strikte Ungleichung $f(x_0) > f(x)$, so heißt das lokale Maximum **strikt** bzw. **isoliert**. Gilt $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in D$, so heißt das Maximum **global**.
$f : D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion und $x_0 \in D$. Wir sagen die Funktion f besitzt an der Stelle $x_0 \in D$ ein **lokales Minimum**, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Gilt für diese x sogar die strikte Ungleichung $f(x_0) < f(x)$, so heißt das lokale Minimum **strikt** bzw. **isoliert**. Gilt $f(x_0) \leq f(x)\ \forall x \in D$, so heißt das Maximum **global**.
Der Begriff des **Extremums** ist der Oberbegriff für Maximum und Minimum. Gegebenenfalls sagen wir auch **Hochpunkt** bzw. **Tiefpunkt**.

Definition 11.5 (Kritischer Punkt)
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so nennen wir eine Stelle $x \in D$ mit $f'(x) = 0$ **kritischer Punkt**.

Definition 11.6 (Wendepunkte)
Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ein Wendepunkt ist ein Punkt auf dem Funktionsgraphen von f, an welchem der Graph sein Krümmungsverhalten ändert. Der Graph wechselt hier von einer Rechts- in eine Linkskurve oder umgekehrt.

Definition 11.7 (Taylorreihe)
Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Dann heißt die Reihe

$$T_f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

die **Taylor-Reihe** von f mit Entwicklungspunkt x_0.
Wir nennen

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

das **n-te Taylorpolynom**.

Anmerkung: Für die Konvergenz sei an dieser Stelle auf die Definition 9.4 des Konvergenzradius aus Kapitel 9 verwiesen.

Definition 11.8 (Restglied)
Das **n-te Restglied** $R_n(x)$ einer Taylorentwicklung einer Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0 ist definiert als $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Es gibt zwei wichtige Restglieddarstellungen:

1. **Restglieddarstellung nach Lagrange:** $R_n(x) := \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, wobei ξ zwischen x_0 und x liegt.
2. **Integraldarstellung des Restglieds:**
   $R_n(x) := \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$

11.2 Sätze und Beweise

Satz 11.1 (Jede differenzierbare Funktion ist stetig)
Ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, so ist sie auch in x_0 stetig.

Beweis:

$$\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right)$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right)\cdot \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Man sieht sofort, dass $\lim_{h\to 0}\left(f(x_0+h)\right)-f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Also ist f stetig in x_0. q.e.d.

Satz 11.2 (Ableitungsregeln)
Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ offene Mengen und $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in $x_0 \in D$ differenzierbar sind. Dann sind die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$ und, wenn zusätzlich $g(x_0) \neq 0$ gilt, auch $\frac{f}{g}$ im Punkt x_0 differenzierbar, und es gelten die folgenden Ableitungsregeln:

1. ***Summenregel:*** $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
2. ***Produktregel/Leibnizregel:*** $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$
3. ***Quotientenregel:*** $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$
4. *Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$. Die Funktion f sei in $x_0 \in D$ differenzierbar und g sei in $f(x_0) \in E$ differenzierbar, dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar und es gilt die **Kettenregel** $(g \circ f)' = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.*

Beweis: *Beweis der Summenregel*:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) + \lim_{x\to x_0}\left(\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$= f'(x_0) + g'(x_0).$$

Beweis der Produktregel:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)}{x-x_0}\right)$$
$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x) \cdot (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(g(x) \cdot \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \right) + f(x_0) \cdot \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}
$$

Beweis der Quotientenregel:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x - x_0} \right) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x - x_0)} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \right) \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \right) \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{1}{g(x)g(x_0)} \left(\frac{-f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{g(x)(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \right) \right) \\
&= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.
\end{aligned}
$$

Beweis der Kettenregel:

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Satz 11.3 (Ableitung der Umkehrfunktion)
Seien $D, E \subset \mathbb{R}$ offen und $f : D \to E$ eine stetige und bijektive Funktion. Ist die Funktion f in x_0 differenzierbar und gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch f^{-1} in $f(x_0) =: y$ differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1})'(y) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis: Zum Beweis benutzen wir die Kettenregel. Wir setzen $g := f^{-1}$. Dann ist $g \circ f = \mathrm{Id}_D$ auf ganz D differenzierbar mit $(g \circ f)'(x) = 1 \ \forall x \in D$ (vergleiche das Beispiel 101). Wegen der Injektivität von f können wir für alle $x \neq x_0$ schreiben

$$1 = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (11.1)$$

Ist $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge mit $d_n \neq y_0 := f(x_0)$ und $\lim_{n\to\infty} d_n = y_0$, so existiert wegen der Bijektivität von f genau eine Folge $\xi_n := f^{-1}(d_n)$. Es ist $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x_0$.
Dies und (11.1) implizieren nun:

$$1 = g'(y_0) \cdot f'(x_0) = \left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Damit folgt die Behauptung. q.e.d.

Satz 11.4 (Notwendige Bedingung für Extrempunkt)
Gegeben sei eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, die in einem Punkt $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Extremum besitzt. Ist die Funktion f differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ in (a,b) liegt. Wir nehmen an, f besitzt an der Stelle x_0 ein lokales Maximum. Der Fall des lokalen Minimums wird analog behandelt. Durch eventuelles Verkleinern von ε können wir nun o.B.d.A. annehmen, dass $f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.
Wir betrachten nun den Differenzenquotienten $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \neq x_0$ und $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Daraus folgt:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$$

und analog erhält man auch

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$$

Daraus ergibt sich:

$$0 \geq \lim_{x \downarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{x \uparrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0.$$

Dies impliziert $f'(x_0) = 0$. q.e.d.

Satz 11.5 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)
Es seien $a > b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann existiert mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Beweis: Wir definieren eine Hilfsfunktion $h(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a)$. Die Funktion $h(x)$ ist im Intervall $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Außerdem gilt $h(a) = f(a)$, denn

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a)$$

und $h(b) = f(a) = h(a)$, denn

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a).$$

Ist h konstant, so gilt $h'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ (vergleiche das Beispiel 101). Daraus folgt die Behauptung.
Ist h nicht konstant, so folgt wegen der Stetigkeit von h, und weil $h(a) = h(b)$, dass h das Maximum oder das Minimum im Inneren annimmt, das heißt in einem Punkt $\xi \in (a, b)$. In ξ gilt deshalb $h'(\xi) = 0$. Dies ist äquivalent zu:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Damit ist nun wirklich alles gezeigt. q.e.d.

Satz 11.6 (Der Satz von Rolle)
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in (a, b) differenzierbar mit $f(a) = f(b)$, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis: Folgt sofort aus dem Mittelwertsatz (Satz 11.5). q.e.d.

Satz 11.7
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und in (a, b) differenzierbar. Gilt für alle $x \in (a, b)$ die Ungleichung $f'(x) \geq 0$, $f'(x) > 0$, $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$, so ist die Funktion f in $[a, b]$ monoton wachsend, streng monoton wachsend, monoton fallend bzw. streng monoton fallend.

Beweis: Sei $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$. Die anderen Fälle sind analog zu behandeln. Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Angenommen, die Funktion f wäre in $[a, b]$ nicht monoton wachsend, sondern auf einem Teil des Intervalls $[a, b]$ monoton fallend. Dann gäbe es $x_1 < x_2$ mit $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, sodass $f(x_1) > f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz (Satz 11.5) existiert nun ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. Da nun nach Voraussetzung $x_2 - x_1 > 0$ und $f(x_2) - f(x_1) < 0$, gilt $f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$.
Wir hatten aber vorausgesetzt, dass $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b)$. Dieser Widerspruch beweist unseren Satz. q.e.d.

Satz 11.8
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig, im Intervall (a, b) differenzierbar und in $x_0 \in (a, b)$ zweimal differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ($f''(x_0) > 0$), dann besitzt f an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ ein isoliertes lokales Maximum (lokales Minimum).

Beweis: Seien $f''(x_0) < 0$ und $f'(x_0) = 0$. Der andere Fall ist analog zu behandeln. Es folgt:

$$0 > f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Daher existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $\frac{f'(x)}{x-x_0} < 0 \ \forall x \in (a,b)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$.
Dies ergibt insgesamt $f' > 0 \ \forall x \in (a,b) \cap (x_0 - \varepsilon, x_0)$ (linke Seite) und $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \cap (x_0, x_0 + \varepsilon)$ (rechte Seite).
Das wiederum heißt jedoch, dass f auf dem Intervall $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ streng monoton wachsend und auf dem Intervall $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ streng monoton fallend ist. Dies wiederum bedeutet, dass an der Stelle x_0 ein isoliertes Maximum vorliegen muss.

q.e.d.

Satz 11.9
Eine Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist im Inneren ihres Konvergenzintervalls (Konvergenzkreises) differenzierbar, und die Ableitung ergibt sich durch gliedweise Differentiation:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

Weiterhin ist der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ derselbe wie von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Satz 11.10 (Die Regeln von L'Hospital)
Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Weiterhin seien $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gelte weiterhin $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a,b]$, und es existiere der Limes

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R},$$

dann folgt:

1. *Falls $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} g(x) = 0$ gilt:*

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

2. *Falls $\lim_{x \uparrow a} f(x) = \lim_{x \uparrow a} g(x) = \pm\infty$ gilt:*

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Analoge Aussagen formuliert man für den Grenzübergang $x \downarrow a$.

11.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 11.1 der Differenzierbarkeit: Anschaulich ist euch die Ableitung einer Funktion aus der Schule ja bekannt. Ihr kennt sie als Tangentensteigung. Der Differenzenquotient bzw. die Ableitung wurde euch so erklärt, dass eine Sekante durch Grenzübergang zu einer Tangente wird. Diese Vorstellung ist genau richtig und ihr solltet sie auch nicht vergessen.
Noch etwas zur Schreibweise: Wir schreiben entweder für die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 $f'(x_0)$ oder - wie es der Physiker gerne bei Ableitungen nach der Zeit t macht-auch oft $\dot{f}(t) = \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$. Dies sagt nur aus, dass wir die Funktion f an der Stelle x_0 nach x differenzieren. Analog ist $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}^2 x_0}$ zu verstehen.
Des Weiteren möchten wir auch noch zur sogenannten *„h-Methode“* gelangen. Viele von euch werden sich erinnern. Was macht man da einfach? Man ersetzt das x in der Definition des Differenzenquotienten (siehe Definition 11.1 und 11.2) einfach durch $x_0 + h$ und lässt dann h gegen 0 laufen. Das bedeutet konkret:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun einige Ableitungen von elementaren Funktionen mit Hilfe der Definition 11.1 berechnen. Wir werden aber auch noch auf die Ableitungsregeln zu sprechen kommen, mit denen wir solche Ableitungen natürlich viel einfacher ermitteln können.

Beispiel 101

- Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := c$, wobei $c \in \mathbb{R}$. Wie berechnen wir nun die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0? Einfach, indem wir die Definition 11.1 der Differenzierbarkeit einer Funktion anwenden:

  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

  Die Ableitung einer konstanten Funktion ist also Null. Das haben wir hiermit gezeigt, war uns aber schon vertraut.

- Nun seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := c \cdot x$ und $c \in \mathbb{R}$, dann ist

  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot x - c \cdot x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = c.$$

- Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^2$, dann ergibt sich:

  $$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot (x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0. \end{aligned}$$

Andererseits liefert die „h-Methode“:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{x_0^2+2\cdot x_0\cdot h+h^2-x_0^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2x_0\cdot h+h^2}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h\cdot(2x_0+h)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0. \end{aligned}$$

- Wir wollen die Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ herleiten. Wir setzen an:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0}.$$

An diesem Punkt erinnern wir uns an die geometrische Summenformel aus Kapitel 5 (Beispiel 40) über Beweistechniken. Damit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0}\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} &= \lim_{x\to x_0}\sum_{k=0}^{n-1} x^k\cdot x_0^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k\cdot x_0^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{n-1} = n\cdot x_0^{n-1}. \end{aligned}$$

Das bedeutet also, dass die Ableitung von $f(x)=x^n$ gerade $f'(x)=n\cdot x^{n-1}$ lautet.

Alternativ hätten wir auch ohne Wissen über die geometrische Summenformel die Aufgabe lösen können, wenn wir einfach eine Polynomdivision durchgeführt hätten.

- Wir wollen die Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\frac{1}{x}$ berechnen.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{x_0-x}{x\cdot x_0\cdot(x-x_0)} \\ &= \lim_{x\to x_0} -\frac{x-x_0}{x\cdot x_0\cdot(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} -\frac{1}{x\cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

- Wir berechnen die Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x):=\frac{1}{x^n}$ mit $n\in\mathbb{N}$. Hier müssen wir bei den Umformungen etwas mehr in die Trickkiste greifen (wir benötigen die geometrische Reihe, vergleiche Beispiel 75 aus Kapitel 9 und Beispiel 40 aus Kapitel 5), aber es ist alles machbar:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x_0^n}}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^n}-\frac{1}{x_0^n}}{(-x\cdot x_0)\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right)} \\ &= \lim_{x\to x_0} \left(-\frac{1}{x\cdot x_0}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-1-k}\right) \\ &= -\frac{1}{x_0^2}\cdot n\cdot\left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-1} = -\frac{n}{x_0^{n+1}}. \end{aligned}$$

Das heißt, dass die Ableitung von f gerade $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ lautet.

- Noch ein letztes Beispiel, das nochmal einen kleinen Erweiterungstrick mit ins Spiel bringt. Und zwar betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ und versuchen die Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 zu bestimmen:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}.$$

Wir erweitern geschickt, sodass wir die dritte binomische Formel anwenden können:

$$\begin{aligned} \ldots &= \lim_{x\to x_0} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{(x-x_0)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x_0}}; \end{aligned}$$

fertig. ■

Zur Definition 11.4 des Extrempunktes: Was bedeutet unsere Definition 11.4 eines Extrempunktes genau? Das ist eigentlich ganz einfach. Es muss eine Stelle x_0 aus dem Definitionsbereich geben, sodass deren Funktionswert größer ist als jeder andere Funktionswert zu der beliebigen Stelle x und das in einer ganz kleinen ε-Umgebung. Die Abbildung 11.1 soll dies verdeutlichen.

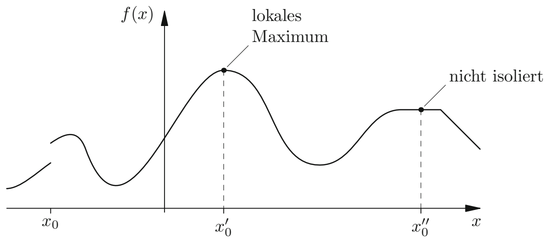

Abb. 11.1: Veranschaulichung von Extrempunkten.

In der Abbildung 11.2 existieren nur relative Extrempunkte, keine globalen (absoluten) Extrema. Es können aber durchaus in einer vorgegebenen Umgebung absolute Maxima existieren.

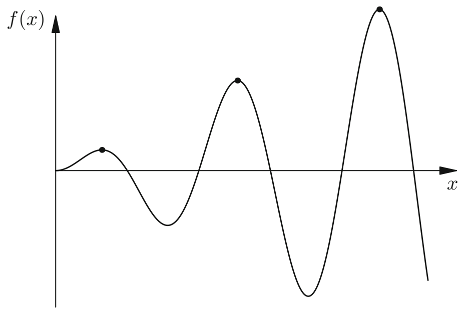

Abb. 11.2: Existenz von relativen Extrempunkten.

Beispiel 102
Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ besitzt beispielsweise an den Stellen $x = 2k \cdot \pi$, wobei $k \in \mathbb{Z}$, isolierte lokale Maxima und an den Stellen $y_k = (2k+1) \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$, isolierte lokale Minima. Die Extremstellen liegen bei $z_k = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Diese sind auch global. ■

Zur Definition 11.5 eines kritischen Punktes: Nach Satz 11.4 sind die lokalen Extremstellen kritische Punkte. Aber die Umkehrung gilt nicht: Nicht jeder kritische Punkt ist auch ein Extrempunkt, wie die Funktion $f(x) = x^3$ zeigt. Es gilt ja $f'(0) = 0$. Aber an der Stelle $x = 0$ liegt mit Sicherheit kein Extrempunkt vor, sondern ein Wendepunkt (siehe Definition 11.6), wie man auch an dem Graphen (Abbildung 11.3) sehen kann.

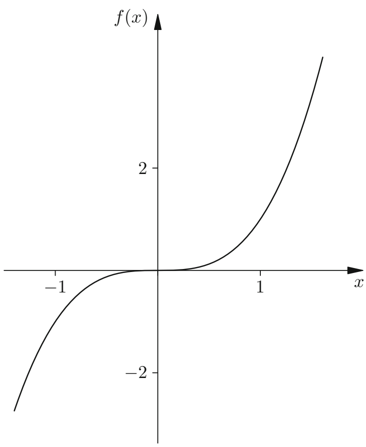

Abb. 11.3: Die Funktion $f(x) = x^3$ besitzt an der Stelle $x = 0$ keinen Extrempunkt.

Zur Definition 11.6 eines Wendepunktes: Ein Wendepunkt an einer „Wendestelle“ x_0 liegt vor, wenn die zweite Ableitung der differenzierbaren Funktion f an der Stelle x_0 ihr Vorzeichen wechselt. Aus der Existenz eines Wendepunktes folgt, dass die zweite Ableitung an der Wendestelle x_0 verschwindet, also gleich Null ist. Diese Bedingung ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend für einen Wendepunkt. So ist beispielsweise die zweite Ableitung der Funktion $f(x) := x^4$ an der Stelle $x_0 = 0$, aber die Funktion stellt eine Parabel mit Tiefpunkt $(0, 0)$ dar und besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ keinen Wendepunkt.

Zur Definition 11.7 einer Taylorreihe und zur Definition 11.8 des Restglieds einer Taylorreihe: In der Analysis verwendet man Taylorreihen (auch Taylor-Entwicklungen genannt), um Funktionen in der Umgebung bestimmter Punkte durch Potenzreihen darzustellen. Taylorreihen sind also besondere Potenzreihen, die wir schon in Kapitel 9 über die Reihen in Definition 9.3 eingeführt haben. Mithilfe von Taylorreihen kann ein komplizierter analytischer Ausdruck durch eine nach wenigen Gliedern abgebrochene Taylorreihe oft gut angenähert werden. Die Taylorreihe einer Funktion f in einem Punkt x_0 ist die Potenzreihenentwicklung der Funktion an diesem Punkt.
Wir bemerken: Eine Funktion f wird bei x_0 durch seine Taylorreihe dargestellt genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Man nennt die Funktion dann *analytisch*. Schauen wir uns ausführliche Beispiele an, wie man zu einer Funktion die Taylorentwicklung bestimmen kann. Hierzu muss man differenzieren können. Wer da noch Probleme hat, schlage in den Erklärungen zu den Ableitungsregeln (Satz 11.2) nach.

Beispiel 103

- Wir berechnen das Taylorpolynom $T_3(x)$ der Funktion $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ und zeigen, dass für $|x| < \frac{1}{2}$ gilt:

$$|R_3(x)| = |f(x) - T_3(x)| \leq \frac{\sqrt{e}}{6} \cdot |x|^4 .$$

Zunächst benötigen wir die Ableitungen und deren Werte an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x \cdot \sin(x)\\
&\quad \text{mit} \quad f(x_0) = f(0) = 0.\\
f'(x) &= e^x \cdot \sin(x) + e^x \cdot \cos(x) = e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x))\\
&\quad \text{mit} \quad f'(0) = 1.\\
f''(x) &= e^x \cdot (\sin(x) + \cos(x)) + e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x)) = 2e^x \cdot \cos(x)\\
&\quad \text{mit} \quad f''(0) = 2.
\end{aligned}$$

$$f'''(x) = 2e^x \cdot \cos(x) - 2e^x \cdot \sin(x) = 2e^x \cdot (\cos(x) - \sin(x))$$
$$\text{mit} \quad f'''(0) = 2.$$
$$f^{(4)}(x) = 2e^x(\cos(x) - \sin(x)) + 2e^x(-\sin(x) - \cos(x)) = -4 \cdot e^x \cdot \sin(x).$$

$f^{(4)}(x)$ benötigen wir nachher für die Restgliedabschätzung. Einsetzen in die Taylor-Entwicklungs-Formel aus Definition 11.7 liefert:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 0 + 1 \cdot 1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Mit dem Lagrange-Restglied (siehe Definition 11.8) folgt:

$$|R_3(x)| = \left| \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 \right| = \frac{4\,|\sin(\xi)|\, e^\xi}{4!} |x|^4 \le \frac{e^{\frac{1}{2}}}{3!} |x|^4 = \frac{\sqrt{e}}{6} |x|^4 .$$

- Wir berechnen für die Funktion
$$f(x) := \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$
das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiter Ordung an der Stelle $x_0 = 1$ und zeigen anschließend, dass für alle $x \in (1, \frac{11}{10})$ die folgende Restgliedabschätzung gilt
$$|R_2(x)| \le 10^{-3}.$$
Wir berechnen zunächst die ersten Ableitungen von f und deren Werte an der Stelle $x_0 = 1$:
$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-\frac{1}{4}}, & f(x_0) &= f(1) = 1, \\ f'(x) &= -\frac{1}{4}x^{-\frac{5}{4}}, & f'(x_0) &= f'(1) = -\frac{1}{4}, \\ f''(x) &= \frac{5}{16}x^{-\frac{9}{4}}, & f''(x_0) &= f''(1) = \frac{5}{16}, \\ f'''(x) &= -\frac{45}{64}x^{-\frac{13}{4}}, \end{aligned}$$
$f'''(x)$ benötigen wir nachher für die Restgliedabschätzung. Damit gilt für die Taylorreihe zweiter Ordnung von f:
$$\begin{aligned} T_2(x) &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \overset{x_0=1}{=} 1 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{5}{16 \cdot 2!}(x-1)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{5}{32}(x-1)^2. \end{aligned}$$
Zur Restgliedabschätzung benutzen wir die Restglieddarstellung von Lagrange. Diese besagt, dass es ein (unbekanntes) ξ zwischen x_0 und x gibt, sodass
$$\begin{aligned} |R_2(x)| = |f(x) - T_2(x)| &= \left| \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-x_0)^3 \right| \overset{x_0=1}{=} \left| -\frac{45}{64 \cdot 3!}\xi^{-\frac{13}{4}}(x-1)^3 \right| \\ &= \left| -\frac{15}{128\xi^{\frac{13}{4}}}(x-1)^3 \right|. \end{aligned}$$

Mit $x_0 = 1$ und $1 < x < \frac{11}{10}$ gilt auch $1 < \xi < \frac{11}{10}$. Das benutzen wir zur Abschätzung. Zuerst lassen wir allerdings (wegen $1 > x$) den Betrag weg:

$$|R_2(x)| = \ldots = \frac{15}{128\xi^{\frac{13}{4}}}(x-1)^3 \overset{\xi>1}{\leq} \frac{15}{128}(x-1)^3 \overset{1<x<\frac{11}{10}}{\leq} \frac{15}{128}(\frac{1}{10})^3 < 10^{-3}.$$

- Wir bestimmen die Taylorentwicklung von $f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Solche Aufgabentypen sind etwas schwerer, da man hier die k-te Ableitung angeben muss. Die Vorgehensweise ist, dass wir erst einmal ein paar Ableitungen von f berechnen und dann schauen, ob wir eine Art Gesetzmäßigkeit erkennen, die wir mit Induktion beweisen. Los geht's:

$$\begin{aligned} f(x) &= -\ln(1 - \frac{x}{2}), \\ f'(x) &= -\frac{1}{1-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\left(1-\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2-x}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{(2-x)^2} \cdot (-1) = \frac{1}{(2-x)^2}, \\ f'''(x) &= -2 \cdot \frac{1}{(2-x)^3} \cdot (-1) = \frac{2}{(2-x)^3}. \end{aligned}$$

Na? Erkennt ihr schon was? Nein, noch nicht? Dann berechnen wir noch die vierte Ableitung:

$$f^{(4)}(x) = -6 \cdot \frac{1}{(2-x)^4} \cdot (-1) = \frac{6}{(2-x)^4}$$

Jetzt sollte man erkennen, dass die k-te Ableitung durch

$$f^{(k)}(x) = \frac{(k-1)!}{(2-x)^k}$$

gegeben ist. Wir müssten dies noch mit Induktion beweisen. Darauf wollen wir an dieser Stelle aber verzichten und überlassen dies dem Leser als kleine Übungsaufgabe.

Das Taylorpolynom ist damit gegeben durch

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k! \cdot 2^k} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 2^k}.$$

Das Restglied nach Lagrange lautet demnach $R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}$.

- Ein weiterer Aufgabentyp ist der folgende: Wir wollen mittels einer Taylorentwicklung $\sqrt{17}$ näherungsweise berechnen. Dazu schreiben wir $\sqrt{17}$ erst einmal um:

$$\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16 \cdot \left(1 + \frac{1}{16}\right)} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = 4 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{16}}.$$

Wir entwickeln daher die Funktion $f(x) = 4 \cdot \sqrt{1+x}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, denn $\frac{1}{16}$ ist ja wirklich fast Null und außerdem können wir mit diesem Entwicklungspunkt gut rechnen. Wir gehen analog wie in den anderen Beispielen vor:

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4 \cdot \sqrt{1+x} = 4 \cdot (1+x)^{\frac{1}{2}},\\
f'(x) &= 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x}} = \frac{2}{\sqrt{1+x}} = 2(1+x)^{-\frac{1}{2}},\\
f''(x) &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -(1+x)^{-\frac{3}{2}},\\
f'''(x) &= \frac{3}{2}(1+x)^{-\frac{5}{2}},\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{15}{4}(1+x)^{-\frac{7}{2}}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine k-te Ableitung zu sehen, ist wirklich nicht gerade leicht. Wir geben sie an:

$$\begin{aligned}
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k+1}(1+x)^{\frac{1}{2}-k} \cdot 4 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2} 2i+1}{2^k}\\
&= (-1)^{k+1}(1+x)^{\frac{1}{2}-k} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-2} 2i+1}{2^{k-2}}.
\end{aligned}$$

- Wir berechnen das zweite Taylorpolynom $T_2(x)$ der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und schätzen danach das Restglied mit dem Integralrestglied $R_3(x) = f(x) - T_2(x)$ für $x \in \left[\frac{9}{10}, \frac{11}{10}\right]$ betragsmäßig ab. Wir benötigen wieder die Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-\frac{1}{2}}, & f(1) &= 1,\\
f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}, & f'(1) &= -\frac{1}{2},\\
f''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}, & f''(x) &= \frac{3}{4},\\
f'''(x) &= -\frac{15}{8}x^{-\frac{7}{2}}.
\end{aligned}$$

Damit ist $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2$. Für das Integralrestglied folgt nun:

$$|R_3(x)| = \left|\frac{1}{2}\int x(x-t)^2 \frac{15}{8} t^{-\frac{7}{2}}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{-\frac{7}{2}}.$$

Das soll uns an Beispielen genügen. ■

Für den Konvergenzradius betrachte die Erklärungen und Beispiele zur Definition 9.4 aus Kapitel 9.

11.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 11.1, dass jede differenzierbare Funktion auch stetig ist: Die Umkehrung des Satzes 11.1 gilt natürlich nicht. Beispielsweise ist die Betragsfunktion im Nullpunkt stetig, aber nicht differenzierbar (siehe Beispiel 104). Wir fassen nochmal zusammen:

- Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.
- Aus Nicht-Stetigkeit folgt auch Nicht-Differenzierbarkeit.
- Aus Nicht-Differenzierbarkeit folgt nicht unbedingt die Nicht-Stetigkeit. Als Beispiel können wir wieder unsere Betragsfunktion anführen, die im Nullpunkt nicht differenzierbar, aber stetig ist.
- Aus Stetigkeit folgt nicht unbedingt die Differenzierbarkeit, siehe wieder die Betragsfunktion als Beispiel.

Beispiel 104 (Die Betragsfunktion)
Die Betragsfunktion $f(x) := |x|$ ist überall stetig nach Beispiel 93 aus Kapitel 10, aber im Nullpunkt nicht differenzierbar, denn der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotient ist -1 und der rechtsseitige Grenzwert 1. Die Werte stimmen also nicht überein und folglich kann die Betragsfunktion im Nullpunkt nicht differenzierbar sein. ■

Beispiel 105

- Die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $x = 0$ differenzierbar, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)\right) = 0$$

Abbildung 11.4 zeigt, wie die Funktion aussieht:

- Das folgende Beispiel zeigt noch einmal, dass aus Stetigkeit in einem Punkt nicht unbedingt auch Differenzierbarkeit folgen muss. Wir betrachten die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x \cdot \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{für } x \neq 0 \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

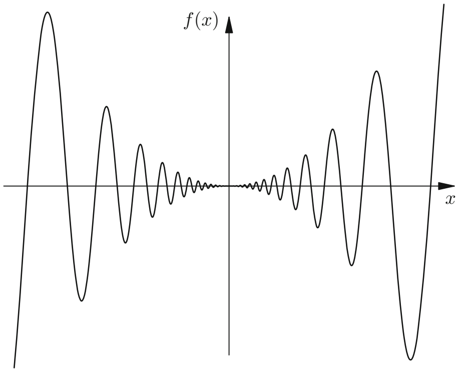

Abb. 11.4: Die Funktion ist im Nullpunkt differenzierbar.

Zu überprüfen, dass die Funktion in 0 stetig ist, überlassen wir euch als Übungsaufgabe. Dass die Funktion in 0 nicht differenzierbar ist, zeigen wir jetzt:

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Die Funktion $\sin\left(\frac{1}{h}\right)$ besitzt in $h = 0$ aber keinen Grenzwert, und f ist damit nicht differenzierbar. ■

Zu den Ableitungsregeln (Satz 11.2): Wir wollen nun anhand einiger Beispiele die Ableitungsregeln etwas einüben und trainieren.

Beispiel 106

- Beginnen wir ganz einfach. Wir leiten die Funktion $f(x) := x^3 + 2 \cdot x^2 + 4$ ab. Dazu benötigen wir nur die Summenregel und erhalten $f'(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x$
- Wir möchten nun die Funktion $f(x) := x \cdot \ln(x)$ für $x > 0$ ableiten. Dazu benötigen wir die Produktregel und erhalten $f' = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$; fertig.
- Die Funktion $f(x) := 2x^2 \cdot e^x \cdot \sin(x)$ scheint schon etwas komplizierter zu sein. Aber wir klammern einfach mal und schreiben f als $f(x) = (2x^2 \cdot e^x) \cdot \sin(x)$. Jetzt wenden wir ganz strikt die Produktregel an, diese muss hier sozusagen zweimal angewendet werden:

  $$f'(x) = (4 \cdot x \cdot e^x + 2 \cdot x^2 \cdot e^x) \cdot \sin(x) + (2x^2 \cdot e^x) \cdot \cos(x).$$

  Dies wollen wir noch etwas vereinfachen:

  $$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cdot (4 \cdot x + 2x^2) \cdot \sin(x) + 2x^2 \cdot \cos(x) \cdot e^x \\ &= e^x \cdot \Big((4x + 2x^2) \cdot \sin(x) + 2x^2 \cdot \cos(x) \Big). \end{aligned}$$

Und viel mehr können wir eigentlich gar nicht mehr vereinfachen. Also belassen wir es dabei.

- Ziel ist es, die Funktion $f(x) := \tan(x)$ abzuleiten. Dazu schreiben wir $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und wenden die Quotientenregel an und erinnern uns dabei, dass $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ gilt. Wir erhalten:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - (-\sin(x)) \cdot \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Wir können die Ableitung auch als

$$f'(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$$

schreiben.

- Die Funktion $f(x) := \sin(2x + 1)$ leiten wir nach der Kettenregel ab und erhalten $f'(x) = 2 \cdot \cos(2x + 1)$.

- Um die Funktion $f(x) := (x^3 - 1)^2$ abzuleiten, benötigen wir die Kettenregel. Am einfachsten merkt man sich diese mit „äußere · innere Ableitung“. Wir erhalten in unserem Beispiel:

$$f'(x) = 2 \cdot (x^3 - 1) \cdot 3x^2 = 6x^2 \cdot (x^3 - 1).$$

- Bei der Funktion $f(x) := e^{\cos(x)}$ wenden wir ebenfalls die Kettenregel an:

$$f'(x) = e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = -\sin(x) \cdot e^{\cos(x)}.$$

- Eine Monsterfunktion, bei der wir viermal die Kettenregel anwenden müssen, ist die folgende Funktion $f(x) := \cos\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)$. Jetzt bloß nicht in Panik verfallen, sondern Schritt für Schritt die Kettenregel anwenden. Dies führt zum Ziel. Wir führen es vor:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right) \cdot \left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right)' \\ &= -\sin\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \left(\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)' \\ &= -\sin\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &\quad \cdot \left(\sqrt{x^2+1}\right)' \\ &= -\sin\left(\ln\left(\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)\right) \cdot \frac{1}{\tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)} \\ &\quad \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

Puh. Fertig. Vereinfachen wollen wir den Ausdruck nicht, es reicht :-). Es sollte ja nur die Kettenregel eingeübt werden.

- Wie kann man eigentlich die Ableitung von $f(x) = x^2$ bestimmen, wenn wir nicht wüssten, dass die Ableitung der Funktion $f(x) = x^n$ gerade $f'(x) = nx^{n-1}$ beträgt? Ganz einfach. Wir müssen nur ein paar Logarithmengesetze anwenden und f etwas umschreiben und zwar zu $f(x) = x^2 = e^{2\cdot\ln(x)}$. Und jetzt können wir die Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = e^{2\cdot\ln(x)} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{x}\right) = x^2 \cdot \frac{2}{x} = 2x$$

  Aber: Man muss natürlich nicht mit Kanonen auf Spatzen schießen. :-)

- Diesen Umformungstrick aus dem obigen Beispiel werden wir trotzdem noch sehr häufig verwenden. Wenn wir zum Beispiel die Ableitung der Funktion $f(x) = x^x$ berechnen wollen, schreiben wir zunächst $f(x) = x^x = e^{x\cdot\ln(x)}$ und leiten dies ganz einfach mit der Kettenregel ab. Natürlich müssen wir noch dazusagen, dass diese Form nur für $x > 0$ Sinn macht.

$$f'(x) = e^{x\cdot\ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln(x) + 1).$$

  Und fertig sind wir. Und jetzt seid ihr dran! Leitet die Funktion $f(x) = x^{x^x}$ einmal ab!

- Wir wollen die Funktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ differenzieren. Zunächst einmal ist $f(x) = a^x = e^{x\cdot\ln(a)}$. Anwendung der Kettenregel liefert:

$$f'(x) = e^{x\cdot\ln(a)} \cdot (1 \cdot \ln(a)) = \ln(a) \cdot a^x.$$

- Wie sieht es mit der Ableitung der Funktion $f(x) = x^a$ aus? Es gilt $f(x) = x^a = e^{a\cdot\ln(x)}$. Die Kettenregel liefert

$$f' = e^{a\cdot\ln(x)} \cdot \frac{a}{x} = x^a \cdot a \cdot x^{-1} = a \cdot x^{a-1}.$$

- Wir wollen die Funktion $f(x) = (\ln(x))^x$ differenzieren. Erst einmal ist $f(x) = e^{x\cdot\ln(\ln(x))}$ und dann mit Kettenregel:

$$f' = e^{x\cdot\ln(\ln(x))} \cdot \left(1 \cdot \ln(\ln(x)) + x \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x}\right)$$
$$f' = \ln(x)^x \cdot \left(\ln(\ln(x)) + \frac{1}{\ln(x)}\right).$$

Dies soll an Beispielen erst einmal reichen. ■

Zum Satz über die Umkehrfunktion (Satz 11.3): Zunächst zwei Anmerkungen, bevor wir zu einem Beispiel kommen und den Satz 11.3 explizit anwenden.

Anmerkung 1: Manchmal benutzt man die Formel aus Satz 11.3 auch in etwas abgewandelter Form und zwar schreibt man dann für alle $y_0 \in E$ mit $f^{-1}(y_0) \neq 0$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Anmerkung 2: Sollte man die Formel einmal vergessen haben, so kann man sie sich leicht herleiten, wenn man das Prinzip verstanden hat. Wir betrachten $f^{-1}(f(x)) = x$ und leiten dies ab. Kettenregel und andere liefern dann:

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) \cdot f'(x) = 1,$$

also ist

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Jetzt ersetzt noch $f(x) = y_0$ und wir sind fertig. Und genau das ist Mathematik. Man kann sich nicht immer alles merken, aber wenn man die Dinge verstanden hat, kann man sich viel wieder herleiten :-).

Beispiel 107

- Wir wollen jetzt zur Umkehrfunktion der Exponentialfunktion die erste Ableitung berechnen. Wir wissen zwar schon, was rauskommen soll, aber mit der Formel aus Satz 11.3 können wir dies auch begründen. Wir setzen also $f := e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ und erinnern uns, dass die Umkehrfunktion die Logarithmusfunktion ist

$$(\ln(y))' = \frac{\left(e^{\ln(y)}\right)'}{e^{\ln(y)}} = \frac{1}{y}$$

- Auf dem Intervall $D = (0, \pi)$ gilt $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$ und somit erhalten wir

$$\arccos'(\cos(x)) = \frac{1}{\cos'(x)} = -\frac{1}{\sin(x)}.$$

  Da nun $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und $\sin(x) > 0 \ \forall x \in (0, \pi)$, folgt $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)} \ \forall x \in (0, \pi)$ und

$$\arccos'(\cos(x)) = -\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}},$$

  wobei $y := \cos(x)$. Hierbei ist arccos die Umkehrfunktion zum Kosinus. Siehe auch das Beispiel 16 aus Kapitel 3. Das heißt, es gilt die Formel:

$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

■

Zum Satz 11.4: In der Schule habt ihr den Satz 11.4 als ein notwendiges Kriterium kennengelernt, das heißt, wenn ein lokaler Extrempunkt an der Stelle x_0 vorliegt, dann muss auf jeden Fall $f'(x_0) = 0$ gelten.
Der Satz sagt nur etwas über die „inneren" Extremstellen $x \in (a, b)$ aus. Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ besitzt an der Stelle $x_0 = 0$ ein isoliertes lokales Minimum und $f'(0) = 0$, aber $f(x)$ besitzt am Rand des Intervalls $[-1, 1]$, das heißt in den Punkten $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ jeweils globale Maxima.
Dies kommt euch vielleicht etwas fremd vor, aber nach unserer Definition 11.4 der Extrempunkte stimmt das. Wir machen uns das an einem Bild klar (siehe Abbildung 11.5). Dies solltet ihr bei Funktionen, die nur auf einem beschränkten Intervall definiert sind, immer bedenken.

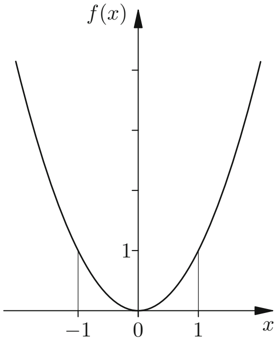

Abb. 11.5: Extrempunkte an Randpunkten.

Zum Mittelwertsatz (Satz 11.5): Man kann den Mittelwertsatz auch geometrisch sehr schön verdeutlichen (siehe Abbildung 11.6). Er sagt einfach nur aus, dass es eine Stelle im Intervall (a, b) gibt, an der die Tangentensteigung mit der Steigung der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ gleich ist.

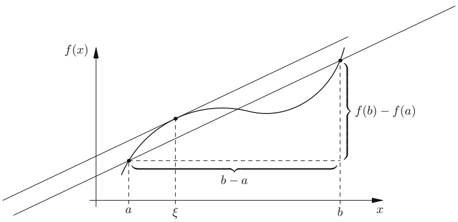

Abb. 11.6: Der Mittelwertsatz anschaulich.

Der Mittelwertsatz ist ein relativ starker Satz. Es gibt immer wieder Aufgaben, bei denen man ihn anwenden kann. Aber natürlich gibt es kein Rezept, das uns sagt, wann wir den Mittelwertsatz anwenden müssen oder können. So funktioniert Mathematik eben nicht. Jede Aufgabe, jedes Problem ist anders und muss von sich aus neu betrachtet werden. Wir hatten aber schon im Kapitel

10 über die Stetigkeit (siehe Beispiel 95) gesehen, dass wir beim Nachweis der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion den Mittelwertsatz sehr gut anwenden können.

Zum Satz von Rolle (Satz 11.6): Der Satz von Rolle ist ein direktes Korollar (direkte Folgerung) aus dem Mittelwertsatz 11.5. In einigen anderen Büchern wird zunächst der Satz von Rolle bewiesen und dann der Mittelwertsatz als Korollar angegeben. Wir haben uns aber für einen anderen Weg entschieden.

Der Satz von Rolle sagt insbesondere, dass zwischen zwei Nullstellen einer differenzierbaren Funktion eine Nullstelle der Ableitung liegen muss. Das kann man sich anschaulich sehr gut überlegen: Wenn der Funktionsgraph erst „nach oben" geht und dann wieder abfällt, denn es soll ja eine weitere Nullstelle existieren, muss dazwischen irgendwo ein Extrempunkt liegen.

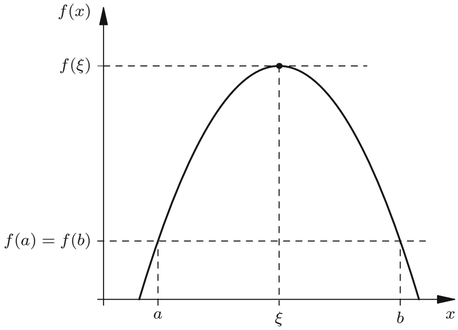

Abb. 11.7: Der Satz von Rolle.

Zum Satz 11.7: Die Umkehrung dieses Satzes ist im Übrigen falsch, wie das Beispiel $f(x) := x^3$ zeigt. Das solltet ihr euch klar machen.

Zum Satz 11.8: Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrempunktes, wie wir schon in Satz 11.4 gesehen haben. Die Bedingungen $f''(x_0) < 0$, $(f''(x_0) > 0)$ dagegen sind hinreichende Bedingungen. Für die Begrifflichkeiten schlagt bei Problemen gegebenenfalls nochmals im Kapitel 1 über die Logik nach, dort hatten wir sie erklärt.

Zum Satz 11.9: Wir können mit Satz 11.9 zum Beispiel beweisen, dass die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist. Schauen wir uns dies an ein paar Beispielen an:

Beispiel 108

- Die Ableitung der Exponentialfunktion ergibt wieder die Exponentialfunktion:

$$(e^x)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

- Die Ableitung der Sinusfunktion ergibt die Kosinusfunktion:

$$\begin{aligned}(\sin(x))' &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot (2k+1) \cdot \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x).\end{aligned}$$

- Die Ableitung der Kosinusfunktion ergibt fast die Sinusfunktion. Wir müssen noch ein Minus davorsetzen:

$$\begin{aligned}(\cos(x))' &= \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x).\end{aligned}$$

Mit diesen Beispielen solltet ihr die Bedeutung des Satzes zu schätzen wissen. ■

Zu den Regeln von L'Hospital (Satz 11.10): Die Regeln von de L'Hospital erlauben es in vielen Fällen, den Grenzwert einer Funktion zu bestimmen, wenn sich der Funktionsterm so ausdrücken lässt, dass beim Erreichen der Grenze ein unbestimmter Ausdruck, wie zum Beispiel $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$, entsteht.
Es gilt dann $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert. Häufig lässt sich die rechte Seite einfacher berechnen.

Beispiel 109

- Wenn wir den Grenzwert $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)-1}{\tan(x)}$ berechnen wollen, so ergibt sich gerade $\lim_{x \to 0}(\cos(x) - 1) = 0$ und $\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$. Wir würden also einen Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ erhalten. Wenden wir also die Regeln von de L'Hospital an:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\sin(x)}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x \to 0}(-\sin(x) \cdot \cos^2(x)) = 0.$$

- Wir berechnen den Grenzwert $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$. Da sowohl $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x} = \infty$ als auch $\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty$, wenden wir die Regeln von de L'Hospital an und erhalten sofort:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2} = \infty.$$

- Es kann sein, dass die Regeln von de L'Hospital öfter angewendet werden müssen. Dies zeigt das folgende Beispiel. Wir wollen den Grenzwert berechnen.
$$\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+6x^2+6x+2}{x^2+2x+1} = „\frac{0}{0}“.$$
Anwenden von de L'Hospital:
$$\lim_{x\to -1} \frac{6x^2+12x+6}{2x+2} = „\frac{0}{0}“.$$
Nochmalige Anwendung ist notwendig:
$$\lim_{x\to -1} \frac{12x+12}{2} = \frac{0}{2} = 0.$$

- Man muss beim Anwenden der Regeln von de L'Hospital etwas vorsichtig sein, denn beispielsweise liegt beim Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)+2x}{\cos(x)+2x}$ ebenfalls ein Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$ vor, aber
$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos(x)+2}{-\sin(x)+2}$$
existiert nicht. ∎

12 Das Riemann-Integral

Übersicht

In diesem Kapitel werden wir integrieren lernen und sehen, dass dies im gewissen Sinne das Gegenstück zum Differenzieren aus Kapitel 11 darstellt. Wieso braucht man eigentlich einen Integralbegriff? Und was versteht man darunter? Und wieso nennen wir dies das Riemann-Integral? Gibt es andere Möglichkeiten, das Integral zu definieren? Fragen über Fragen. Fangen wir also an, sie zu beantworten.

12.1 Definitionen

Definition 12.1 (Treppenfunktion)
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine Funktion $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ gibt, sodass $\tau_{|(x_{i-1}, x_i)}$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ jeweils konstant ist. Mit $T[a, b]$ bezeichnen wir die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$.

Definition 12.2 (Das Integral)
Seien $\tau : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls, für die jeweils $\tau_{|(x_{i-1}, x_i)}$ konstant ist, wobei $i = 1, \ldots, n$.
Wir setzen dann $\int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$ mit gewissen c_i und nennen $\int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x$ das **Integral** von τ auf dem Intervall $[a, b]$.

Anmerkung: Der Leser wird sich fragen, was mit „gewissen c_i“ gemeint ist. Der Satz 12.1 wird die Antwort auf die Frage liefern.

Definition 12.3 (Ober- und Unterintegral)
Die Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann definieren wir:

$$\overset{*}{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \inf\left\{\int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x : f \leq \tau, \tau \in T[a,b]\right\},$$
$$\underset{*}{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \sup\left\{\int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x : f \geq \tau, \tau \in T[a,b]\right\}.$$

und nennen diese das **Oberintegral** bzw. das **Unterintegral**.

Definition 12.4 (Das Riemann-Integral)
Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **riemann-integrierbar**, wenn f beschränkt ist und das Oberintegral und das Unterintegral übereinstimmen, also wenn $\overset{*}{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underset{*}{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. In diesem Fall schreiben wir:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \overset{*}{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underset{*}{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

und nennen $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ das **Riemann-Integral**. Den Raum aller riemann-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}[a, b]$.

Definition 12.5 (Das unbestimmte Integral)
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei riemann-integrierbar und $c \in [a, b]$. Dann heißt die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) := \int_c^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ das **unbestimmte Integral** von f.

Definition 12.6 (Die Stammfunktion)
Eine Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. Wir schreiben $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Definition 12.7 (Uneigentliche Integrale)
Wir unterscheiden einige Fälle:

1. $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a, b] \subset [a, \infty)$ riemann-integrierbar (also insbesondere beschränkt) ist. Falls der Grenzwert $\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergent und wir setzen:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Bei der Nichtexistenz nennen wir das Integral **divergent**.

Solche Integrale heißen **uneigentliche Integrale**. Ähnlich erklären wir das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

für die Funktionen $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$, die jeweils auf abgeschlossenen Intervallen $[a, b] \subset (-\infty, b]$ riemann-integrierbar sind, und bei denen der Grenzwert $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert.

2. Nun sei $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die auf jedem Intervall $[a + \varepsilon, b] \subset (a, b]$ Riemann-integrierbar ist mit $\varepsilon > 0$. Falls der Grenzwert $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, so sagen wir das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert und setzen:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ähnlich verfährt man für Funktionen $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, also setzen wir dort:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. Schließlich betrachten wir noch den Fall einer Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sei $c \in (a, b)$ beliebig und sei f riemann-integrierbar.

Falls sowohl das uneigentliche Integral $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ als auch das uneigentliche Integral $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, so sagen wir, dass $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert und setzen:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

12.2 Sätze und Beweise

Satz 12.1
Sei $\tau \in T[a, b]$ eine Treppenfunktion und

$$a = x_0 < \ldots x_n = b, \quad a = y_0 < \ldots < y_m = b$$

seien zwei Unterteilungen des Intervalls $[a,b]$*, sodass für* $i = 1, \dots, n$ *und* $j = 1, \dots, m$ *jeweils*

$$\tau_{|(x_{i-1}, x_i)} = c_i, \quad \tau_{|(y_{j-1}, y_j)} = d_j$$

gilt, wobei $c_i, d_j \in \mathbb{R}, i = 1, \dots n, j = 1, \dots, m$ *geeignete Konstanten sind, dann gilt:*

$$\sum_{i=1} c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{m} d_j(y_j - y_{j-1}).$$

Anmerkung: Dieser Satz rechtfertigt Definition 12.2.

Satz 12.2 (Linearität des Integrals)
Der Raum aller riemann-integrierbaren Funktionen $\mathcal{R}[a,b]$ *ist ein reeller Vektorraum (siehe Definition 16.1) das heißt, es gilt für alle* $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{R}$*:*

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \text{ und } \int_a^b \lambda \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Folgt aus der Definition 12.4 des Integrals. q.e.d.

Satz 12.3
Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *sei stetig und* $c \in [a,b]$*. Dann ist das unbestimmte Integral* F *von* f *stetig differenzierbar, und es gilt* $F' = f$*.*

Beweis: Für $x, x_0 \in [a,b]$ mit $x \neq x_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_c^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_c^{x_0} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) \\ &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_c^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_{x_0}^{c} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz der Integration (siehe Satz 12.7) impliziert, dass

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = (x - x_0) \cdot f(t_x)$$

für ein t_x zwischen x und x_0. Da mit $x \to x_0$ auch $t_x \to x_0$ gilt, folgt aus der Stetigkeit von f, dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(t_x) = f(x_0)$. Außerdem ist

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{x - x_0}(x - x_0) \cdot f(t_x) = f(t_x).$$

Also ist $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f(t_x) = f(x_0)$. q.e.d.

Satz 12.4
Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen $\tau, \sigma \in T[a,b]$ mit $\tau \leq f \leq \sigma$ und $\int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \sigma(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$ gibt.

Mit anderen Worten: Es gilt „fast“ $\int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sigma(x)\,\mathrm{d}x$.

Beweis: Folgt sofort aus der Definition 12.2 des Integrals. q.e.d.

Satz 12.5
Stetige Funktionen sind riemann-integrierbar.

Beweis: Da f stetig ist, ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ gleichmäßig stetig (nach Satz 10.6 aus Kapitel 10). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit ein $\delta > 0$, sodass

$$\left|f(x) - f(x')\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \ \forall x, x' \in [a,b]$$

mit $\left|x - x'\right| < \delta$. Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$. Ferner definieren wir $x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ für $k = 0, \ldots, n$. Auf diese Weise erhalten wir eine äquidistante Intervallunterteilung $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.
Des Weiteren definieren wir zwei Treppenfunktionen $\tau, \sigma \in T[a,b]$ durch $\tau(a) := f(a)$ und $\tau(x) := f(x_k) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für $x_{k-1} < x < x_k$ $(1 \leq k \leq n)$ und $\sigma(a) := f(a)$ und $\sigma(x) := f(x_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ für $x_{k-1} < x < x_k$ $(1 \leq k \leq n)$.
Also ist $\tau(x)$ die untere und $\sigma(x)$ die obere Treppenfunktion. Es gilt $\tau \leq f \leq \sigma \ \forall x \in [a,b]$ sowie nach Konstruktion:

$$\sigma(x) \geq \tau(x) \Leftrightarrow \sigma(x) - \tau(x) \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b (\sigma - \tau)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sigma(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\,\mathrm{d}x = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt jetzt mit Satz 12.4. q.e.d.

Satz 12.6
Jede beschränkte und monotone Funktion ist riemann-integrierbar.

Beweis: O.B.d.A. betrachten wir monoton fallende Funktionen. Der Beweis für monoton wachsende Funktionen geht analog. Seien $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass

$$(b-a)(f(a) - f(b)) < n \cdot \varepsilon. \tag{12.1}$$

Wie im Beweis zu Satz 12.5 wählen wir eine äquidistante Unterteilung $x_k := a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ für $k = 0, \ldots, n$. Außerdem definieren wir zwei Treppenfunktionen $\tau, \sigma \in T[a,b]$ durch $\tau(x_0) := f(x_0)$ und $\tau(x) := f(x_k)$ für $x_{k-1} < x < x_k$ $(1 \leq k \leq n)$ und $\sigma(x_0) := f(x_0)$ und $\sigma(x) := f(x_{k-1})$ für $x_{k-1} < x < x_k$ $(1 \leq k \leq n)$. Da f monoton fallend ist, folgt $\tau \leq f \leq \sigma \ \forall x \in [a,b]$. Außerdem ist

$$\begin{aligned}\int_a^b \sigma(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b \tau(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(f(x_{k-1}) - f(x_k)\right) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot \left(f(x_0) - f(x_n)\right) = \frac{b-a}{n}\left(f(a) - f(b)\right) \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Gleichung (12.1) einging. Die Behauptung folgt damit aus Satz 12.4. q.e.d.

Satz 12.7 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei riemann-integrierbar mit $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis: Die Funktion $f(x)g(x)$ ist riemann-integrierbar und es gilt $mg \leq fg \leq Mg$ mit $m := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$. Da f stetig ist und $[a,b]$ kompakt, werden Supremum und Infimum angenommen. Durch Integration erhält man:

$$\begin{aligned}\int_a^b mg(x)\,\mathrm{d}x = m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_a^b Mg(x)\,\mathrm{d}x = M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Daher existiert ein $\lambda \in [m,M]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Da $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$ und die Funktion f stetig ist, existiert nach dem Zwischenwertsatz (siehe Kapitel 10, Satz 10.3) ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi) = \lambda$, das heißt, es gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

q.e.d.

Satz 12.8 (Korollar aus dem Mittelwertsatz)
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

Beweis: Der Beweis folgt aus dem Mittelwertsatz (Satz 12.7) mit $g \equiv 1$. Dann gilt nämlich:

$$\int_a^b f(x) \cdot 1 \, \mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b 1 \, \mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

q.e.d.

Satz 12.9 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion, dann ist

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^b F'(x) \, \mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Beweis: Nach Satz 12.3 ist das unbestimmte Integral F_c von f mit $c \in [a,b]$ eine Stammfunktion von f mit $F_c' = f$. Daraus ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) = F_c(b) - F_c(a) &= \int_c^b f(\xi) \, \mathrm{d}\xi - \int_c^a f(\xi) \, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_c^b f(\xi) \, \mathrm{d}\xi + \int_a^c f(\xi) \, \mathrm{d}\xi = \int_a^b f(\xi) \, \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 12.10 (Partielle Integration)
Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f'(x) g(x) \, \mathrm{d}x = [(f \cdot g)(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Beweis: Der Beweis folgt aus der Produktregel (siehe Kapitel 11, Satz 11.2). Genauer:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ \int_a^b (f \cdot g)'(x) \, \mathrm{d}x &= \int_a^b (f' \cdot g)(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b (f \cdot g')(x) \, \mathrm{d}x \\ [(f \cdot g)(x)]_a^b &= \int_a^b (f' \cdot g)(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b (f \cdot g')(x) \, \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \int_a^b f'(x) g(x) \, \mathrm{d}x &= [(f \cdot g)(x)]_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 12.11 (Substitutionsregel)
Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei stetig und $\phi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar. Dann gilt die Substitutionsformel:

$$\int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Beweis: Da f stetig ist, besitzt f eine stetig differenzierbare Stammfunktion F. Dann ist auch $F \circ \phi : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit der Ableitung (Kettenregel):

$$(F \circ \phi)'(x) = F'(\phi(x)) \cdot \phi'(x) = f(\phi(x)) \cdot \phi'(x).$$

Durch Integration erhält man hieraus die gesuchte Substitutionsformel, denn:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\phi(x)) \cdot \phi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b (F \circ \phi)'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [(F \circ \phi)(x)]_b^a = [F(x)]_{\phi(b)}^{\phi(a)} = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

q.e.d.

12.12 (Partialbruchzerlegung)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine gebrochen rationale Funktion der Form

$$f(x) := \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}.$$

Für die Integration mittels Partialbruchzerlegung gibt es drei für uns wichtige Ansätze, die wir uns in den Erklärungen und Beispielen anschauen werden. Wir unterscheiden hier nur diese drei Möglichkeiten oder Kombinationen davon, die für uns interessant sind.

1. *Das Nennerpolynom besitzt eine einfache Nullstelle.*
2. *Das Nennerpolynom besitzt eine doppelte Nullstelle.*
3. *Das Nennerpolynom besitzt eine komplexe Nullstelle.*
4. *Kombination aus den obigen drei Möglichkeiten.*

12.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 12.1 der Treppenfunktion: Beispiele für Treppenfunktionen findet man in Abbildung 12.1.

Zur Definition 12.2 des Integrals: Anschaulich ist schon aus der Schule klar, was wir unter dem Riemann-Integral verstehen. Und zwar hat es etwas mit dem Flächeninhalt zu tun. Berechnen wir also das Integral einer Funktion in einem gewissen Intervall, so berechnen wir den Flächeninhalt unterhalb der Funktion im einem Integrationsbereich. Siehe auch die Abbildung 12.2.

Zur Definition 12.3 des Ober- und Unterintegrals: Das Oberintegral beruht auf allen Treppenfunktionen, die oberhalb der Funktion f liegen. Deshalb wird dort auch das Infimum (größte untere Schranke) gebildet. Das Unterintegral dagegen gibt die Treppenfunktionen an, die unterhalb der Funktion f liegen. Entsprechend muss das Supremum (kleinste obere Schranke) gebildet werden.
Wir bilden also die sogenannte Ober- und Untersumme, um das Integral und in diesem Fall den Flächeninhalt unterhalb der Funktion zu approximieren.

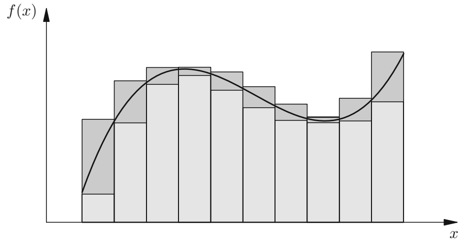

Abb. 12.1: Ober- und Untersumme approximieren das Integral.

Das Integrationsintervall wird hierbei in kleinere Stücke zerlegt, der gesuchte Flächeninhalt zerfällt dabei in senkrechte Streifen. Für jeden dieser Streifen wird nun das größte Rechteck betrachtet, das von der x-Achse ausgehend den Graphen nicht schneidet, und außerdem das kleinste Rechteck, das von der x-Achse ausgehend den Graphen ganz umfasst. Die Summe der Flächeninhalte der großen Rechtecke wird als *Obersumme*, die der kleinen als *Untersumme* bezeichnet.

Zur Definition 12.4 des Riemann-Integrals: Durch geeignete feine Unterteilung des Integrationsintervalls kann man den Unterschied zwischen Ober- und Untersumme beliebig klein machen. Es gibt nur eine Zahl, die kleiner oder gleich jeder Obersumme und größer oder gleich jeder Untersumme ist, und diese Zahl ist der gesuchte Flächeninhalt, das Riemann-Integral.
Das Riemann-Integral ist, wie ihr später sehen werdet, nicht der optimale Integralbegriff. Denn eine Funktion muss beschränkt sein, um riemann-integrierbar zu sein. Es gibt daher Funktionen, die nicht riemann-integrierbar sind. Auch wenn eine Funktion beschränkt ist, muss sie nicht unbedingt riemann-integrierbar sein, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 110
Die Dirichlet-Funktion

$$\chi(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

ist nicht riemann-integrierbar, denn in jeder Zerlegung des Teilintervalls $[x_{k-1}, x_k]$ liegen stets sowohl rationale als auch irrationale Zahlen und somit ist die Untersumme stets 0 (weil das Infimum stets 0 ist) und die Obersumme stets die Länge des Intervalles, über das integriert wird, weil das Supremum immer 1 ist und somit einfach die Längen der einzelnen Teilintervalle addiert werden. ■

Gerade weil mit dem Riemann-Integral nicht alle Funktionen integriert werden können, werdet ihr noch das sogenannte Lebesgue-Integral kennenlernen. Das Riemann-Integral ist ein Spezialfall davon. Aber dazu an anderer Stelle mehr (vielleicht in einem zweiten Buch :-P).

Zur Definition 12.7 des uneigentlichen Integrals: Um die uneigentlichen Integrale zu verstehen, betrachten wir zwei Beispiele. (Für die Integration einfacherer Integrale verweisen wir auf die Erklärungen zu den Sätzen 12.10, 12.11 und 12.12.)

Beispiel 111

- Wir behaupten zuerst, dass das Integral $\int_1^\infty 1/x^s \mathrm{d}x$ genau dann existiert, wenn $s > 1$. Wir betrachten zunächst den Fall $s = 1$. Es gilt dann:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}[\ln(x)]_1^b = \lim_{b\to\infty}\ln(b) = \infty.$$

  Das uneigentliche Integral ist also für $s = 1$ divergent. Sei also $s \neq 1$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{1-s}b^{1-s} - \frac{1}{1-s}1^{1-s}\right) = \frac{1}{1-s}\lim_{b\to\infty}\left(b^{1-s} - 1\right).$$

  Dies konvergiert genau dann, wenn $s > 1$, und zwar gegen $\frac{1}{1-s}$. Es gilt dann:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-s}.$$

- Das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^s}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_a^1$$

existiert genau dann, wenn $s < 1$ ist. Dies wollen wir jetzt zeigen: Wie eben gezeigt, gilt:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln(x)]_{\varepsilon}^{1} = 0 - \ln(\varepsilon) = \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \to \infty \text{ mit } \varepsilon \to 0.$$

Demnach ist das Integral für $s = 1$ divergent. Für $s \neq 1$ ist $\int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_{\varepsilon}^{1} = \frac{1}{1-s}(1-\varepsilon^{1-s})$ und dies konvergiert genau dann, wenn $s < 1$ ist. ∎

12.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 12.5, dass jede stetige Funktion integrierbar ist: Mit Satz 12.5 haben wir schon eine große Klasse riemann-integrierbarer Funktionen gefunden. Wir wollen aber nochmals darauf hinweisen, dass die Umkehrung des Satzes falsch ist. Nicht jede riemann-integrierbare Funktion muss stetig sein. Als Beispiel betrachte man die Treppenfunktionen (siehe Definition 12.1), die nach Definition riemann-integrierbar, aber nicht stetig sind.

Wir wollen die Beweisidee des Satzes 12.5 nochmals erläutern: Eine stetige Funktion ist auf einem abgeschlossenen Intervall gleichmäßig stetig (nach Kapitel 10, Satz 10.6). In dem Beweis konstruieren wir zwei Treppenfunktionen. Die eine liegt oberhalb und die andere unterhalb der eigentlichen Funktion. Die Behauptung folgt dann leicht aus dem Satz 12.4.

Zum Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe Satz 12.7) und seinem Korollar (Satz 12.8): Geometrisch kann man sich den Mittelwertsatz bzw. sein Korollar ganz gut verdeutlichen: Er bedeutet für eine positive Funktion f, dass die Fläche unter dem Graphen von f gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $b - a$ und $f(\xi)$ ist.

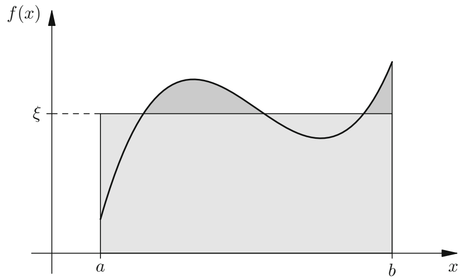

Abb. 12.2: Geometrische Deutung des Mittelwertsatzes.

Zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 12.9): Der Hauptsatz sagt erstens, dass Differenzieren das Integrieren sozusagen wieder rückgängig macht (dies zeigt aber auch schon Satz 12.3), und zweitens, wie wir ein Integral berechnen können. Wir müssen „einfach" nur eine Stammfunktion finden, wobei das „einfach" ganz schön schwer werden kann, wie wir in den kommenden Beispielen noch sehen werden. Viel mehr wollen wir zum Satz gar nicht sagen, sondern nun dazu kommen, wie man diese Stammfunktionen berechnet. Wir wollen aber nochmals darauf hinweisen, dass es zu einer Funktion unendlich viele Stammfunktionen gibt, denn wir können immer eine Konstante addieren. Diese verschwindet beim Ableiten wieder, sodass wir die Funktion zurückbekommen.

Beispiel 112

Eine Stammfunktion zur Funktion $f(x) := x^2 + 2x$ ist $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, aber auch $F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2009$, denn in beiden Fällen gilt $F_1'(x) = F_2'(x) = x^2 + 2x$. ■

Während die Ableitung einer Funktion also eindeutig ist, ist das beim Integrieren und den Stammfunktionen nicht mehr der Fall. In den kommenden Beispielen werden wir diese Integrationskonstante aber meistens weglassen.
Eine Sache noch: Sagt bitte nicht „aufleiten". Das hört sich doch irgendwie nicht schön an und das Wort existiert eigentlich gar nicht :-). Sagt einfach „integrieren" oder „Stammfunktion bilden".

Zu der partiellen Integration (Satz 12.10): Die partielle Integration kann man am besten an Beispielen erläutern. Tun wir das:

Beispiel 113

- Wir möchten das Integral $\int x \sin(x)\, \mathrm{d}x$ bestimmen (wir haben die Integrationsgrenzen weggelassen, da uns nur die Stammfunktion und nicht der Wert des Integrals interessiert. Dies werden wir im Folgenden noch des Öfteren tun.). Anwenden der „Formel" für die partielle Integration (siehe Satz 12.10) mit $f'(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$ liefert:

$$\begin{aligned} \int x \sin(x)\, \mathrm{d}x &= -\cos(x) \cdot x - \int -\cos(x) \cdot 1\, \mathrm{d}x \\ &= -x \cdot \cos(x) + \int \cos(x)\, \mathrm{d}x \\ &= -x \cdot \cos(x) + \sin(x). \end{aligned}$$

- Für $a, b > 0$ wollen wir die Funktion $\int_a^b \ln(x)\, \mathrm{d}x$ integrieren. Natürlich könnten wir auch in einer Formelsammlung nachschauen, denn dort wird man die Stammfunktion zur Logarithmusfunktion mit Sicherheit finden. Aber wir sind Mathematiker und irgendwie muss das Integral ja auch in die

Formelsammlung gekommen sein. Also berechnen wir es. Dazu wenden wir den folgenden Trick an, um die partielle Integration verwenden zu können:

$$\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \ln(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x.$$

Wir setzen nun $f'(x) = 1$ und $g(x) = \ln(x)$, denn es macht ja keinen Sinn $f'(x) = \ln(x)$ zu setzen, weil wir auch dazu eine Stammfunktion von $f'(x) = \ln(x)$ ermitteln müssten und das ist ja gerade die Aufgabe. Wir wenden die „Formel" für die partielle Integration (siehe Satz 12.10) an:

$$\begin{aligned}\int_a^b \ln(x)\,\mathrm{d}x &= [x \cdot \ln(x)]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [x \cdot \ln(x)]_a^b - \int_a^b 1\,\mathrm{d}x \\ &= [x \cdot \ln(x)]_a^b - [x]_a^b = [x \cdot \ln(x) - x]_a^b\end{aligned}$$

Wir können mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 12.9) überprüfen, ob wir richtig gerechnet haben. Die Ableitung von $F(x) := x \cdot \ln(x) - x$ muss ja gerade wieder $f(x) = \ln(x)$ ergeben. Dies gilt, denn:

$$F'(x) = 1 \cdot (\ln(x) - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) - 1 + 1 = \ln(x).$$

- Das Integral $\int x^2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$ schreit ja förmlich nach partieller Integration. Wir setzen $g(x) := x^2$ und $f'(x) := \cos(x)$. Demnach ist $g'(x) = 2x$ und $f(x) = \sin(x)$. Dies liefert

$$\int x^2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Hmm. Es scheint so, als müssten wir auf das Integral $\int 2x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$ nochmals die partielle Integration anwenden. Zögern wir nicht! Dabei müssen wir vor allem auf die Klammersetzung und das Vorzeichen achten:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x &= x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 \cdot \sin(x) - \left(-2x \cdot \cos(x) - \int 2 \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x\right) \\ &= x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) + \int 2 \cdot (-\cos(x))\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - \int 2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot \sin(x).\end{aligned}$$

Merkt euch also, dass es auch Beispiele gibt, bei denen die partielle Integration auch zweimal oder öfter angewendet werden muss ;-).

- Als weiteres Beispiel für die partielle Integration wollen wir das Integral $\int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen. Die Frage ist nun: Was ist $f'(x)$ und was $g(x)$? Versuchen wir einfach mal unser Glück mit $f'(x) = e^x$ und $g(x) = \sin(x)$. Demnach ist $f(x) = e^x$ und $g'(x) = \cos(x)$. Wir fangen an:

$$\int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Eine weitere Anwendung der partiellen Integration liefert:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= e^x \cdot \sin(x) - \left(e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot (-\sin(x))\right) \\ &= e^x \cdot \sin(x) - \left(e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot \sin(x)\right) \\ &= e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \sin(x).\end{aligned}$$

Und nun? Jetzt schaut einmal richtig hin. Auf der rechten Seite steht doch genau nochmal das Integral, das wir berechnen sollen. Wir addieren dies einfach und erhalten:

$$\begin{aligned}2\int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x &= e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) \\ \Rightarrow \int e^x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \cdot \left(e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))\right).\end{aligned}$$

Fertig. ■

Zur Substitutionsregel (Satz 12.11): Die Substitutionsregel im Satz 12.11 verdeutlichen wir uns an Beispielen.

Beispiel 114

Unsere ersten Beispiele beschäftigen sich mit trigonometrischen Funktionen, wie Sinus und Kosinus, und den hyperbolischen Funktionen, wie den *Sinus hyperbolicus* bzw. den *Kosinus hyperbolicus*. Zwischen diesen Funktionen bestehen einige wichtige Zusammenhänge, die wir bei der Substitution unter Umständen verwenden können. Wir wollen diese ohne Beweis nochmals zusammenstellen:
Trigonometrische Funktionen: Jeder kennt doch den „trigonometrischen Pythagoras“ der besagt, dass $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Hieraus folgert man, dass $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ und $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$.
Hyperbolische Funktionen:

- Der Sinus hyperbolicus ist definiert als $\sinh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- Der Kosinus hyperbolicus ist definiert als $\cosh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Man sieht sofort, dass $(\sinh(x))' = \cosh(x)$ bzw. $(\cosh(x))' = \sinh(x)$.
Weiterhin gibt es auch eine Beziehung zwischen dem Sinus hyperbolicus und dem Kosinus hyperbolicus und zwar gilt: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$. Daraus folgert man, dass $\sinh(x) = \sqrt{-1 + \cosh^2(x)}$ und $\cosh(x) = \sqrt{1 + \sinh^2(x)}$.
Nun sind wir gewappnet für die ersten Beispiele:

- Wir wollen das Integral $\int_0^a \sin(2x)\,\mathrm{d}x$ für eine reelle Zahl $a > 0$ berechnen. Wir substituieren $t = 2x$, erhalten damit $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$ und demnach:

$$\begin{aligned}\int_0^a = \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \sin_0^{2a} \frac{1}{2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^{2a} \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ = \frac{1}{2} \left[-\cos(t)\right]_0^{2a} = \frac{1}{2} \left(-\cos(2a) + \cos(0)\right) \\ = \frac{1}{2} \left(1 - \cos(2a)\right).\end{aligned}$$

- Um das Integral $\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, substituieren wir $t = x^2 + 1$. Wir erhalten $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ und damit:

$$\begin{aligned}\int_0^2 x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 2x\cos(x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^5 \cos(t)\,\mathrm{d}t \\ = \frac{1}{2} \left[\sin(t)\right]_1^5 = \frac{1}{2}(\sin(5) - \sin(1)).\end{aligned}$$

  Noch ein paar Worte, wie wir die neuen Integralgrenzen erhalten haben. Die untere Integralgrenze $a = 0$ wird in $t = 0^2 + 1 = 1$ und die obere $b = 2$ in $t = 2^2 + 1 = 5$ umgerechnet.

- Wie kann man das Integral $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ berechnen? Na gut, hier müssen wir vermutlich, wie sagt man so schön, „geschickt“ substituieren. Eine andere Möglichkeit scheint erst einmal nicht ins Auge zu springen. Aber was substituieren wir denn? Etwa $u := 1 + x^2$ oder $u := \sqrt{1 + x^2}$? Probiert das einmal aus. Aber das wird euch noch mehr in Schwierigkeiten bringen. Wir müssen anders substituieren. Und zwar haben wir in den obigen Ausführungen zu den trigonometrischen Funktionen schon den Hinweis gegeben. Wir bedenken einfach, dass $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$. Und setzen an mit $x := \sinh(u)$ und haben eine sehr geeignete Substitution, wie wir sehen, wenn wir das Ganze in die Substitutionsregel aus Satz 12.11 einsetzen:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(u)}} \cdot \cosh(u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\cosh(u)} \cdot \cosh(u)\,\mathrm{d}u \\ = \int 1 du = u = \operatorname{Arsinh}(x).\end{aligned}$$

  Na, wenn das nicht raffiniert ist ;-). Im letzten Schritt haben wir wieder rücksubstituiert. Hierbei ist $\operatorname{Arsinh}(x)$ die Umkehrfunktion des Sinus hyperbolicus.

Eine Anmerkung sei uns noch erlaubt: Wir haben das Ganze ohne Grenzen ausgerechnet. Hätten wir in unserem Ausgangsintegral die Grenzen a und b, dann wären die „neuen" Grenzen nach der Substitution $\operatorname{Arsinh}(a)$ *und* $\operatorname{Arsinh}(b)$. *Die Transformation der Integralgrenzen werden wir auch noch in den Beispielen sehen.*

- Wir wollen jetzt das Integral $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Hier haben wir zwei Möglichkeiten der Substitution, die wir beide erklären wollen. Bei beiden sollte natürlich dasselbe Ergebnis herauskommen. Probieren wir es:

  1. Möglichkeit: Wir haben natürlich den „trigonometrischen Pythagoras" im Kopf und substituieren daher $x := \sin(u)$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(u)}}\cos(u)\,\mathrm{d}u = \int \frac{\cos(u)}{\cos(u)}\,\mathrm{d}u \\ &= \int 1du = u = \arcsin(x). \end{aligned}$$

  2. Möglichkeit: Eine zweite Möglichkeit das obige Integral zu berechnen, besteht darin, $x := \cos(u)$ zu substituieren. Probiert es aus! :-)

- Wir wollen das Integral $\int x^3 \cdot \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ berechnen. Obwohl im Integranden ein Produkt von zwei Funktionen steht, bietet sich die partielle Integration in diesem Fall nicht an, denn wir müssten ja irgendwie eine Stammfunktion zu $\sqrt{1+x^2}$ finden, und das würde ohne geschickte Substitution nicht so einfach gelingen. Vielmehr bietet sich gleich eine geschickte Substitution an. Wenn wir nicht genau wissen, was wir substituieren sollen, dann substituieren wir einfach erst einmal das, was unter der Wurzel steht, also $u := 1+x^2$. Einsetzen in die Substitutionsformel liefert jetzt

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt{u-1}^3 \cdot \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u-1}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\sqrt{u-1} \cdot (u-1) \cdot \sqrt{u}}{\sqrt{u-1}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int (u-1) \cdot \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int (u-1) \cdot u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \int u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5} \cdot u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

  Wenn jetzt Integralgrenzen gegeben wären, würdet ihr die transformierten Integralgrenzen nun in diese Stammfunktion für u einsetzen und das Integral ausrechnen. Sollte man an einer Stammfunktion des Ausgangsintegrals $\int x^3 \cdot \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ interessiert sein, so müssten wir an dieser Stelle rücksubstituieren und könnten auch, um das Integral zu berechnen, die „alten" Integralgrenzen (von vor der Substitution) einsetzen.

- Um das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

zu berechnen, formen wir um und nutzen aus, dass $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{1-\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)\cos(x)}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [-\ln|\cos(x)|]_0^{\pi/2} = -\ln(\cos(\frac{\pi}{2}))+\ln(\cos(0)).\end{aligned}$$

Wie kommt man auf die Stammfunktion? Ganz einfach. Denn es gilt $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Nun ist aber die Ableitung von $\cos(x)$ gerade $-\sin(x)$, also fast der Zähler des Bruchs. Allgemein kann man sich jetzt überlegen, dass für eine Funktion $f(x)$ gilt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(f(x)),$$

denn es gilt ja gerade $(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$. Dies nennt man auch die *logarithmische Integration*.

- Jetzt zu einem „Monsterbeispiel“, bei dem der eine oder andere ins Schwitzen kommen wird. Glaubt uns, das kamen wir beim Schreiben der folgenden Zeilen auch :-). Wir möchten das Integral $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x\cdot(\ln^2 x(x)-\ln(x)+1)}\,\mathrm{d}x$ berechnen.
  Also, wir denken, dass wir mit partieller Integration nicht weit kommen. Partialbruchzerlegung hilft sowieso nicht, da wir gar keine Polynome haben. Daher bietet sich eine Substitution an. Aber was wollen wir substituieren? Wir versuchen es mit $u:=\ln(x)$. Die neuen transformierten Integralgrenzen lauten damit $\ln(e)=1$ und $\ln(1)=0$. Dies ergibt:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{u}{e^u\cdot(u^2-u+1)}\cdot e^u\,\mathrm{d}u &= \int_0^1 \frac{u}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_0^1 \frac{u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Wieso machen wir hier so seltsame Spielchen und addieren im Zähler Null? Das ist eigentlich ganz einfach zu erklären. Denn die Ableitung des Nennerpolynoms u^2-u+1 ist ja $2u-1$. Teilen wir dies durch 2, so erhalten wir gerade $u-\frac{1}{2}$. Also zerlegen wir das Integral:

$$\ldots = \int_0^1 \frac{u+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u - \int_0^1 \frac{-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u.$$

Das erste Integral $\int_0^1 \frac{u-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u$ können wir leicht berechnen, indem wir die im obigen Beispiel erklärte logarithmische Integration verwenden. Es ergibt sich:

$$\int_0^1 \frac{u-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\ln\left|u^2-u+1\right|.$$

Beim zweiten Integral $\int_0^1 \frac{-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u$ müssen wir nochmals ganz tief in die Trickkiste greifen. Und zwar formen wir den Nenner etwas um. Aber schaut es euch erst einmal in Ruhe an, wir erklären unsere Ausführungen danach:

$$\int_0^1 \frac{-\frac{1}{2}}{u^2-u+1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{-\frac{1}{2}}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1\right)}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{4}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{3}\cdot\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u$$

So, wen haben wir jetzt abgehängt? Wir hoffen, dass der eine oder andere Leser noch dabei ist, denn es geht weiter: Wir müssen uns jetzt einmal anschauen, was der Arcustangens mit der ganzen Situation zu tun hat. Jetzt schaut man in eine Formelsammlung und sieht, dass $\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan(x)$ gilt. Dies können wir jetzt für das Integral $\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u$ verwenden. Es stört aber noch das $\frac{4}{3}$, da dies nicht in der Klammer mit dem Quadrat steht. Aber das kriegen wir auch noch hin:

$$\ldots = -\frac{2}{3}\cdot\int_0^1 \frac{1}{\frac{4}{3}\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u = -\frac{2}{3}\cdot\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}u$$

Und jetzt können wir die Stammfunktion direkt angeben:

$$\ldots = -\frac{2}{3}\cdot\arctan\left(\frac{2\cdot\left(u-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right)$$

Jetzt müssen wir beide Stammfunktionen nur noch zusammenführen und haben das Integral $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x\cdot(\ln^2 x(x)-\ln(x)+1)}\,\mathrm{d}x$ berechnet. Und bevor ihr nun weitermacht, gönnt euch kurz eine Pause! :-)

- Das Integral $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x\cdot\sqrt{1+\ln^2(x)}}\,\mathrm{d}x$ knacken wir mit einer trickreichen Substitution. Mit $t := \ln(x)$ und $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ erhalten wir:

$$\int_1^e \frac{\ln(x)}{x\cdot\sqrt{1+\ln^2(x)}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}-1$$

  Im letzten Schritt kann man die Stammfunktion entweder sofort sehen (denn die Ableitung der inneren Funktion der Wurzelfunktion ist ja gerade $2t$) oder nochmal mit $s := 1+t^2$ substituieren.

- Noch eine Anmerkung: Die Substitution $u = \tan(x/2)$ hilft bei allen gebrochen rationalen Ausdrücken von $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Beachtet das und versucht euch am Integral $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1+\sin(x)+\cos(x))^3}\,\mathrm{d}x$. ■

Zur Partialbruchzerlegung (Satz 12.12): Wir wollen uns die drei verschiedenen Ansätze aus Satz 12.12 an Beispielen anschauen. Aber zunächst möchten wir noch ein paar Worte zur Idee der Partialbruchzerlegung verlieren. Die Idee ist, gebrochen rationale Funktionen in Summen von einfacheren gebrochen rationale Funktionen zu zerlegen, die sich wesentlich einfacher und schneller integrieren lassen. Schauen wir uns das an.

Beispiel 115

- Um $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2}$ zu berechnen, müssen wir $\frac{1}{x^2-3x+2}$ mittels Partialbruchzerlegung aufteilen. Wir stellen fest, dass das Nennerpolynom x^2-3x+2 nur einfache Nullstellen (ermittelt man beispielsweise mit der sogenannten p-q-Formel oder Mitternachtsformel) besitzt und machen den Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-3x+2} &= \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1)+B(x-2)}{(x-2)(x-1)} = \frac{(A+B)x-A-2B}{(x-2)(x-1)}.\end{aligned}$$

  Ein Koeffizientenvergleich liefert $B=-1$ und $A=1$. Dieser Koeffizientenvergleich liefert zunächst ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten A und B und zwei Gleichungen $A+B=0$ und $-A-2B=1$, das es zu lösen gilt. Wie das geht, erfahrt ihr spätestens in Kapitel 14. Also ergibt sich insgesamt:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-3x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln|x-2| - \ln|x-1| = \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

- Wir wollen eine Stammfunktion zur Funktion $f(x) := \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x}$ angeben. Es ist

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3-2x^2+x} = \frac{2x^2+1}{x(x^2-2x+1)} = \frac{2x^2+1}{x(x-1)^2}.$$

  Das Nennerpolynom besitzt unter anderem eine doppelte Nullstelle. Der Ansatz lautet daher:

$$\begin{aligned}\frac{2x^2+1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx^2-Bx+Cx}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{x^2(A+B)+x(-2A-B+C)+A}{x(x-1)^2}.\end{aligned}$$

  Durch Koeffizientenvergleich folgt $A=1$ und damit ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit $1+B=2$, woraus $B=1$, und $-2-1+C=0$ und daraus $C=3$ folgen. Damit erhalten wir $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$ und folgende Stammfunktion:

$$\int \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + \ln|x-1| - \frac{3}{x-1}.$$

- Wir berechnen das Integral $\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x$. Es ist $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)}$ und damit erhalten wir den Ansatz für eine komplexe Nullstelle:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$
$$= \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{x^2(A+B)+Cx+A}{x(x^2+1)}.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt $A = 1, C = 0$ und folglich $B = -1$ und somit gilt:

$$\int \frac{1}{x^3+x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x| - \frac{1}{2}\cdot\ln\left|1+x^2\right|.$$

Im letzten Schritt kam auch die logarithmische Integration zum Einsatz.

- Wir wollen noch einmal zeigen, dass nicht unbedingt immer Partialbruchzerlegung bei gebrochen rationalen Funktionen angewendet werden muss. Um die folgenden Ausführungen zu verstehen, verweisen wir auf die Beispiele 114. Wie findet man zum Integral $\int \frac{1}{4x^2-24x+100}\,\mathrm{d}x$ eine Stammfunktion? Eine Möglichkeit wäre natürlich die Partialbruchzerlegung, aber es geht auch anders, wenn wir das Integral geschickt umformen:

$$= \int \frac{1}{4\cdot(x^2-6x+25)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{x^2-6x+25}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{(x-3)^2+16}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{16\cdot\left(\frac{(x-3)^2}{16}+1\right)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\frac{(x-3)^2}{16}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\int \frac{1}{\frac{(x-3)^2}{16}+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{64}\cdot\int \frac{1}{\frac{(x-3)^2}{16}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{64}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{16}\cdot\arctan\left(\frac{x-3}{4}\right)$$

- Als Abschluss der Beispiele noch einmal ein ähnliches Beispiel wie eben. Wir betrachten das Integral $\int \frac{6x+9}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x$. Auch hier sieht dies erst einmal sehr stark nach Partialbruchzerlegung aus. Wir zeigen aber nochmals den anderen Weg:

$$\int \frac{6x+9}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3\cdot(2x+3)}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\int \frac{2x+3}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x$$
$$= 3\cdot\int \frac{(2x-4)+(3+4)}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x$$

Hier haben wir wieder Null addiert. Wieso? Klar, die Ableitung des Nenners ist ja gerade $2x-4$. Logarithmisches Integrieren lässt grüßen. Weiter geht's:

$$\ldots = 3\cdot\int \frac{2x-4+7}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\left(\int \frac{2x-4}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x + \int \frac{7}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x\right)$$

Für das erste Integral gilt

$$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x = \ln\left|x^2-4x+20\right|.$$

Und beim zweiten Integral wenden wir wieder den Trick mit dem Arcustangens an:

$$\begin{aligned}\int \frac{7}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{7}{(x-2)^2+16}\,\mathrm{d}x = \int \frac{7}{16\cdot\left(\frac{(x-2)^2}{16}+1\right)}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{7}{16}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{4}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{4}\cdot\arctan\left(\frac{x-2}{4}\right).\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\int \frac{6x+9}{x^2-4x+20}\,\mathrm{d}x = 3\cdot\left(\ln\left|x^2-4x+20\right| + \frac{7}{4}\cdot\arctan\left(\frac{x-2}{4}\right)\right).$$

Wir merken noch an: Diese Umformung bzw. Ergänzung zum $\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$-Integral, das dann den $\arctan(x)$ ergibt, wie wir es oben oft gemacht haben, geht genau dann, wenn der quadratische Nenner keine reelle Nullstelle hat. In allen anderen Fällen solltet ihr die Partialbruchzerlegung verwenden.
Aber alles gar nicht so schwer, oder? Man muss nur ein paar Integrale gerechnet haben, danach hat man die wichtigsten Tricks drauf und erkennt sie auch sofort. Denn nur Übung macht den Meister ;-). ∎

13 Konvergenz von Funktionenfolgen

Übersicht

Dieses Kapitel ist den Funktionenfolgen und den Begriffen „punktweise konvergent“ und „gleichmäßig konvergent“ gewidmet. Wir werden einige Beispiele und wichtige Sätze in diesem Zusammenhang anführen und erklären.

13.1 Definitionen

Definition 13.1 (Funktionenfolge)
Eine Folge von Funktionen nennen wir **Funktionenfolge**. Wir schreiben $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei f_n mit $n \in \mathbb{N}$ Funktionen sind.

Definition 13.2 (Punktweise Konvergenz)
Sei X eine nichtleere Menge und seien $f, f_n : X \to Y$ Abbildungen und $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **punktweise konvergent** gegen f, wenn für jedes feste $x \in X$ die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert, das heißt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Definition 13.3 (Gleichmäßige Konvergenz)
Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **gleichmäßig konvergent** gegen f, wenn das n_0 in der Definition 13.2 der punktweisen Konvergenz nicht von x abhängt, also wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in X\ \forall n \geq n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

13.2 Sätze und Beweise

Satz 13.1
Jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge ist auch punktweise konvergent.

Beweis: Dies folgt sofort aus den Definitionen. q.e.d.

Satz 13.2
Konvergiert eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetiger Funktionen gleichmäßig gegen eine Funktion f, so ist diese wieder stetig.
In anderen Worten: Der gleichmäßige Grenzwert stetiger Funktionen ist wieder stetig.

Satz 13.3
Wenn die Folge differenzierbarer Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und die Ableitungen f_n' gleichmäßig konvergieren, so gilt $\lim\limits_{n \to \infty} f_n' = f'$.

Satz 13.4
Der gleichmäßige Grenzwert riemann-integrierbarer Funktionen ist riemann-integrierbar, und es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

13.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 13.1 der Funktionenfolge: Das Wort „Funktionenfolge“ besteht aus zwei Bestandteilen. Das erste ist „Funktionen“ und das zweite „Folgen“. Beide Begriffe sind uns geläufig und beide sind in diesem Buch schon einmal gefallen.

Beispiel 116
Ein einfaches Beispiel einer Funktionenfolge ist die Funktionenfolge $f_n : x \mapsto x^n$. n durchläuft hier die natürlichen Zahlen, das heißt, $n \in \mathbb{N}$. Die Folgenglieder lauten demnach $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$. Weitere Beispiele gibt es in den Erklärungen.

■

Zur Definition 13.2 der punktweisen Konvergenz: Anschaulich kann man sich die punktweise Konvergenz an Abbildung 13.1 klar machen:

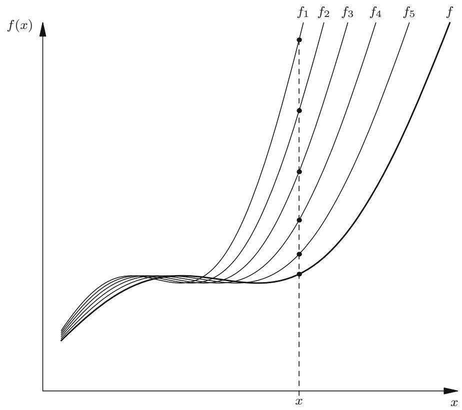

Abb. 13.1: Veranschaulichung der punktweisen Konvergenz.

Die Definition 13.2 und die Abbildung 13.1 sollten selbsterklärend sein. Wir verweisen zur Einübung der Begriffe auf die Beispiele 118 und die Erklärungen zu Satz 13.1 und Satz 13.2.

Zur Definition 13.3 der gleichmäßigen Konvergenz: Die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge kann man sich so veranschaulichen:

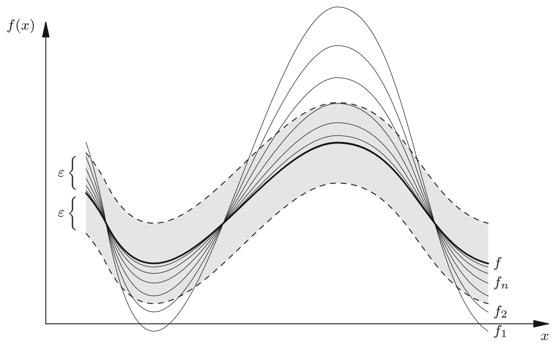

Abb. 13.2: Veranschaulichung der gleichmäßigen Konvergenz.

Für jedes $\varepsilon > 0$ muss es ein n_0 geben, sodass alle f_n für $n \geq n_0$ im „ε-Streifen um f“ liegen. Wichtig ist, dass das n_0 in der Definition der gleichmäßigen Konvergenz nicht von x abhängt.

13.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 13.1: Satz 13.1 sagt, dass aus gleichmäßiger Konvergenz einer Funktionenfolge die punktweise Konvergenz folgt. Das entspricht in etwa dem, dass gleichmäßig stetige Funktionen auch punktweise stetig sind, siehe Kapitel 10, genauer Satz 10.5. Wir wollen nun an einem Beispiel zeigen, dass die Umkehrung nicht gilt, das heißt, aus punktweiser Konvergenz folgt im Allgemeinen nicht die gleichmäßige Konvergenz.
Wir betrachten die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \frac{x}{n}$. Diese ist punktweise konvergent gegen die Nullfunktion. Das ist klar, denn für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als Vielfaches der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergent.

Wir zeigen nun, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht gleichmäßig konvergiert: Wir wählen $\varepsilon = 1$. Jetzt ist es nicht möglich, ein n_0 zu finden, sodass

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \varepsilon$$

für alle x und alle $n \geq n_0$. Angenommen es existiere so ein n_0 und seien $n = n_0$ und $x = 2 \cdot n_0$. Dann erhalten wir:

$$|f_n(x)| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

Es muss aber $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ gelten, wenn die Funktionenfolge gleichmäßig konvergent sein soll. Also ist sie es nicht, wie behauptet.

Zum Satz 13.2: Der Satz 13.2 sagt aus, dass wenn die einzelnen Folgenglieder der Funktionenfolge, also die Funktionen, stetig sind, und die Funktionenfolge gleichmäßig gegen eine Funktion konvergiert, ist diese Funktion auf jeden Fall stetig.
Wir zeigen: *Der punktweise Limes stetiger Funktionen muss nicht unbedingt stetig sein.* Das bedeutet gerade: Wenn die einzelnen Folgenglieder der Funktionenfolge, also die Funktionen, stetig sind, dann muss die Funktion, gegen die die Funktionenfolge konvergiert, bei punktweiser Konvergenz nicht unbedingt stetig sein. Dies zeigt das folgende

Beispiel 117

Wir betrachten die durch $f_n : x \mapsto x^n$ auf dem Intervall $[0, 1]$ definierte Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sie konvergiert punktweise gegen

$$f : x \to \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

denn $1^n \to 1$ und $x^n \to 0$ für $0 \leq x < 1$.

Wir veranschaulichen dies an der Abbildung 13.3.

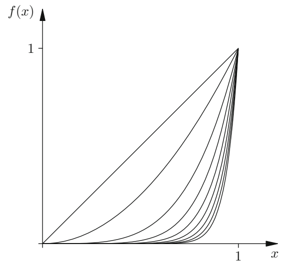

Abb. 13.3: Die Funktionenfolge $f_n : x \mapsto x^n$ auf dem Intervall $[0, 1]$.

■

Beispiele zur punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz:

Beispiel 118

- Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) := \left(\tanh(\frac{1}{x})\right)^{2n}$ für $x \neq 0$ und $f_n(0) := 1$. Hierbei bezeichnet $\tanh(x)$ den Tangens hyperbolicus, und es gilt $\tanh(x) := \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.
  Man zeige:

  i) Die Folge (f_n) konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ punktweise und ermittle die Grenzfunktion f.

  Es gilt $f_n(0) = 1 \to 1$ für $n \to \infty$. Die Funktion $x \mapsto \tanh(x)$ ist streng monoton wachsend mit $|\tanh(x)| < 1$ für alle x. Deshalb gilt $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ und $x \neq 0$. Die Grenzfunktion ist daher $f(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 1$.

  ii) Die Folge (f_n) konvergiert nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$, für jedes $a > 0$ konvergiert sie jedoch gleichmäßig auf $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$.

  Die Grenzfunktion ist nicht stetig. Nach Satz 13.2 kann die Konvergenz also nicht gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$ sein. Sei nun $a > 0$ gegeben. Die Funktion f_n ist eine gerade Funktion und für $x \geq 0$ streng monoton fallend. Also gilt $f_n(x) \leq f_n(a)$ für $|x| \geq a$. Wegen $f_n(a) \to 0$ folgt die gleichmäßige Konvergenz auf $\mathbb{R} \setminus (-a, a)$.

- Die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f = 0$. Jedes f_n ist (beliebig oft) differenzierbar, aber die Ableitungen $f_n'(x) = \cos(nx)$ konvergieren nicht einmal punktweise gegen die Ableitung der Grenzfunktion, das heißt gegen Null.

- Es seien $f_0(x) := \frac{1}{4}x(1+x)$ und $f_{n+1}(x) := f_0(f_n(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert im Intervall $I := (-3, 3)$ punktweise, und sie konvergiert sogar gleichmäßig auf jedem Intervall $[a, b] \subset I$.

  Es genügt, die gleichmäßige Konvergenz auf jedem Intervall $J := [-c, c]$ mit $0 < c < 3$ zu beweisen. Mit $K := \frac{1+c}{4} < 1$ folgt dann für alle $x \in J$:

$$|f_0(x)| = \frac{1}{4}\,|x|\,|1+x| \leq \frac{1+c}{4}\,|x| = K\,|x| \leq Kc < c.$$

  Insbesondere gilt wieder $f_0(x) \in J$ und damit auch $f_n(x) \in J$ für alle n. Ein kleiner Induktionsbeweis sichert dann auch $|f_n(x)| \leq K^{n+1}c$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Majorantenkriterium ergibt sich nun die gleichmäßige Konvergenz unserer Reihe auf dem Intervall I. ■

14 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Übersicht

In diesem Kapitel steigen wir in die lineare Algebra ein. Los geht es mit der Definition eines linearen Gleichungssystems und dem Lösen von linearen Gleichungssystemen mithilfe des überaus wichtigen Gaußschen Eliminationsverfahrens. Fortschreiten werden wir danach mit der Definition einer Matrix und wichtigen Begriffen im Zusammenhang mit Matrizen.

14.1 Definitionen

Definition 14.1 (Lineares Gleichungssystem)
Ein **lineares Gleichungssystem** mit $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen für $n \in \mathbb{N}$ Unbekannte $x_1, \ldots, x_n$ hat die Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Definition 14.2 (Elementare Gleichungsumformungen)
Unter **elementaren Gleichungsumformungen** verstehen wir

1. das Addieren des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen,

2. das Multiplizieren einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl und

3. das Vertauschen zweier Gleichungen.

Das Erzeugen eines äquivalenten gestaffelten Systems durch elementare Gleichungsumformungen heißt **Gaußsches Eliminationsverfahren**.

Anmerkungen: Dass die Definition Sinn macht und sich die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems wirklich nicht verändert, verrät uns Satz 14.1. Außerdem ist die Definition des Gaußschen Algorithmus nicht so hundertprozentig mathematisch. Wir verweisen daher ebenfalls auf Satz 14.1 und die Erklärungen zum Satz 14.1 sowie auf das Beispiel 120 zu den Erklärungen zu Definition 14.2.

Definition 14.3 (Matrix)
Eine **Matrix** A mit Koeffizienten in einem Körper K ist ein rechteckiges Schema von endlich vielen Zahlen, die in K liegen, also:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten nennen wir eine $(m \times n)$-Matrix. Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen mit Werten in K bezeichnen wir mit $\mathcal{M}_{m,n}(K)$. Den Eintrag der Matrix A in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte bezeichnen wir mit a_{ij}. Ab und zu schreiben wir auch $A \in K^{m \times n}$.
Wir nennen zwei Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ gleich, wenn sie in allen Einträgen übereinstimmen, das heißt, $A = B :\Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

Ein lineares Gleichungssystem wie in Definition 14.1 schreiben wir in der Form $Ax = b$, wobei x der Vektor mit den Einträgen $x_1, \ldots, x_n$ und b der Vektor mit den Einträgen $b_1, \ldots, b_m$ ist. Ausgeschrieben lautet dies:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

wobei wir in Anbetracht des Gaußschen Eliminationsverfahrens den Vektor x „weglassen“.

Definition 14.4 (Zeilenstufenform)

1. Wir sagen eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ befindet sich in **Zeilenstufenform**, wenn gilt: Es gibt eine ganze Zahl r, $0 \leq r \leq m$ und natürliche Zahlen $j_1, \ldots, j_r$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_r \leq j_m$ mit:

$$\begin{aligned} a_{i1} = \ldots = a_{i,j_{i-1}} &= 0, & i &= 1, \ldots, r \\ a_{i,j_i} &\neq 0, & i &= 1, \ldots, r \\ a_{i1} = \ldots = a_{in} &= 0, & i &= r+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

2. Wir sagen A ist in **normalisierter Zeilenstufenform**, wenn zusätzlich zu den obigen Bedingungen noch gilt

$$\begin{aligned} a_{i,j_i} &= 1, & i &= 1, \ldots, r \\ a_{1,j_i} = \ldots = a_{i-1,j_i} &= 0, & i &= 1, \ldots, r \end{aligned}$$

Die Einträge an den Stellen a_{i,j_i} nennt man **Angelpunkte** oder **Pivots**. Die Zahl r nennt man den **Zeilenrang**.

Definition 14.5 (Rang einer Matrix)

Als **Rang** einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ bezeichnen wir die Anzahl der Zeilen in der Zeilenstufenform, die ein Element ungleich Null enthalten. Wir schreiben $\operatorname{rang}(A)$.

*Anmerkung: Man kann den Rang auch allgemeiner für Matrizen aus $K^{m \times n}$ definieren. An dieser Stelle fehlen uns aber die Begriffe, die sich alle in Kapitel 16 und 17 über die linearen Abbildungen befinden. Wir wollen dennoch ein wenig dazu sagen. Für die Begrifflichkeiten schlage man bitte im entsprechenden Kapitel nach. Man ordnet den Rang einer linearen Abbildung oder einer Matrix zu. Bei einer linearen Abbildung ist der Rang die Dimension des Bildes dieser Abbildung. Zu einer Matrix selbst gehört ein **Zeilenrang** und ein **Spaltenrang**. Der Zeilenrang wiederum ist die Dimension des von den Zeilenvektoren aufgespannten Vektorraums und entspricht der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren. Analoges gilt für den Spaltenrang. Weiterhin kann man zeigen, dass Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix identisch sind.*

Definition 14.6 (Rechenregeln für Matrizen)

Seien A und B zwei Matrizen mit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ und $B \in \mathcal{M}_{r,s}(K)$

1. Falls $m = r$ und $n = s$, so ist $C := A + B$ die eindeutige Matrix $C \in \mathcal{M}_{m,n}(K) = \mathcal{M}_{r,s}(K)$, für die gilt: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \forall i, j$.

2. Falls $n = r$, so ist $D := A \cdot B$ die eindeutige Matrix $D \in \mathcal{M}_{m,s}(K)$, für die gilt: $d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}\ \forall i, j$.

Definition 14.7 (Kronecker-Delta)
Das **Kronecker-Delta** ist definiert als:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Anmerkung: Dies sind gerade die Elemente der Einheitsmatrix (siehe Definition 14.8). Außerdem ist $\sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_j$.

Definition 14.8 (Einheitsmatrix)
Die Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ mit $a_{ij} = \delta_{ij}$ nennen wir **Einheitsmatrix** und bezeichnen sie mit E_n:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

dabei ist δ_{ij} das Kronecker-Delta aus Definition 14.7.

Definition 14.9 (Invertierbare Matrizen)
Sei $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$. Wenn eine Matrix $B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ existiert mit $A \cdot B = B \cdot A = E_n$, dann nennen wir A **invertierbar** und $A^{-1} := B$ die **Inverse** von A. Den Raum aller invertierbarer $(n \times n)$-Matrizen mit Einträgen im Körper K bezeichnen wir mit $Gl_n(K)$.

14.2 Sätze und Beweise

Satz 14.1 (Umformen in normalisierte Zeilenstufenform)
Jede Matrix $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ lässt sich durch elementare Zeilenoperationen in normalisierte Zeilenstufenform bringen.

Beweis: Wir geben einen Algorithmus an, der das Gewünschte bewirkt.
Ohne Einschränkung existiert ein Element $a_{kl} \neq 0$. Wir wählen i_1 so, dass $a_{i_1 j_1} \neq 0$ mit $j_1 := \min\{l \in \{1, ..., n\} : \exists k \in \{1, ..., n\} : a_{kl} \neq 0\}$. Führe dann folgende Schritte durch:

1. Vertausche die 1. und die i_1-te Zeile.
2. Multipliziere die 1. Zeile mit a_{1,j_1}^{-1}.
3. Addiere für $i = 2, ..., m$ das $-a_{i,j_1}$-fache der 1. Zeile auf die i-te Zeile.

Wir erhalten nun eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & B & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$$

mit einer $(n-j_1) \times (m-1)$-Matrix B. Ist $n = j_1$ oder $m = 1$, so sind wir fertig. Andernfalls wenden wir die Schritte von oben auf die Matrix B an und führen die Operationen auf ganz A durch. Dadurch erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine Matrix in normalisierter Zeilenstufenform. q.e.d.

Den Algorithmus nennen wir den **Gauß-Algorithmus**.

Satz 14.2 (Wann ist eine Matrix invertierbar?)
Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit Einträgen aus einem Körper K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. *A ist invertierbar.*
2. $\ker(A) := \{x \in K^n : Ax = 0\} = \{0\}$, *das heißt, der Kern von A besteht nur aus dem Nullvektor. Das bedeutet, dass das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur den Nullvektor als Lösung besitzt.*
3. $\operatorname{im}(A) = \{Ax : x \in K^n\} = K^n$, *das heißt, das Bild von A ist der gesamte Vektorraum K^n.*
4. *Die Matrix besitzt vollen Rang.*
5. *Die Determinante der Matrix ist ungleich Null (siehe auch Kapitel 20).*

Anmerkung: Im Satz tauchen nun plötzlich Begriffe auf, die wir noch gar nicht eingeführt haben. Dennoch passt dieser Satz am besten in dieses Kapitel. Sollten die Begriffe noch nicht aus der Vorlesung bekannt sein, verweisen wir auf die Kapitel 17 und 20.

Beweis: Zu „1. $\Rightarrow$ 2.“: Sei A invertierbar und $x \in \ker(A)$. Nach Definition des Kerns folgt:

$$Ax = 0 \Rightarrow A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad E_n \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Daraus ergibt sich die Behauptung, dass der Kern nur aus dem Nullvektor besteht.

Wir zeigen jetzt „2. $\Rightarrow$ 3. “: 2. sagt gerade aus, dass der Kern von A nur aus dem Nullvektor besteht. Demnach ist $\dim\ker(A) = 0$, und aus dem Dimensionssatz (siehe Kapitel 17, Satz 17.8) folgt

$$\begin{aligned} &\dim\ker(A) + \dim\operatorname{im}(A) = \dim K^n = n \\ \Rightarrow\quad & 0 + \dim\operatorname{im}(A) = n \Rightarrow \dim\operatorname{im}(A) = n. \end{aligned}$$

Das Bild hat demnach dieselbe Dimension wie der Vektorraum K^n. Demnach ist $\operatorname{im}(A) = K^n$, vergleiche Satz 16.9.
Als Übung zeigen wir noch „2. $\Rightarrow$ 1.“: Angenommen $\ker(A) = \{0\}$. Das bedeutet, dass die Abbildung $\varphi : K^n \to K^n$ mit $x \mapsto Ax$ injektiv ist. Da b) äquivalent zu c) ist (angenommen wir hätten das schon gezeigt, Übung!), ist $\operatorname{im}(A) = K^n$, wie schon gesehen. Insbesondere ist φ surjektiv und damit bijektiv. Folglich existiert eine inverse Abbildung $\varphi^{-1} : K^n \to K^n$ und ist linear (Übung). Damit folgt $\varphi^{-1}(y) = B \cdot y$ und $AB = BA = E_n$. Also ist A invertierbar.
Die anderen Beweise lassen wir als Übungsaufgabe. Bei Problemen schaut einfach auf unser Online-Angebot (siehe Vorwort) und wir helfen gerne :-).
q.e.d.

Satz 14.3 (Kriterium zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme)
Ein lineares Gleichungssystem besitzt genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn der Rang von A mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|b]$ übereinstimmt.

Beweis: Wir skizzieren den Beweis: Ist der Rang von A gleich dem Rang von $[A|b]$, dann ergibt sich (mindestens) eine Lösung aus der normalisierten Zeilenstufenform. Ist jedoch der Rang von A echt kleiner als der Rang von $[A|b]$, dann gibt es eine Null-Zeile in der Zeilenstufenform von A mit einem Nicht-Null-Element in der rechten Seite b. Die zugehörige Gleichung ist also nicht lösbar.
q.e.d.

14.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 14.1 des linearen Gleichungssystems: Lineare Gleichungssysteme solltet ihr aus der Schule schon kennen. Wir werden uns daher ein Beispiel aus der analytischen Geometrie anschauen, wie wir ein lineares Gleichungssystem aufstellen, und danach werden wir eine Lösungsmethode vorstellen.

Beispiel 119
Gegeben seien drei Ebenen mit den folgenden Ebenengleichungen:

$$x_1 - 0{,}4x_2 - 0{,}3x_3 = 130 \tag{14.1}$$
$$-0{,}2x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}14x_3 = 74 \tag{14.2}$$
$$-0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}95x_3 = 95 \tag{14.3}$$

Schneiden sich die Geraden in einem Punkt und wenn ja, wie lautet dieser Schnittpunkt? Dies ist eine klassische Aufgabe, die wir mithilfe eines linearen Gleichungssystems ohne Probleme lösen können. Eine im Folgenden oft gebrauchte Abkürzung für das lange Wort „lineares Gleichungssystem" soll nun „LGS" sein.
Auflösen der Gleichung (14.1) nach x_1 ergibt $x_1 = 0{,}4x_2 + 0{,}3x_2 + 130$. Einsetzen in die beiden restlichen Gleichungen (14.2) und (14.3) liefert:

$$-0{,}2(0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 130) + 0{,}88x_2 - 0{,}14x_3 = 74$$
$$-0{,}5(0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 + 130) - 0{,}2x_2 + 0{,}95x_3 = 95$$

Dies können wir noch zu

$$0{,}8x_2 - 0{,}2x_3 = 100 \tag{14.4}$$
$$-0{,}4x_2 + 0{,}8x_3 = 160 \tag{14.5}$$

zusammenfassen. Auflösen der Gleichung (14.4) nach x_2 liefert $x_2 = 0{,}25x_3 + 125$. Einsetzen in die Gleichung (14.5) ergibt:

$$-0{,}4(0{,}25x_3 + 125) + 0{,}8x_3 = 160 \Rightarrow 0{,}7x_3 = 210 \Rightarrow x_3 = 300.$$

Rückwärtseinsetzen ergibt nun die Lösung

$$x_3 = 300,\ \ x_2 = 75 + 125 = 200,\ \ x_1 = 80 + 90 + 130 = 300.$$

Der Schnittpunkt der drei Ebenen lautet demnach $(300, 200, 300)$. ■

Zur Definition 14.2 elementarer Gleichungsumformungen: Die obige Rechnung in Beispiel 119 zeigt, dass solch ein Verfahren bei linearen Gleichungssystemen mit mehr Unbekannten sehr langwierig werden kann. Wir lösen dasselbe Gleichungssystem daher nochmals mithilfe elementarer Gleichungsumformungen bzw. mit dem Gauß-Algorithmus.

Beispiel 120
Gegeben seien also die drei linearen Gleichungen:

$$x_1 - 0{,}4x_2 - 0{,}3x_3 = 130 \tag{14.6}$$
$$-0{,}2x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}14x_3 = 74 \tag{14.7}$$
$$-0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}95x_3 = 95 \tag{14.8}$$

Gleichung (14.6) bleibt unverändert, zur Gleichung (14.7) und (14.8) wird jeweils ein Vielfaches von Gleichung (14.6) addiert, sodass x_1 eliminiert wird:

$$\begin{aligned} -0{,}2x_1 + 0{,}88x_2 - 0{,}14x_3 &= 74 \quad \text{Gleichung (14.7)} \\ 0{,}2x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}06x_3 &= 26 \quad \text{0,2-faches von Gleichung (14.6)} \\ 0{,}8x_2 - 0{,}2x_3 &= 100 \quad \text{Beide Gleichungen addiert} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}95x_3 &= 95 \quad \text{Gleichung (14.8)} \\ 0{,}5x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}15x_3 &= 65 \quad \text{0,5-faches von Gleichung (14.9)} \\ -0{,}4x_2 + 0{,}8x_3 &= 160 \quad \text{Beide Gleichungen addiert} \end{aligned}$$

Wir erhalten demnach also ein neues lineares Gleichungssystem, das schon wesentlich einfacher aussieht und das es nun zu lösen gilt:

$$x_1 - 0{,}4x_2 - 0{,}3x_3 = 130 \tag{14.9}$$
$$0{,}8x_2 - 0{,}2x_3 = 100 \tag{14.10}$$
$$-0{,}4x_2 + 0{,}8x_3 = 160 \tag{14.11}$$

Nun lassen wir die Gleichungen (14.9) und (14.10) unverändert und addieren ein Vielfaches der Gleichung (14.10) so zur Gleichung (14.11), dass x_2 eliminiert wird:

$$\begin{aligned} -0{,}4x_2 + 0{,}8x_3 &= 160 \quad \text{Gleichung (14.11)} \\ 0{,}4x_2 - 0{,}1x_3 &= 50 \quad \text{0,5-faches von Gleichung (14.10)} \\ 0{,}7x_3 &= 210 \quad \text{Beide Gleichungen addiert} \end{aligned}$$

Es ergibt sich daher das gestaffelte System

$$\begin{aligned} x_1 - 0{,}4x_2 - 0{,}3x_3 &= 130 \\ 0{,}8x_2 - 0{,}2x_3 &= 100 \\ 0{,}7x_3 &= 210 \end{aligned}$$

Durch Rückwärtseinsetzen erhalten wir die gesuchte Lösung und sie stimmt mit der in Beispiel 119 berechneten überein. So sollte es sein :-).

$$\begin{aligned} x_3 &= 210/0{,}7 = 300 \\ x_2 &= (100 + 0{,}2 \cdot 300)/0{,}8 = 200 \\ x_1 &= 130 + 0{,}3 \cdot 300 + 0{,}4 \cdot 200 = 300 \end{aligned}$$

■

Zur Definition 14.3 einer Matrix: Zu dieser Definition ist wohl nicht viel zu sagen, außer dass so etwas wie $(1, 2, 3)^T$, was ihr aus der Schule als Vektor kennt, nach unserer Definition eine Matrix ist. Eine Matrix ist also in gewisser Weise eine Verallgemeinerung des Vektorbegriffs aus der Schule. Die Matrixschreibweise hat aber gerade für Gleichungssysteme enorme Vorteile: Beim Lösen linearer Gleichungssysteme der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

ist es unnötig, bei jeder Umformung die Unbekannten x_i, die Pluszeichen und die Gleichheitszeichen mitzuschleppen, so wie wir es ganz aufwendig in den Beispiele 119 und 120 getan haben. Die ganzen Informationen, die wir benötigen, stecken in den Koeffizenten. Wir ordnen diese daher in einem rechteckigem Schema an:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ein lineares Gleichungssystem schreiben wir dann als $A \cdot x = b$. Die erweiterte Koeffizientenmatrix notieren wir als $[A|b]$.
Das lineare Gleichungssystem aus den Beispielen 119 und 120 wird also mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -0{,}4 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}88 & -0{,}14 \\ -0{,}5 & -0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix}$$

zu

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}4 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}88 & -0{,}14 \\ -0{,}5 & -0{,}2 & 0{,}95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 74 \\ 95 \end{pmatrix}.$$

Zur Definition 14.4 der Zeilenstufenform:

Beispiel 121
Wir geben euch nun drei Matrizen, von denen ihr entscheiden sollt, ob diese in Zeilenstufenform gegeben sind oder nicht. Und da zählt es nicht, ob man diese in Zeilenstufenform bringen kann.

- Die Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist nicht in Zeilenstufenform.

- Die Matrix
$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
ist nicht in Zeilenstufenform.

- Die Matrix
$$\begin{pmatrix} -7 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
ist in Zeilenstufenform. ■

Zur Definition 14.5 des Rangs einer Matrix: Aus der Definition 14.5 des Rangs einer Matrix folgen sofort die Eigenschaften:

1. Der Rang der Matrix A ist nicht größer als der Rang von $[A|b]$.
2. Der Rang der Matrix A ist nicht größer als die Anzahl der Zeilen von A.
3. Der Rang der Matrix A ist nicht größer als die Anzahl der Spalten von A.

Beispiel 122

- Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, formt man diese mittels des Gaußschen Eliminationsverfahrens in eine Matrix in Zeilenstufenform um. Die Anzahl der Zeilenvektoren, die ungleich 0 sind, entspricht dann dem Rang der Matrix. Gegeben sei beispielsweise die Matrix:
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$
Umformen in Zeilenstufenform liefert:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Der Rang lautet daher 3.

- Es ist

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demnach gilt $\operatorname{rang}(B) = 2$.

- Wir betrachten die Matrix des linearen Gleichungssystems aus Beispiel 119 und 120

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}4 & -0{,}3 & | & 130 \\ -0{,}2 & 0{,}88 & -0{,}14 & | & 74 \\ -0{,}5 & -0{,}2 & 95 & | & 95 \end{pmatrix}.$$

In Zeilenstufenform lautet dieses

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}4 & -0{,}3 & | & 130 \\ 0 & 0{,}8 & -0{,}2 & | & 100 \\ 0 & 0 & 7 & | & 210 \end{pmatrix}.$$

Der Rang lautet also 3. Nach Satz 14.3 besitzt das lineare Gleichungssystem also genau eine Lösung. Dies hatten wir auch schon in den Beispielen 119 und 120 ausgerechnet.

■

Weitere Beispiele geben wir in den Erklärungen zu Satz 14.3.

Zur Definition 14.6 der Rechenregeln für Matrizen: Wir fangen mit der Addition an. Das Wichtigste zuerst: Man kann nur Matrizen addieren, deren Größe auch passt, das heißt deren Zeilenanzahl und Spaltenanzahl übereinstimmen. Zum Beispiel können die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

nicht addiert werden, denn $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ und $B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Bevor ihr also zwei Matrizen addieren wollt, müsst ihr erst überprüfen, ob das überhaupt geht. Wenn das möglich ist, zum Beispiel wenn

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$

dann können wir die Summe $C + D$ bilden, denn die Spaltenanzahl und Zeilenanzahl stimmen überein. Wir addieren die Matrizen also einfach komponentenweise:

$$C + D = \begin{pmatrix} 1+4 & 8+5 & 3+1 \\ 2+2 & 2+3 & 0+2 \\ 7+3 & 6+6 & 1+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 13 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist es natürlich egal, ob man $C+D$ oder $D+C$ rechnet, es kommt dasselbe heraus (Kommutativgesetz). Analog subtrahiert man auch Matrizen:

$$C - D = \begin{pmatrix} 1-4 & 8-5 & 3-1 \\ 2-2 & 2-3 & 0-2 \\ 7-3 & 6-6 & 1-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Die Multiplikation ist schon etwas komplizierter, aber auch hier gilt: Zuerst überprüfen, ob die Matrizen überhaupt multipliziert werden dürfen. Dabei kommt es aber nicht mehr darauf an, dass Zeilenanzahl und Spaltenanzahl der beiden Matrizen übereinstimmen, sondern dass die Zeilenanzahl der ersten Matrix gleich der Spaltenanzahl der zweiten Matrix ist:

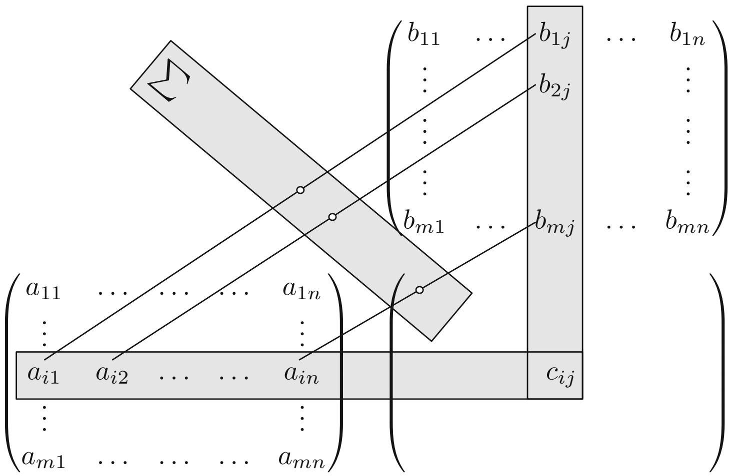

Abb. 14.1: Schema der Matrixmultiplikation.

Hierzu erstmal ein Beispiel: Wir betrachten die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Bevor wir zur Multiplikation kommen noch einmal kurz zur Addition: Die einzigen beiden Matrizen, die wir addieren können, sind natürlich A und B (und was kommt raus?). Aber jetzt zur Multiplikation. Dafür bestimmen wir zuerst mal die Größe der drei Matrizen:

$A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, $D \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. $A \cdot A$ und $A \cdot B$ können wir also nicht berechnen, genauso wenig $A \cdot C$. Allerdings können wir zum Beispiel $A \cdot D$ berechnen:

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 7 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 5 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 11 & 26 \\ 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

Die weiteren Produkte, die man berechnen kann, sind $B \cdot D$, $C \cdot D$ und $D \cdot D$ mit den Ergebnissen (direkt aus der Multiplikationsregel)

$$B \cdot D = \begin{pmatrix} 8 & 23 \\ 9 & 29 \\ 15 & 45 \end{pmatrix}, \quad C \cdot D = \begin{pmatrix} 11 & 36 \end{pmatrix}, \quad D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 16 & 51 \end{pmatrix}.$$

Wir merken uns also: Sind zwei Matrizen gegeben, so kann man diese nur multiplizieren, wenn die zweite Matrix genauso viele Zeilen hat wie die erste Matrix Spalten. Das Ergebnis, also das Produkt, hat dann so viele Zeilen, wie die erste Matrix Zeilen und so viele Spalten wie die zweite Matrix Spalten.
Als Merkregel halten wir fest:

$$\mathcal{M}_{m,n} \cdot \mathcal{M}_{n,r} = \mathcal{M}_{m,r}.$$

Drei ganz wichtige Punkte sind noch anzumerken: Erstens ist die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ. Wie wir oben sehen muss selbst wenn $A \cdot B$ existiert, $B \cdot A$ nicht existieren. Und selbst wenn beides definiert ist, muss der Wert nicht übereinstimmen, zum Beispiel:

Beispiel 123

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = B \cdot A$$

■

Zweitens darf man nicht durch Matrizen teilen, das ist ganz wichtig! Die Division ist für Matrizen nicht erklärt!
Drittens ist der Ring der Matrizen nicht nullteilerfrei (das heißt, aus $A \cdot B = 0$ folgt nicht unbedingt $A = 0$ oder $B = 0$), zum Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zum Abschluss wollen wir noch kurz erklären, was mit dem Term $\lambda \cdot A$ gemeint ist, falls A eine Matrix über einem Körper K ist und $\lambda \in K$. Dann ist für $A = (a_{ij})$ der Ausdruck $\lambda \cdot A$ die Matrix mit $\lambda \cdot A = (\lambda a_{ij})$, das heißt, es wird jeder Eintrag von A mit λ multipliziert.

Beispiel 124
Wir rechnen:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 6 \\ 3\cdot 7 & 3\cdot 8 & 3\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \\ 21 & 24 & 27 \end{pmatrix}.$$

■

Zur Definition 14.7 des Kronecker-Deltas: Dieses Kronecker-Delta wird euch im Verlauf eures Studiums bestimmt noch häufiger begegnen, die Definition ist allerdings selbsterklärend. Das Kronecker-Delta ist 1, wenn $i = j$ und sonst 0.

Zur Definition 14.9 einer invertierbaren Matrix: Das Invertieren einer Matrix ist eigentlich nichts anderes als das Anwenden des Gauß-Algorithmus. Wir schreiben die zu invertierende Matrix auf die linke Seite und auf die rechte Seite die Einheitsmatrix und formen dieses System so lange mit dem Gauß-Algorithmus um, bis auf der linken Seite die Einheitsmatrix steht. Die Matrix auf der rechten Seite ist dann die Inverse, wenn sie denn existiert. Beachtet, dass natürlich nur quadratische Matrizen invertierbar sind. Schauen wir uns ein paar Beispiele an:

Beispiel 125

- Wir wollen die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ invertieren. Dies geht so, wie oben beschrieben:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

Also ist A invertierbar mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Ob wir uns verrechnet haben, könnt ihr leicht nachprüfen, denn es muss $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_3$ gelten.

- Wir wollen versuchen, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ zu invertieren.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 & 4 & -5 & 3 \end{array}\right)$$

Na, was ist denn jetzt passiert? Irgendwie geht es jetzt nicht mehr weiter. Das liegt einfach daran, dass die Matrix nicht invertierbar ist, wie auch das folgende Beispiel 126 zeigt, denn dies ist hier gerade die Matrix für $\lambda = -1$. ■

Beispiel 126

- Sei

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ -1 & 3 & 1 & \lambda \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

  Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist A_λ invertierbar?

  Was müssen wir nun machen? Wir müssen die Determinante (siehe Kapitel 20) der Matrix A bestimmen. Ist diese ungleich Null, so ist die Matrix invertierbar. Es gilt $\det(A) = -(1+\lambda)(3+2\lambda^2)$. Daher ist A_λ für $\lambda \neq -1$ invertierbar.

Ihr solltet nun in der Lage sein, Matrizen zu invertieren. Weitere Eigenschaften von Matrizen werden wir im nächsten Kapitel 15 kennenlernen. ■

14.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 14.1 und dem Gauß-Algorithmus: Ist eine Matrix A beim Lösen eines linearen Gleichungssystems in Zeilenstufenform gegeben, so kann man die Lösungen direkt ablesen, wie wir in dem Beispiel 127 sehen werden. Mithilfe des Gauß-Algorithmus können wir lineare Gleichungssysteme lösen und Matrizen auf Zeilenstufenform bringen. Dabei besteht der Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Gleichungssystemen darin, dass wir einfach die Koeffizienten des Gleichungssystems als Koeffizienten der Matrix nehmen und mit dieser dann weiterrechnen.

Beispiel 127

- Wir wollen, in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R}$, die folgende Matrix A auf Invertierbarkeit überprüfen, denn genau dann kann man den Gauß-Algorithmus erfolgreich durchführen.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Wir wollen noch die Lösungsmenge des Gleichungssystems für den Fall $a = -2$ und $b = 1$ berechnen: Für den Fall $a = -2$ und $b = 1$ ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & |1 \\ 1 & -2 & 1 & |1 \\ 1 & 1 & -2 & |1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & -3 & 3 & |3 \\ 0 & 3 & -3 & |3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & |1 \\ 0 & -1 & 1 & |1 \\ 0 & 0 & 0 & |6 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Zeile liefert die falsche Aussage $0 = 6$. Also besitzt das LGS nur die leere Menge als Lösungsmenge.

Nach Beispiel 173 aus Kapitel 20 gilt $\det A = -(a-b)^2(a+2b)$. Eine andere Möglichkeit zu sehen, dass das Gleichungssystem nicht lösbar ist, ist $a = -2$ und $b = 1$ in die berechnete Determinante einzusetzen. Macht man dies, so stellt man fest, dass $\det(A) = 0$ und damit A nicht invertierbar ist. Folglich ist das Gleichungssystem nicht lösbar.

- Ein weiteres Beispiel aus der analytischen Geometrie, das wir mittels linearer Algebra lösen möchten:
  Seien $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$ die Ebenen, die durch die folgenden linearen Gleichungen gegeben sind:

  $$E_1 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \qquad \text{und} \qquad E_2 : x_1 - x_2 - x_3 = -1.$$

  Welches geometrische Gebilde ist die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$? Wir wollen auch eine Parametrisierung für die Punkte in $E_1 \cap E_2$ angeben.

  Dazu überführen wir das lineare Gleichungssystem in eine erweiterte Koeffizientenmatrix und lösen mit Gauß:

  $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -2 \end{pmatrix}.$$

  Das geometrische Gebilde ist also eine Schnittgerade, da wir eine freie Variable haben, die wir frei wählen können.

  Nun geben wir noch eine Parametrisierung für die Punkte in $E_1 \cap E_2$ an. Dazu formen wir die letzte Zeile der Matrix, also $x_2 - 2x_3 = -2$, um zu $x_2 = -2 + 2x_3$. Wir wählen $x_3 = s$ als freien Parameter. Dies ergibt $x_2 = -2 + 2s$ und $x_1 = -3 + 3s$. Entsprechend ist die Lösungsmenge gegeben durch die Geradenschar

  $$L = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Wir lösen das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & | & 6 \\ 2 & 1 & 3 & | & 5 \\ 3 & 3 & -2 & | & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & | & 6 \\ 0 & -3 & 11 & | & 17 \\ 0 & -3 & 10 & | & 16 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 & | & 6 \\ 0 & -3 & 11 & | & 17 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}.$$

Von unten nach oben können wir die Lösungen für den Lösungsvektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ablesen zu $x_3 = 1$, $-3x_2 + 11 = 17 \Leftrightarrow x_2 = -2$ und $-x_1 + 4 + 4 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 2$.

Es existiert also *genau eine* Lösung $L = \{(2, -2, 1)\}$.

- Wir betrachten ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten x_1, x_2, x_3 und drei Gleichungen. Dies besitzt schon einmal eine eindeutige Lösung (entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen):

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 6x_1 + 6x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass dieses Gleichungssystem keine Lösung besitzen kann, denn wenn man sich die Gleichungen als Ebenen im $\mathbb{R}^3$ vorstellt, so stellt man fest, das alle Ebenen parallel zueinander liegen und damit keinen Schnittpunkt besitzen können. Wie sieht man dies aber rechnerisch? Probieren wir es aus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 3 \\ 4 & 4 & 4 & | & 4 \\ 6 & 6 & 6 & | & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 \\ 6 & 6 & 6 & | & 5 \end{pmatrix}.$$

Schon nach einem Gauß-Schritt (Wir haben die erste Zeile mit -2 multipliziert und zur zweiten addiert) erhalten wir den Widerspruch $0 = -2$. Dies zeigt, dass die leere Menge die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist.

Das lineare Gleichungssystem besitzt also *keine* Lösung.

- Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 3 & 15 & -3 \\ -2 & 3 & 13 & -2 \\ -2 & 2 & 10 & -2 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} -24 \\ -20 \\ -16 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Wir lösen mit Gauß:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 3 & 15 & -3 & -24 \\ -2 & 3 & 13 & -2 & -20 \\ -2 & 2 & 10 & -2 & -16 \\ -1 & 1 & 5 & 0 & -5 \end{array}\right) \leadsto \left(\begin{array}{cccc|c} -3 & 3 & 15 & -3 & -24 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Aus der vierten Zeile ergibt sich:

$$x_4 = 3. \tag{14.12}$$

Die zweite Zeile liefert:

$$x_2 + 3x_3 = -4 \Leftrightarrow x_2 = -4 - 3x_3. \tag{14.13}$$

Die erste Zeile ergibt:

$$x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = 8. \tag{14.14}$$

Setzt man (14.12) und (14.13) in (14.14) ein, erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 - (-4 - 3x_3) - 5x_3 + 3 = 8 &\Leftrightarrow x_1 + 4 + 3x_3 - 5x_3 + 3 = 8 \\ &\Leftrightarrow x_1 = 1 + 2x_3. \end{aligned}$$

x_3 kann also beliebig gewählt werden. Die Lösungsmenge des Gleichungssystems schreiben wir so

$$L = \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_3 \\ x_2 = -4 - 3x_3 \\ x_4 = 3 \end{cases}$$

oder so

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Wahl der freien Variablen ist natürlich nicht eindeutig. Da eine Parametrisierung gewählt werden kann, zeigt dies, dass das lineare Gleichungssystem *unendlich viele* Lösungen besitzt.

- Gleichungssysteme können unter- oder überbestimmt sein. Ein lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten, aber drei Gleichungen ist überbestimmt. Ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten, aber nur zwei Gleichungen ist unterbestimmt.

- Noch ein abschließendes Beispiel eines linearen Gleichungssystems, bei dem die Lösung von einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ abhängt.

$$t \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 2 \tag{14.15}$$

$$4 \cdot x_1 + (t+2) \cdot x_2 = 2 \tag{14.16}$$

Wir machen es dieses Mal ohne Matrix, da es sonst zu unübersichtlich werden würde. Wir multiplizieren die zweite Gleichung (14.16) mit $t \neq 0$ und substrahieren davon viermal die erste Gleichung (14.15), sodass die erste Gleichung unverändert bleibt und die zweite zu

$$t(t+2) \cdot x_2 - 24 \cdot x_2 = 2t - 8$$

wird.

Wir klammern jetzt noch x_2 aus und können damit x_2 schon einmal allgemein berechnen. Es ergibt sich

$$t(t+2) \cdot x_2 - 24 \cdot x_2 = (t^2+2t) \cdot x_2 - 24 \cdot x_2 = (t^2+2t-24) \cdot x_2 = 2t-8. \tag{14.17}$$

Für die Existenz einer Lösung des Gleichungssystems in Abhängigkeit des Parameters ist jetzt entscheidend, wann $(t^2 + 2t - 24)$ Null wird, denn andernfalls können wir in der Gleichung (14.17) nicht durch $t^2 + 2t - 24$ teilen. Wir halten außerdem schon einmal fest, dass die rechte Seite der Gleichung (14.17) für $t = 4$ Null wird. Berechnen wir also zunächst die Nullstellen von $t^2 + 2t - 24$, beispielsweise mit der sogenannten p, q-Formel (oder auch Mitternachtsformel genannt). Sie liefert sofort die Nullstellen $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+24} = -1 \pm 5$, also $t_1 = 4$ oder $t_2 = -6$. Demnach gilt:

$$x_2 = \frac{2t-8}{t^2+2t-24} \text{ für } t \neq 4 \text{ und } t \neq 6. \tag{14.18}$$

Bevor wir uns anschauen, für welches $t \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem Lösungen besitzt, berechnen wir zunächst den zugehörigen x_1-Wert, der sich durch Einsetzen von (14.18) in die Gleichung $t \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 2$ ergibt, da eventuell nochmals Fallunterscheidungen abhängig vom Parameter entstehen könnten:

$$t \cdot x_1 + 6 \cdot \frac{2t-8}{t^2+2t-24} = 2 \Leftrightarrow t \cdot x_1 + \frac{12t-48}{t^2-2t-24} = 2$$

Wir setzen voraus, dass $t \neq 0$, um dadurch teilen zu dürfen, dann ergibt sich:

$$t \cdot x_1 = 2 - \frac{12t-48}{t^2-2t-24} \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{t} - \frac{2t-48}{t \cdot (t^2+2t-24)}.$$

So! Die interessanten Fälle, die die Lösung des Gleichungssystems beeinflussen und die nun nochmals gesondert zu überprüfen sind, sind die Fälle $t = 0$, $t = 4$ und $t = -6$ (für alle anderen Fälle erhalten wir wie oben berechnet genau eine Lösung):

- 1. Fall $t = 0$: Wenn $t = 0$, dann erhalten wir einerseits $6 \cdot x_2 = 2$, was sofort $x_2 = \frac{1}{3}$ impliziert und $4 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 2$, was wiederum auf $x_1 = \frac{1}{3}$ hinausläuft. Für $t = 0$ erhalten wir also genau eine Lösung.
- 2. Fall $t = 4$: Wenn $t = 4$, stimmen Gleichung (14.15) und (14.16) überein, und zwar ergibt sich zweimal $4 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 2$. Das Gleichungssystem hat in diesem Fall unendlich viele Lösungen. Wir bestimmen diese, indem wir beispielsweise $x_2 =: \lambda$ setzen. Daraus folgt $4 \cdot x_1 + 6 \cdot \lambda = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \cdot \lambda = x_1$, woraus die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

resultiert.
- 3. Fall $t = -6$: Wir erhalten die beiden Gleichungen

$$-6 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 = 2 \text{ und } 0 = 2$$

Die letzte Gleichung liefert einen Widerspruch. Für den Fall $t = -6$ besitzt das lineare Gleichungssystem also keine Lösung.

Ihr solltet nun in der Lage sein, lineare Gleichungssystem zu lösen. ■

Zur Invertierbarkeit von Matrizen (Satz 14.2): In Satz 14.2 haben wir einige äquivalente Aussagen aufgeführt, wann eine Matrix invertierbar ist. Der Vollständigkeit halber führen wir weitere ohne Beweis an. Viele Begriffe, die dort auftauchen, werden wir auch erst später einführen:
Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- Es gibt eine inverse Matrix A^{-1} mit $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n$.
- Die Determinante von A ist ungleich Null.
- 0 ist kein Eigenwert von A.
- Die Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren bilden eine Basis von K^n.
- Die Zeilenvektoren oder Spaltenvektoren sind linear unabhängig.
- Die transponierte Matrix (siehe Definition 15.2) A^T ist invertierbar.

Zum Kriterium zur Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme (Satz 14.3):

Beispiel 128

- Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix A hat folgende Zeilenstufenform bzw. normalisierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & -4 & -8 & | & -2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Sowohl der Rang von A als auch der Rang von $[A|b]$ ist 2. Somit besitzt das lineare Gleichungssystem Lösungen. In diesem Fall unendlich viele.

- Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 3 & 1 & | & 1 \\ 2 & 3 & | & 1 \end{pmatrix}$$

hat Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & | & 1 \\ 0 & -8 & | & -2 \\ 0 & 0 & | & -0{,}25 \end{pmatrix}.$$

Es ist hier $\operatorname{rang}(A) = 2$, aber $\operatorname{rang}[A|b] = 3$. Also besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

- Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 17 & 4 & | & 38 \\ 2 & 12 & 46 & 10 & | & 98 \\ 3 & 18 & 69 & 17 & | & 153 \end{pmatrix}$$

hat Zeilenstufenform bzw. normalisierte Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 17 & 4 & | & 38 \\ 0 & 4 & 12 & 2 & | & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & 6 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 & | & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}.$$

Sowohl der Rang von A als auch der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $[A|b]$ ist also 3. Somit besitzt das lineare Gleichungssystem Lösungen. Hier wieder unendlich viele.

■

Zusammenfassung zum Rang einer Matrix: Wir fassen zusammen, was man wissen sollte:

1. Kennt man nur den Rang von A und von $[A|b]$, so kann man mit Satz 14.3 sofort sagen, ob das zugehörige lineare Gleichungssystem lösbar ist oder nicht.

2. Kennt man die Zeilenstufenform, so kann man alle Lösungen bestimmen.

3. Aus der normalisierten Zeilenstufenform kann man alle Lösungen direkt ablesen.

Falls das lineare Gleichungssystem lösbar ist, gilt einer der folgenden Alternativen:

1. Der Rang von A stimmt mit der Spaltenzahl n überein: Dann enthält jede Spalte der Zeilenstufenform ein Pivotelement, die Zeilen $1, \dots, n$ haben also genau $0, \dots, n-1$ führende Nullen. Die normalisierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix besteht in Zeilen $1, \dots, n$ aus der Einheitsmatrix und der eindeutigen Lösung. Darunter folgen gegebenenfalls Null-Zeilen (falls $m > n$).

2. Der Rang von A ist kleiner als n: Dann hat die Zeilenstufenform (mindestens) eine Spalte ohne Pivotelement, also eine Zeile mit (mindestens) zwei führenden Nullen mehr als die vorherige. Zu jeder Spalte j ohne Pivotelement ist die Lösungskomponente x_j beliebig wählbar. Die übrigen x_j sind dadurch eindeutig bestimmt. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

15 Eigenschaften von Matrizen

Übersicht

Nachdem wir im letzten Kapitel 14 schon Matrizen eingeführt und definiert haben, werden wir in diesem Kapitel nun wichtige Eigenschaften der Matrizen beleuchten und durch Beispiele mit Leben füllen.

15.1 Definitionen

Definition 15.1 (Elementarmatrizen)
Wir definieren drei Arten von **Elementarmatrizen**. Dabei seien die folgenden Matrizen jeweils im Raum $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ enthalten.

1. $S_i(\lambda) := \begin{cases} a_{kl} = \delta_{kl},\ (k,l) \neq (i,i) \\ a_{ii} = \lambda. \end{cases}$

2. $Q_i^j(\lambda) := \begin{cases} a_{kl} = \delta_{kl},\ (k,l) \neq (i,j) \\ a_{ij} = \lambda. \end{cases}$

3. $P_i^j := \begin{cases} a_{kl} = \delta_{kl},\ (k,l) \notin \{(i,i),(i,j),(j,i),(j,j)\} \\ a_{ij} = a_{ji} = 1 \\ a_{ii} = a_{jj} = 0. \end{cases}$

Anmerkung: Aus der Definition folgt sofort, dass die Elementarmatrizen invertierbar sind mit $(S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\lambda^{-1})$, $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$ und $(P_i^j)^{-1} = P_j^i$. Weiterhin sei erwähnt, dass die Notation von Elementarmatrizen in der Literatur keinesfalls einheitlich ist.

Definition 15.2 (Spezielle Matrizen)

1. Ist $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, so bezeichnen wir mit $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(K)$ die eindeutige Matrix, für die $a_{ij}^T := a_{ji}$ $\forall i, j$ gilt. Wir nennen A^T die **transponierte** Matrix von A.
2. Ist $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und gilt $A = A^T$, so nennen wir A **symmetrisch**.
3. Ist $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und gilt $A = -A^T$, so nennen wir A **schiefsymmetrisch**.
4. Ist $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, so nennen wir die Matrix A^* mit $a_{ij}^* = \overline{a}_{ij}^T = \overline{a}_{ji}$ die **adjungierte** Matrix von A. A heißt **selbstadjungiert**, falls $A = A^*$.
5. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ heißt **positiv definit**, falls für alle $x \in K^n$ gilt: $x^T \cdot A \cdot x \geq 0$ und $x^T \cdot A \cdot x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
6. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ heißt **orthogonal**, falls $A^T \cdot A = A \cdot A^T = E_n$, also wenn gilt: $A^{-1} = A^T$. Den Raum aller orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen bezeichnen wir mit $O_n(K)$.
7. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,n}(C)$ heißt **unitär**, falls $A^* \cdot A = A \cdot A^* = E_n$, also wenn gilt: $A^{-1} = A^*$. Den Raum aller unitären $(n \times n)$-Matrizen bezeichnen wir mit $U_n(K)$.

Definition 15.3 (Ähnliche Matrizen)
Wir nennen zwei quadratische Matrizen $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ **ähnlich**, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in Gl_n(K)$ gibt, sodass gilt: $B = S^{-1}AS$.

15.2 Sätze und Beweise

Satz 15.1 (Produkt invertierbarer Matrizen)
Seien $A, B \in Gl_n(K)$ invertierbar, dann gilt $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Das Produkt invertierbarer Matrizen ist also wieder invertierbar.

Beweis: Es gilt:

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n.$$

q.e.d.

Satz 15.2 (Ring der Matrizen)
Die Menge aller Matrizen $\mathcal{M}_{n,n}(K)$ bildet mit der oben definierten Addition und Multiplikation einen Ring mit Nullelement

$$0_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und Einselement E_n.

Beweis: Diese Aufgabe überlassen wir euch als Übung. Ihr müsst nur in Definition 6.5 aus Kapitel 6 schauen und alle Eigenschaften nachprüfen bzw. nachrechnen. q.e.d.

Satz 15.3 (Gruppe der invertierbaren Matrizen)
Die Menge aller invertierbaren Matrizen $Gl_n(K)$ bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe mit neutralem Element E_n.

Beweis: Diese Aufgabe überlassen wir euch als Übung. Auch hier müsst ihr die Definition 6.1 aus Kapitel 6 nachschlagen (oder euch erinnern) und die Eigenschaften nachweisen. Bei Problemen verweisen wir auf unser Online-Angebot (siehe Vorwort). q.e.d.

Anmerkung: Die Gruppe der invertierbaren reellwertigen Matrizen $GL_n(\mathbb{R})$ hat die wichtige Untergruppe $O_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$.

Satz 15.4
Jede invertierbare Matrix kann als Produkt von Elementarmatrizen dargestellt werden.

15.3 Erklärungen zu den Definitionen

Wir werden in diesem Kapitel das Hauptaugenmerk der Erklärungen nicht auf die Sätze, sondern auf den Umgang mit Matrizen legen, da dies für den weiteren Studienverlauf essenziell ist.

Zur Definition 15.1 der Elementarmatrizen: Die Definition 15.1 der Elementarmatrizen klingt am Anfang verdammt schwierig. Aber es steckt wirklich nichts Besonderes oder Schwieriges dahinter. Die Multiplikation von Elementarmatrizen von links an die Matrix entspricht einfach nur elementaren Zeilenoperationen und eine Multiplikation von rechts elementaren Spaltenoperationen.

Damit ist die Grundaussage schon verraten: Wenn wir den Gauß-Algorithmus durchführen, entspricht dies nichts anderes als der Multiplikation mit Elementarmatrizen. Die drei Typen von Elementarmatrizen stellen nämlich die drei uns bekannten elementaren Zeilenumformungen dar:

1. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich 0,
2. Vertauschen von Zeilen und
3. Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl ungleich Null und addieren auf eine andere.

Schauen wir uns die drei Typen nochmals genauer an und fragen uns, wie die Elementarmatrizen eigentlich aussehen, und welche Wirkung sie auf eine beliebige $(m \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{15.1}$$

haben.

1. Der erste Typ entspricht der Multiplikation der i-ten Zeile mit einer Zahl $\lambda \in K$ $(\lambda \neq 0)$. Diese Matrizen $S_i(\lambda)$ haben also die Gestalt

$$S_i(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & \quad & i & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

Dies entspricht einer Einheitsmatrix mit dem Unterschied, dass in der i-ten Zeile ein λ zu finden ist. Außerhalb der Diagonalen stehen nur Nullen.

Schauen wir uns die Wirkung auf eine Matrix der Form (15.1) an:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Wir schauen uns noch einmal ein Beispiel mit einer (3×3)-Matrix an. Und zwar sei

$$A_{tel} := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Wir nennen diese Matrix nun im Folgenden die Telefonmatrix. Möchten wir die zweite Spalte mit 3 multiplizieren, so müssen wir die Matrix A von rechts mit der Elementarmatrix

$$S_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

multiplizieren

$$A_{tel} \cdot S_2(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 3 & 3 \\ 4 & 5 \cdot 3 & 6 \\ 7 & 8 \cdot 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Multiplizieren wir die Matrix A von links mit $S_2(3)$, so entspricht dies der Multiplikation der zweiten Zeile mit 3.

$$S_2(3) \cdot A_{tel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Jetzt alles klar?

2. Schauen wir uns den zweiten Typ an, der einer Addition des λ-fachen der j-ten Zeile auf die i-te Zeile entspricht. Diese haben folgende Form

$$Q_i^j(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & & \lambda & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \qquad\qquad\qquad j \end{matrix} & \end{array}$$

Eine Multiplikation von Q_i^j von links an die Matrix A entspricht elementaren Zeilenoperationen:

$$
\begin{aligned}
Q_i^j(\lambda) \cdot A &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \lambda & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & \cdots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Zu kompliziert? Na gut, dann schnell zu einem einfachen Beispiel. Wir betrachten wieder unsere Telefonmatrix und möchten mit elementaren Zeilenoperationen unter der 1 eine Null erzeugen; also mit anderen Worten die 4 verschwinden lassen. Die 4 steht in der Telefonmatrix in der zweiten Zeile und ersten Spalte. Also im Eintrag $(2, 1)$. Daher lautet

$$Q_2^1(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probieren wir aus, ob es passt. Ob dies also wirklich der Multiplikation der ersten Zeile mit -4 und dem Addieren auf die zweite Zeile entspricht

$$Q_2^1(-4) \cdot A_{tel} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Passt! :-)

3. Und noch zum dritten Typ: Wie sehen diese Matrizen aus? Hier vertauschen wir die j-te Zeile mit der i-ten Zeile. Gegeben sei die ursprüngliche Matrix

$$
\begin{array}{cc}
\begin{matrix} i & j \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix} & \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ & \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ j \\ \\ \end{matrix}
\end{array}
$$

Hierbei steht die Matrix im Inneren in einem Block zusammen.

Durch Vertauschen der j-ten und der i-ten Zeile erhalten wir:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} i & j \end{matrix} & \\ & \begin{pmatrix} & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ i \\ j \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Insgesamt ergibt sich

$$P_i^j \cdot A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}.$$

Schauen wir uns das noch einmal an einem Beispiel an. Wir betrachten wieder unsere Telefonmatrix und möchten die erste und zweite Zeile vertauschen. Daher multiplizieren wir mit der Elementarmatrix

$$P_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Schauen wir, ob das Richtige herauskommt:

$$P_2^1 \cdot A_{tel} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Multiplikation von rechts mit dieser Elementarmatrix P_2^1 entspricht dem Vertauschen der ersten und zweiten Spalte.

Wir hoffen, dass die Verbindung zum Gauß-Algorithmus deutlich geworden ist.

Zur Definition 15.2 der speziellen Matrizen: Die Transponierte zu einer Matrix A, A^T erhält man, wenn man Zeilen und Spalten von A vertauscht:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m-1,1} & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m-1,2} & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{m-1,n} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Im Falle von quadratischen Matrizen kann man das auch als Spiegelung der Elemente an der Hauptdiagonalen der Matrix deuten.

Beispiel 129

- Wir transponieren unsere Telefonmatrix

$$A_{tel} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich:

$$A_{tel}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Wir transponieren eine nicht quadratische Matrix und zwar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Das Prinzip des Transponierens einer Matrix sollte jetzt klar sein! ■

Die Begriffe symmetrisch und schiefsymmetrisch erklären sich fast von selbst, eine symmetrische quadratische Matrix kann man an der Hauptdiagonale spiegeln und es kommt dieselbe Matrix raus, bei einer schiefsymmetrischen erhält man dann das Negative der ursprünglichen Matrix. Zu bemerken ist hier allerdings, dass bei einer schiefsymmetrischen Matrix immer $a_{ii} = 0$ gilt, für alle i, denn für die Elemente auf der Hauptdiagonalen gilt ja nach Definition $a_{ii} = -a_{ii}$, also müssen die Elemente alle Null sein.

Das Analogon im Komplexen ist die Adjungierte. Hier transponiert man nicht nur, sondern konjugiert auch noch jedes Element. Warum das gemacht wird, und wofür das gut ist, werdet ihr im zweiten Semester lernen.
Eine orthogonale Matrix ist nun eine Matrix, für die die Transponierte und die Inverse übereinstimmen. Es gibt noch weitere schöne Äquivalenzen für orthogonale Matrizen, auch das wird im zweiten Semester behandelt. Auch hier haben wir wieder ein komplexes Analogon, die unitären Matrizen, auch das kommt meistens erst im zweiten Semester.
Diese Matrizen werden im zweiten Semester eine große Rolle spielen, weshalb wir hier noch keine Sätze über sie beweisen wollen, sondern die Matrizen nur der Vollständigkeit halber erwähnt haben.

Zur Definition 15.3 von ähnlichen Matrizen: Ähnliche Matrizen werden beim Diagonalisieren (Kapitel 21) gebraucht, dort werden wir auch einen wichtigen Satz (siehe Satz 21.4) über sie beweisen. Vorerst solltet ihr euch nur merken, was die Definition besagt, wobei wichtig ist, dass $S \in Gl_n(K)$ gilt (klar, denn sonst könnte man ja S^{-1} gar nicht bilden).

15.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 15.1 über das Inverse des Produkts: Die Aussage dieses Satzes sollte euch bekannt vorkommen. Genau dieselbe Aussage haben wir schon in Kapitel 3 über Abbildungen getroffen, siehe Satz 3.1. Also scheinen Abbildungen und Matrizen etwas gemeinsam zu haben. Das dies tatsächlich so ist, werden wir im Kapitel 17 über lineare Abbildungen sehen.
Wir machen nur ein paar Anmerkungen: $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$ ist im Allgemeinen *falsch*. Dies könnt ihr euch an einfachen Beispielen mit (2×2)-Matrizen überlegen. Macht niemals diesen Fehler :-).

Beispiel 130
Die folgenden Matrizen seien gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann gilt einerseits:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$B^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

aber andererseits ist:

$$A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \neq (AB)^{-1}.$$

■

Anmerkung: Um eine (2×2)*-Matrix zu invertieren, gibt es eine einfache Formel und zwar lautet sie:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Wir werden in Kapitel 20 sehen, dass $ad - bc$ *eine besondere Bedeutung besitzt. Es ist die sogenannte Determinante der Matrix*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Was ebenso falsch ist, ist die Implikation $A, B \in Gl_n(K) \Rightarrow A + B \in Gl_n(K)$, das heißt, die Summe zweier invertierbarer Matrizen muss nicht wieder invertierbar sein. Dazu betrachten wir das folgende Gegenbeispiel:

Beispiel 131

Seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$A + B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Nullmatrix ist aber mit Sicherheit nicht invertierbar. ■

Zu den Sätzen 15.2 bis 15.3 über die algebraische Struktur der Matrizen: Das Wichtigste, was man sich bei diesen Sätzen merken sollte, sind die Eigenschaften, die Gruppen bzw. Ringe haben, das heißt, die Addition ist sowohl kommutativ als auch assoziativ und die Multiplikation ist assoziativ (aber nicht kommutativ, wie wir oben gesehen haben!).

Da der Beweis dieser Sätze analog zu denen in Kapitel 6 verläuft lassen wir ihn euch als Übung.

Zum Satz 15.4, dass jede invertierbare Matrix als Produkt von Elementarmatrizen dargestellt werden kann: Um Satz 15.4 zu verstehen, betrachten wir die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zunächst invertieren wir diese Matrix, wie wir es in den Erklärungen zur Definition 14.9 gelernt haben.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & | & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. Machen wir lieber einmal die Probe, ob wir uns nicht verrechnet haben:

$$BB^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

$$B^{-1}B = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

Die Probe stimmt also. Wir haben wirklich richtig gerechnet.

Da B invertierbar ist, behauptet der Satz 15.4, dass man diese Matrix als Produkt von Elementarmatrizen darstellen kann. Aber wie funktioniert das genau? Wir formen die Matrix B zunächst in Zeilenstufenform bzw. in Diagonalform um, und notieren uns die Umformungen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{(1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(2)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{(3)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{(4)}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(5)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(6)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(7)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche elementaren Zeilenoperationen wurden durchgeführt?

(1) Vertauschen der ersten mit der dritten Zeile.
(2) Multiplikation der ersten Zeile mit (-1) und Addieren zur zweiten Zeile.
(3) Addition der zweiten zur dritten Zeile.
(4) Multiplikation der dritten Zeile mit $1/2$.
(5) Multiplikation der dritten Zeile mit (-1) und Addieren zur zweiten Zeile.
(6) Addition der zweiten Zeile zur ersten Zeile.
(7) Multiplikation der zweiten Zeile mit (-1).

Nun müssen wir uns die Frage stellen, welche Elementarmatrizen den einzelnen Zeilenoperationen (1)-(7) entsprechen:

(1) Für „Vertauschen der ersten mit der dritten Zeile" lautet die Elementarmatrix P_1^3.
(2) Für „Multiplikation der ersten Zeile mit (-1) und Addieren zur zweiten Zeile" lautet die Elementarmatrix $Q_1^2(-1)$.
(3) Für „Addition der zweiten zur dritten Zeile" lautet die Elementarmatrix $Q_2^3(1)$.
(4) Für „Multiplikation der dritten Zeile mit $1/2$" lautet die Elementarmatrix $S_3(1/2)$.
(5) Für „Multiplikation der dritten Zeile mit (-1) und Addieren zur zweiten Zeile" lautet die Elementarmatrix $Q_3^2(-1)$.
(6) Für „Addition der zweiten Zeile zur ersten Zeile" lautet die Elementarmatrix $Q_2^1(1)$.
(7) Für „Multiplikation der zweite Zeile mit (-1)" lautet die Elementarmatrix $S_2(-1)$.

Satz 15.1 sagt, dass für zwei invertierbare Matrizen $A, B \in Gl_n(K)$ das Produkt AB wieder invertierbar ist und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ gilt. Mit Induktion zeigt man, dass

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1}.$$

Dies nutzen wir jetzt aus. Man kann die invertierbare Matrix B wie folgt als Produkt von Elementarmatrizen darstellen:

$$\begin{aligned} B &= \left(P_1^3 \cdot Q_1^2(-1) \cdot Q_2^3(1) \cdot S_3(1/2) \cdot Q_3^2(-1) \cdot Q_2^1(1) \cdot S_2(-1)\right)^{-1} \\ &= S_2(-1)^{-1} \cdot Q_2^1(1)^{-1} \cdot Q_3^2(-1)^{-1} \cdot S_3(1/2)^{-1} \cdot Q_2^3(1)^{-1} \cdot Q_1^2(-1)^{-1} \cdot (P_1^3)^{-1} \\ &= S_2(-1) \cdot Q_2^1(-1) \cdot Q_3^2(1) \cdot S_3(2) \cdot Q_2^3(-1) \cdot Q_1^2(1) \cdot P_3^1. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass jede Elementarmatrix invertierbar ist. Siehe dazu noch einmal Definition 15.1. Fertig.

Wir wollen uns jetzt einen etwas anderen Weg anschauen, der dieselben Methoden benutzt und ebenfalls zum Ziel führt. Sucht euch den aus, der euch mehr gefällt. Aber im Grunde tun beide dasselbe.

Wir formen Matrix B mittels elementarer Zeilenoperationen auf Einheitsmatrixgestalt um:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{P_1^2\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{Q_3^1(-1)\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{\cdot Q_1^3(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{Q_3^2(-1)\cdot}{\rightsquigarrow}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\cdot Q_3^2(-1)}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{S_3(-1/2)\cdot}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier bedeutet $\cdot A$ die Multiplikation einer Elementarmatrix A von rechts. Dies entspricht elementaren Spaltenoperationen und $A\cdot$ die Multiplikation einer Elementarmatrix A von links. Dies entspricht dann elementaren Zeilenoperationen. Es gilt demnach insgesamt:

$$\underbrace{S_3(-1/2) \cdot Q_3^2(-1) \cdot Q_3^1(-1) \cdot P_1^2}_{\text{Zeilenoperationen}} \cdot B \cdot \underbrace{Q_1^3(-1) \cdot Q_3^2(-1)}_{\text{Spaltenoperationen}} = E_3.$$

Also:

$$\begin{aligned} B &= (P_1^2)^{-1} \cdot (Q_3^1)^{-1} \cdot (Q_3^2(-1))^{-1} \cdot (S_3(-1/2))^{-1} \cdot E_3 \cdot (Q_3^2(-1))^{-1} \cdot (Q_1^3(-1))^{-1} \\ &= P_1^2 \cdot Q_3^1(1) \cdot Q_3^2(1) \cdot S_3(2) \cdot Q_3^2(1) \cdot Q_1^3(1). \end{aligned}$$

Um B zu invertieren, müssen wir also das Folgende berechnen:

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \left(P_1^2 \cdot Q_3^1(1) \cdot Q_3^2(1) \cdot S_3(2) \cdot Q_3^2(1) \cdot Q_1^3(1)\right)^{-1} \\ &= Q_1^3(-1) \cdot Q_3^2(-1) \cdot S_3(1/2) \cdot Q_3^2(-1) \cdot Q_3^1(-1) \cdot P_1^2 \end{aligned}$$

Jetzt überlegen wir uns, wie die Elementarmatrizen aussehen:

$$\begin{aligned}\ldots = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = &\underbrace{\ldots}_{\text{Rechnen :-)}} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

16 Vektorräume

Übersicht

In diesem Kapitel machen wir uns mit einer der wichtigsten algebraischen Strukturen der linearen Algebra vertraut, dem Vektorraum. Aus der Schule kennt man Vektoren meist als Pfeile im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$, die von einem anderen Punkt ausgehen und an einem bestimmten Punkt enden. Von dieser Vorstellung müsst ihr euch jetzt unbedingt lösen, denn wie ihr feststellen werdet, sind Vektoren viel mehr als nur Pfeile.

16.1 Definitionen

Definition 16.1 (Vektorraum, Vektoren)
Sei K ein Körper. Eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : V \times V \to V, (a,b) \mapsto a+b \qquad \text{und} \qquad \cdot : K \times V \to V, (\lambda, b) \mapsto \lambda \cdot b$$

heißt K**-Vektorraum**, wenn gilt:

(V1) Die Verknüpfung $+$ ist assoziativ, das heißt:

$$(x+y)+z = x+(y+z) \ \forall x,y,z \in V.$$

(V2) Die Verknüpfung $+$ ist kommutativ, das heißt: $x+y = y+x \ \forall x,y \in V$.

(V3) Es gibt ein neutrales Element bezüglich $+$, genannt 0_V (Nullvektor), das heißt:

$$0_V + v = v + 0_V = v \ \forall v \in V.$$

(V4) Jedes Element $v \in V$ besitzt ein inverses Element bezüglich $+$, geschrieben $-v$, das heißt: $v + (-v) = -v + v = 0 \; \forall v \in V$.

(V5) Die Verknüpfung $\cdot$ ist assoziativ, das heißt: $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v \; \forall \lambda, \mu \in K \; \forall v \in V$.

(V6) Es gibt ein neutrales Element bezüglich $\cdot$, genannt 1_V, das heißt: $1 \cdot v = v \; \forall v \in V$. Achtung: $1_V \in K$!

(V7) Es gilt das Distributivgesetz: $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \; \forall \lambda \in K, \; \forall v, w \in V$.

Die Elemente $v \in V$ nennen wir nun **Vektoren**. Die Verknüpfung $+$ heißt **Vektoraddition** und $\cdot$ heißt **Skalarmultiplikation**.

Anmerkung: Den Punkt für die Skalarmultiplikation lässt man meistens weg. Wir werden das im Folgenden auch tun.

Definition 16.2 (Untervektorraum)
Wir nennen eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ **Untervektorraum**, falls gilt

1. $0_V \in U$.
2. $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$ (Abgeschlossenheit bzgl. $+$).
3. $u \in U, \lambda \in K \Rightarrow \lambda u \in V$ (Abgeschlossenheit bzgl. Skalarmultiplikation $\cdot$).

Definition 16.3 (Linearkombination)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $v_1, ..., v_k \in V$. Wir sagen ein Vektor $v \in V$ lässt sich als **Linearkombination** von $v_1, ..., v_k$ schreiben, wenn es $\lambda_i \in K, i = 1, \ldots, k, k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i.$$

Definition 16.4 (Span, Erzeugnis)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $v_1, ..., v_k \in V$. Dann setzen wir:

$$\langle v_1, ..., v_k \rangle := \operatorname{span}(v_1, ..., v_k) := \left\{ v \in V : v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in K \right\}.$$

Wir nennen nun $\langle v_1, ..., v_k \rangle = \operatorname{span}(v_1, ..., v_k)$ das **Erzeugnis** oder auch den **Span** von $v_1, ..., v_k$. Ab und zu nennt man dies auch die **lineare Hülle**.

Definition 16.5 (Linear unabhängige Vektoren)
Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, $v_1, ..., v_k \in V$. Wir nennen das System $(v_1, ..., v_k)$ **linear unabhängig**, wenn gilt:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i.$$

Andernfalls heißt $(v_1, ..., v_k)$ **linear abhängig**.

Anmerkung: Der Nullvektor ist immer linear abhängig.

Definition 16.6 (Erzeugendensystem)
Ist I eine (Index-)Menge, V ein Vektorraum, so nennen wir das System $(v_i)_{i \in I}$ **Erzeugendensystem** von V, wenn es für alle $v \in V$ $\lambda_i \in K, i \in I$ gibt mit

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i.$$

Oder anders ausgedrückt: $V = \operatorname{span}(v_i) \ \forall i$.
Gibt es solch ein I mit $|I| < \infty$, so nennen wir V **endlich erzeugt**.

Definition 16.7 (Basis)
Ein System von Vektoren $\mathcal{B} \subset V$ eines Vektorraums V heißt **Basis** von V genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(B1) $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.

(B2) $\mathcal{B}$ ist ein Erzeugendensystem.

Definition 16.8 (Dimension)
Für einen K-Vektorraum V definieren wir die **Dimension** als $\dim_K V := n$, wenn V eine Basis mit n Elementen besitzt und $\dim_K V := \infty$, falls V keine endliche Basis besitzt.

16.2 Sätze und Beweise

Satz 16.1 (Äquivalenzen zur Basiseigenschaft)
Für ein endliches System $\mathcal{B} = (v_i)$ von Vektoren sind äquivalent:

1. *$\mathcal{B}$ ist Basis.*
2. *$\mathcal{B}$ ist unverkürzbares Erzeugendensystem, das heißt, für jedes $r \in \{1, ..., n\}$ ist $(v_1, ..., v_{r-1}, v_{r+1}, ..., v_n)$ kein Erzeugendensystem.*

3. *Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$ darstellen.*

4. *$\mathcal{B}$ ist unverlängerbar linear unabhängig, das heißt, für jedes $v \in V$ ist $(v_1, ..., v_n, v)$ nicht linear unabhängig.*

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$: Widerspruchsbeweis: Angenommen, $\mathcal{B}$ ist verkürzbar (o.B.d.A $r = 1$). Dann gilt:

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \Rightarrow \left(\sum_{i=2}^{n} \lambda_i v_i \right) - v_1 = 0 \; ↯ \; .$$

$2 \Rightarrow 3$: Angenommen, die Eindeutigkeit gilt nicht. Dann gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$ und o.B.d.A $\lambda_1 \neq \mu_1$. Dann gilt aber auch:

$$v_1 = \sum_{i=2}^{n} \frac{\mu_i - \lambda_i}{\lambda_1 - \mu_1} v_i,$$

also ist $\mathcal{B}$ verkürzbar ↯.

$3 \Rightarrow 4$: Zunächst ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig, denn sonst hätte der Nullvektor mehrere Darstellungen. Angenommen, $\mathcal{B}$ ist verlängerbar, das heißt, es existiert ein $\tilde{v} \neq 0$ mit:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \tilde{\lambda} \tilde{v} = 0 \Rightarrow \lambda_i = \tilde{\lambda} = 0 \; .$$

Da außerdem $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$, nicht alle $\mu_i = 0$, gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) v_i = 0 \; ↯.$$

$4 \Rightarrow 1$: Sei $v \in V$. Dann gibt es λ_i, λ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \lambda v = 0,$$

wobei mindestens ein Faktor ungleich 0 ist. Sei o.B.d.A. $\lambda \neq 0$, dann folgt $v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} v_i$, also ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem. q.e.d.

Satz 16.2 (Basisauswahlsatz)
Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum und $(v_1, ..., v_p)$ ein endliches Erzeugendensystem. Dann können wir aus diesen Vektoren endlich viele auswählen, sodass das System $(v_{k_1}, ..., v_{k_n})$ eine Basis ist mit $k_i \in \{1, ..., p\}$.

Beweis: Man nehme aus dem Erzeugendensystem so viele Vektoren weg, bis es unverkürzbar ist. q.e.d.

Satz 16.3 (Basis endlich erzeugter Vektorräume)
Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, dann hat V eine Basis.

Beweis: Dies folgt direkt aus dem Basisauswahlsatz (Satz 16.2). q.e.d.

Satz 16.4 (Existenz einer Basis)
Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Satz 16.5 (Austauschlemma)
Sind V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine endliche Basis von V und $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ mit $\lambda_k \neq 0, 1 \leq k \leq n$, dann ist $\mathcal{B}$'$= (v_1, ..., v_{k-1}, v, v_{k+1}, ..., v_n)$ auch eine Basis von V.

Beweis: O.B.d.A sei $k = 1$. Zunächst gilt $v_1 = \frac{1}{\lambda_1} v - \sum_{i=2}^n \frac{v_i}{\lambda_1}$.
Gilt $w = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$, so ist $w = \frac{\mu_1}{\lambda_1} v - \sum_{i=2}^n \left(\mu_i - \frac{\mu_1 \lambda_i}{\lambda_1}\right) v_i$, also ist $\mathcal{B}$' Erzeugendensystem.
Gilt $0 = \mu v + \sum_{i=2}^n \mu_i v_i$, so folgt:

$$0 = \mu\lambda_1 v_1 + \sum i = 2^n (\mu\lambda_i + \mu_i) v_i$$

und damit wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren von $\mathcal{B}$ sofort $0 = \mu\lambda_1 = \mu\lambda_i + \mu_i, i \in \{2, ..., n\}$. Aus $\lambda_1 \neq 0$ folgt also $\mu = \mu_i = 0$ mit $i \in \{2, ..., n\}$, und damit ist $\mathcal{B}$ linear unabhängig, also eine Basis. q.e.d.

Satz 16.6 (Austauschsatz)
Seien V ein Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine endliche Basis und $(w_1, ..., w_r)$ linear unabhängig, dann gilt:

1. $r \leq n$

2. Man kann r Vektoren aus $\mathcal{B}$ durch $w_1, ..., w_r$ austauschen, sodass man wieder eine Basis erhält.

Beweis:

1. Dies folgt direkt aus Satz 16.1.

2. Seien die Vektoren, die man austauschen kann (falls der Satz gilt!) o.B.d.A die Vektoren $v_1, ..., v_r$.

Wir führen eine Induktion über n. Für $n = 0$ ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, der Satz sei für $n-1$ bewiesen. Dann ist $(w_1, ..., w_{r-1}, v_r, ..., v_n)$ eine Basis von V. Der Rest folgt nun aus dem Austauschlemma (Satz 16.5). q.e.d.

Satz 16.7 (Basisergänzungssatz)
Seien V ein endlich erzeugter Vektorraum und $v_1, ..., v_r \in V$ linear unabhängig, dann gibt es Vektoren $v_{r+1}, ..., v_r$, sodass $(v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n)$ eine Basis von V ist.

Beweis: Sei $(w_1, ..., w_m)$ ein Erzeugendensystem von V, dann können wir wegen des Basisauswahlsatzes (Satz 16.2) daraus eine Basis auswählen. Die Aussage folgt nun aus dem Austauschsatz (Satz 16.6). q.e.d.

Satz 16.8 (Wohldefiniertheit der Dimension)
Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum und sind $(v_1, ..., v_n)$ sowie $(w_1, ..., w_m)$ zwei Basen von V, so gilt $m = n$, das heißt, die Dimension ist wohldefiniert.

Beweis: Dies erhält man durch zweimalige Anwendung des Austauschsatzes (Satz 16.6). q.e.d.

Satz 16.9 (Eigenschaften von Untervektorräumen)
Seien V ein Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum, dann gilt:

1. *V endlich erzeugt $\Rightarrow U$ endlich erzeugt.*
2. $\dim(V) \geq \dim(U)$.
3. $\dim(V) = \dim(U) \Leftrightarrow V = U$.

Beweis:

1. Trivial.
2. Dies folgt aus der Definition eines Untervektorraums (siehe Satz 16.2).
3. „$\Rightarrow$“: Sei $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis von U, dann folgt aus dem Austauschsatz (Satz 16.6), dass $(u_1, ..., u_n)$ auch eine Basis von V ist. Für $v \in V$ gilt also $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, also $V \subset U \Rightarrow U = V$.

   „$\Leftarrow$“: Seien $(u_1, ..., u_m)$ eine Basis von U und $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V, dann gilt $m \leq n$. Aus dem Austauschsatz (Satz 16.6) folgt, dass nach geeigneter Nummerierung $(u_1, ..., u_m, v_{m+1}, ..., v_n)$ eine Basis von V ist. Da $U = V$ ist, gilt außerdem $v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$. Falls also $n > m$ gilt, so ist $(u_1, ..., u_m, v_{m+1}, ..., v_n)$ linear abhängig $\lightning$. q.e.d.

16.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 16.1 von Vektorraum und Vektoren: Bevor wir uns mit den Vektorraumeigenschaften näher vertraut machen, wollen wir zuerst einmal über unser neues Verständnis von Vektoren nachdenken. Vektoren sind also Elemente in einem Vektorraum. Wie wir gleich noch sehen werden, gibt es sehr viele verschiedene Beispiele für Vektorräume, zum Beispiel den $\mathbb{R}^n$, den Raum der $(m \times n)$-Matrizen oder auch den Raum aller reellen Funktionen (siehe Beispiel 132). Wenn wir nun den $\mathbb{R}^2$ oder den $\mathbb{R}^3$ betrachten, so sind die Vektoren unsere altbekannten „Pfeile" aus der Schule. Wenn wir jetzt allerdings den Vektorraum aller reellen Funktionen betrachten, dann sind auf einmal Funktionen Vektoren. Das klingt doch zunächst einmal verwunderlich. Aber auch für Funktionen gelten die schönen Rechenregeln $(V1)$-$(V7)$, was ihr euch auf jeden Fall einmal in einer ruhigen Minute überlegen solltet.
Und damit kommen wir auch schon zu Vektorräumen. Was bedeuten denn nun diese Eigenschaften? Vereinfacht ausgedrückt bedeutet das nur, dass man mit Elementen des Vektorraums (also Vektoren) besonders schön rechnen kann, dass also ähnliche Regeln gelten wie in Körpern. Insbesondere ist hier anzumerken, dass Vektorräume immer „abgeschlossen" sind. Was bedeutet denn das nun wieder? Das heißt: Wenn man zwei Vektoren aus einem Vektorraum hat und die zugehörige Verknüpfung (also $+$) auf diese Vektoren anwendet, so ist das Ergebnis wieder ein Vektor im selben Vektorraum. Dies galt für unsere „Pfeilchenvektoren" aus der Schule natürlich auch, denn wenn man zwei Pfeile addiert, so erhält man wieder einen Pfeil. Aber auch für Funktionen gilt diese Regel natürlich, sie bilden also einen Vektorraum.
Aber alles Gerede bringt wenig, wenn man nicht ein paar Beispiele betrachtet.

Beispiel 132

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum. Allgemeiner: Ist K ein Körper, so ist für alle $n \in \mathbb{N}$ K^n ein Vektorraum. Diesen nennen wir den *Standardvektorraum* der Dimension n über K.
- Die Menge aller reellen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum.
- Die $(n \times n)$-Matrizen bilden einen Vektorraum.
- Die Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$ bilden einen Vektorraum, das heißt alle Funktionen der Form
$$f(x) := a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in \mathbb{R}.$$
Diesen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\mathbb{Z}^n$ kein Vektorraum ist, denn $\mathbb{Z}$ ist kein Körper (siehe auch das Beispiel 48 aus Kapitel 6). ■

Wir sehen also, dass es viele verschiedene Beispiele für Vektorräume und damit auch viele verschiedene Beispiele für Vektoren gibt.
Wie aber weist man nun exakt nach, dass etwas wirklich ein Vektorraum ist? Dies wollen wir am Beispiel der $(n \times n)$-Matrizen kurz vorführen. Wir müssen also die $(n \times n)$-Matrizen auf die sieben Vektorraumeigenschaften aus Definition 16.1 überprüfen. Dabei verwenden wir die bekannte Matrizenaddition und die skalare Multiplikation.
Die Assoziativität von $+$ und $\cdot$ und Kommutativität von $+$ folgen sofort aus den Rechenregeln, ebenso das Distributivgesetz. Das Nullelement ist die Nullmatrix. Das Inverse einer Matrix $A = (a_{ij})$ bzgl. der Addition ist die Matrix $-A = (-a_{ij})$. Also bilden die $(n \times n)$-Matrizen tatsächlich einen Vektorraum.

Zur Definition 16.2 des Untervektorraums: Ein Untervektorraum ist einfach eine nichtleere Teilmenge eines Vektorraums, die abgeschlossen ist. Das heißt, wenn zwei Vektoren in einem Untervektorraum sind, dann auch deren Summe und das Vielfache jedes der Vektoren. Jeder Untervektorraum ist mit der Verknüpfung des Vektorraums, von dem er Untervektorraum ist, wieder ein Vektorraum. Betrachten wir hierzu ein Beispiel.

Beispiel 133

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ (vergleiche Beispiel 132), und für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ sei $U := \{f \in \mathbb{R}[x]_{<n} : f(x_0) = 0\}$. Wir behaupten: U ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$. Zunächst einmal gilt natürlich $U \neq \emptyset$, denn das Nullpolynom $f(x) = 0$ ist in U enthalten, denn dort ist der Funktionswert ja an jeder Stelle Null, egal, was wir einsetzen. Seien jetzt $f, g \in U$. Dann gilt also $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und damit auch $(f+g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0 + 0 = 0$, also $f + g \in U$ und $\lambda f(x_0) = \lambda \cdot 0 = 0$ und damit $\lambda f \in U$. Also ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$. ■

Zur Definition 16.3 der Linearkombination: Für diese Definition beschränken wir uns auf ein Beispiel:

Beispiel 134

Seien $v_1 = (1,2,3)^T$ und $v_2 = (1,1,1)^T$ gegeben. Jetzt lässt sich zum Beispiel der Vektor $v = (1,1,1)^T$ als Linearkombination von v_1 und v_2 schreiben, denn $v = v_2$, also $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$. Auch $w = (2,3,4)^T$ ist die Linearkombination von v_1 und v_2. Der Vektor $(1,0,1)^T$ jedoch nicht. Man rechnet dieses ganz leicht aus, indem man das entsprechende Gleichungssystem aufstellt und auf Lösbarkeit untersucht. In unserem Beispiel hatten wir also einerseits

$$(1,1,1)^T = \lambda_1(1,2,3)^T + \lambda_2(1,1,1)^T$$

und anderseits

$$(1,0,1)^T = \lambda_1(1,2,3)^T + \lambda_2(1,1,1)^T$$

zu lösen. Dies liefert einerseits

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und anderseits

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Lösen dieses Gleichungssystems überlassen wir euch als einfache Übungsaufgabe. ■

Zur Definition 16.4 des Spans/Erzeugnisses: Zu dieser Definition ist nicht viel zu sagen, denn der Span ist einfach die Menge aller möglichen Linearkombinationen. Man nennt den Span auch gerne *lineare Hülle*.

Beispiel 135

Wir betrachten die folgenden drei Teilmengen des $\mathbb{R}^4$ und fragen uns, welche dieselbe lineare Hülle, also denselben Span besitzen:

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(1,1,2,-2)^T, (-2,-2,5,6)^T, (2,2,4,-5)^T\right\}, \\ S_2 &= \left\{(3,3,-1,-2)^T, (2,2,1,-2)^T, (2,2,-1,-1)^T\right\}, \\ S_3 &= \left\{(1,2,2,-2)^T, (-2,-4,-5,6)^T, (2,4,4,-5)^T\right\}. \end{aligned}$$

Die Matrix A_i enthalte die Vektoren aus S_i in den Zeilen (mit $i = 1,2,3$), etwa

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Für die invertierbare Matrix

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 10 \\ 0 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

gilt $X \cdot A_1 = A_2$, wie man leicht nachrechnet. Daraus folgt aber $S_2 \subset \operatorname{span}(S_1)$, und somit $\operatorname{span}(S_2) \subset \operatorname{span}(S_1)$. Symmetrisch hierzu erhalten wir aus $A_1 = X^{-1} \cdot A_2$ die Beziehung $\operatorname{span}(S_1) \subset \operatorname{span}(S_2)$. Damit stimmen die linearen Hüllen von S_1 und S_2 überein.

Da es aber keine reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -5 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

gilt $(1, 2, 2, -2)^T \notin \text{span}(S_1)$ und die linearen Hüllen von S_1 und S_3 sind verschieden. ■

Zur Definition 16.5 der linearen Unabhängigkeit: Will man durch eine Linearkombination (denn nichts anderes ist $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ ja) den Nullvektor erzeugen, so geht das, wenn $(v_1, ..., v_k)$ linear unabhängig ist, nur auf eine Weise, nämlich wenn alle Koeffizienten λ_i Null sind. Dass dieses auf die Weise immer geht, sollte man sich klar machen. Aber wenn $(v_1, ..., v_k)$ linear unabhängig ist, geht es eben *nur* auf diese Weise. Dies ist eine übliche Fehlerquelle. Eine solche Linearkombination für die 0, also mit $\lambda_i = 0 \ \forall \ i$ nennt man *trivial.*
Betrachten wir hierzu zwei Beispiele.

Beispiel 136

- Für einen beliebigen Körper K betrachten wir den Standardvektorraum K^n und die n Einheitsvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \ldots \qquad v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

  wobei die 1 jeweils an der i-ten Stelle von v_i steht. Wie man leicht sieht, sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

- Wir betrachten den Vektorraum der Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$, also $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ und die Monome, also

$$v_1 = 1, v_2 = x, v_2 = x^2, \ldots, v_n = x^n.$$

  Wir behaupten, dass diese linear unabhängig sind. Wie prüft man sowas nun nach? Bilden wir eine Linearkombination zur 0, also

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i v_i = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i x^i, \text{ mit } \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

  Wir müssen nun $\lambda_i = 0 \ \forall i$ zeigen. Schreiben wir die Summe einmal zum besseren Verständnis aus, so erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_i x^i = \lambda_n x^n + \lambda_{n-1} x^{n-1} + \lambda_{n-2} x^{n-2} \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0,$$

also ein Polynom. Dieses soll nun identisch 0 (genauer identisch dem Nullpolynom) für alle x sein, und das gilt natürlich dann und nur dann, wenn $\lambda_i = 0\ \forall i$. Also haben wir gezeigt, dass die Monome linear unabhängig sind. ■

Zur Definition 16.6 des Erzeugendensystems: Lässt sich jedes Element eines Vektorraums V als Linearkombination von Vektoren darstellen, so nennt man diese Vektoren nun ein Erzeugendensystem. Beispiele für Erzeugendensysteme werden wir gleich bei der Erklärung zum Basisbegriff sehen.

Zur Definition 16.7 der Basis: Die Basis eines Vektorraums ist eine angenehme Menge aus Vektoren, also aus Elementen des Vektorraums. Denn man kann zum Beispiel beweisen, dass sich jeder Vektor $v \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombination von Vektoren aus der Basis darstellen lässt. Das Wichtigste ist aber, dass sich wirklich *jeder* Vektor mithilfe der Basiselemente *eindeutig* erzeugen und darstellen lässt. Es kann uns also nicht passieren, dass es einen Vektor aus dem Vektorraum gibt, den wir nicht mittels dieser Basisvektoren erzeugen können. Erzeugen heißt dabei als Linearkombination darzustellen.
Eine Basis ist eine Menge von Vektoren (seien es nun Vektoren im herkömmlichen Sinne, Funktionen, Matrizen oder ähnliches - wir kommen in den Beispielen nochmals darauf zurück), mit denen ihr jeden Vektor aus dem Vektorraum erzeugen könnt. Das ist Eigenschaft (B2) aus Definition 16.7. Dies würde aber schon ein Erzeugendensystem eines Vektorraums leisten.
Eine Basis hat aber noch eine weitere Eigenschaft: Alle Vektoren aus der Basis sind linear unabhängig, das ist gerade (B1) der Definition 16.7. Wenn euch auf eurem Übungsblatt also einmal die Aufgabe begegnen sollte, und das wird es bestimmt, dass ihr untersuchen sollt, ob eine gegebene Menge an Vektoren eine Basis eines bestimmten Vektorraums bildet, dann müsst ihr immer zwei Dinge tun:

1. Zunächst zeigt ihr, dass die Vektoren linear unabhängig sind und
2. dass man jeden beliebigen Vektor mittels der Basiselemente als Linearkombination darstellen kann.

Wie das im Detail funktioniert, schauen wir uns gleich an. Es ist nun aber höchste Zeit für die ersten Beispiele einer Basis.

Beispiel 137

- Der Standardvektorraum K^n besitzt die Basis $(e_1, e_2, ..., e_n)$, wobei e_i die Standardvektoren
$$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$$
bezeichnen, bei denen an der i-ten Stelle eine 1 und sonst nur Nullen stehen und alle Vektoren genau n Einträge besitzen.

- Wem das obige Beispiel zu schwer ist, stelle sich einfach den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ vor. Hier ist also $K = \mathbb{R}$ und $n = 3$. Der Vektorraum besteht also aus allen Vektoren, die drei Komponenteneinträge besitzen, also beispielsweise aus dem Vektor $v = (1, 1, 7)^T$. Eine Basis zu finden, ist hier sehr leicht. Die Basis besteht gerade aus den drei Standardvektoren $e_1 = (1, 0, 0)^T$, $e_2 = (0, 1, 0)^T$ und $e_3 = (0, 0, 1)^T$. Dies müssen wir nun aber noch nachweisen: Man sieht sofort, dass die Vektoren e_1, e_2, e_3 linear unabhängig sind. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass sich ein beliebiger Vektor $(a, b, c)^T$ als Linearkombination der Basiselemente darstellen lässt. Hierbei seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig. Dies sieht man so:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Also bilden die drei Standardvektoren tatsächlich eine Basis. Die Dimension eines Vektorraums ist gerade die Anzahl der Basiselemente, in diesem Fall gilt also $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Genau aus diesem Grund steht auch die 3 als Exponent an dem $\mathbb{R}$. An dieser Stelle möchten wir noch anmerken, dass ein Vektorraum im Allgemeinen unendlich viele Basen besitzt. Denn auch mit der Basis B' aus den Vektoren $v_1 = (2, 0, 0)^T, v_2 = (0, 3, 0)^T$ und $v_3 = (0, 0, 17)^T$ kann man jeden beliebigen Vektor $(a, b, c)^T$ durch

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{a}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{b}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{c}{17} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$

  erzeugen. Und die Menge der Vektoren (v_1, v_2, v_3) ist ebenfalls linear unabhängig. Wir können also keinesfalls von *der* Basis eines Vektorraums sprechen, es gibt unendlich viele, denn jeden Vektor können wir ja auch beliebig vervielfachen, das heißt mit einem Skalar multiplizieren.

- Als nächstes Beispiel betrachten wir den Vektorraum V aller Polynomfunktionen vom Grad $\leq n$, das heißt, die Elemente dieses Vektorraums sind nun Polynome und haben die Form $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$. Beispielsweise liegt das Polynom $f(x) = x^2 + 2x + 3$ in diesem Vektorraum für $n \geq 2$. Mit etwas Erfahrung springt einem eine Basis des Vektorraums V sofort ins Auge: Wir nehmen einfach alle Monome, das heißt die Menge

$$\mathcal{B}_V := \{1, x, x^2, ..., x^n\}.$$

  Im Abschnitt über die lineare Unabhängigkeit von Vektoren hatten wir gezeigt (siehe Beispiel 136), dass diese Vektoren linear unabhängig sind.

Wir müssen uns also nur noch überlegen, wieso man wirklich *jede* Polynomfunktion als Linearkombination der Basiselemente aus $\mathcal{B}_V$ erzeugen kann. Hier gehen wir genauso vor, wie wir dies im obigen Beispiel getan haben. Ein kleiner Unterschied, der etwas Abstraktionsvermögen erfordert, ist nun, dass wir keinen Vektor im „herkömmlichen“ Sinne haben, sondern eine Polynomfunktion. Nehmen wir uns also eine beliebige Polynomfunktion $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x + a_0$, dann steht es doch schon da! Denn die Polynomfunktionen sind doch gerade so gebaut, dass sie Linearkombinationen der Monome sind. Wir sind fertig und haben gezeigt, dass $\mathcal{B}_V$ eine Basis von V ist, wobei jetzt $\dim(V) = n+1$ ist, denn $\mathcal{B}_V$ besitzt $n+1$ Elemente. ■

Zum Abschluss unserer Untersuchungen zur Basis möchten wir noch exemplarisch an verschiedenen Beispielen aufzeigen, wie man gegebene Vektoren eines Vektorraums auf Basiseigenschaft untersucht.

Beispiel 138

- Bilden die Vektoren $v_1 := (0,2,1)^T$, $v_2 := (1,2,0)^T$ und $v_3 = (2,0,1)^T$ eine Basis des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$? Wir prüfen auf lineare Unabhängigkeit. Zeigen also, dass sich der Nullvektor mithilfe dieser Vektoren nur mithilfe der trivialen Lösung darstellen lässt. Dazu seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Überführen in Matrixschreibweise und Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Dies ergibt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Aus Dimensionsgründen bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3 also eine Basis.

- Im Beispiel 132 für Vektorräume hatten wir schon gesehen, dass es sehr viele unterschiedliche Vektorräume gibt. Es wäre doch jetzt langweilig, immer diesen Standardvektorraum $\mathbb{R}^3$ zu betrachten. Deshalb hier mal etwas anderes: Wir betrachten den Vektorraum aller (2×2)-Matrizen über $\mathbb{R}$, den wir mit $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ bezeichnen. Bilden die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; C := \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}, \; D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $M_{2,2}(\mathbb{R})$? Dies sieht schon netter aus, oder? Wie überprüfen wir nun aber vier Matrizen auf lineare Unabhängigkeit? Das Schöne an der Mathematik ist, dass alle Definitionen sehr allgemein gehalten sind. Erinnern wir uns an die Definition der linearen Unabhängigkeit von Vektoren, so ist dort nur von Vektoren als Elemente eines Vektorraums die Rede. Daher müssen wir zeigen, dass die Nullmatrix nur mit Hilfe der trivialen Lösung erzeugt werden kann. Genauer bedeutet das:

$$\lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot B + \lambda_3 \cdot C + \lambda_4 \cdot D = 0,$$

wobei wir mit 0 natürlich die Nullmatrix meinen.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix} + \lambda_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die linke Seite können wir mittels Matrizenrechnung zu

$$\begin{pmatrix} 3\lambda_1 + \lambda_4 & 6\lambda_1 - \lambda_2 - 8\lambda_3 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 - 12\lambda_3 - \lambda_4 & -6\lambda_1 - 4\lambda_3 + 2\lambda_4 \end{pmatrix}$$

ausrechnen. Jeder Eintrag dieser Matrix muss nun Null werden. Dies liefert ein lineares Gleichungssystem mit vier Unbekannten und vier Gleichungen. Wir überführen dies in Matrixschreibeweise und lösen mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & -12 & -1 \\ -6 & 0 & -4 & 12 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -12 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -38 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Damit folgt die lineare Unabhängigkeit. Die obigen vier Matrizen bilden daher tatsächlich eine Basis des Vektorraums $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$.

Anmerkung: Allgemein gilt: $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$.

- Und noch ein letztes Beispiel in unserem Lieblingsvektorraum, dem Vektorraum aller Polynomfunktionen, dieses Mal vom Grad ≤ 2. Der Vektorraum besitzt also Dimension drei, denn eine Basis besteht aus den Monomen $1, x, x^2$. Wir betrachten die drei Polynome $f_1 := 1 - 3x + 2x^2$,

$f_2 := 1 + x + 4x^2$ und $f_3 := 1 - 7x$. Sind diese linear unabhängig? Wir bestimmen wieder $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2 + \lambda_3 \cdot f_3 = 0$, wobei wir mit 0 das Nullpolynom meinen.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot (1 - 3x + 2x^2) + \lambda_2 \cdot (1 + x + 4x^2) + \lambda_3 \cdot (1 - 7x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 - 3\lambda_1 x + 2\lambda_1 x^2 + \lambda_2 + \lambda_2 x + 4\lambda_2 x^2 + \lambda_3 - 7\lambda_3 x &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 - \lambda_1 + 4\lambda_2)x^2 + (-3\lambda_1 + \lambda_2 - 7\lambda_3)x + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) &= 0 \end{aligned}$$

Dies führt uns wieder auf ein Gleichungssystem mit $2 - \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$, $-3\lambda_1 + \lambda_2 - 7\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Wir überführen es wieder wie gewohnt in Matrixschreibweise und wenden den Gauß-Algorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 14 & -14 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ups! Was ist jetzt passiert? Die Nullzeile verrät uns, dass die Vektoren, sprich die Polynomfunktionen, linear abhängig sind, da der Nullvektor immer linear abhängig ist. Daher bildet (f_1, f_2, f_3) keine Basis des Vektorraums der Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich 2. ■

Zur Definition 16.8 der Dimension: Haben wir nun eine Basis gegeben, so definieren wir die Dimension des Vektorraums einfach als die Anzahl der Basiselemente, falls diese endlich ist. Andernfalls ist die Dimension als ∞ definiert. Dass diese Größe überhaupt wohldefiniert ist, zeigt uns Satz 16.8.

16.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 16.1 über die Äquivalenzen zur Basiseigenschaft: Die Eigenschaft 4 von Satz 16.1 bedeutet, dass die Basis so mit sich zufrieden ist, wie sie ist. Das heißt, fügen wir einen weiteren Vektor hinzu, so wird das neue System mit $n+1$ automatisch linear abhängig und ist nicht mehr linear unabhängig, wie wir dies aber von einer Basis fordern. Die Eigenschaft 2 sagt aus, dass jeder Vektor gebraucht wird! Lassen wir auch nur einen Vektor aus der Basis weg, so bildet dieses neue System an $n - 1$ Vektoren kein Erzeugendensystem mehr, das heißt, es gibt Vektoren aus dem Vektorraum V, die sich nicht mehr erzeugen lassen.
Kurz gesagt: Lasst die Basis erst einmal so, wie sie ist. Mischt euch da nicht ein, das könnte sich rächen :-).
Schauen wir uns dazu ein paar Beispiele an.

Beispiel 139

- Sei $V = \mathbb{R}^2$. Die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}7\\9\end{pmatrix}$$

  bilden keine Basis von V. Wir brauchen uns gar nicht die Mühe machen und zum Beispiel zeigen, dass die Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ nicht linear unabhängig sind. Jemand möchte uns hier drei Vektoren als Basis eines Vektorraums der Dimension 2 unterjubeln. Darauf fallen wir aber natürlich nicht rein, denn eine Basis ist, wie wir eben gesehen haben, maximal linear unabhängig. Ein zusätzlich dritter Vektor zerstört die lineare Unabhängigkeit.

- Die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\7\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$$

  bilden keine Basis des Vektorraums $V = \mathbb{R}^3$, denn wir wissen, dass eine Basis ein minimales Erzeugendensystem ist, und dass $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Uns fehlt also ein Vektor. ■

Dennoch ist noch nicht alles verloren, wenn wir zu viele Vektoren oder zu wenige Vektoren haben. Dies sagen uns die Sätze 16.2 und 16.3, die wir jetzt erklären.

Zum Basisauswahlsatz (Satz 16.2): Der Beweis dieses Satzes ist einfach: In dem Erzeugendensystem sind endlich viele Vektoren, also kann man einfach so lange Vektoren wegnehmen, bis das Erzeugendensystem unverkürzbar ist und nach Satz 16.1 haben wir dann eine Basis gefunden.
Diese Aussage vollziehen wir an einem Beispiel nach:

Beispiel 140

Im Beispiel 139, erster Unterpunkt, waren die Vektoren $v_1 := (1,7)^T, v_2 := (3,1)^T$,
$v_3 := (7,9)^T$ gegeben. Wir können versuchen, aus diesen drei Vektoren zwei Vektoren auszuwählen, die eine Basis von $V = \mathbb{R}^2$ bilden. Wir wenden also den Basisauswahlsatz an! Versuchen wir es gleich mit den beiden ersten v_1 und v_2. Wir müssen überprüfen, ob diese Vektoren linear unabhängig sind. Dies sieht man aber hier sofort auf einem Blick, denn der eine Vektor ist kein Vielfaches des anderen. Aus Dimensionsgründen müssen diese beiden Vektoren schon eine Basis von V bilden, denn es ist ja $\dim \mathbb{R}^2 = 2$. ■

Daher *müssen* zwei linear unabhängige Vektoren schon eine Basis sein. Dies ist übrigens ein kleiner *Geheimtipp:* Überprüft ein System von Vektoren zunächst auf lineare Unabhängigkeit und überlegt euch dann die Dimension des

Vektorraums. Wenn ein Vektorraum die Dimension n besitzt und ihr n linear unabhängige Vektoren gegeben habt, dann seid ihr fertig und müsst nicht noch zeigen, dass diese n Vektoren auch ein Erzeugendensystem bilden, dass sich also jeder Vektor als Linearkombination daraus darstellen lässt.

Zum Satz 16.3 über Basen von endlich erzeugten Vektorräumen: Dieser Satz folgt jetzt direkt aus dem vorherigen:
Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat ein endliches Erzeugendensystem, und aus diesem kann man laut Satz 16.2 eine Basis auswählen.

Zum Satz 16.4 über Basen von Vektorräumen: Dieser Satz ist noch wichtiger als der vorherige, da er auch den Fall von unendlich erzeugten Vektorräumen umfasst. Deswegen ist dieser Satz aber auch um einiges schwerer zu beweisen, weshalb wir hier auf einen Beweis verzichten. Man schlage in [Bos08] oder [Fis08] nach. Merkt euch einfach nur, dass jeder Vektorraum eine Basis hat ;-).

Zum Austauschlemma und Austauschsatz (Satz 16.5 bis 16.6): Diese Sätze dienen als Vorbereitung für den nächsten Satz. Das Austauschlemma besagt: Wenn man eine Basis eines Vektorraumes und einen Vektor gegeben hat, so kann man einen Vektor aus der Basis mit diesem einzelnen Vektor austauschen, solange die Vektoren nicht linear abhängig sind. Dieselbe Aussage gilt auch, wenn man eine Basis und mehrere linear unabhängige Vektoren gegeben hat. Dann gilt natürlich auch, dass die Anzahl der linear unabhängigen Vektoren geringer ist, als die Anzahl der Basisvektoren, da eine Basis unverlängerbar linear unabhängig ist.

Zum Basisergänzungssatz (Satz 16.7): Jetzt können wir einen ähnlichen Satz wie den Basisauswahlsatz (Satz 16.2) beweisen. Und zwar haben wir nun zu wenige Vektoren und wollen hieraus eine Basis erhalten. Wir wählen aus dem Erzeugendensystem eine Basis und tauschen dann mit den linear unabhängigen Vektoren aus.
Auch hierzu ein Beispiel:

Beispiel 141
In unserem zweiten Unterpunkt von Beispiel 139 hatten wir die Vektoren $w_1 := (1, 7, 1)^T$ und $w_2 := (4, 1, 4)^T$. Diese beiden Vektoren konnten noch keine Basis des Vektorraums $W := \mathbb{R}^3$ bilden, denn wir brauchen drei Stück. Nach dem Basisergänzungssatz (Satz 16.7) wissen wir, dass es auf jeden Fall möglich ist, (linear unabhängige) Vektoren zu einer Basis zu ergänzen. Wir müssen in unserem Fall noch einen Vektor hinzufügen. Aber welchen nehmen wir denn da bloß? Wir können doch nicht willkürlich und auf gut Glück einfach mal einen Vektor ausprobieren. Das kann ja ewig dauern bis wir Erfolg haben.
Ein „Verfahren“, das auf jeden Fall funktioniert, ist einen Standardvektor zu er-

gänzen. Entweder $e_1 := (1,0,0)^T$, $e_2 := (0,1,0)^T$ oder $e_3 := (0,0,1)^T$ wird das obige System an Vektoren w_1 und w_2 ganz sicher zu einer Basis ergänzen. Hier bleibt uns erstmal nichts anderes übrig als alle drei Vektoren e_1, e_2, e_3 durchzuprobieren. Versuchen wir unser Glück gleich mit dem ersten Standardvektor e_1. Da die Dimension des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ drei beträgt, reicht es zu zeigen, dass (w_1, w_2, e_1) linear unabhängig sind. Dies sieht man relativ einfach ein. Wir bestimmen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot w_1 + \lambda_2 \cdot w_2 = 0$. Überführen in ein Gleichungssystem und die Matrixschreibweise liefern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -27 \end{pmatrix}$$

und das wiederum $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und damit die gewünschte lineare Unabhängigkeit. Aus Dimensionsgründen ist $\mathcal{B} := (w_1, w_2, e_1)$ auch ein Erzeugendensystem, und damit haben wir die Vektoren w_1, w_2 zu einer Basis ergänzt. ■

Beispiel 142

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1,-1,2)^T$ und $v_2 = (2,2,-4)^T$ im $\mathbb{R}^3$. Wir wollen (v_1, v_2) zu einer Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ des $\mathbb{R}^3$ ergänzen.

Für v_3 wählen wir nacheinander die Einheitsvektoren. Rechnungen zeigen, dass e_1 zum Beispiel nicht funktioniert. Wenn wir diesen ergänzen, so ist das System linear abhängig. Also versuchen wir einfach mal den dritten Einheitsvektor e_3 zu (v_1, v_2) zu ergänzen. Wir überprüfen das System $B = (v_1, v_2, e_3)$ auf lineare Unabhängigkeit. Dazu seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \cdot e_3 + \lambda_2 \cdot v_1 + \lambda_3 \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0.$$

In Matrixschreibweise überführen und mit Gauß lösen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und damit die lineare Unabhängigkeit der Vektoren. Aus Dimensionsgründen bildet

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

auch ein Erzeugendensystem und damit wie gewünscht eine Basis von V.

■

Zum Satz 16.8 über die Wohldefiniertheit der Dimension: Dieser Satz erlaubt uns nun eigentlich erst, die Dimension zu definieren, denn erst jetzt sehen wir, dass wenn wir zwei endliche Basen eines Vektorraumes haben, diese die gleiche Anzahl an Elementen haben muss.
Wir wenden den Austauschsatz (Satz 16.6), genauer gesagt, den ersten Teil davon zweimal an, da man eine Basis auch als System von linear unabhängigen Vektoren auffassen kann. Dadurch erhält man $n \leq m$ und $m \leq n$, also insgesamt $m = n$.

Zum Satz 16.9 über die Eigenschaften von Untervektorräumen: Die ersten beiden Aussagen hier sind klar: Ist V endlich erzeugt, so können wir das Erzeugendensystem von V nehmen, und dies erzeugt dann auch U (zwar noch mehr, aber das ist erstmal egal). Und da U eine Teilmenge von V ist, kann die Dimension ja auch nicht höher sein. Sehr wichtig ist allerdings Teil 3:
Will man zwischen zwei Vektorräumen V und W Gleichheit nachweisen, so ist ein netter Trick zuerst zu zeigen, dass der eine in dem anderen enthalten ist, also $V \subset W$ und dann, dass die Dimension der beiden übereinstimmt. Somit ist dann Gleichheit gezeigt.

17 Lineare Abbildungen

Übersicht

Lineare Abbildungen sind in der linearen Algebra von besonderer Bedeutung, daher auch der Name. Wir werden sehen, dass wir uns aussuchen können, ob wir lieber mit linearen Abbildungen arbeiten oder mit Matrizen. Denn jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen kann durch eine Matrix dargestellt werden und umgekehrt.

17.1 Definitionen

Definition 17.1 (Lineare Abbildung)
Seien V und W zwei K-Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **lineare Abbildung**, falls gilt:

(L1) $f(v+w) = f(v) + f(w)\ \forall v, w \in V$.

(L2) $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)\ \forall \lambda \in K,\ \forall v \in V$.

Kürzer heißt das gerade $f(\lambda \cdot v + w) = \lambda \cdot f(v) + f(w) \quad \forall \lambda \in K, \forall v, w \in V$.

Definition 17.2 (Kern einer linearen Abbildung)
Seien V und W zwei Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen diesen Vektorräumen, dann nennt man die Menge

$$\ker(f) := \{v \in V : f(v) = 0\}$$

den **Kern** der linearen Abbildung.

Definition 17.3 (Kern einer Matrix)
Sei A eine Matrix, dann bezeichnet die Menge

$$\ker(A) := \{v \in V : A \cdot v = 0\}$$

den **Kern** der Matrix.

Definition 17.4 (Bild einer linearen Abbildung)
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen V und W. Das **Bild** der linearen Abbildung ist die Menge der Vektoren aus W, die f tatsächlich annimmt. Wir schreiben $\mathrm{im}(f) := \{w \in W : \exists v \in V : f(v) = w\}$.

Definition 17.5 (Bild einer Matrix)
Das Bild einer Matrix A ist gleich dem Raum, der von den linear unabhängigen Spaltenvektoren aufgespannt wird. Wir schreiben $\mathrm{im}(A)$.

Definition 17.6 (Darstellungsmatrix)
Sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen V und W. Weiterhin seien $\mathcal{A} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (w_1, w_2, ..., w_m)$ eine Basis von W. Für $j = 1, 2, ..., n$ ist dann $f(v_j)$ ein Element aus W, besitzt also eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der Basis $\mathcal{B}$. Wir schreiben die Koeffizienten dieser Linearkombination in die j-te Spalte einer Matrix $A \in M_{m,n}(K)$. Mit anderen Worten: $A = (a_{ij})$ ist bestimmt durch:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} w_i \text{ mit } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Die hierdurch definierte Matrix bezeichnen wir als **Darstellungsmatrix** und schreiben $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$.

Definition 17.7 (Transformationsmatrix)
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Basen von V. Dann heißt $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Id}_V)$ die **Transformationsmatrix** des Basiswechsels von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$.

Anmerkung: Die Notation der Transformationsmatrizen ist in der Literatur leider sehr uneinheitlich. Ihr müsst euch schweren Herzens aber in diesem Buch an diese gewöhnen, wenn in der Vorlesung vielleicht auch eine andere Bezeichnung gewählt wird.

Definition 17.8 (Dualraum)
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach K bezeichnen wir als **Dualraum**. Wir schreiben diesen als $V^* := \{f : V \to K | f \text{ ist linear}\}$. Die Elemente nennen wir **Linearformen**.

Definition 17.9 (Duale Basis)
Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Dann ist $(v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$ eine Basis von V^* mit

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{für } i = j \\ 0, & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Wir nennen diese die **duale Basis**.

17.2 Sätze und Beweise

Satz 17.1
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den K-Vektorräumen V und W. f ist injektiv genau dann, wenn der Kern von f nur aus dem Nullvektor besteht.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei f injektiv. Es folgt für jedes $v \in \ker(f)$, dass $f(v) = 0 = f(0)$ (denn 0 ist immer im Kern einer linearen Abbildung). Wegen der Injektivität ist also $v = 0$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\ker(f) = \{0\}$ und $f(v_1) = f(v_2)$ und damit $f(v_1 - v_2) = 0$. Also ist $v_1 - v_2 \in \ker(f) = \{0\}$. Es folgt also $v_1 = v_2$ und damit die Injektivität von f.
q.e.d.

Satz 17.2
Sei $f : V \to W$ eine injektive lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V und W mit $\dim V = \dim W$, dann ist f auch surjektiv.

Beweis: Der Beweis folgt sofort aus der Dimensionsformel (Satz 17.9) und den beiden Äquivalenzen:

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \quad \text{(das ist der Satz 17.1)}$$
$$f \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow \operatorname{im}(f) = W$$

q.e.d.

Satz 17.3
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen V und W. Dann ist Im(f) ein Untervektorraum von W und ker(f) ein Untervektorraum von V.

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition des Untervektorraums, siehe Definition 16.2 und die Erklärung zu diesem Satz. q.e.d.

Satz 17.4
Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ zwei Basen von V, dann gilt für die Transformationsmatrizen

$$(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'})^{-1} = T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}.$$

Satz 17.5
Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{B}''$ Basen von V. Dann gilt

$$(T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}})^{-1} = T^{\mathcal{B}''}_{\mathcal{B}'} \cdot T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}.$$

Satz 17.6 (Basiswechselsatz)
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen. Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ Basen von V und $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ Basen von W. Dann gilt

$$M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(f) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot T^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}.$$

Satz 17.7 (Dualraum ist Vektorraum)
Mit folgenden Verknüpfungen wird der Dualraum V^* zu einem Vektorraum:

$$+ : V^* \times V^* \to V^*, (f+g)(x) := f(x) + g(x)\ \forall x \in V, f, g \in V^*$$
$$\cdot : K \times V^* \to V^*, (\alpha f)(x) := \alpha f(x)\ \forall x \in V,\ f \in V^*,\ \alpha \in K.$$

Satz 17.8 (Dimensionssatz, Kern-Bild-Satz)
Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim\ker(f) + \dim\mathrm{im}(f).$$

Satz 17.9 (Dimensionsformel)
Seien V_1, V_2 zwei Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, dann gilt

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Anmerkung: Hierbei ist $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Dimensionssatz (siehe Satz 17.8). q.e.d.

17.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 17.1 der linearen Abbildung: In der Definition 17.1 einer linearen Abbildung haben wir zwei beliebige Vektorräume V und W und eine Abbildung dazwischen gegeben, die Vektoren aus V auf Vektoren aus W abbildet. Das ist noch nichts besonderes, sondern die Eigenschaften (L1) und (L2) aus Definition 17.1 machen diese Abbildung so besonders, sie wird dann „linear“. Aber was sagen diese Eigenschaften aus?

(L1): Dies bedeutet gerade, dass es egal ist, ob wir erst zwei Vektoren $v, w \in V$ addieren und dann unter f abbilden oder ob wir jeden Vektor v und w erstmal einzeln mittels f abbilden und dann die Summe bilden.

(L2): Es ist egal, ob wir den Vektor $v \in V$ zuerst mit einem Körperelement, also zum Beispiel einer Zahl $\lambda \in K$ multiplizieren und dann das Ergebnis unter f abbilden, oder ob wir den Vektor $v \in V$ erst mit f abbilden und dann das Ergebnis mit $\lambda \in K$ multiplizieren. Dies ist gerade die Definition einer linearen Abbildung. Mehr steht da nicht :-).

Das Prinzip versteht man aber erst richtig, wenn man sich ein paar Beispiele angeschaut hat.

Beispiel 143

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung, die jedem Vektor $\vec{x} := (x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ sein Spiegelbild an der y-Achse zuordnet. Das Bild $f(\vec{x})$ ist dann wieder ein Vektor. Bezeichnen wir die Komponenten dieses Vektors mit $f_1(\vec{x})$ und $f_2(\vec{x})$, so erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

  Mittels Matrix-Vektormultiplikation können wir dies auch so formulieren:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die einen Vektor $\vec{x}$ um den Winkel α dreht. Wir wollen nun eine Beschreibung für $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ herleiten. Dazu betrachten wir eine Drehung um den positiven Winkel α.

Weiterhin sei β der Winkel zwischen dem Vektor $\vec{x}$ und der positiven x-Achse, und r soll die Länge des Vektors $\vec{x}$ bezeichnen.
Mit geometrischen Überlegen erhalten wir dann sofort, dass $x = r \cdot \cos(\beta)$ und $y = r \cdot \sin(\beta)$ und damit:

$$f_1(x, y) = r \cdot \cos(\beta + \alpha), \qquad f_2(x, y) = r \cdot \sin(\beta + \alpha).$$

Anwenden der Additionstheoreme liefert:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= r \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - r \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)), \\ f_2(x, y) &= r \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + r \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)). \end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \cos(\alpha) \cdot x - \sin(\alpha) \cdot y, \\ f_2(x, y) &= \sin(\alpha) \cdot x + \cos(\alpha) \cdot y. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise bedeutet das gerade:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

wird auch als *Drehmatrix* bezeichnet. Es sollte klar sein, wie der Name zu Stande kommt, denn wir haben diese ja gerade als Drehung hergeleitet.

- Wie sieht eine Drehung im Dreidimensionalen aus? Dazu betrachten wir eine Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die eine Drehung um die x-Achse um den Winkel α darstellen soll. So wie eben leitet man leicht her, dass die Abbildung durch die folgende Vorschrift gegeben ist:

$$\begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Dass lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen auch als Matrizen realisiert werden können, haben wir in den ersten Beispielen gesehen und werden wir an den folgenden Beispielen ebenfalls noch erkennen. Wieso dies so ist, wollen wir uns noch einmal überlegen:

Gegeben sei eine $(m \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diese soll über einem Körper K leben. Dieser Matrix können wir wie folgt eine Abbildung $f : K^n \to K^m$ zuordnen. Wir definieren

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Anders formuliert bedeutet das gerade $f(x) = Ax$. Nach den Rechenregeln für Matrizen gilt:

$$A(x+y) = Ax + Ay, \text{ und } A(\lambda x) = \lambda(Ax).$$

Demnach hat die Abbildung die Eigenschaften

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \; f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

und dies entspricht der Definition 17.1 einer linearen Abbildung.

- Sei $f_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $f_1((x_1, x_2, x_3, x_4)^T) := (x_1 x_2, x_2 - x_1, x_3, x_4)^T$. Was macht diese Abbildung? Das f_1 schnappt sich einen Vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ und bildet einen neuen Vektor, nämlich $(x_1 x_2, x_2 - x_1, x_3, x_4)^T$. f_1 ist also eine Art „Maschine“, die neue Vektoren produziert. Wir stecken einen Vektor rein und bekommen einen anderen Vektor heraus. Dabei sollen für eine lineare Abbildung aber gewisse Regeln erfüllt sein.

  Ist f_1 nun eine lineare Abbildung? Wenn man keinen Plan hat, sollte man die obigen Eigenschaften in der Definition einer linearen Abbildung zunächst einmal an bestimmten Vektoren nachprüfen. Seien die Vektoren $v := (1, 2, 3, 4)^T$ und $w := (-7, 8, 9, 11^T)$ gegeben. Dann gelten:

$$\begin{aligned} f_1(v+w) &= f_1((1,2,3,4)^T + (-7,8,9,11)^T) = f_1((-6,10,12,15)^T) \\ &= (-6 \cdot 10, 10 - (-6), 12, 15)^T = (-60, 16, 12, 15)^T. \\ f_1(v) + f_1(w) &= f_1((1,2,3,4)^T) + f_1((-7,8,9,11)^T) \\ &= (1 \cdot 2, 2 - 1, 3, 4)^T + (-7 \cdot 8, 8 - (-7), 9, 11)^T \\ &= (-54, 16, 12, 15)^T. \end{aligned}$$

  Es ist $(-54, 16, 12, 15)^T \neq (-60, 16, 12, 15)^T$. Die erste Komponente stimmt nicht überein. Damit ist f_1 keine lineare Abbildung, denn wir haben ein Gegenbeispiel angegeben, für das (L1) nicht gilt.

- Wir betrachten $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \mapsto (x_1 + x_2 + x_4, 2x_4, 3x_4, 4x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4)^T.$$

Die lineare Abbildung können wir mittels einer Matrix darstellen. Erinnern wir uns an die Matrix-Vektormultiplikation, so können wir die obige lineare Abbildung f_2 auch so schreiben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Wir wissen aber, dass in einem Körper die Abbildung

$$f : K^n \to K^n, x \mapsto A \cdot x,$$

wobei A eine Matrix ist, linear ist, denn es gilt: $(A + B) \cdot x = A \cdot x + B \cdot x$ und $(\lambda \cdot A) \cdot x = \lambda(A \cdot x)$ für alle Matrizen A, B und $\lambda \in K$.
Merke also: Lineare Abbildungen können immer in der Form „Matrix mal Vektor“ geschrieben werden.

- Sei V der Vektorraum aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi : V \to \mathbb{R}$, $\phi(f) := f(1)^2$. Die Abbildung ϕ schnappt sich also eine unendlich oft differenzierbare Funktion f, berechnet den Funktionswert an der Stelle 1 und quadriert das Ergebnis. Kann so etwas eine lineare Abbildung sein?
Versuchen wir einmal mit einem Beispiel die obigen Eigenschaften (L1) und (L2) aus Definition 17.1 zu überprüfen. Dazu sei $f := x^2$ und $g := x^3$. Einerseits ist :

$$\phi(f + g) = \phi(x^2 + x^3) = (1^2 + 1^3)^2 = 4,$$

aber anderseits:

$$\phi(f) + \phi(g) = \phi(x^2) + \phi(x^3) = (1^2)^2 + (1^3)^2 = 2$$

und $2 \neq 4$. Also ist ϕ keine lineare Abbildung.

- Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n)$$

und fragen uns, ob dies eine lineare Abbildung definiert? Wir behaupten, dass dies eine lineare Abbildung definiert, denn es gilt

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= (x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n, y_1, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ &= f(x + y) \end{aligned}$$

und außerdem für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \\ &= \lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n) \\ &= \lambda \cdot f(x). \end{aligned}$$

■

Wir wollen noch erwähnen, dass aus den Eigenschaften einer linearen Abbildung folgt, dass der Nullvektor 0_V des Vektorraums V auf den Nullvektor 0_W des Vektorraums W abgebildet wird, wie wir so zeigen:

Beweis:

$$f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$$

Nun addieren wir auf beiden Seiten das additive Inverse des Elements $f(0_V)$ und demnach erhalten wir die Behauptung

$$f(0_V) = 0_W.$$

q.e.d.

Zur Definition 17.2 des Kerns einer linearen Abbildung: Der Kern einer linearen Abbildung sind alle Vektoren aus V, die durch f auf den Nullvektor abgebildet werden. Wie schon angedeutet, kann man jede lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen durch eine Matrix realisieren. Daher können wir auch den Kern einer Matrix definieren, wie wir dies in Definition 17.3 getan haben. In der Praxis arbeiten wir eher damit.

Beispiel 144 (Kern einer linearen Abbildung)
Wir betrachten die lineare Abbildung:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben zur Bestimmung des Kerns folgende Gleichung zu lösen:

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies führt auf ein homogenes lineare Gleichungssystem:

$$x_1 + x_2 = 0 \qquad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0,$$

das natürlich nur die triviale Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ besitzt. Das heißt, der Kern besteht nur aus dem Nullvektor. ■

Zur Definition 17.3 des Kerns einer Matrix: Der Kern einer Matrix (siehe Definition 17.3) ist einfach die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.
Wie erhalten wir nun aber ganz konkret den Kern einer Matrix? Schauen wir uns das an einem Beispiel an.

Beispiel 145

- Wir betrachten wieder die „Telefonmatrix“:

$$A_{tel} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Zum Beispiel könnte dies die „zugehörige Matrix“ der Abbildung telefon:$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $(x_1, x_2, x_3)^T \mapsto (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3, 7x_1 + 8x_2 + 9x_3)^T$ sein. Von dieser linearen Abbildung telefon möchten wir den Kern bestimmen. Dazu ist hier äquivalent den Kern der Matrix A_{tel} zu ermitteln. Dazu müssen wir nur das homogene lineare Gleichungssystem $A_{tel} \cdot x = 0$ lösen. Mittels Gauß ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben einen Freiheitsgrad. Es gibt also unendlich viele Lösungen. Der Vektor $x := (1, -2, 1)^T$ löst beispielsweise das Gleichungssystem. Aber natürlich auch alle Vielfachen von x. Wir schreiben:

$$\ker(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Sei $g := \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit

$$g((x_1, x_2, x_3)^T) := (x_1 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + 2x_3)^T.$$

Die dazugehörige Matrix lautet:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

da

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Auch hier bestimmen wir den Kern, also die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $M \cdot x = 0$.

Matrixschreibweise und Gauß liefern:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Kern lautet demnach:

$$\ker(M) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

■

Zur Definition 17.4 des Bildes einer linearen Abbildung: Das Bild einer linearen Abbildung (siehe Definition 17.4) sind einfach die Vektoren, die von der Abbildung f „getroffen" werden. Vielleicht kann man sich das so verdeutlichen: Wenn wir eine ganz „normale" Funktion haben, dann geben wir ja auch Definitionsbereich und Wertebereich an. Zum Beispiel kommt in der Bildmenge der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$ auch nicht die gesamte Menge der reellen Zahlen vor, denn f ist eine nach oben geöffnete Parabel und besitzt insbesondere nur nichtnegative Funktionswerte. Die Bildmenge wäre hier also nicht $\mathbb{R}$, sondern nur die positiven reellen Zahlen einschließlich der Null. Bild- und Wertebereich stimmen nicht überein.

Beispiel 146

Wir betrachten die lineare Abbildung aus Beispiel 144:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Wie erhalten wir nun das Bild von f? Dazu überlegen wir uns folgende Darstellung

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Nun können wir das Bild von f direkt ablesen. Es ist das Erzeugnis der Spaltenvektoren der oben dargestellten Matrix:

$$\operatorname{im}(f) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir halten fest: Um zu einer Beschreibung von $\text{im}(f)$ zu kommen, müssen wir die explizite Darstellung in eine Matrixdarstellung umformen, wobei die Spalten dieser Matrix ein Erzeugendensystem von $\text{im}(f)$ bilden. Um nun eine Basis von $\text{im}(f)$ zu finden, müssen wir eine maximale linear unabhängige Teilmenge der Spaltenvektoren finden. ■

Zur Definition 17.5 des Bildes einer Matrix: Diese Definition klingt sehr einfach. Ist sie auch. Was muss man also machen, um das Bild einer Matrix zu ermitteln? Man muss einfach den Raum der linear unabhängigen Spaltenvektoren angeben. Das heißt konkrekt:
Wenn man die linear unabhängigen Spalten einer Matrix bestimmen möchte, so führt man elementare Spaltenoperationen durch. Wem Zeilenumformungen mehr liegen, muss die Matrix zuvor einmal transponieren.
Nun ja, vielleicht ist es noch zu abstrakt. Daher kommen wir schleunigst zu einem Beispiel.

Beispiel 147
Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die durch $h(x_1, x_2) := (2x_1 - x_2, -8x_1 + 4x_2)$ definierte lineare Abbildung. Wir bestimmen das Bild von h. Die lineare Abbildung lässt sich durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

beschreiben. Mit einem Blick sieht man, dass die Spaltenvektoren linear abhängig sind, denn der eine Vektor ist ein Vielfaches des anderen, da $-2 \cdot (-1, 4)^T = (2, -8)^T$.
Das Bild von A ist daher gegeben durch:

$$\text{im}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

■

Zur Definition 17.6 der Darstellungsmatrix: Wir wollen die Idee der sogenannten Darstellungsmatrix (siehe Definition 17.6) nochmals erläutern und eine Art „Kochrezept“ angeben, wie wir diese für eine lineare Abbildung bestimmen. Im selben Atemzug möchten wir aber auf zwei wichtige Dinge hinweisen. Erstens werdet ihr die Theorie, die hinter der Darstellungsmatrix steckt, möglicherweise an dieser Stelle noch nicht verstehen, daher verweisen wir auf den entsprechenden Abschnitt zum Basiswechsel. Zweitens funktioniert Mathematik nicht nach Kochrezepten. Man muss die Idee und die Theorie dahinter verstanden haben. Dennoch ist es am Anfang ganz hilfreich, sich solche „Kochrezepte“ anzueignen, aber im selben Schritt *muss* man verstehen, um was es eigentlich geht.

Wir hatten in Kapitel 16 gesehen oder vielmehr einfach nur angeführt, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Betrachten wir nun eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, so ist es möglich eine Darstellungsmatrix anzugeben. Aber genauer:
Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den beiden Vektorräumen V und W. Die Basis von V bezeichnen wir mit $\mathcal{B}_1$ und die Basis des Vektorraums W mit $\mathcal{B}_2$. Die Einträge der darstellenden Matrix berechnen sich wie folgt:

1. Schritt: Bilde die Basisvektoren aus $\mathcal{B}_1$ mit der linearen Abbildung f ab.

2. Schritt: Stelle die entstandenen Bildvektoren bzgl. der Basiselemente aus $\mathcal{B}_2$ dar, das heißt bilde die Linearkombinationen.

3. Schritt: Trage die dabei errechneten Koeffizienten spaltenweise in einer Matrix ein. So erhält man die gesuchte Darstellungsmatrix.

Füllen wir das Abstrakte mit Leben, indem wir uns ein einfaches Beispiel anschauen.

Beispiel 148

- Seien $\mathcal{B}_1 := \{(1,1)^T, (0,1)^T\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{(-1,-1)^T, (1,0)^T\}$ und f die lineare Abbildung, die die Einträge in einem Vektor vertauscht und die neue erste Komponente noch mit -1 multipliziert, das heißt, $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$.

  1. Schritt: Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{B}_1$ ermitteln:

  $$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

  2. Schritt: Stelle die Bildvektoren als Linearkombination der Basiselemente aus $\mathcal{B}_2$ dar.

  $$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$
  $$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

  3. Schritt: Eintragen der Koeffizienten in eine Matrix

  $$A := \begin{pmatrix}-1 & 0\\-2 & -1\end{pmatrix}$$

  Dies ist die gesuchte Darstellungsmatrix.

- Noch ein Beispiel. Seien $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\}$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich 2 mit der Standardbasis der Monome $\mathcal{A} = (1, x, x^2)$ und $W = \mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum mit der Basis bestehend aus den Standardvektoren $\mathcal{B} := \{e_1, e_2, e_3\}$, Sei außerdem $\phi : V \to W$ mit $\phi(f) := (f(1), f(2), f(3))$. Die Abbildung ϕ nimmt sich also eine Funktion $f \in V$ und macht daraus einen Vektor aus $\mathbb{R}^3$. Die Vektoreinträge sind die Funktionswerte von f ausgewertet an den Stellen $1, 2$ bzw. 3. Wir wollen nun die Darstellungsmatrix dazu ermitteln und gehen genauso wie im ersten Beispiel vor bzw. verwenden unser Kochrezept.

  Zunächst bilden wir wir die Basisvektoren aus A mit ϕ ab:

$$\phi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \phi(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \phi(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

  Nun stellen wir die entstandenen Bildvektoren als Linearkombination der Basiselemente aus $\mathcal{B}$ dar.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3,$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 9 \cdot e_3.$$

  Also ist die Darstellungsmatrix gegeben durch:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Wir betrachten den reellen Vektorraum

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a + d = 0 \right\}.$$

a) Sei $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \in V$. Die Behauptung ist, dass

$$\varphi : V \to V, A \mapsto SA - AS$$

linear ist. Da

$$\begin{aligned} \varphi(A+B) &= S(A+B) - (A+B)S = SA + SB - AS - BS \\ &= SA - AS + SB - BS = \varphi(A) + \varphi(B) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda A) &= S(\lambda A) - (\lambda A)S = \lambda(SA) - \lambda(AS) \\ &= \lambda(SA - AS) = \lambda\varphi(A) \end{aligned}$$

folgt die Behauptung.

b) Gib eine Basis $\mathcal{B}$ von V an und bestimme die Darstellungsmatrix $M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ der linearen Abbildung φ bzgl. der gewählten Basis $\mathcal{B}$.
Wichtig ist zu erkennen, dass der Vektorraum dreidimensional ist. Eine Basis ist gegeben durch folgende Matrizen:

$$B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Man prüft leicht nach, dass dies eine Basis von V ist.
Wir bestimmen nun noch die Darstellungsmatrix $M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. Dazu bilden wir die Basiselemente unter φ ab:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gilt nun:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} = 0 \cdot B_1 + 4 \cdot B_2 + 4 \cdot B_3,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 4 \cdot B_1 + 2 \cdot B_3,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = -4 \cdot B_1 + 2 \cdot B_2.$$

Die Darstellungsmatrix lautet daher

$$M := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies soll an Beispielen erst einmal genügen. ■

Zur Definition 17.7 einer Transformationsmatrix: Wir wissen, dass die Basiswahl eines Vektorraums nicht eindeutig ist. Jeder Vektorraum besitzt unendlich viele Basen. Um zwischen diesen „hin und her zu wechseln“, haben wir die sogenannten Transformationsmatrizen (siehe Definition 17.7) definiert. Schauen wir uns Beispiele an.

Beispiel 149

- Gegeben sei der Standardvektorraum der Ebene $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ und den Standardvektoren

  $$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  sowie die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit

  $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

  Wir bestimmen zunächst den Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$, also $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$. Dazu stellen wir die Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ als Linearkombination der Standardvektoren dar, also als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{E}$. Es gilt:

  $$v_1 = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2, \ v_2 = -1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2.$$

  Also ist

  $$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun wissen wir nach Satz 17.4, dass $(T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ gelten muss. Wir invertieren daher $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$, um $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ zu bestimmen. Eine einfache Rechnung zeigt dann, dass

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

- Sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, wobei e_i mit $i = 1, 2, 3$ die Standardvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezeichne. Weiterhin sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Zunächst ermitteln wir die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$. Dazu stellen wir die Basiselemente der Basis $\mathcal{E}$ als Linearkombination der Basiselemente v_i aus $\mathcal{B}$ dar:

$$\begin{aligned} e_1 &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} && = 3 \cdot v_1 - v_2, \\ e_2 &= -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} && = -v_1 + 2v_2 - v_3, \\ e_3 &= -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} && = -v_1 - v_2 + v_3. \end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix lautet also (da wir die Koeffizienten spaltenweise in die Matrix eintragen):

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir ermitteln nun noch die Transformationsmatrix $T_E^{\mathcal{B}}$. Dies ist einfacher. Wir müssen nun keine großen Rechnungen durchführen, sondern können die Transformationsmatrix eigentlich direkt ablesen. Denn was müssen wir tun? Wir müssen jetzt die Basiselemente aus $\mathcal{B}$ als Linearkombination der Basiselemente aus $\mathcal{E}$ darstellen. Die Basis $\mathcal{E}$ besteht aber gerade aus den Standardvektoren, also gilt:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\ v_2 &= 2 \cdot e_1 + 3 \cdot e_2 + 3 \cdot e_3, \\ v_3 &= 3 \cdot e_1 + 4 \cdot e_2 + 5 \cdot e_3. \end{aligned}$$

Demnach ist

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Leichtes Nachrechnen bestätigt übrigens den Satz 17.4, dass also $(T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}})^{-1} = T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$. Dies könnt ihr zur Überprüfung nutzen, ob ihr richtig gerechnet habt. ■

Zur Definition 17.8 des Dualraums: Der Dualraum bereitet vielen Anfängern große Schwierigkeiten, da die Definition zunächst sehr abstrakt erscheint und gerade Erstsemestler immer eine Vorstellung haben wollen. Dies ist natürlich nie verkehrt, aber beim Dualraum wird das schwierig. Wir haben lange überlegt, wie wir diesen zunächst schwierigen Begriff verständlich erklären können und haben uns dazu entschieden, dass wir weniger Beispiele angeben werden, sondern eher die Bedeutung des Dualraums für die lineare Algebra herausstellen.
Dazu betrachten wir den Spezialfall $V = K^n$. Wenn ihr ein noch konkreteres Beispiel haben möchtet, dann setzt ruhig noch $K = \mathbb{R}$. Ein Element des Dualraums von K^n ist eine lineare Abbildung $K^n \to K$. Dies ist aber genau dasselbe wie die linke Seite einer linearen Gleichung mit n Unbestimmten

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

und gewissen Konstanten $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$. Die „linke Seite“ ist nun die zugehörige homogene lineare Gleichung. Das bedeutet nichts anderes, als dass der Dualraum $(K^n)^*$ mit dem Raum aller $(1 \times n)$-Matrizen, also Zeilenvektoren der Länge n, identifiziert werden kann. Die zu $a := (a_1, \ldots, a_n)$ gehörige lineare Abbildung f_a ist damit:

$$f_a(x) = ax = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \ \forall x \in K.$$

Ein anderes Beispiel:

Beispiel 150
Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ und die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) := x + y + z.$$

Man überlegt sich leicht, dass dies eine lineare Abbildung definiert.
Wir haben also *ein* Element des Dualraums $(\mathbb{R}^3)^*$. Und der Dualraum $(\mathbb{R}^3)^*$ besteht nun aus der Menge *aller* linearer Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. ■

Viele Studenten fragen sich, wo denn genau der Unterschied zwischen Vektorraum und Dualraum bzw. Basis und Dualbasis liegt. Dies wollen wir nochmals erklären, um Verwechslungen zu vermeiden. Ein Vektorraum ist etwas viel Allgemeineres (siehe auch das Kapitel 16 über die Vektorräume). Zu dem allgemeinen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ gibt es Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^3$, von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^2$, oder in sonstige Vektorräume. Eben aber auch Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$, oder allgemeiner von K^n nach K (K ist wie gewohnt ein Körper). Diese letzten Abbildungen heißen *Linearformen* und sind die Elemente des entsprechenden Dualraums. Beispielsweise bilden sie einen dreidimensionalen Vektor auf eine Zahl ab, oder allgemeiner auf irgendein Körperelement. Wir ergänzen noch: Die Menge der linearen Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, also der Dualraum, bildet wieder einen dreidimensionalen Vektorraum. Als Basis können wir die Vektoren $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$ verwenden. Und da alle drei-dimensionalen Vektorräume zueinander isomorph sind, kann man die beiden Räume bijektiv aufeinander abbilden.
Aber wieso definiert man diesen Dualraum? Wenn ihr über die folgenden Aussagen gründlich nachdenkt, dann solltet ihr ein gutes Verständis vom Dualraum bekommen:
Allgemein kann man natürlich von dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ ausgehend lineare Abbildungen in viele unterschiedliche Vektorräume betrachten. Die linearen Abbildungen nach $\mathbb{R}$ sind aber am interessantesten, denn:

- $(\mathbb{R}^n)^*$ besitzt dieselbe Dimension wie $\mathbb{R}^n$ und ist somit isomorph zum $\mathbb{R}^n$. (Dies gilt für alle endlich-dimensionalen Vektorräume. Jedoch im Allgemeinen nicht mehr für unendlich-dimensionale Vektorräume.)
- $((\mathbb{R}^n)^*)^* \simeq \mathbb{R}^n$. Das ist übrigens der Grund, wieso man das Gebilde *Dual*raum nennt.
- Dualisiert man eine Basis von $\mathbb{R}^n$, so ergibt sich eine Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$ und umgekehrt.

Zur Definition 17.9 der dualen Basis:

Beispiel 151

- Im Vektorraum K^n zeichnen wir die kanonische Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ mit den bekannten Standardvektoren aus. Die duale Basis ist dann gegeben durch $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$, wobei

$$e_i^* = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

und die 1 an der i-ten Stelle steht.

- Sei nun $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis und der Basis

$$B = \left(v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Da $v_1 = e_1$ und $v_2 = e_2 + v_1$ folgt nun:

$$v_1^*(e_1) = 1,\ v_2^*(e_2) = 1,\ v_2^*(e_1) = 0 \text{ und } v_1^*(e_2) = -1$$

Wir hoffen, dass ihr nun das Konzept des Dualraums und der dualen Basis verstanden habt. ■

17.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 17.1: In den Erklärungen zur Definition 17.4 der linearen Abbildung hatten wir schon gesehen, dass der Nullvektor von V auf den Nullvektor von W abgebildet wird. Seien nun $v \in V$ und $w \in W$. Aus $f(v) = f(w)$ folgt wegen der Linearität einer linearen Abbildung $f(v - w) = 0_W$. Das bedeutet nach Definition 17.2 des Kerns einer linearen Abbildung, dass $v - w$ ein Element des Kerns ist. Wenn dieser aber nur aus dem Nullvektor besteht, so folgt $v - w = 0_V$, also unsere Behauptung $v = w$. Wir hoffen, dass die andere Richtung keine Probleme gemacht hat.

Zum Satz 17.3: In dem Beweis zum Satz 17.3, dass das Bild von f ein Untervektorraum von W und der Kern von f ein Untervektorraum von W ist, haben wir nur geschrieben, dass dies aus der Definition folgt, und ihr solltet an dieser Stelle auch nicht weiterlesen, bevor ihr selbst darüber nachgedacht habt. Wir wollen uns den Beweis nochmals anschauen:
Da $f(0_V) = 0_W$ (für einen Beweis siehe Erklärung zur Definition 17.4 einer linearen Abbildung), ist $\ker(f) \neq \emptyset$. Weiterhin ist erstens:

$$\begin{aligned} v_1, v_2 \in \ker(f) &\Rightarrow f(v_1) = f(v_2) = 0 \\ \Rightarrow& f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

also $v_1 + v_2 \in \ker(f)$ und zweitens

$$\begin{aligned} v \in \ker(f), a \in K &\Rightarrow f(v) = 0 \\ \Rightarrow & f(av) = a \cdot f(v) = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow av \in \ker(f). \end{aligned}$$

Zum Bild: Ist $\mathrm{im}(f)$ das Bild von f, dann ist $\mathrm{im}(f) \subset W$ schon einmal nichtleer, da $\mathrm{im}(0) = 0$, also $0 \in \mathrm{im}(f)$. Seien $w_1, w_2 \in \mathrm{im}(f)$, dann existieren $v_1, v_2 \in V$ mit $\mathrm{im}(v_1) = w_1$ und $\mathrm{im}(v_2) = w_2$. Es gilt:

$$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2) \quad f \text{ ist linear.}$$

Dies liefert, dass $w_1 + w_2 \in \mathrm{im}(f)$. Analog zeigt man, dass dies auch für $a \in w_1$ mit $a \in K$ und $w_1 \in \mathrm{im}(f)$ gilt.

Zum Satz 17.6 des Basiswechsels: Wie kann man sich diese wichtige Formel des Basiswechsels aus Satz 17.6 merken? Das ist ganz einfach, wenn man sie sich mal genau anschaut. Die Basis $\mathcal{B}$ und die Basis $\mathcal{A}$ stehen sozusagen über kreuz. Wenn man die Formel mal vergessen haben sollte, kann man sie sich also sehr leicht herleiten.
Was ist aber überhaupt die Idee hinter dem Basiswechselsatz? Bei den Transformationsmatrizen (siehe Definition 17.7) lebten wir in einem Vektorraum und haben dort zwischen Basen hin und her gewechselt. Nun betrachten wir zwei (endlich-dimensionale) Vektorräume und eine lineare Abbildung dazwischen und wollen auch hier zwischen Basen hin und her wechseln. Dafür ist die Basiswechsel-Formel vom Satz 17.6 wichtig, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 152

- Seien $V = \mathbb{Q}^3$ und $\mathcal{B}$ die Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Weiterhin sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $V = \mathbb{Q}^3$.

Wir berechnen zunächst die Basiswechselmatrizen $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ und $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$. Die Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$ kann man direkt ohne Nachdenken hinschreiben:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}$ enthält man nach Satz 17.4 entweder durch Invertieren von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$, oder indem wir die Vektoren der Basis $\mathcal{E}$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ darstellen und die Koeffizienten spaltenweise in eine Matrix schreiben. In beiden Fällen ergibt sich

$$T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei nun $\phi : V \to V$ gegeben durch die Darstellungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun die Matrix $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi)$ berechnen. Wir verwenden Satz 17.6 zum Basiswechsel. Demnach ist

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) = T_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$$

Also:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Fertig. ■

Zum Dimensionssatz 17.8: Der Dimensionssatz (ab und zu auch Kern-Bild-Satz genannt) gilt sogar für Vektorräume unendlicher Dimension. Interessant ist er aber vor allem für endlich-dimensionale Vektorräume. Beispielsweise kann man die Dimension des Bildes mit $\dim \operatorname{im}(f) = \dim V - \dim \ker(f)$ berechnen. Wir betrachten nun ein ausführliches Beispiel, das auch die andere Konzepte dieses Kapitels noch einmal einüben soll:

Beispiel 153

Eine lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ sei gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechne den Rang von A. Ist φ injektiv oder surjektiv?

b) Gib eine Basis $\mathcal{C}'$ des Bildes von φ an. Zeige, dass der Vektor $b = (2,-1,-3,2)^T$ im Bild von φ liegt und berechne $\varphi^{-1}(b)$.

c) Gib eine Basis $\mathcal{B}'$ des Kerns von φ an.

d) Bestimme invertierbare Matrizen $P \in GL_4(\mathbb{R})$ und $Q \in GL_3(\mathbb{R})$, sodass

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{R}).$$

Dabei bezeichne r den Rang von A und E_r sei die $(r \times r)$-Einheitsmatrix.

Wir lösen die Aufgabe:

a) Zur Berechnung des Rangs bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Zeilenstufenform von A hat zwei von 0 verschiedene Zeilen und folglich den Rang 2.

Wegen Rang $A = 2 < 4 = \dim \mathbb{R}^4$ kann φ nicht surjektiv sein. Mit dem Kern-Bild-Satz (Dimensionsformel) folgt dann:

$$\dim \ker\varphi = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{im}\varphi = 3 - 2 = 1 > 0,$$

also ist φ auch nicht injektiv.

b) Wir wählen pro Stufe der in a) ermittelten Zeilenstufenform eine zugehörige Spalte der Matrix A aus und erhalten so eine Basis des Bildes von φ, also zum Beispiel $\mathcal{C}' = \{(1,1,0,1)^T, (0,1,1,0)^T\}$. Damit gilt $b = 2(1,1,0,1)^T - 3(0,1,1,0)^T$, also $b \in \operatorname{im}(\varphi)$.

Die Menge $\varphi^{-1}(b)$ ist gerade die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, dessen erweiterte Koeffizientenmatrix wir mit den gleichen Umformungen wie in a) auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Parametrisierung $t := x_3$ erhalten wir $x_2 = -3 + t$ und $x_1 = 2 - 2t$, also:

$$\varphi^{-1}(b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

c) Der Kern von φ ist die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Diesen können wir aus der in b) berechneten Lösungsmenge direkt ablesen. $\mathcal{B}' := \{(-2,1,1)^T\}$ ist also eine Basis von Kern φ.

d) Zunächst einmal gilt $r = \text{Rang}A = 2$. Nach der Transformationsformel (Satz 17.5) gibt es Basen $\mathcal{B}$ vom $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{C}$ vom $\mathbb{R}^4$, sodass

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_4} A T_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$$

mit $\mathcal{E}_4$ und $\mathcal{E}_4$ Standardbasen des $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^4$. Wir ergänzen zunächst die in c) bestimmte Basis des Kernes von φ vorne zu einer Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^3$. Das funktioniert mit den ersten beiden Einheitsvektoren $e_1 = (1,0,0)^T$ und $e_2 = (0,1,0)^T$. $(-2,1,1)^T$ wird als dritter Vektor aus $\mathcal{B}$ auf den Nullvektor abgebildet, was ja auch die vorgegebene Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ fordert. Als nächstes bestimmen wir die Bilder von e_1 und e_2, welche gerade die ersten beiden Spalten von A sind. (Die vorgegebene Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ besagt, dass die ersten beiden Vektoren aus $\mathcal{B}$ gerade auf die ersten beiden Vektoren aus $\mathcal{C}$ abgebildet werden sollen.) Diese ergänzen wir hinten, zum Beispiel mit den Einheitsvektoren $e_3 = (0,0,1,0)^T$ und $e_4 = (0,0,0,1)^T$, zu einer Basis $\mathcal{C}$ des $\mathbb{R}^4$. Wir erhalten also die Basistransformationsmatrizen

$$T_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_4} = (T_{\mathcal{E}_4}^{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen der Transformationsformel liefern die Matrizen $P = T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{E}_4}$ und $Q = T_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{B}}$ das Gewünschte. ■

Zur Dimensionsformel (Satz 17.9): Gegeben seien zwei Vektorräume V und W mit $\dim(V) = 2$ und $\dim(W) = 4$, weiter sei $\dim(V + W) = 4$. Was ist dann $\dim(V \cap W)$? Nach der Dimensionsformel folgt sofort $\dim(V \cap W) = 2$.

18 Homomorphismen

Übersicht

In diesem Kapitel werden wir Morphismen, also strukturerhaltende Abbildungen kennenlernen. Wenn ihr diese zum ersten Mal hört, klingen sie vielleicht zunächst kompliziert. Wir werden aber sehen, dass die Fälle, die für uns von Interesse sind, gar nicht so schwer sind. Also gehen wir es an.

18.1 Definitionen

Definition 18.1 (Homomorphismus)
Ein **Homomorphismus** f ist eine strukturerhaltende Abbildung zwischen zwei algebraischen Strukturen. Das heißt, sind A und B zwei algebraische Strukturen (zum Beispiel Gruppen, Ringe, Körper oder Ähnliches), so gilt für jede Verknüpfung $\circ_A$ auf A und jede Verknüpfung $\circ_B$ auf B und für alle $a, b \in A$:

$$f(a \circ_A b) = f(a) \circ_B f(b).$$

Definition 18.2 (Epimorphismus)
Ein **Epimorphismus** ist ein surjektiver Homomorphismus.

Definition 18.3 (Monomorphismus)
Ein **Monomorphismus** ist ein injektiver Homomorphismus.

Definition 18.4 (Isomorphismus)
Ein **Isomorphismus** ist ein bijektiver Homomorphismus. Gibt es einen Isomorphismus zwischen A und B, so heißen A und B **isomorph** und wir schreiben $A \cong B$.

Definition 18.5 (Endomorphismus)
Einen Homomorphismus nennt man im Fall $A = B$ einen **Endomorphismus**. Wir bezeichnen mit $\mathrm{End}_K(V)$ den Raum aller Endomorphismen des K-Vektorraumes V.

Definition 18.6 (Automorphismus)
Einen Isomorphismus nennt man im Fall $A = B$ einen **Automorphismus**. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Aut}_K(V)$ den Raum aller Automorphismen des K-Vektorraumes V.

18.2 Sätze und Beweise

Satz 18.1 (Eigenschaften von Morphismen)
Seien A und B algebraische Strukturen und $f : A \to B$ ein Morphismus.

1. *Jeder Homomorphismus ist bildet das neutrale Element von A auf das neutrale Element von B ab.*
2. *Ist $a \in A$ multiplikativ invertierbar (das heißt, es existiert ein multiplikatives Inverses), so gilt für das Inverse $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.*
3. *Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv, also automatisch ein Monomorphismus.*

Beweis:

1. $$f(a) = f(a \circ_A e_A) = f(a) \circ_B f(e_A.)$$
2. $$\begin{aligned} f(a^{-1}) &= f(a^{-1}) \circ_B f(a) \circ_B (f(a))^{-1} \\ &= f(a^{-1} \circ_A a) \circ_B (f(a))^{-1} \\ &= f(0_A) \circ_B (f(a))^{-1} \\ &= 0_B \circ_B (f(a))^{-1} \\ &= (f(a))^{-1}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
&f(a) = f(b) \\
\Rightarrow &f(a) \circ_B (f(a))^{-1} = f(b) \circ_B (f(a))^{-1} \\
\Rightarrow &1 = f(b \circ_A a^{-1}) \\
\Rightarrow &b \circ a^{-1} = 1 \\
\Rightarrow &b = a.
\end{aligned}$$

q.e.d.

18.3 Erklärungen zu den Definitionen

Wir werden nun bei den Erklärungen den obigen abstrakten Begriffen Figur verleihen und vor allem Beispiele zeigen.

Zur Definition 18.1 des Homomorphismus: Wie wollen zunächst einmal zwei Fälle unterscheiden. Die folgenden Begriffe haben wir uns zwar schon in Kapitel 6 in Definition 6.3 und 6.6 angeschaut, aber nun können wir eigentlich erst richtig verstehen, was dahinter steckt.

- Wir haben es mit zwei Gruppen zu tun, das heißt, wir haben eine algebraische Struktur mit einer Verknüpfung vorliegen. Diese Verknüpfung heiße $\oplus$. Dann muss gelten $f(a \oplus_A b) = f(a) \oplus_B f(b)$. Einen solchen Homomorphismus nennt man *Gruppenhomomorphismus*. Hierzu ein Beispiel

  Beispiel 154
  Sei $A = (\mathbb{R}, +), B = (\mathbb{R}^*, \cdot)$, dann ist die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ ein Gruppenhomomorphismus, dies folgt direkt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (siehe auch Definition 9.12 aus Kapitel 9) $f(x + y) = e^{x+y} = e^x \cdot e^y = f(x) \cdot f(y)$. ■

- Haben wir es mit zwei Ringen zu tun, also einer Struktur mit zwei Verknüpfungen, so nennt man den Homomorphismus *Ringhomomorphismus*. Auch hier wollen wir ein Beispiel betrachten.

  Beispiel 155
  Für beliebiges aber festes $\alpha \in \mathbb{Z}$ betrachten wir die Abbildung

$$\mathbb{R}[x] \to \mathbb{Z}, \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i.$$

Wir wollen nun zeigen, dass dies tatsächlich ein Ringhomomorphismus ist. Dies folgt allerdings schon direkt aus der Definition, denn es gilt ja

$$(f+g) \mapsto (f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha), \tag{18.1}$$

$$(f \cdot g) \mapsto (f \cdot g)(\alpha) = f(\alpha) \cdot g(\alpha). \tag{18.2}$$

Diesen in der Algebra (werdet ihr im dritten Semester sehen) sehr wichtigen Homomorphismus nennt man passenderweise auch *Einsetzungshomomorphismus*. ■

Zur Definition 18.2 des Epimorphismus: Ein Epimorphismus ist einfach ein Homomomorphismus, der surjektiv ist. Ist f bereits ein Homomorphismus, so erhalten wir leicht einen Epimorphismus durch $f : A \to f(A),\ a \mapsto f(a)$, denn jedes Element im Bild wird ja angenommen, also ist dies ein Epimorphismus. Zum Beispiel ist der Gruppenhomomorphismus aus Beispiel 154 kein Epimorphismus, da zum Beispiel die -1 nicht angenommen wird, aber $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, f(x) = e^x$ ist ein Gruppenepimorphismus. Will man also überprüfen, ob eine Abbildung ein Epimorphismus ist, so prüft man zunächst, wie oben, ob sie ein Homomorphismus ist und danach, ob dieser auch surjektiv ist.

Zur Definition 18.3 des Monomorphismus: Das „Gegenstück" zum Epimorphismus ist der Monomorphismus, also ein injektiver Homomorphismus. Betrachten wir hierzu zwei Beispiele.

Beispiel 156
Sei die Abbildung

$$f : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +), \qquad f(z) := \operatorname{Im}(z) \quad \text{(Imaginärteil)}$$

gegeben. Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus (das solltet ihr euch klar machen und am besten nachprüfen), der allerdings nicht injektiv ist, zum Beispiel gilt ja $f(1+i) = f(2+i) = 1)$, also ist f kein Monomorphismus. ■

Beispiel 157
Die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \qquad g(x,y) := (x, y, x+y, x-y)$$

ist ein Vektorraummonomorphismus (Und da jeder Vektorraum eine Gruppe ist, auch ein Gruppenmonomorphismus). Die Überprüfung, dass dies ein Homomorphismus ist überlassen wir wieder euch. (Hinweis: Die Vektorraumhomomorphismen sind gerade die linearen Abbildungen.) Die Injektivität überprüfen wir leicht mit dem Kriterium aus dem letzten Kapitel 17: Wir untersuchen den Kern, also alle Elemente, die auf $(0{,}0{,}0{,}0)^T$ abgebildet werden. Und da haben wir in den ersten beiden Einträgen schon stehen $x = y = 0$, also ist der Kern trivial, und wir haben tatsächlich einen Monomorphismus vorliegen. ■

Euer Vorgehen bei der Überprüfung, ob eine Abbildung ein Monomorphismus ist, sollte also immer sein: Überprüft zuerst, ob diese Abbildung überhaupt ein Homomorphismus ist und danach, ob sie injektiv ist. Dies macht ihr meistens am besten, wenn ihr den Kern betrachtet.

Zur Definition 18.4 des Isomorphismus: Treffen Epimorphismus und Monomorphismus zusammen, so erhalten wir den Isomorphismus, den bijektiven Homomorphismus. Dieser Begriff ist sehr wichtig, denn im Verlauf eures Studiums werdet ihr merken, dass bestimmte Objekte (auf die wir hier nicht näher eingehen wollen) nur bis auf Isomorphie eindeutig sind, das heißt, es existieren mehrere, aber zwischen ihnen existieren Isomorphismen. Nun aber mal zwei Beispiele. Hierfür ist es naheliegend, sich die beiden Abbildungen genauer anzuschauen, die sich als Epimorphismus bzw. als Monomorphismus herausgestellt haben. Vielleicht ist ja eine von ihnen sogar ein Isomorphismus?

Beispiel 158

- Zunächst einmal:

  $$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \qquad g(x, y) := (x, y, x + y, x - y).$$

  Ist diese Funktion surjektiv? Nein, denn die Einträge $x+y$ und $x-y$ sind durch die beiden ersten schon festgelegt. Sind zum Beispiel $x = y = 0$, so ist damit auch $x + y = x - y = 0$, also wird der Punkt (0,0,1,1) nicht angenommen. g ist also kein Isomorphismus.

- Und f? Wir betrachten also wieder $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}, f(x) = e^x$ und überprüfen auf Injektivität. Da dies keine lineare Abbildung ist können wir unser schönes Kriterium mit dem Kern leider nicht nutzen. Aber wir wissen aus der Analysis, dass die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, es gilt also $f(x) \neq f(y)$ falls $x \neq y$. Damit ist f also tatsächlich ein Isomorphismus, und die beiden Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ sind isomorph.

■

Anmerkungen zu den bisher behandelten Morphismen: Man kann Morphismen noch allgemeiner formulieren (beispielsweise in der Kategorientheorie), als wir es hier getan haben. Dann sind Monomorphismen nicht unbedingt injektiv, Epimorphismen nicht unbedingt surjektiv, und man muss bei Isomorphismen fordern, dass die Umkehrabbildung ebenfalls ein Homomorphismus ist. Dies ist allerdings bei den Strukturen, die wir behandeln, sowieso gegeben und auf diesen Srukturen sind die Monomorphismen (Epimorphismen), die man allgemeiner definiert, auch injektiv (surjektiv). Am Schluss wollen wir noch anmerken, dass nicht in allen Fachbüchern für einen Ringhomomorphismus die Tatsache $f(1_A) = 1_B$ gefordert wird.

Zur Definition 18.5 des Endomorphismus: Einen Endomorphismus kann man nun leicht erkennen: Zunächst müssen die beiden Strukturen identisch sein, und die Abbildung muss ein Homomorphismus sein. Wie man das überprüft, haben wir ja oben in den Erklärungen zur Definition 18.1 des Homomorphismus schon gesehen. Wir wollen uns hier nur noch einmal mit dem wichtigsten Fall, dem Endomorphismus zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen befassen. Diese Endomorphismen sind dann nach Definition einfach die linearen Abbildungen (schaut euch im Fall, dass A und B Vektorräume sind, einfach mal beide Definitionen genauer an (siehe Definition 16.1 aus Kapitel 16) ;-)). Wir halten also fest: Die Endomorphismen zwischen Vektorräumen sind lineare Abbildungen, und im Falle von endlich-dimensionalen Vektorräumen lässt sich also jeder Endomorphismus als Matrix schreiben.

Zur Definition 18.6 des Automorphismus: Nun ist es sehr einfach, die Automorphismen zu klassifizieren, falls wir uns wieder auf die endlich-dimensionalen Vektorräume beschränken. Dies wollen wir an dieser Stelle auch tun. Dann sind die Automorphismen genau die linearen Abbildungen, die eine invertierbare Matrix als Darstellungsmatrix haben. Wir wollen allerdings auch ein bekanntes Beispiel ohne Matrixdarstellung geben.

Beispiel 159

Wir betrachten die komplexe Konjugation $c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, c(z) = \overline{z}$. Wir überlassen es euch zu überprüfen, dass dies tatsächlich ein Automorphismus ist und wollen hier nur die Matrixdarstellung dieses Automorphismus bestimmen. Dazu identifizieren wir $\mathbb{C}$ wieder wie im Kapitel 4 über Zahlen mit $\mathbb{R}^2$. Dann betrachten wir, was mit der Basis $(1, i)$ geschieht, wobei wir wie eben gesagt die 1 mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und i mit $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ identifizieren. Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(1 \mapsto 1)$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(i \mapsto -i)$ Wir suchen also eine Matrix A für die gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und dadurch erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix nennt man auch *komplexe Struktur.* ■

Wir wollen nun noch die Verbindung zwischen den verschiedenen Morphismen illustrieren. Vielleicht kennen einige von euch aus der Schule noch das Haus der Vierecke, in dem alle Vierecke in Verbindung gebracht werden. Wir möchten dies nun auf die Morphismen übertragen und erhalten das *Haus der Morphismen*:

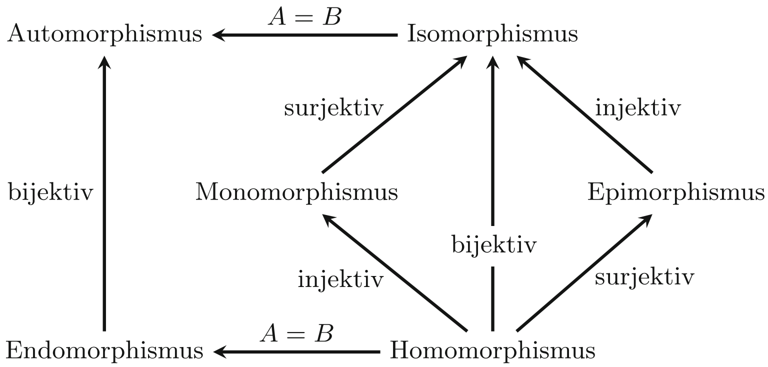

Abb. 18.1: Haus der Morphismen.

18.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 18.1 über die Eigenschaften von Morphismen: Der erste Teil des Satzes besagt einfach, dass jeder Morphismus das neutrale Element bezüglich der Verknüpfung in A, auf das neutrale Element der Verknüpfung in B abbildet. Teil zwei besagt, dass Inversenbildung und Morphismus verträglich sind, es ist also egal, welches von beiden man zuerst anwendet, falls man Inverse bilden kann.

Der letzte Teil schließlich ist der Wichtigste, wenn man einen Morphismus zwischen zwei Körpern betrachtet, so können nicht zwei Elemente auf dasselbe abgebildet werden. Dies liegt an der Tatsache, dass in einem Körper das Inverse zu jedem Element existiert und ein Morphismus einserhaltend und nullerhaltend ist.

19 Permutationen

Übersicht

Dieses Kapitel ist den Permutationen gewidmet. Diese haben vor allem später in der Algebra eine wichtige Bedeutung. Wir werden hier wirklich nur die Grundlagen angeben, aber nicht mit Beispielen sparen.

19.1 Definitionen

Definition 19.1 (Permutation)
Ist A eine endliche Menge, so nennen wir eine Abbildung $\sigma : A \to A$ **Permutation**, falls σ bijektiv ist. Die Menge aller Permutationen von A bezeichnet man mit S_A. Gilt $A = \{1, ..., n\}$, so schreiben wir für die Menge der Permutationen auch S_n und nennen dies die *symmetrische Gruppe*.

Definition 19.2 (Transposition)
Eine Permutation, die nur zwei Elemente vertauscht, nennen wir **Transposition**.

Definition 19.3 (Fehlstand)
Ein **Fehlstand** einer Permutation $\sigma \in S_n$ ist ein Paar (i, j), für das $i < j$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$ gilt.

Definition 19.4 (Signum einer Permutation)
Wir definieren das **Signum** einer Permutation als $(-1)^r$, wobei r die Anzahl der Fehlstände bezeichnet. Eine Permutation mit $\text{sign}(\sigma) = 1$ nennt man auch **gerade**. Eine Permutation mit $\text{sign}(\sigma) = -1$ **ungerade**. Die Menge aller geraden Permutationen wird mit A_n bezeichnet, also $A_n := \{\sigma \in S_n : \text{sign}(\sigma) = 1\}$. Diese Gruppe nennen wir die **alternierende Gruppe**.

19.2 Sätze und Beweise

Satz 19.1 (Anzahl der Permutationen)
Es gilt $|S_n| = n!$ *und* $|A_n| = \frac{n!}{2}$ *für* $n \geq 2$.

Beweis: Wir beweisen nur $|S_n| = n!$.
Wir überlegen uns für ein $\sigma \in S_n$, wie viele verschiedene Werte $\sigma(j)$, $j = 1, \ldots, n$ annehmen kann.
Für $\sigma(1)$ gibt es n Möglichkeiten, für $\sigma(2)$ nur noch $n-1$, und induktiv erhält man schließlich für $\sigma(n)$ nur noch eine Möglichkeit. Das sind zusammen

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

mögliche Werte. q.e.d.

Satz 19.2 (Darstellung durch Transpositionen)
Jede Permutation lässt sich als Komposition (Verknüpfung) von Transpositionen darstellen.

Beweis: Sei $\sigma \in S_n$, o.B.d.A. nicht die Identität. Dann gibt es ein $k_1 \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\sigma(i) = i$, $\forall i < k_1$ und $\sigma(k_1) > k_1$. Wir setzen $\tau_1 := (k\ \sigma(k))$ und $\sigma_1 := \tau_1 \circ \sigma$. Dies führt man solange fort, bis $\sigma_k = \mathrm{Id}$ gilt und erhält dann $\sigma_k = \tau_k \circ \ldots \circ \tau_1 \circ \sigma \Rightarrow \sigma = \tau_1 \circ \tau_k$. q.e.d.

Satz 19.3 (Die Gruppe der Permutationen)
S_n *bildet zusammen mit der Komposition eine Gruppe.*

Satz 19.4 (Signum ist Gruppenhomomorphismus)
Die Funktion

$$\operatorname{sign} : S_n \to \{-1,1\}, \qquad \sigma \mapsto \operatorname{sign}(\sigma)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(S_n, \circ)$ *und* $(\{-1,1\}, \cdot)$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{j-i} \\
&= \prod_{i<j} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i} \\
&= \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)
\end{aligned}$$

$$= \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i>j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$$

$$= \prod_{\sigma(i)<\sigma(j)} \frac{\tau(\sigma(j)) - \tau(\sigma(i))}{\sigma(j) - \sigma(i)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$$

$$= \operatorname{sign}(\tau) \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$$

q.e.d.

Satz 19.5 (Äquivalenzen zum Signum)
Es gilt

1. $\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^t$, *wobei* t *eine Anzahl an Transpositionen ist, mit der man* σ *darstellen kann.*
2. $\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$

Beweis:

1. Sei $\sigma = (k\ l)$. Dann gilt $\sigma = (k\ l) = (1\ k\ 2\ l)(1\ 2)(1\ l\ 2\ k)$ und $\operatorname{sign}(1\ 2) = -1$ Der Rest folgt aus Satz 19.4.
2. $$\prod_{i<j}(\sigma(j) - \sigma(i)) = \left(\prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \sigma(j) - \sigma(i) \right) \cdot (-1)^r \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} |\sigma(j) - \sigma(i)|$$
$$= (-1)^r \prod_{i<j} |\sigma(j) - \sigma(i)|$$
$$= (-1)^r \prod_{i<j} |j - i|$$

q.e.d.

19.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 19.1 der Permutation: Eine Permutation ist, wie der Name schon sagt, eine Abbildung, die Elemente einer Menge permutiert, also vertauscht. Hierbei sind die wichtigsten Permutationen diejenigen, die auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$) operieren, also in S_n liegen. Deshalb werden wir uns hier fast ausschließlich mit ihnen beschäftigen.
Wir wollen nun drei verschiedene Möglichkeiten kennenlernen, Permutationen darzustellen. Als erstes gibt es die *Listenschreibweise*. Man schreibt die Elemente der Menge, also die Zahlen 1 bis n, in die obere Zeile einer Tabelle und das Bild unter der Permutation σ direkt darunter:

1	2	$\cdots$	$n-1$	n
$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\cdots$	$\sigma(n-1)$	$\sigma(n)$

Zum Beispiel vertauscht diese Permutation

1	2	3	4	5
1	3	2	5	4

jeweils die Elemente 2 und 3 sowie 4 und 5 und lässt die 1 fest.
Eine zweite Möglichkeit ist die *Zykelschreibweise*. Dabei schreibt man die Bilder eines Elements einfach hintereinander:

$$(1\ \sigma(1)\ \cdots\ \sigma^k(1))$$

und zwar solange, bis man wieder beim ersten Element ankommt. Hierbei kann es aber nun vorkommen, dass gar nicht alle Elemente aus der 1 erzeugt werden können. Dann schreibt man direkt dahinter noch einmal dasselbe mit dem Element, das nicht erzeugt werden konnte, immer beginnend mit dem kleinsten. Dies wollen wir erst einmal an einigen Beispielen betrachten.

Beispiel 160

Als erstes nehmen wir die Permutation von oben. Sie lässt 1 fest, also ist die erste Klammer einfach nur (1). Nun haben wir die 2 noch nicht erzeugt, machen mit ihr also dasselbe. Die 2 wird auf die 3 abgebildet und diese wieder auf die 2, also ist die zweite Klammer: (2 3). Ebenso erhält man für die dritte Klammer (4 5), also ist die gesamte Permutation gegeben durch (1)(2 3)(4 5). Doch eigentlich ist es unnötig, Klammern zu schreiben, in denen nur ein Element ist, da mit diesen Elementen ja nichts passiert, das heißt, wir schreiben in Zukunft nur noch (2 3)(4 5) für die obige Permutation. Wichtig zu wissen ist, auf welcher Menge die Permutation wirkt. Zum Beispiel könnte die Permutation (1 2 3) in S_3 sein oder auch in S_4 (wenn die 4 festgelassen wird und sie deshalb nicht aufgezählt wird) oder in S_5 oder...
Also müsst ihr euch merken: In Zykelschreibweise muss immer mit angegeben sein, in welcher der Gruppen S_n man sich befindet. ■

Als letztes wollen wir die Schreibweise durch *Permutationsmatrizen* kennenlernen.

Dabei fasst man

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n-1) \\ \sigma(n) \end{pmatrix}$$

als Vektoren auf und sucht eine Matrix A, für die gilt

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(n-1) \\ \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Da eine Permutation die Elemente nur vertauscht, stehen also in jeder Zeile und jeder Spalte der Matrix A genau eine 1 und sonst nur Nullen.

Beispiel 161

Wir betrachten wieder die Permutation $(2\ 3)(4\ 5)$ und wollen diese als Matrix darstellen. Dabei nutzt man einfach die Regeln der Matrizenmultiplikation und erhält dann:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Beispiel 162

Wir wollen nun noch einmal eine Permutationsmatrix von S_4 betrachten und diese Permutation in Zykelschreibweise und Listenschreibweise bringen. Sei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann betrachten wir einfach, was passiert, wenn wir $P \cdot (1,2,3,4)^T$ berechnen. Es gilt:

$$P \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

und damit haben wir auch schon die Listenschreibweise:

1	2	3	4
2	3	4	1

und damit auch leicht die Zykelschreibweise: (1 2 3 4), denn die 1 wird auf die 2 abgebildet, die 2 auf die 3, die 3 auf die 4 und diese wieder auf die 1. ■

Wir wollen nun noch betrachten, was passiert, wenn wir zwei Permutationen verknüpfen, also hintereinander ausführen, so wie in Kapitel 3 über Abbildungen definiert (siehe Definition 3.5). Dies wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 163

Seien $\sigma, \tau \in S_6$ mit $\sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6)$ und $\tau = (1\ 4)(3\ 6)$.
Dann ist $\sigma \circ \tau = (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6) \circ (1\ 4)(3\ 6)$. Nun beginnen wir mit dem kleinsten Element, also der 1 und suchen die Klammern von rechts nach links ab, wo diese zum ersten Mal auftaucht. Das ist der Fall in der zweiten Klammer von rechts. Also geht zunächst die 1 auf die 4. Jetzt suchen wir von der Stelle, wo wir die 1 gefunden haben nach links weiter und suchen die 4. Die ist in der ersten Klammer und geht dort auf die 1, insgesamt wird also die 1 festgelassen. Dasselbe macht man nun mit der 2, diese ist nur einmal vorhanden und geht also insgesamt auf die 4. Jetzt betrachtet man die 4 und will wissen, auf welches Element diese abgebildet wird. Mit derselben Methode erkennt man, dass die 4 auf die 2 abgebildet wird. Jetzt ist die erste Klammer fertig (die 2 geht auf die 4 und diese wieder auf die 2). Es fehlt allerdings zum Beispiel noch die 3. Wir gehen also noch einmal von rechts nach links durch und sehen, dass auch die 3 fest bleibt. Bleiben noch die 5 und die 6 übrig, für die man erhält, dass diese beiden vertauscht werden. Wir erhalten also insgesamt:

$$\sigma \circ \tau = (2\ 4)(5\ 6)\ .$$

Nun können wir nach derselben Methode auch $\tau \circ \sigma$ berechnen und erhalten:

$$\tau \circ \sigma = (1\ 4)(3\ 6) \circ (1\ 2\ 4)(3\ 5\ 6) = (1\ 2)(3\ 5)\ .$$

Man sieht also, dass die Komposition von Permutationen nicht kommutativ ist, dass aber der Typ der Permutation der gleiche ist (Zwei Elemente werden festgelassen, jeweils zwei andere vertauscht). ■

Zur Definition 19.2 der Transposition: Eine Transposition ist nun einfach eine Permutation die nur zwei Elemente vertauscht, das heißt, dass die Zykeldarstellung einer Permutation immer wie folgt aussieht: $(i\ j)$, wobei i und j die beiden Elemente sind, die vertauscht werden. In Beispiel 165 zur den Erklärungen zum Satz 19.2 über die Darstellung einer Permutation durch Transpositionen werden wir einige Beispiele für Transpositionen geben.

Zur Definition 19.3 des Fehlstandes: Ein Fehlstand ist, wie der Name es auch schon sagt, ein Paar von Elementen, das nach Anwendung der Permutation „falsch steht". Das heißt, wenn wir die Listenschreibweise betrachten, so steht in der unteren Zeile ein größeres Element links neben einem kleineren, zum Beispiel:

Beispiel 164

1	2	3	4	5	6	7
5	4	7	1	3	2	6

Diese Permutation hat 12 Fehlstände, denn links neben der 6 steht ein größeres Element, links neben der 2 stehen vier größere Elemente, links von der 3 und der 1 jeweils drei und links neben der 4 ein größeres Element, das ergibt zusammen 12. ■

Zur Definition 19.4 des Signums einer Permutation: Die Definition der Fehlstände nutzt man nun, um ein Vorzeichen für Permutationen einzuführen. Unsere Permutation in Beispiel 164 besitzt das Vorzeichen $1 = (-1)^{12}$.

19.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 19.1 über die Anzahl der Permutationen: Dieser Satz besagt einfach, dass es $n!$ Permutationen einer n-elementigen Menge gibt. Dies ist anschaulich klar, denn es gibt ja gerade $n!$ Möglichkeiten, die Zahlen von 1 bis n anzuordnen. Außerdem gibt es genauso viele gerade Permutationen wie ungerade, denn es gilt ja $|A_n| = \frac{1}{2}|S_n|$ (auch wenn wir das hier nicht bewiesen haben).

Zum Satz 19.2 über die Darstellung einer Permutation durch Transpositionen: *Das Wichtigste vorab: Die Darstellung einer Permutation durch Transpositionen* *ist nicht eindeutig! Es gibt mehrere Möglichkeiten, ein Element durch Transpositionen darzustellen.* Allerdings kann dies entweder nur durch eine gerade Anzahl oder nur durch eine ungerade Anzahl geschehen. Doch wie erhält man eine solche Darstellung?

Beispiel 165
Betrachten wir $\sigma = (1\ 4\ 3\ 7\ 5)(2\ 6) \in S_7$. Die zweite Klammer ist bereits eine Transposition, hier ist nichts zu tun. In der ersten Klammer schreiben wir jeweils zwei Elemente als Transposition:
$(1\ 4\ 3\ 7\ 5) = (1\ 4)(4\ 3)(3\ 7)(7\ 5)$, also haben wir insgesamt:

$$\sigma = (1\ 4\ 3\ 7\ 5)(2\ 6) = (1\ 4)(4\ 3)(3\ 7)(7\ 5)(2\ 6).$$

Aber auch $(1\ 4)(4\ 3)(3\ 7)(7\ 5)(2\ 6)(1\ 6)(1\ 6)$ wäre eine mögliche Darstellung, denn $(1\ 6)(1\ 6) = \mathrm{Id}$. ■

Was ihr euch hier also merken solltet, ist die Methode die Darstellung zu erreichen, und dass diese nicht eindeutig ist.
Im Beweis gehen wir gleich davon aus, dass die Permutation nicht die Identität ist, denn die Identität lässt sich ja zum Beispiel als $\mathrm{Id} = (1\ 2)(1\ 2)$ schreiben. Dann suchen wir von links aus in der Listendarstellung das erste Element, das nicht festgelassen wird und wenden eine Transposition so an, dass es doch festgelassen wird. Dies führen wir bis zum Schluss durch und erhalten so die Identität. Nun müssen wir nur noch die verwendeten Transpositionen verknüpfen und sind fertig.

Zum Satz 19.5 über Äquivalenzen zum Signum: Die Methode, das Signum mittels Fehlständen zu berechnen, kann manchmal mühsam sein, zum Beispiel wenn die Permutation Komposition von vielen Transpositionen ist. Deswegen zeigen wir hier weitere Methoden auf. Die erste ist die zugleich Wichtigste: Statt die Anzahl der Fehlstände zu zählen, können wir die Anzahl der Transpositionen betrachten, mit der man die Permutation darstellt. Also hat unsere Permutation $(1\ 4\ 3\ 7\ 5)(2\ 6) = (1\ 4)(4\ 3)(3\ 7)(7\ 5)(2\ 6)$ das Signum $\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^5 = -1$. Dieser Satz besagt mit der ersten Aussage außerdem, dass es festgelegt ist, ob eine Permutation immer durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Transpositionen dargestellt werden kann.
Im Beweis betrachten wir die Transposition $(1\ 2)$. Diese hat einen Fehlstand, also das Signum -1. Dann nutzen wir aus, dass wir, wie angegeben, jede Transposition durch $(1\ 2)$ ausdrücken können, und das Signum ein Gruppenhomomorphismus ist (Satz 19.4), also gilt $\mathrm{sign}(1\ k\ 2\ l) = \mathrm{sign}(1\ l\ 2\ k)$ und damit $\mathrm{sign}(k\ l) = \mathrm{sign}(1\ 2) = -1$. Und wenn τ Komposition von t Transpositionen ist, gilt wieder mit Satz 19.4 $\mathrm{sign}(\tau) = (-1)^t$.
Die zweite Aussage ist mehr technischer Natur und wird weniger zum expliziten Berechnen als vielmehr bei Beweisen genutzt.

Wir teilen das Produkt zunächst auf, sodass jeder Faktor (bis auf das $(-1)^r$) positiv ist und nutzen im letzen Schritt, dass σ eine Bijektion ist, die Elemente nur vertauscht, damit wird also im Produkt nur die Reihenfolge der Faktoren, nicht aber der Wert beeinflusst.
Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, das Vorzeichen einer Permutation zu bestimmen, diese greift jedoch auf das nächste Kapitel vor und ist außerdem von weniger Belang, weil zu kompliziert. Deswegen wollen wir sie hier nur kurz erwähnen. Wenn σ eine Permutation ist und P_σ die Darstellung als Permutationsmatrix, so gilt $\operatorname{sign}(\sigma) = \det(P_\sigma)$.

Zum Satz 19.4 des Signums als Homomorphismus: Dies ist ein weiterer wichtiger Satz zur expliziten Berechnung des Signums.

Beispiel 166

Wir wollen nun das Signum der Permutation η bestimmen, die durch Kompositon der beiden Permutationen aus Beispiel 164 und 165 gegeben ist. Die Komposition zu berechnen, wäre hier viel zu umständlich. Wir nutzen den Satz, der besagt :

$$\operatorname{sign}(\eta) = (-1)^{12} \cdot (-1)^5 = -1.$$

So ist das doch um einiges entspannter. ■

Für den Beweis des Satzes benutzen wir die Darstellung aus Satz 19.5 Teil 2. und erweitern zuerst mit $(\sigma(j) - \sigma(i))$. Dann ist einer der Faktoren bereits $\operatorname{sign}(\sigma)$. Den anderen Faktor formen wir so um, dass wir nicht mehr das Produkt über $i < j$, sondern $\sigma(i) < \sigma(j)$ betrachten. Dann haben wir wie beim Beweis von Satz 19.5 wieder nur die Faktoren getauscht aber nicht den Wert des Produkts verändert, dieser ist also einfach $\operatorname{sign}(\tau)$.

20 Determinante

Übersicht

In diesem Kapitel werden wir die Determinante ganz mathematisch einführen. Es wird höchste Zeit, denn wir hatten sie zuvor ja schon benutzt, ohne eigentlich zu wissen, was dahinter steckt. Außerdem werden wir einige Berechnungsmethoden für die Determinante quadratischer Matrizen kennenlernen und an einigen Beispielen einüben.

20.1 Definitionen

Definition 20.1 (Axiomatische Einführung der Determinante)
Eine **Determinantenfunktion** ist eine Funktion $\det : \mathcal{M}_{n,n}(K) \to K$ für die gilt

1. det ist **alternierend**, das heißt:

$$\det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_j|\cdots|v_n) = 0.$$

2. det ist **multilinear**, das heißt linear in jeder Spalte, also gilt:

$$\begin{aligned}&\det(v_1|\cdots|\lambda v_k + \mu w|\cdots|v_n)\\ &= \lambda \det(v_1|\cdots|v_k|\cdots|v_n) + \mu \det(v_1|\cdots|w|\cdots|v_n) \quad \forall\ k = 1,\ldots n \text{ und } \lambda, \mu \in K.\end{aligned}$$

3. det ist **normiert**, das heißt, $\det(E_n) = 1$.

Anmerkung: Die Schreibweise $\det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_j|\cdots|v_n)$ *meint, dass die Vektoren* $v_1, \ldots, v_n$ *spaltenweise in eine Matrix geschrieben werden und wir von dieser Matrix die Determinante berechnen. In Fall* 1 *heißt das auch, dass die Spalte* v_j *doppelt vorkommt.*

20.2 Sätze und Beweise

Satz 20.1 (Existenz und Eindeutigkeit der Determinante)
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert genau eine Determinantenfunktion.

Satz 20.2 (Rechenregeln und Eigenschaften der Determinante)
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ quadratische $(n \times n)$-Matrizen. Es gilt:

1. $\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det(A)$.
2. *Verhalten unter elementaren Zeilen- oder Spaltenoperationen:*
   - *Geht B aus A durch Vertauschen von zwei Zeilen/Spalten hervor, so gilt* $\det(B) = -\det(A)$.
   - *Geht B aus A durch Addition des λ-fachen einer Zeile/Spalte aus einer anderen hervor, so gilt* $\det(B) = \det(A)$.
   - *Geht B aus A durch Multiplikation einer Zeile/Spalte mit einem Skalar λ hervor, so gilt* $\det(B) = \lambda \det(A)$.
3. *Ist A eine Dreiecksmatrix (obere oder untere Dreiecksmatrix, das heißt nur oberhalb oder unterhalb, und auf der Diagonalen, stehen Einträge, sonst nur Nullen) mit den Diagonaleinträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so gilt* $\det(A) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$.
4. *Hat A zwei linear abhängige Zeilen/Spalten, so ist* $\det(A) = 0$
5. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ *ist invertierbar.*
6. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.
7. $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$, *falls A invertierbar ist.*
8. $\det(A) = \det(A^T)$

Beweis: Beim Beweis beweisen wir nicht erst 1., danach 2. usw., sondern folgen einer anderen Reihenfolge, da wir bei den Beweisen einiger Unterpunkte andere benötigen.

1. Dies folgt direkt aus der Multilinearität.

4. Dies gilt, da det alternierend ist.

3. Ist eine der $\lambda_i = 0$, so erzeugen wir durch wiederholte Addition von μ-fachen einer Zeile auf die andere eine Nullzeile und erhalten (wegen Teil 4) $\det(A) = 0$.

Sind alle $\lambda_i \neq 0$, so formen wir A mit derselben Methode um und erhalten:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \cdot \det(E_n) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

6. O.B.d.A. $A \in GL_n(K)$, dann lässt sich A als Produkt von Elementarmatrizen schreiben. Wir müssen die Behauptung also nur noch für Elementarmatrizen A beweisen.

   Es gilt $\det(P_i^j) = -1, \det(Q_i(\lambda)) = \lambda, \det(S_i^j(\lambda)) = 1$ (siehe Defintion 15.1 aus Kapitel 15) und damit folgt die Behauptung aus Teil 3.

7. Dies folgt direkt aus Teil 6 und der Normiertheit von det.

2. • Vertauschen wir die Spalten $i < j$, so gilt:

$$\begin{aligned} &\det(v_1|\cdots|v_i|\cdots|v_j|\cdots|v_n) + \det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_i|\cdots|v_n) \\ =&\det(v_1|\cdots|v_i|\cdots|v_j|\cdots|v_n) + \det(v_1|\cdots|v_i|\cdots|v_i|\cdots|v_n) \\ &+ \det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_i|\cdots|v_n) + \det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_j|\cdots|v_n) \\ =&\det(v_1|\cdots|v_i + v_j|\cdots|v_i + v_j|\cdots|v_n) = 0. \end{aligned}$$

   •
$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(v_1|\cdots|v_i + \lambda v_j|\cdots|v_j|\cdots|v_n) \\ &= \det(v_1|\cdots|v_i|\cdots|v_j|\cdots|v_n) \\ &\quad + \lambda \det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_j|\cdots|v_n) \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

   • Folgt direkt aus der Multilinearität.

   In allen drei Fällen haben wir Teil 7 ausgenutzt.

5. Wir bringen durch elementare Zeilenumformungen A auf Zeilenstufenform $\tilde{A}$, was in diesem Fall eine obere Dreiecksmatrix ist. Dann gilt: $\det(A) = \pm \det(\tilde{A})$ und $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(\tilde{A})$ und A invertierbar $\Leftrightarrow \operatorname{rang}(A) = n \Leftrightarrow \operatorname{rang}(\tilde{A}) = n \Leftrightarrow \lambda_i \cdot \ldots \cdot \lambda_n \neq 0 \Leftrightarrow \det(\tilde{A}) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

8. Wir benutzen die Leibniz-Formel (Satz 20.5). Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a^T_{i,\sigma(i)} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma^{-1}(i)} \right) \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 20.3 (Determinante als Gruppenhomomorphismus)
Die Abbildung $\det : GL_n(K) \to K\backslash\{0\}$ *ist ein Gruppenhomomorphismus.*

Beweis: Dies folgt direkt aus der Definition 20.1 der Determinante und aus Satz 20.2, Teil 5 und 6. q.e.d.

Satz 20.4 (Laplace-Entwicklungssatz)
Es gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

wobei A_{ij} *die* $(n-1) \times (n-1)$*-Untermatrix von* A *ist, die entsteht, wenn man die* i*-te Zeile und die* j*-te Spalte weglässt.*

Satz 20.5 (Leibniz-Formel)
Es gilt

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)} \right).$$

Satz 20.6
Ähnliche Matrizen (siehe Definition 15.3) haben dieselbe Determinante.

20.3 Erklärungen zu den Definitionen

Zur Definition 20.1 der Determinante: Wir führen in dieser Definition die Determinante als eine Funktion mit bestimmten Eigenschaften ein. Wichtig ist, dass wir an dieser Stelle noch gar nicht wissen, ob es so eine Funktion überhaupt gibt, und wenn es eine gibt, ob diese eindeutig ist. Dies zeigt erst Satz 20.1.
Obwohl die Determinante durch diese Eigenschaften festgelegt ist, ist es weniger wichtig, sich diese zu merken, als sich vielmehr die Aussagen des Satzes 20.2 zu verinnerlichen, weshalb wir hier vorerst nicht weiter auf die Definition eingehen wollen. Aber natürlich sollte man diese Eigenschaften dennoch für den Notfall in einer Prüfung abgespeichert und abholbereit haben :-).
Das einzige, was hier bemerkt sei: Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen erklärt! Für Matrizen, bei denen Zeilen- und Spaltenanzahl nicht übereinstimmen, kann man die Determinante nicht definieren.

20.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 20.1 über die Existenz und Eindeutigkeit der Determinante: Dieser Satz besagt nun, dass es tatsächlich eine Funktion gibt, die die Eigenschaften in Definition 20.1 erfüllt, und dass es sogar nur genau eine gibt. Da der Beweis sehr technisch ist, lassen wir ihn hier weg.

Zum Satz 20.2 über die Eigenschaften der Determinante: Dies ist der wichtigste Satz in diesem Kapitel, denn er erlaubt uns nun explizit, Determinanten auszurechnen. Bevor wir uns mit den Beweisen beschäftigen, wollen wir uns ein paar Beispiele ansehen und mit ihnen die Aussagen des Satzes illustrieren.

Beispiel 167
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun $\det(A)$ berechnen. Der Satz zeigt uns eine einfache Möglichkeit, die Determinante einer Dreicksmatrix zu berechnen, und wir wissen außerdem, wie sich elementare Zeilen-/Spaltenoperationen auswirken. Dies nutzen wir nun aus und erhalten:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-4) = -4.$$

Hier haben wir einfach nur im ersten Schritt die erste Zeile mit -3 multipliziert und auf die zweite Zeile addiert Dadurch ändert sich die Determinante nicht. Im vorletzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Determinante einer Dreiecksmatrix das Produkt der Diagonaleinträge ist. ■

Beispiel 168
Wir wollen nun unser Beispiel von oben auf den allgemeinen Fall ausweiten und betrachten

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d - \frac{cb}{a} \end{pmatrix} = a\left(d - \frac{bc}{a}\right) = ad - bc,$$

falls $a \neq 0$. Gilt $a = 0$ so erhalten wir:

$$\det \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & b \end{pmatrix} = -bc.$$

Wir haben also eine allgemeine Formel für die Berechnung der Determinante einer (2×2)-Matrix hergeleitet, nämlich $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$ ■

Beispiel 169
Wir betrachten wieder einmal die Telefonmatrix und berechnen die Determinante zu

$$\begin{aligned} \det(A_{tel}) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da die letzten beiden Zeilen linear abhängig sind. Dies bestätigt außerdem die Eigenschaft, dass A nicht invertierbar ist, falls $\det(A) = 0$, denn in Beispiel 145 in Kapitel 17 haben wir gezeigt, dass die Matrix nicht invertierbar ist. ■

Beispiel 170
Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

nicht invertierbar? Dazu berechnen wir die Determinante.

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} x-1 & 1-x & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & 1-x & x-1 \end{pmatrix} \\ &= (x-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= (x-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x+1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (x-1)^2 (x+2).$$

Im ersten Schritt ziehen wir von der ersten und der letzten Zeile jeweils die zweite ab. Dann ziehen wir aus der ersten und letzten Zeile den Faktor $(x-1)$ und bringen anschließend auf Dreiecksform. Es folgt also, dass die Matrix für $x = 1$ oder $x = -2$ nicht invertierbar ist, da dann die Determinante gleich 0 ist. ■

Beispiel 171

Ähnlich wie in Beispiel 168 wollen wir nun eine allgemeine Formel für die Determinante einer (3×3)-Matrix berechnen. Die Rechnung überlassen wir euch als Übung, diese läuft genauso ab wie bisher, als Ergebnis erhält man die *Formel von Sarrus*:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Ein Merkschema findet ihr in Abbildung 20.1.

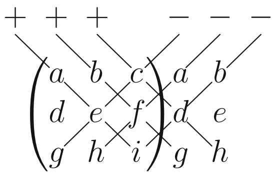

Abb. 20.1: Formel von Sarrus.

Achtung: Dieses Schema gilt nur für (3×3)*-Matrizen, man kann es nicht auf Matrizen höherer Dimension übertragen.* ■

Beispiel 172

Wir wollen nun einmal die Determinante einer (4×4)-Matrix berechnen.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -8 & 4 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1) \cdot (-5) \cdot (-3) = 15
\end{aligned}
$$

wobei wir einmal die dritte und vierte Spalte vertauschen (daher kommt auch das Minuszeichen vor der Determinante). ■

Den Nutzen der Determinante verstehen wir an dem folgenden Beispiel.

Beispiel 173

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
ax + by + bz &= r, \\
bx + ay + bz &= s, \\
bx + by + az &= t,
\end{aligned}
$$

mit $a, b, r, s, t \in \mathbb{R}$ und fragen uns, für welche a, b dieses Gleichungssystem immer eine Lösung hat. Dafür schreiben wir das LGS in Matrixschreibweise und berechnen die Determinante der Matrix.

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a-b & b-a & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b-a & a-b \end{pmatrix} & \\
&= (a-b)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ b & a & b \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (a-b)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a+b & b \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -(a-b)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & a+b & b \end{pmatrix} \\
&= -(a-b)^2 \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a+2b \end{pmatrix} \\
&= -(a-b)^2 (a+2b).
\end{aligned}
$$

Also hat das LGS genau dann für jedes Tripel (r, s, t) eine eindeutige Lösung, wenn $a \neq b$ und $a \neq -2b$ gilt. Übrigens ist die Matrix für genau diese a und b invertierbar. ■

Um kurz auf die Beweise einzugehen:
Wir nutzen immer die drei Eigenschaften der Determinante. Immer, wenn wir Aussagen über Spalten und Zeilen treffen, dann benutzen wir Teil 7, der ja besagt, dass man Spalten und Zeilen vertauschen kann, ohne dass sich die Determinante verändert.
Aus Teil 6 folgt auch: Wenn A nicht invertierbar ist, dann ist auch $A \cdot B$ nicht invertierbar, also lautet die Gleichung in dem Fall $0 = 0$.

Zum Satz 20.3 über die Determinante als Gruppenhomomorphismus: Dieser Satz fasst einige der wichtigsten Aussagen über Determinanten noch einmal zusammen, und zwar: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ invertierbar ($\Rightarrow \det : GL_n(K) \to K\backslash\{0\}$) und die Multiplikativität ($\Rightarrow$ Homomorphismus). Wir wollen hier in diesem Zusammenhang aber nicht weiter auf den Satz eingehen.

Zum Laplace-Entwicklungssatz (Satz 20.4): Diese Formel ist sehr nützlich, wenn die Matrix, von der man die Determinante berechnen will, eine relativ hohe Dimension und dafür relativ viele Nulleinträge hat. Die Aussage wollen wir uns an einem Beispiel klar machen.

Beispiel 174
Wir wollen die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

berechnen.
Wir sehen, dass in der zweiten Spalte nur ein Eintrag ungleich Null ist und entwickeln deshalb nach der zweiten Spalte. Der Eintrag ungleich Null steht an der Stelle (2,6) und damit gilt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^{2+6} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

das heißt, wir streichen einfach die betreffende Zeile und Spalte und berechnen die Restdeterminante, mit dem richtigen Vorzeichen versehen. Jetzt steht in der vierten Zeile nur ein Eintrag und wir erhalten:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun immer die Zeilen, in der die wenigsten Nicht-Null-Einträge stehen, so erhalten wir weiter nach Entwickeln der zweiten Spalte und dritten Zeile

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^5 \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^4 \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^5 \cdot (-1)^4 \cdot (6-2)$$

und damit insgesamt:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\cdot(-1)^8\cdot(-1)^5\cdot(-1)^5\cdot(-1)^5\cdot(-1)^4\cdot(6-2) = -12.$$

■

In diesem Beispiel hatten wir Glück, dass immer nur ein Nicht-Null-Eintrag pro Zeile stand, das nächste Beispiel zeigt, was man macht, wenn mehrere solcher Einträge vorhanden sind.

Beispiel 175

Wir wollen die Determinante von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir entwickeln zunächst nach der dritten Zeile und erhalten:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} &= (-1)^4 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^6 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \cdot (-1)^4 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad +2 \cdot (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + (-1)^5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 + (-1)(2) + 0 + (-1)(2-4) = 0. \end{aligned}$$

■

Wichtig dabei ist, dass man jeweils das richtige Vorzeichen nehmen muss. Dies kann man sich allerdings leicht mit folgendem Schachbrettmuster merken. Man nimmt einfach das Vorzeichen, das an der Stelle steht, an der auch der Eintrag steht, mit dem man entwickelt:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Zur Leibniz-Formel (Satz 20.5): Diese Formel ist wieder mehr technischer Natur, sie wird häufig in Beweisen, aber weniger zum Berechnen von Determinanten genutzt, da die Formel dafür viel zu aufwendig wäre. Die Formel erhält man direkt beim Beweis zur Existenz und Eindeutigkeit der Determinante (siehe Satz 20.1).

Noch eine letzte Anmerkung: Für die Determinante einer Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gibt es auch noch eine andere Schreibweise in der Literatur. Statt $\det(A)$ wird oft auch

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

geschrieben.

Beispiel 176

Beispielsweise ist also

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

■

21 Diagonalisieren und Eigenwerttheorie

Übersicht

In Kapitel 17 über lineare Abbildungen haben wir gesehen, dass wir Darstellungsmatrizen für lineare Abbildungen angeben können (falls es sich um Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen handelt). Diese Matrizen hängen von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ab. Wir fragen uns in diesem Kapitel nun, ob es eine Basis gibt, sodass die Darstellungsmatrix eine „schöne, einfache Form" hat. Wobei wir klären wollen, was mit „schön", und „einfach" gemeint ist. Dies führt uns zur Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren, die auch in der Praxis öfter benutzt wird. Was aber sind diese Eigenwerte und Eigenvektoren, und wofür sind sie gut? Diese und ähnliche Fragen werden wir beantworten. Und auch auf Anwendungen zum Beispiel beim PageRank der großen Suchmaschine Google® werden wir kurz eingehen.

21.1 Definitionen

Definition 21.1 (Eigenwert und Eigenvektor)

1. Sei ϕ ein Endomorphismus eines K-Vektorraumes V. $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von ϕ, wenn ein $v \in V$ existiert, mit $\phi(v) = \lambda \cdot v$.

2. Jedes $v \in V$, $v \neq 0$, das die Gleichung $\phi(v) = \lambda \cdot v$ erfüllt, heißt **Eigenvektor** von ϕ zum Eigenwert λ.

Definition 21.2 (Diagonalisierbarkeit)
Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}(V)$. ϕ heißt **diagonalisierbar**, wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren gibt.

Definition 21.3 (Charakteristisches Polynom)
Seien K ein Körper, $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und $x \in K$, dann heißt

$$P_A := \det(x \cdot E_n - A)$$

das **charakteristische Polynom** von A.

Anmerkung: Das charakteristische Polynom kann man auch durch $P_A := (-1)^n \det(A - x \cdot E_n)$ *berechnen.*

Definition 21.4 (Eigenraum)
Für $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ nennen wir

$$\mathrm{Eig}(A, \lambda) := \{v \in K^n : Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda E)$$

den **Eigenraum** von A zum Eigenwert λ.

Definition 21.5 (Algebraische und geometrische Vielfachheit)
Seien A eine Matrix und P_A das dazugehörige charakteristische Polynom. Die Vielfachheit eines Eigenwertes als Nullstelle des charakteristischen Polynoms P_A bezeichnen wir als **algebraische Vielfachheit**. Die Dimension des Eigenraums $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$ wird als **geometrische Vielfachheit** von λ bezeichnet. Sie ist dabei stets mindestens 1 und höchstens gleich der algebraischen Vielfachheit von λ.

21.2 Sätze und Beweise

Satz 21.1 (Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren)
Seien $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und v_i mit $i = 1, \ldots, k$ Eigenvektoren von A mit paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_i, so sind alle v_i ***linear unabhängig****. Insbesondere gilt $k \leq n$.*

Beweis: Wir führen Induktion über k. Der Fall $k = 1$ ist klar, da $v_1 \neq 0$. Seien also $k > 1$ und der Satz für $k - 1$ bewiesen. Sei

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = 0. \tag{21.1}$$

Anwenden von A auf diese Gleichung ergibt

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i \lambda_i v_i = 0. \tag{21.2}$$

Multiplikation von (21.1) mit λ_1 wiederum ergibt

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i = 0. \tag{21.3}$$

Subtrahieren wir (21.3) von (21.2) ergibt, dass:

$$\sum_{i=2}^{k} \mu_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0.$$

Da $v_2, ..., v_k$ linear unabhängig sind, folgt:

$$\mu_i (\lambda_i - \lambda_1) v_i = 0 \; \forall \; i = 2, \ldots, k$$

und da die Eigenwerte paarweise verschieden sind, damit

$$\mu_i = 0 \; \forall \; i = 2, \ldots, k.$$

Einsetzen in (21.1) ergibt wegen $v_1 \neq 0$ sofort $\mu_1 = 0$. q.e.d.

Satz 21.2 (Zusammenhang von Eigenwerten und charakteristischem Polynom)
Seien V ein K-Vektorraum, $\phi \in \mathrm{End}(V)$ und P_ϕ das zugehörige charakteristische Polynom, dann gilt für $\lambda \in K$:

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \phi \Leftrightarrow P_\phi(\lambda) = 0.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& \lambda \text{ ist Eigenvektor von } \phi \\
\Leftrightarrow\ & \exists v \in V \setminus \{0\} \text{ mit } \phi(\mathrm{v}) {=} \lambda(\mathrm{v}) \\
\Leftrightarrow\ & \exists v \in V \setminus \{0\} \text{ mit } \lambda v - \phi(v) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \exists v \in V \setminus \{0\} \text{ mit } (\lambda \mathrm{Id}_V - \phi)(v) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \dim(\ker(\lambda \mathrm{Id}_V - \phi)) > 0 \\
\Leftrightarrow\ & \dim(\mathrm{im}(\lambda \mathrm{Id}_V - \phi)) < \dim(V) \\
\Leftrightarrow\ & \mathrm{rang}(\lambda \mathrm{Id}_V - \phi) < \dim(V) \\
\Leftrightarrow\ & \det(\lambda \mathrm{Id}_V - \phi) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & P_\phi(\lambda) = 0.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 21.3 (Diagonalisierbarkeitskriterium)
Hat $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ n paarweise verschiedene Eigenwerte, so ist A diagonalisierbar.

Beweis: Dies folgt sofort aus Satz 21.1 q.e.d.

Satz 21.4
Eine Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn eine Basistransformationsmatrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ gilt, wobei D eine Diagonalmatrix darstellt.

Satz 21.5 (Charakteristisches Polynom von ähnlichen Matrizen)
Sind A und B ähnliche Matrizen (siehe Definition 15.3), so gilt:

$$P_A = P_B.$$

Beweis: Sei also $B = S^{-1}AS$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$S^{-1} \cdot \lambda \cdot E_n \cdot S = S^{-1} \cdot \lambda \cdot S = \lambda \cdot S^{-1} \cdot S = \lambda \cdot E_n$$

und damit:

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda \cdot E_n) &= \det(S^{-1}AS - S^{-1} \cdot \lambda \cdot E_n \cdot S)\\ &= \det(S^{-1}(A - \lambda \cdot E_n)S)\\ &= \det(S^{-1}) \cdot \det(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \det(S)\\ &= \det(A - \lambda \cdot E_n).\end{aligned}$$

q.e.d.

Satz 21.6 (Der Satz von Cayley-Hamilton)
Sind $A \in \mathcal{M}_{n,n}(K)$ und P_A das zugehörige charakteristische Polynom, so gilt:

$$P_A(A) = 0.$$

21.3 Erklärungen zu den Definitionen

In Kapitel 17 über lineare Abbildungen haben wir bereits gesehen, dass wir Darstellungsmatrizen für lineare Abbildungen angeben können (falls es sich um Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen handelt). Diese Matrizen hängen von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$ ab. Wir fragen uns nun, ob es eine Basis gibt, sodass die Darstellungsmatrix eine „schöne, einfache Form“ hat. Wobei wir vorher klären sollten, was mit „schön“ und „einfach“ gemeint ist. Die einfachsten Matrizen sind Diagonalmatrizen, also Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Doch lässt sich immer eine passende Basis finden?
Anmerkung: Wir werden in diesem ganzen Kapitel immer, wenn wir endlichdimensionale Vektorräume behandeln, Endomorphismen mit Matrizen bezüglich der Standardbasis identifizieren, was wir nach dem Kapitel über lineare Abbildungen ohne Probleme machen dürfen.

Zur Definition 21.1 von Eigenwert und Eigenvektor: *Achtung: Laut Definition kann der Nullvektor kein Eigenvektor sein, aber* 0 *kann sehr wohl ein Eigenwert sein!*
Was bedeutet dies nun? Der Endomorphismus ϕ nimmt also den Vektor v, verändert ihn aber nicht großartig, sondern macht nur ein Vielfaches von ihm daraus. Da dies womöglich nicht ganz einfach zu verstehen ist, wollen wir einige Beispiele anführen.

Beispiel 177

- Wenn man eine Matrix mit einem Vektor multipliziert, ergibt sich ein neuer Vektor. Eine Matrix ist also ein Operator, der Vektoren anschaulich dreht, streckt oder staucht. Die Eigenvektoren einer Matrix sind genau diejenigen, die unter der Matrix nur gestreckt oder gestaucht werden - ihre Richtung bleibt jedoch erhalten. Der Streckungsfaktor ist der zugehörige Eigenwert.

- Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ und wählen

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

  mit $\alpha \in [0,2\pi)$. Diese Matrix stellt eine Drehung um den Ursprung mit Winkel α dar. Betrachtet man diese Drehung, so wird schnell klar, dass es nur für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$ Eigenvektoren geben kann.

- Wir betrachten den Vektorraum aller reellen Folgen, $V = (a_1, a_2, a_3, ...)$ und die beiden „Verschiebe-Endomorphismen“

$$\phi(a_1, a_2, a_3, ...) = (a_2, a_3, a_4, ...) \qquad \psi(a_1, a_2, a_3, ...) = (0, a_1, a_2, ...).$$

Haben ϕ und ψ Eigenvektoren? Zunächst einmal zu ϕ:

Angenommen, es existieren $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$, für die $\phi(v) = \lambda \cdot v$ gilt. Dann gilt $\forall i \; a_{i+1} = \lambda a_i$. Wir erhalten also Folgen der Form $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$. Jede Folge dieser Form ist ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert λ, da $(1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \neq (0,0,0, \ldots) \; \forall \lambda$. Insbesondere sind alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwerte von ϕ.

Und was ist mit ψ?

Mit derselben Überlegung wie oben erhalten wir die Bedingung $\lambda a_1 = 0$, also $\lambda = 0$ oder $a_1 = 0$. Wir untersuchen zunächst $\lambda \neq 0 \Rightarrow a_1 = 0$. Dadurch ergibt sich analog $\lambda a_2 = 0$, also $a_2 = 0$, da ja $\lambda \neq 0$ war. Induktiv ergibt sich damit $a_i = 0 \; \forall i$, also erhalten wir die Nullfolge: $(0,0,0, ...)$. Für $\lambda \neq 0$ gibt es also keine Eigenvektoren. Was ist mit $\lambda = 0$? Dann würde gelten:

$$(0, a_1, a_2, ...) = \psi(a_1, a_2, a_3, ...) = 0 \cdot (a_1, a_2, a_3, ...) = (0,0,0, ...)$$

Und wieder erhalten wir $a_i = 0 \; \forall \; i$, also hat ψ überhaupt keine Eigenvektoren und Eigenwerte. ■

Achtung! Selbst wenn A diagonalisierbar ist, muss nicht jeder Vektor Eigenvektor sein. Auch die Linearkombination von zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten ist im Allgemeinen kein Eigenvektor, wie die Abbildung 21.1 zeigt:

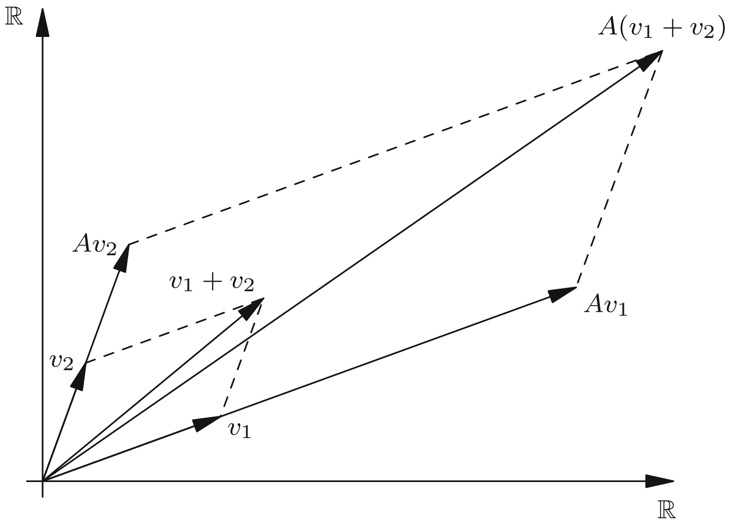

Abb. 21.1: Die Summe zweier Eigenvektoren muss selbst kein Eigenvektor sein.

Zur Definition 21.2 von Diagonalisierbarkeit: Dies ist nun die Definition, die uns zu dem bringt, was wir wollten. Ist V nämlich endlich-dimensional, so bedeutet das genau, dass

$$M_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei λ_i der Eigenwert des i-ten Basisvektors ist.
Wie wir erkennen, ob V nun eine solche Basis aus Eigenvektoren besitzt, werden wir gleich in den folgenden Beispielen feststellen.

Zur Definition 21.3 des charakteristischen Polynoms: Wir wollen uns nun mit dem systematischen Bestimmen von Eigenwerten und Eigenvektoren befassen und betrachten hierfür den Fall eines endlich-dimensionalen Vektorraumes. In den obigen Beispielen war noch relativ leicht zu erkennen, ob die Endomorphismen Eigenwerte haben oder nicht. Was ist jetzt, wenn man kompliziertere Endomorphismen und vor allem höher-dimensionale Vektorräume hat?
Was ist zum Beispiel mit $V = \mathbb{R}^6$ und

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 10 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}?$$

(Jeder der sich den $\mathbb{R}^6$ bildlich vorstellen und geometrisch interpretieren kann, was ϕ bewirkt, der möge sich bitte schleunigst bei uns melden :-).) Was macht man also mit solch monströsen Matrizen? Wie berechnet man die Eigenwerte? Hierfür benötigt man das charakteristische Polynom.

Beispiel 178

Wir wollen nun einmal das charakteristische Polynom von

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir berechnen zunächst

$$x \cdot E_2 - A = \begin{pmatrix} x - \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & x - \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} P_A &= \det\left(\begin{pmatrix} x-\cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & x-\cos(\alpha) \end{pmatrix}\right) = (x-\cos(\alpha))^2 + \sin^2(\alpha) \\ &= x^2 - 2\cos(\alpha) + \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = x^2 - 2\cos(\alpha) + 1. \end{aligned}$$

■

Zur Definition 21.4 des Eigenraums: Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ ist der Untervektorraum, der von allen zugehörigen Eigenvektoren aufgespannt wird. Wie wir nun Eigenwerte und damit dann auch die zugehörigen Eigenräume bestimmen, werden wir im Verlauf dieses Kapitels noch lernen und üben.

Zur Definition 21.5 der algebraischen und geometrischen Vielfachheit: Wir hoffen, dass sich die Definition 21.5 von selbst erklärt und bei den folgenden Beispielen noch deutlich wird. Wir halten nur fest (dahinter steckt eigentlich ein Satz), dass eine Matrix auf jeden Fall diagonalisierbar ist, wenn algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

21.4 Erklärungen zu den Sätzen und Beweisen

Zum Satz 21.1 über die lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren: Dieser Satz ist sehr nützlich, denn wenn Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind, so kommen diese ja als Basisvektoren infrage. Insbesondere kann man aus ihm leicht den Satz 21.3 folgern, womit wir schon ein starkes Werkzeug zur Hand haben, um Matrizen auf Diagonalisierbarkeit zu überprüfen. Den Satz haben wir per Induktion bewiesen, wobei wichtig war, dass keiner der Eigenvektoren der Nullvektor ist, denn dieser ist ja immer linear abhängig.

Zum Satz 21.2 über den Zusammenhang von Eigenwerten und dem charakteristischen Polynom: Jetzt können wir endlich ganz einfach die Eigenwerte bestimmen. Wir brauchen nur das charakteristische Polynom berechnen, und die Eigenwerte sind die Nullstellen dieses Polynoms.

Beispiel 179

Wir nehmen die Matrix aus Beispiel 178:

$$\phi = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Wir haben bereits das charakteristische Polynom zu $P_\phi = x^2 - 2\cos(\alpha) + 1$ berechnet. Was sind nun die Nullstellen dieses Polynoms? Mit der p, q-Formel ergibt sich:

$$\lambda_{1,2} = \cos(\alpha) \pm \sqrt{\cos^2(\alpha) - 1}$$

mit einer Diskriminante $D = \cos^2(\alpha) - 1$. P_ϕ hat also reelle Nullstellen, falls

$$\cos^2(\alpha) = 1 \Leftrightarrow (\cos(\alpha) = 1 \text{ oder } \cos(\alpha) = -1) \Leftrightarrow (\alpha = 0 \text{ oder } \alpha = \pi),$$

also haben wir hier genau das berechnet, was wir uns in Beispiel 177 schon überlegt haben. ■

Im Beweis von Satz 21.2 haben wir in den drei Umformungen nur die Definitionen eingesetzt und ein wenig umgeformt, und erkannt, dass eben dieses v im Kern von ϕ liegen muss, also deswegen das Bild nicht ganz V sein kann. Deshalb hat der Endomorphismus $\lambda\mathrm{Id}_v - \phi$ (bzw. die zugehörige Matrix) nicht vollen Rang, die Determinante muss also 0 sein.

Zum Satz 21.4: Der Satz 21.4 sagt gerade aus, dass eine Matrix A genau dann diagonalisierbar ist, wenn eine Transformationsmatrix T existiert, sodass $D = T^{-1}AT$ gilt. Die Frage ist nun, wie sich die Diagonalmatrix D und die Transformationsmatrix T zusammensetzen. Dies ist ganz einfach: Die Diagonalmatrix D besteht gerade aus den Eigenwerten auf der Diagonalen und die Matrix T führt in den Spalten die Eigenvektoren. Solltet ihr solch eine Aufgabe also irgendwo einmal sehen, wisst ihr jetzt, was zu tun ist :-). Siehe dazu auch das Beispiel 180. Dort führen wir es vor.

Zum Satz 21.5 über das charakteristische Polynom von ähnlichen Matrizen: Dieser Satz wird in Verbindung mit dem Kriterium aus Satz 21.3 wichtig sein, um die Diagonalmatrix, die wir berechnen wollen, zu bestimmen. Wenn wir n paarweise verschiedene Eigenvektoren λ_i haben, so hat unsere Matrix das charakteristische Polynom

$$P_A = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i).$$

Da die Diagonalmatrix zu der Matrix A ähnlich ist, muss die Diagonalmatrix dasselbe charakteristische Polynom haben. Das geht nur, wenn die Diagonaleinträge gerade diese λ_i sind. Folglich haben ähnliche Matrizen auch dieselben Eigenwerte.

Drei abschließende Beispiele:

Beispiel 180

- Gegeben sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun eine Basis vom $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von φ bestimmen. Sprich: Wir diagonalisieren die Matrix A. Dazu bestimmen wir das charakteristische Polynom. Die Nullstellen dieses Polynoms sind dann die Eigenwerte:

$$\begin{aligned} P_A &= \det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow \lambda \in \{-1, 3\}. \end{aligned}$$

Die beiden Eigenwerte von φ sind daher $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Wir können also schon einmal nach Satz 21.3 festhalten, dass die Matrix diagonalisierbar ist. Wir berechnen nun die Eigenräume zu den Eigenwerten, also auch die Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A,-1) = \ker\left(A - (-1)\cdot E_2\right) &= \ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Alle Vielfachen des Vektores $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind demnach Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$.

Analog berechnet man den Eigenraum zum Eigenwert 3:

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A,3) = \ker\left(A - 3\cdot E_2\right) &= \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Eine Basis aus Eigenvektoren von φ des $\mathbb{R}^2$ ist also zum Beispiel gegeben durch

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Nach Satz 21.4 gilt nun $D = T^{-1}AT$, wobei

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Diagonalmatrix stehen gerade die Eigenwerte auf der Diagonalen und in T die Eigenvektoren zu den entsprechenden Eigenwerten. Reihenfolge beachten! Das heißt, wenn ihr in D zuerst den Eigenwert -1 schreibt, dann muss auch in der ersten Spalte von T der Eigenvektor zum Eigenwert -1 stehen. Um T^{-1} zu erhalten, müsst ihr T einfach nur invertieren. Konkret bedeutet das

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Wir wollen jetzt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

diagonalisieren. Zunächst berechnen wir das charakteristische Polynom von A:

$$\begin{aligned} P_A &= \det\left(\begin{pmatrix} x+3 & 2 & 2 \\ -2 & x-3 & -2 \\ 2 & 2 & x+1 \end{pmatrix}\right) = \det\left(\begin{pmatrix} x+3 & 2 & 2 \\ -2 & x-3 & -2 \\ 0 & x-1 & x-1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (x-1)\det\left(\begin{pmatrix} x+3 & 2 & 2 \\ -2 & x-3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= (x-1)\det\left(\begin{pmatrix} x+3 & 0 & 0 \\ -2 & x-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = (x-1)^2(x+3). \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte 1 (zweimal!) und 3. Wir berechnen nun die Eigenvektoren bzw. die Eigenräume. Zunächst zum Eigenwert 1:

$$\operatorname{Eig}(A,1) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Und zum Eigenwert -3:

$$\mathrm{Eig}(A,-3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -6 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Wir haben also nur zwei linear unabhängige Eigenvektoren finden können. Die Matrix ist also nicht diagonalisierbar! *Achtung: Wenn eine* $(n \times n)$*-Matrix nicht* n *verschiedene Eigenwerte besitzt, dann heißt das aber noch lange nicht, dass sie nicht diagonalisierbar ist. Denkt zum Beispiel an die Einheitsmatrix. Diese hat nur die Eigenwerte* 1*, ist aber durchaus diagonalisierbar.*

- Wir geben nun noch ein Beispiel für das Diagonalisieren einer Matrix mit komplexen Zahlen: Dazu betrachten wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom:

$$P_A = \det\left(A - x \cdot E_3\right) = \det \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$
$$= \det \begin{pmatrix} -1-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & -4 \\ 0 & 4 & 3-x \end{pmatrix} .$$

Die Determinante könnten wir nun mittels Laplace-Entwicklung oder der Regel von Sarrus berechnen (siehe dazu auch gegebenenfalls Kapitel 20). Es ergibt sich $P_A = (-1-x)((3-x)^2+16)$. Es ergeben sich die Eigenwerte $x_1 = -1$, $x_2 = 3+4i$ und $x_3 = 3-4i$. Wir haben also insgesamt drei verschiedene Nullstellen und damit drei paarweise verschiedene Eigenwerte bestimmt. Das bedeutet gerade, dass die Matrix A diagonalisierbar ist. Um jetzt die Eigenvektoren zu berechnen bzw. die Eigenräume zu bestimmen, behelfen wir uns mit einem kleinen „Trick“, um möglichst wenig zu rechnen, denn Rechnen liegt einem Mathematiker bekanntlich ja nicht :-). Dazu setzen wir $(-1-x)((3-x)^2+16) = (x+1)(x-\lambda)(x-\overline{\lambda})$, wobei wir mit $\overline{\lambda}$ das konjugiert Komplexe von λ meinen. Weiterhin bedenken wir, dass

$$\lambda^2 - 6\lambda + 25 = 0 \text{ und } \overline{\lambda}^2 - 6\overline{\lambda} + 25 = 0. \tag{21.4}$$

Nun bestimmen wir die Eigenräume:

$$\operatorname{Eig}(A,-1) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Die anderen Eigenräume ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A,\lambda) &= \ker \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 4 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 4 & \lambda^2-6\lambda+25 \end{pmatrix} \\ &\overset{(21.4)}{=} \ker \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3-\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Den Eigenraum bzw. der Eigenvektor zum komplex konjugierten Eigenwert $\overline{\lambda} = 3-4i$ ergibt sich durch genau dieselbe Rechnung wie eben durch Vertauschen von λ und $\overline{\lambda}$. Wir erhalten demnach den „komplex konjugierten Eigenvektor"

$$\operatorname{Eig}(A,\overline{\lambda}) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 4/3+\lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Dies soll uns an Beispielen genügen. ■

Wir fassen nun nochmals die Eigenwertbestimmung in vier Schritten zusammen und schauen uns danach ein paar Anwendungen an.

1. Schritt: Stelle das charakteristische Polynom auf.

2. Schritt: Bestimme die Nullstellen dieses Polynoms. Dies sind die Eigenwerte der Matrix.

3. Schritt: Bestimme die dazugehörigen Eigenräume und damit auch ihre Dimensionen.

4. Schritt: Prüfe, ob die Summe der geometrischen Vielfachheiten gleich der Dimension des entsprechenden Vektorraums ist.

Bemerkung: Für unsere (6×6)-Matrix von oben ergibt sich übrigens

$$P_A = x^6 - 9x^5 - 86x^4 - 94x^3 - 3014x^2 + 1348x + 13584.$$

Dadurch ergeben sich die 4 reellen Eigenwerte (gerundet)

$$x_1 = -7{,}561942112828505, \qquad x_2 = -1{,}8952310834641137,$$
$$x_3 = 2{,}118086332879199, \qquad x_4 = 15{,}635973697306177$$

mit zugehörigen Eigenvektoren (Werte gerundet)

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0{,}429 \\ -0{,}0304 \\ -0{,}382 \\ -0{,}345 \\ 0{,}729 \\ 0{,}132 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{pmatrix} -0{,}557 \\ 0{,}434 \\ -0{,}145 \\ 0{,}142 \\ -0{,}606 \\ 0{,}305 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{pmatrix} -0{,}733 \\ -0{,}123 \\ -0{,}171 \\ 0{,}258 \\ -0{,}251 \\ 0{,}538 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0{,}429 \\ 0{,}505 \\ 0{,}310 \\ 0{,}353 \\ 0{,}496 \\ 0{,}306 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Natürlich lassen sich solche Werte nicht mehr von Hand berechnen, sondern man ist auf numerische Computeralgebrasysteme, wie zum Beispiel MAPLE® oder MATLAB® angewiesen.

Zwei Anwendungen der Eigenwerttheorie: Die Theorie der Eigenwerte hat viele Anwendungen. Wir geben hier nur zwei an, geben aber jedem Leser den Rat, im Studium besonders gut aufzupassen (das sollt ihr ja sowieso :-)), dann wird euch auffallen, wie oft euch der Begriff des Eigenwertes oder Eigenvektors begegnet und ihr werdet (hoffentlich) die starke Theorie dahinter lieben lernen.

- Gegeben sei eine diagonalisierbare Matrix A. Wir wollen A^{2009} berechnen. Wie macht man denn sowas? Denn 2009-mal Matrizenmultiplikation durchzuführen, ist ja wohl nicht möglich. Also erst einmal nachdenken, und dann rechnen. Denkt vor allem an Satz 21.4: Da A nun einmal nach Voraussetzung diagonalisierbar ist, existiert eine Transformationsmatrix T (siehe Definition 17.7 aus Kapitel 17), sodass $D = T^{-1}AT$. Dies ist zu $A = TDT^{-1}$ äquivalent, denn wir wissen ja bereits seit Kapitel 17, dass Transformationsmatrizen invertierbar sind. Nun setzen wir an:

  $$A^{2009} = \left(TDT^{-1}\right)^{2009} = \underbrace{\left(TDT^{-1}\right)\left(TDT^{-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(TDT^{-1}\right)}_{2009\text{-mal}}.$$

  Wegen der Assoziativität der Matrix-Multiplikation können die Klammern weggelassen werden:

  $$A^{2009} = TDT^{-1} \cdot TDT^{-1} \cdot \ldots \cdot TDT^{-1},$$

wobei nun die Matrizen $T^{-1}T$ jeweils zur Einheitsmatrix werden, und es bleibt

$$A^{2009} = TD^{2009}T^{-1}$$

übrig. Die 2009-fache Potenz der Diagonalmatrix lässt sich offensichtlich leicht berechnen, indem man jeden Diagonaleintrag mit 2009 potenziert und so haben wir auf elegante Art und Weise die 2009te Potenz der Matrix A berechnet. Wir müssen A eben nur diagonalisieren, um an die Eigenwerte und Eigenvektoren zu gelangen.

- Eine weitere berühmte Anwendung der Eigenwerte findet sich beim PageRank von Google®. Die Gewichtung der Seiten wird dort ebenfalls auf ein Eigenwertproblem zurückgeführt. Es würde den Rahmen des Buches sprengen, wenn wir dies ausführlicher darstellen würden. Daher nur so viel: Google® bastelt sich eine sogenannte Bewertungsmatrix (dort ist entscheidend, wie „wichtig“ eine Seite ist, das heißt, wie viele Links auf welche Seiten verweisen) und diagonalisiert diese. Ein ganz bestimmter Vektor gibt dann das Ranking an. Wer mehr erfahren möchte, sei auf den sehr interessanten Artikel in [LB] verwiesen.

Für weitere Anwendungen und eine ausführliche Beschreibung der Eigenwerttheorie von Google® verweisen wir auf unser Online-Angebot:

http://www.mathestudium-tutor.de

Symbolverzeichnis

$:=$	ist definiert als
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient
$\cap$	Durchschnitt
$\cup$	Vereinigung
δ_{ij}	Kronecker-Delta
$\dot{\cup}$	Disjunkte Vereinigung
$\exists$	Es existiert
$\exists!$	Es existiert genau ein
$\forall$	Für alle
$\inf(A)$	Infimum von A
$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$	Integral der Funktion f über das Intervall $[a,b]$
$\liminf$	Limes inferior
$\limsup$	Limes superior
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen mit der Null
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\overline{z}$	Konjugiert komplexe Zahl zu z
$\prod$	Produktzeichen
sign	Vorzeichenfunktion
$\subset$	Teilmenge von
$\sum$	Summenzeichen
$\sup(A)$	Supremum von A
$\operatorname{im}(f)$	Bild von f
$\operatorname{Im}(z)$	Imaginärteil von z
$\ker(f)$	Kern von f
$\operatorname{Re}(z)$	Realteil von z
$\vee$	Das logische „Oder“
$\wedge$	Das logische „Und“
f'	Ableitung von f
$n!$	Fakultät
Korollar	ist eine Folgerung aus einem Satz.
Lemma	ist ein Hilfssatz, den man zum Beweis eines anderen Satzes benötigt.
O.B.d.A.	Dies bedeutet „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“.

Literaturverzeichnis

[AE08] Amann, H. und Escher, J. (2008). *Analysis I (Grundstudium Mathematik).* 4. Auflage. Birkhäuser.

[AZ03] Aigner, M. und Ziegler, G. M. (2003). *Das Buch der Beweise: Buch über die Beweise für mathematische Sätze, z.B. Bertrandsches Postulat, Zwei-Quadrate-Satz von Fermat, Starrheitssatz von Cauchy, Borsuk-Vermutung, Satz von Turan.* 2. Auflage. Berlin: Springer.

[Beh08] Behrends, E. (2008). *Analysis Band 1: Ein Lernbuch für den sanften Wechsel von der Schule zur Uni.* 4. Auflage. Vieweg und Teubner.

[Beu03] Beutelspacher, A. (2003). *Lineare Algebra: Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen. Mit liebevollen Erklärungen, einleuchtenden Beispielen ... Nutzen der Studierenden der ersten Semester.* 6. Auflage. Vieweg und Teubner.

[Beu06] Beutelspacher, A. (2006). *"Das ist o.B.d.A. trivial!": Eine Gebrauchsanleitung zur Formulierung mathematischer Gedanken mit vielen praktischen Tipps für Studierende der Mathematik und Informatik.* 8. überarb. Auflage. Vieweg und Teubner.

[Bos08] Bosch, A. (2008). *Lineare Algebra.* 4. überarbeitete Auflage. Berlin: Springer.

[Fis08] Fischer, G. (2008). *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger.* 16. überarb. u. erw. Auflage. Vieweg+Teubner.

[For08] Forster, O. (2008). *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.* 9. überarbeitete Auflage. Vieweg und Teubner.

[Fri08] Fritzsche, K. (2008). *Grundkurs Analysis 1: Differentiation und Integration in einer Veränderlichen.* 2. Auflage. Spektrum Akademischer Verlag.

[Fur95a] Furlan, P. (1995). *Das Gelbe Rechenbuch 1: für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker: Bd 1.* Verlag Martina Furlan.

[Fur95b] Furlan, P. (1995). *Das Gelbe Rechenbuch 2: für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker: Bd 2.* Verlag Martina Furlan.

[Fur95c] Furlan, P. (1995). *Das Gelbe Rechenbuch 3: für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker: Bd 3.* Verlag Martina Furlan.

[Her07] Herrmann, N. (2007). *Mathematik ist überall.* 3. korr. Auflage. Oldenbourg.

[Heu09] Heuser, H. (2009). *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* 17. durchges. Auflage. Vieweg und Teubner.

[Koe] Koehler, A. (alias pendragon302). *Reihen.* URL: http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=732 (besucht am 28. 07. 2009).

[LB] Leise, T. und Bryan, K. *The $25,000,000,000 EIGENVECTOR THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE.* URL: http://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf (besucht am 28. 07. 2009).

[ML] Modler, F. und Lauenstein, G. *Analysis I - Teil 1: Einführung und Grundlagen.* URL: http://www.matheplanet.com/matheplanet/nuke/html/article.php?sid=1165 (besucht am 28. 07. 2009).

[Tim96] Timmann, S. (1996). *Repetitorium der Analysis Teil 1.* 2. Auflage. Binomi Verlag.

[Wil97] Wille, D. (1997). *Repetitorium der Linearen Algebra Teil 1.* 2. Auflage. Binomi Verlag.

[Woh09] Wohlgemuth, M., Hrsg. (2009). *Mathematisch für Anfänger,* Spektrum Akademischer Verlag.

[Woh] Wohlgemuth, M. (alias matroid). *Lineare Algebra für Dummies.* URL: http://www.mathe-online.at/materialien/matroid/files/lafd1.pdf (besucht am 28. 07. 2009).

Index