

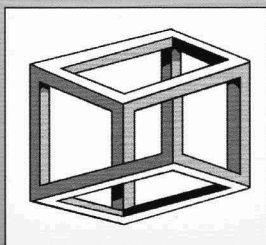
Mathematik zum Studiumsanfang

**die wichtigsten Grundlagen
aus der Schulzeit
verständlich erklärt**

6. überarbeitete Auflage

mit zahlreichen Abbildungen

Peter Dörsam



Vorwort

Diese Ausarbeitung bietet eine effektive Hilfe für den Studiumsbeginn. Die Stoffauswahl spiegelt nicht den gesamten Schulstoff wider, sondern es wurden die Zusammenhänge dargestellt, die in zahlreichen Studiengängen benötigt werden und bei denen erfahrungsgemäß für viele Studierende eine Auffrischung von Vorteil ist.

Diese Ausarbeitung wurde bewusst recht knapp gehalten, auf diese Weise bietet sie einen schnellen Einstieg in die wichtigsten mathematischen Grundlagen bzw. für Studiengänge mit geringeren mathematischen Anforderungen eventuell auch eine hinreichende mathematische Grundlage.

Bei der zweiten Auflage wurden einige Überarbeitungen vorgenommen und es wurde eine Seite zu mathematischen Zeichen hinzugefügt. In der dritten Auflage wurden zahlreiche Ergänzungen vorgenommen, so wurde z.B. ein Abschnitt zu der Anwendung von Logarithmen hinzugefügt. In der vierten Auflage wurde dieser Abschnitt erweitert und es wurden die Abschnitte 2.1, 3.1 und 3.2 überarbeitet. Bei der fünften und der vorliegenden sechsten Auflage wurden einige kleinere Überarbeitungen vorgenommen.

Eine weitaus ausführlichere Darstellung des Stoffes findet sich in den Bänden "Oberstufenmathematik leicht gemacht" aus dem PD-Verlag, diese sind primär auf Schüler der Oberstufe ausgerichtet, bieten aber auch Studierenden mit größeren Defiziten in Mathematik eine wertvolle Hilfe. Darüber hinaus stellt der Titel "Mathematik anschaulich dargestellt – für Studierende der Wirtschaftswissenschaften" den mathematischen Stoff für das BWL- bzw. VWL-Studium in einer verständlichen Form dar. Dieser Titel eignet sich auch als mathematische Grundlage für Studierende anderer Fächer. Auf der Rückseite dieses Buches finden Sie eine Übersicht über die zur Zeit erhältlichen Titel. Darüber hinaus erhalten Sie aktuelle Informationen im Internet: <http://www.pd-verlag.de>

Peter Dörsam

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

1. Auflage April 1997 (ISBN 3-930737-51-5)
2. überarbeitete Auflage Februar 1999 (ISBN 3-930737-52-3)
3. überarbeitete und erweiterte Auflage Januar 2002 (ISBN 3-930737-53-1)
4. überarbeitete Auflage Dezember 2003 (ISBN 3-930737-54-X)
5. überarbeitete Auflage 2005, 24. - 32.Tausend (ISBN 3-930737-55-8)
6. überarbeitete Auflage 2007, 33. - 44.Tausend

© Copyright 1997 - 2005 by PD-Verlag, Everstorfer Str. 19, 21258 Heidenau,
Tel. 04182/401037, FAX: 04182/401038
<http://www.pd-verlag.de>, e-mail: mail@pd-verlag.de

Das Werk, einschließlich aller Abbildungen, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urhebergesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar.

ISBN 978-3-86707-506-0

Inhaltsverzeichnis

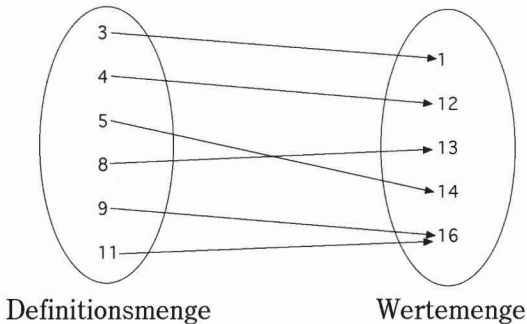
1 Funktionen	5
1.1 Begriff der Funktion	5
1.2 Graphen von Funktionen	7
1.3 Parabeln / Ganzrationale Funktionen	9
1.4 Wurzelfunktionen	10
1.5 Exponentialfunktionen	12
1.6 Darstellung des Taschenrechners für sehr große und sehr kleine Zahlen	14
1.7 Rechenregeln für Exponenten	14
1.8 Logarithmen	15
1.9 Rechenregeln für Logarithmen	16
1.10 Anwendungen von Logarithmen	18
2 Steigung von Funktionen/Ableitungen	20
2.1 Grundlagen	20
2.2 Ableitung für Potenzen von x	23
2.3 Ableitungen für Sinus- und Cosinusfunktionen	24
2.4 Ableitungen von Exponentialfunktionen und Logarithmen	24
2.5 Kettenregel	25
2.6 Produktregel	27
2.7 Quotientenregel	29
2.8 Ableitungsübersicht	30
3 Bestimmung von Extremwerten /Hoch-, Tief- und Sattelpunkte	31
3.1 Notwendige Bedingung	31
3.2 Hinreichende Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte	32
3.3 Schema zur Bestimmung von Extremwerten	35
4 Vektorrechnung	36
4.1 Grundlagen	36
4.2 Lineare Abhängigkeit	38
4.3 Vektorräume	40
4.4 Dimension und Basis	42

5	Lösungen von Gleichungen	44
5.1	Lineare Gleichungen	44
5.2	Quadratische Gleichungen	44
5.2.1	Quadratische Ergänzung	44
5.2.2	pq-Formel	45
5.2.3	Weitere Zusammenhänge	46
5.3	Homogene Gleichungen höherer Ordnung	47
5.4	Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung	47
5.5	Gleichungen mit Quotienten	49
5.6	Komplexere Gleichungen	49
5.7	Gleichungssysteme	51
5.7.1	Lineare Gleichungssysteme	51
5.7.2	Nichtlineare Gleichungssysteme	53
5.8	Ungleichungen	54
6	Grundlegende Rechenregeln	56
6.1	Wurzeln und Potenzen	56
6.2	Logarithmen	57
6.3	Multiplizieren von Klammern	58
6.4	Bruchrechnen	58
6.5	Ableitungsregeln	58
7	Typische Fehler	59
8	Mathematische Zeichen	60
9	Index	63

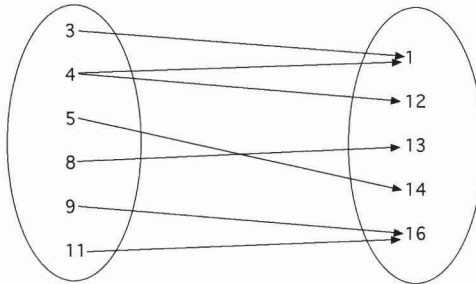
1 Funktionen

1.1 Begriff der Funktion

Eine Funktion stellt eine Zuordnung zwischen verschiedenen Mengen dar. Dabei ist nicht jede Zuordnung eine Funktion, sondern nur **eindeutige** Zuordnungen sind Funktionen. D.h. jedem Element der Definitionsmenge wird nur ein einziges Element der Wertemenge zugeordnet. Eine Funktion wäre z.B. folgende Zuordnung:



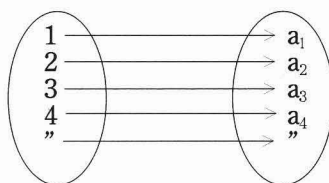
Die linke Menge ist die Definitionsmenge. In obigem Fall wird jedem Element der Definitionsmenge nur ein Element der Wertemenge zugeordnet, daher handelt es sich bei dieser Zuordnung um eine Funktion. Nachfolgend ist das Beispiel leicht geändert, der 4 werden nun zwei verschiedene Werte zugeordnet, daher handelt es sich hier um keine Funktion:



In den beiden dargestellten Fällen wurde die Zuordnung durch Pfeile beschrieben, und es handelte sich um ziemlich "kleine" Mengen. In der Regel betrachtet man Funktionen, die aus einer unendlichen Definitionsmenge

menge in eine unendliche Wertemenge abbilden.

Eine Folge ordnet jeweils einer natürlichen Zahl n ein entsprechendes Folgenglied a_n zu. Da hierbei jeder Zahl immer nur ein Folgenglied zugeordnet wird, stellen Folgen auch Funktionen dar. Ebenso wird bei Reihen jeweils einer natürlichen Zahl n genau ein bestimmtes Reihenglied s_n zugeordnet. Somit sind auch Reihen Funktionen. Nachfolgend wird die entsprechende Zuordnung für eine Folge angedeutet:

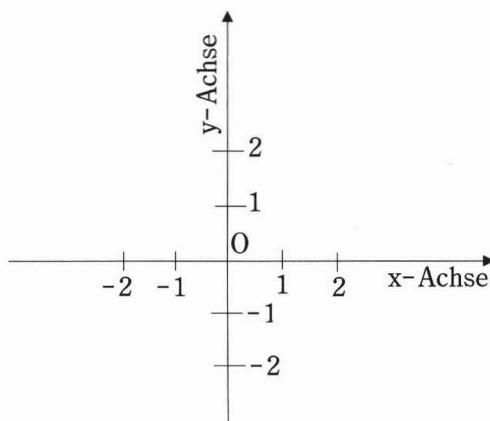


Die meisten nachfolgend betrachteten Funktionen haben allerdings als Definitions- und Wertemengen die Menge der reellen Zahlen ($\mathbb{R}$) oder Teilmengen von $\mathbb{R}$. Während man die natürlichen Zahlen der Reihe nach abzählen kann (diese Eigenschaft nennt man "abzählbar"), ist dies bei den reellen Zahlen nicht möglich (diese Eigenschaft nennt man "überabzählbar"). Es wäre ein hoffnungsloses Unterfangen, die Funktionen, die aus $\mathbb{R}$ oder Teilmengen von $\mathbb{R}$ abbilden, durch einzelne Abbildungspfeile beschreiben zu wollen. Stattdessen wird die Funktion durch eine Abbildungsvorschrift festgelegt, die vorschreibt, welches Element der Wertemenge den jeweiligen Elementen der Definitionsmenge zugeordnet wird. Man schreibt also beispielsweise $f: x \mapsto x^2$; x steht hierbei für ein Element der Definitionsmenge (es ist gebräuchlich, diese Variable x zu nennen, natürlich sind aber auch andere Bezeichnungen möglich). Der Pfeil deutet an, dass jedem x ein Element der Wertemenge zugeordnet wird, das gerade den Wert x^2 hat.

Meistens werden Funktionen aber beschrieben, indem als Gleichung angegeben wird, wie sich der jeweilige Funktionswert aus der Variablen x ergibt. Die zuvor angegebene Funktion lautet so ausgedrückt: $f(x) = x^2$. $f(x)$ steht hierbei für das Element der Wertemenge, das dem jeweiligen x zugeordnet wird. Häufiger schreibt man statt $f(x) = x^2$ auch $y = x^2$, wobei y einfach nur ein gebräuchlicher anderer Name für $f(x)$ ist.

1.2 Graphen von Funktionen

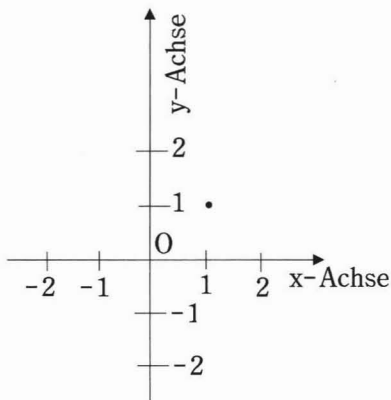
Der Graph einer Funktion ist die Zeichnung dieser Funktion in einem Koordinatensystem. Auf der waagerechten Achse trägt man die x -Werte und auf der senkrechten Achse die y -Werte, also die Funktionswerte $f(x)$, auf. Die waagerechte Achse nennt man auch Abszisse und die senkrechte Ordinate. Nachfolgend ist ein derartiges Koordinatensystem dargestellt:



Derartige Koordinatensysteme, bei denen die Koordinatenachsen senkrecht zueinander stehen, nennt man auch kartesische Koordinatensysteme. Die Stelle in der Mitte, wo sich die Koordinatenachsen schneiden, nennt man den Ursprung des Koordinatensystems, den man auch mit O abkürzt. In der Zeichnung sind die Achsen jeweils nur bis 2 und -2 beschriftet.

Um eine Funktion zu zeichnen, muss man zunächst Wertepaare für die Funktion ermitteln. Es müssen also zu bestimmten x -Werten die zugehörigen y -Werte ermittelt werden. Bei der zuvor betrachteten Funktion, $y = x^2$, ergibt sich z.B. für $x = 1$: $y = 1^2 = 1$. Somit geht die Funktion

durch den Punkt $(1, 1)$, bei dem $x = 1$ und $y = 1$ ist. Dieser ist nebenstehend in das Koordinatensystem eingezeichnet. Um eine absolut exakte Darstellung der Funktion zu erhalten, müssten nun zu allen x -Werten die zugehörigen y -Werte berechnet und eingezeichnet werden. Dies ist aber natürlich gar nicht möglich, denn es gibt ja unendlich viele x -Werte, so dass unendlich viele y -Werte berechnet und eingezeichnet werden

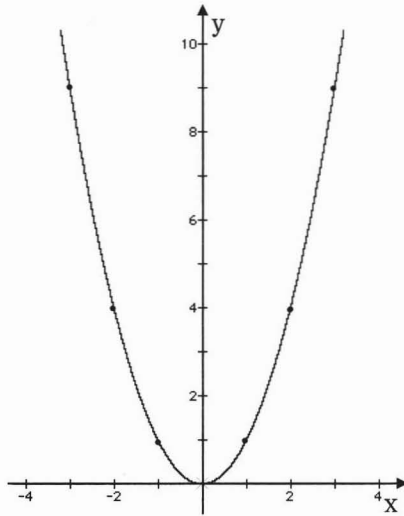


müssten. Wenn man für einen bestimmten Bereich einige Werte berechnet und einzeichnet, so kann man aus diesen Punkten häufig schon eine brauchbare Skizze der Funktion erstellen. (Allerdings kann eine derartige Skizze auch in die Irre führen. Um über den Verlauf der Funktion auch zwischen den errechneten Punkten sicherzugehen, ist an sich die später betrachtete Kurvendiskussion notwendig.) Für die Skizze müssen Wertepaare berechnet werden, die dann in das Koordinatensystem eingetragen werden. Nachfolgend sei angenommen, dass die Funktion in dem Bereich zwischen -3 und 3 skizziert werden soll. Dann errechnet man am besten zunächst in einer Wertetabelle zu einigen x -Werten aus diesem Bereich die zugehörigen y -Werte. Dies wird nachfolgend für die x -Werte $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ und 3 durchgeführt. Es ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	y
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

In der folgenden Graphik ist die Funktion gezeichnet worden. Wie man

erkennen kann, werden die einzelnen Punkte nicht durch Geraden miteinander verbunden, sondern es wird eine Gesamtkurve gezeichnet, die die Punkte möglichst ohne "Knick" miteinander verbindet. Die dargestellte Funktion ist die Normalparabel. Statt von dem "Graphen" oder der "Zeichnung der Funktion" spricht man auch von der "Kurve der Funktion". Die Definitionsmenge dieser Funktion ist ganz $\mathbb{R}$, denn man kann für x jede reelle Zahl einsetzen. Für die Wertemenge ergibt sich aber nicht ganz $\mathbb{R}$. Wie man in der Zeichnung deutlich erkennen kann, erhält man immer nur positive Werte. Dies folgt daraus, dass die Quadrate von reellen Zahlen immer positiv sind. Somit lautet die Wertemenge $\mathbb{R}_+$.



1.3 Parabeln / Ganzrationale Funktionen

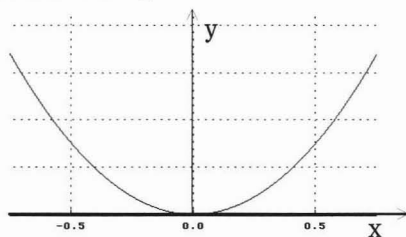
Zuvor war bereits die Normalparabel betrachtet worden. Parabeln zweiten Grades, wie die Normalparabel, sind Spezialfälle von Parabeln n -ten Grades, wobei n jeweils für die höchste x -Potenz steht, die in der Funktionsgleichung tatsächlich auftritt. Für Parabeln n -ten Grades sind in der Mathematik allerdings noch zwei weitere Namen geläufig. Man nennt sie auch ganzrationale Funktionen oder Polynomfunktionen. Die gebräuchlichste Bezeichnung ist hierbei die der ganzrationalen Funktion, daher soll diese nachfolgend in erster Linie benutzt werden, es könnte aber natürlich jeweils auch eine der anderen Bezeichnungen verwendet werden.

Wie zuvor schon angedeutet, bestehen ganzrationale Funktionen aus einzelnen Termen mit ganzzahligen Potenzen der Variablen. Sie haben also allgemein ausgedrückt folgende Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

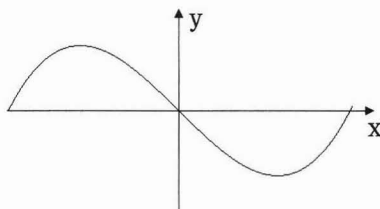
Die höchste tatsächlich auftretende Potenz von x bestimmt den Grad der Funktion. Eine ganzrationale Funktion 1. Grades hat also die Form: $f(x) = a_1x^1 + a_0x^0$ mit $a_1 \neq 0$, oder anders ausgedrückt: $f(x) = a_1x + a_0$. Dies ist eine Geradengleichung. Eine Gerade ist also ebenfalls ein Spezialfall einer ganzrationalen Funktion.

Enthält eine ganzrationale Funktion nur gerade Exponenten (z.B. $f(x) = x^2 - 2x^4$), so ist die Funktion



achsensymmetrisch zur y -Achse. Nebenstehend ist eine achsensymmetrische Funktion abgebildet.

Enthält sie nur ungerade Exponenten, so ist sie punktsymmetrisch zum Ursprung. Nebenstehend ist eine punktsymmetrische Funktion dargestellt.



1.4 Wurzelfunktionen

Bei den bisher angeführten Funktionen kamen nur ganzzahlige Exponenten der Variablen vor. Lässt man zusätzlich auch nicht-ganzzahlige Exponenten zu, so erhält man Wurzelfunktionen.

Ein Beispiel für eine Wurzelfunktion ist etwa $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{x}$, oder auch $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

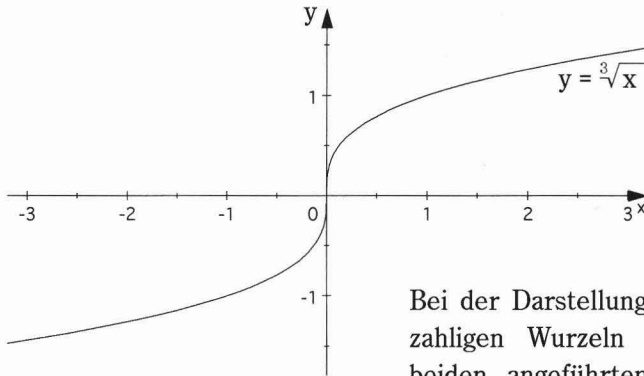
Zweite Wurzel aus x bedeutet, dass die Zahl gesucht wird, die mit sich selbst multipliziert x ergibt. (Häufig spricht man bei der zweiten Wurzel auch einfach von der "Wurzel".) Hierbei gilt es zweierlei zu beachten:

- die zweite Wurzel einer negativen Zahl existiert (in $\mathbb{R}$) nicht
- die zweite Wurzel ist mehrdeutig, wenn es eine Lösung gibt, so gibt es **immer eine positive und eine negative Lösung**, nur die zweite Wurzel von Null ist eindeutig, denn $+0$ ist das gleiche wie -0 .

Die angeführten Eigenschaften gelten für alle geradzahligen Wurzeln. Nicht-geradzahlige Wurzeln sind dagegen auch für negative Zahlen definiert und sind immer eindeutig. Die $\sqrt[3]{-8}$ ist die Zahl, die dreimal mit sich selbst multipliziert -8 ergibt. Hier gibt es eine (und nur eine) Lösung, und zwar:

$$\sqrt[3]{-8} = -2, \text{ denn es gilt: } (-2) * (-2) * (-2) = -8.$$

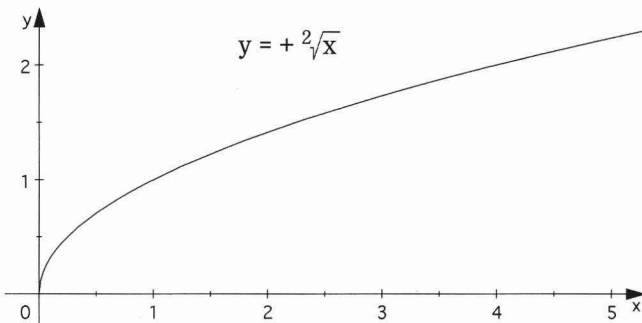
Nachfolgend ist eine Zeichnung der Funktion $f(x) = \sqrt[3]{x}$ dargestellt. (Alle ungeradzahligen Wurzeln ergeben im Prinzip einen ähnlichen Verlauf):



Bei der Darstellung von geradzahligen Wurzeln müssen die beiden angeführten Besonderheiten beachtet werden.

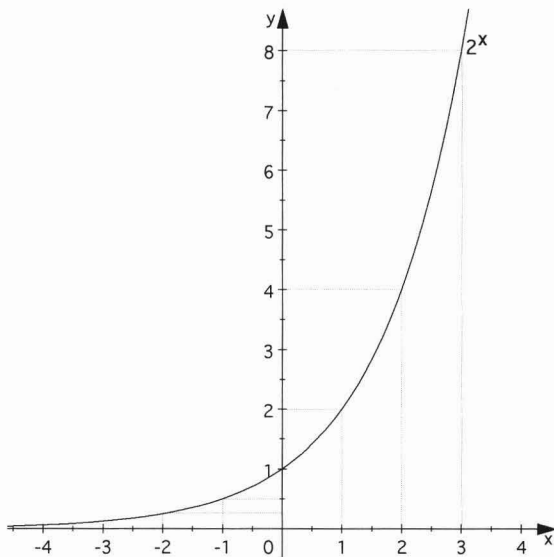
Zum einen sind geradzahlige Wurzelfunktionen für negative x-Werte nicht definiert, und zum anderen muss man sich für die Darstellung der negativen oder der positiven Wurzel entscheiden, denn sonst würde es sich um keine Funktion mehr handeln, da jedem positiven x-Wert zwei y-Werte zugeordnet würden.

Nachfolgend ist die Funktion $f(x) = +\sqrt[2]{x}$ dargestellt:



1.5 Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen sind Funktionen, bei denen die Variable im Exponenten steht. Ein sehr einfaches Beispiel ist etwa die Funktion $y = 2^x$. Diese Funktion verdoppelt jeweils ihren Wert, wenn die Variable um eins zunimmt. Das dadurch entstehende rasante Anwachsen geht über das an der alltäglichen Umgebung geschulte menschliche Vorstellungsvermögen hinaus. Zunächst ist nebenstehend eine Darstellung der Funktion $y = 2^x$ angeführt, wobei sich gut sehen lässt, dass der Funktionswert sich jeweils verdoppelt, wenn x um eins zunimmt.



Ein schönes Beispiel für exponentielles Wachstum liefert folgende Überlegung: *Angenommen es wird ein Blatt Zeitungspapier 70 mal gefaltet, wie hoch ist der Turm, der hierbei entsteht?*

Jedesmal, wenn das Blatt gefaltet wird, verdoppelt sich die Dicke des „Turmes“. Die Dicke entwickelt sich also gerade nach der Formel 2^x , wobei x die Anzahl der durchgeführten Faltungen angibt. Wenn man den Ausdruck 2^x noch mit der Dicke des Blattes Zeitungspapier multipliziert, erhält man eine exakte Formel für die „Höhe“ des Turmes, abhängig von der Anzahl der Faltungen (x). Es sei hier angenommen, dass ein Blatt Zeitungspapier eine Dicke von 0,1 mm hat. Es ergibt sich also folgender Ausdruck für die Höhe nach 70 Faltungen:

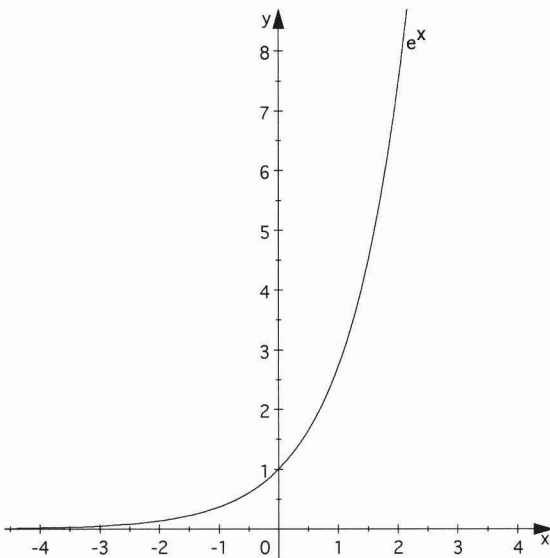
$$H = 0,1 \text{ mm} * 2^{70}$$

Als Ergebnis ergibt sich: $1,1806 \cdot 10^{17} \text{ m}$.¹ Das Licht braucht mehr als 12 Jahre, um diese Entfernung zurückzulegen, der Turm würde also weit aus unserem Sonnensystem hinausragen.

Es gibt unter den Exponentialfunktionen eine, die sich gegenüber allen anderen Exponentialfunktionen auszeichnet, dies ist die e -Funktion. e steht hierbei für eine irrationale Zahl (die Zahl lässt sich also nicht als Bruch darstellen, und wird sie als Dezimalzahl dargestellt, so endet sie nie, und es gibt auch nie eine Periode). Die ersten Stellen von e lauten: 2,71828. Wie kommt man auf eine derartig "krumme" Zahl?

Eine Erklärung ist, dass dies die einzige Zahl ist, bei der der Funktionswert und die Steigung in jedem Punkt identisch sind. Die e -Funktion liefert als Funktionswert also immer ihre Steigung. Diese Eigenschaft zeichnet die e -Funktion gegenüber allen anderen Exponentialfunktionen aus und sorgt dafür, dass viele Berechnungen mit der e -Funktion sehr

viel einfacher sind als mit anderen Exponentialfunktionen. (Die genaue Bedeutung der Steigung wird in Kapitel 2 behandelt.)



In der Darstellung unterscheidet sich die e -Funktion nicht wesentlich von anderen Exponentialfunktionen. Wie man nebenstehend erkennen kann, ist sie etwas steiler als die zuvor betrachtete Funktion $f(x) = 2^x$.

1: Man kann die Berechnung auch ohne Taschenrechner nachvollziehen. 2^{10} ergibt 1024, somit ergeben 10 Verdopplungen etwas mehr als eine Vertausendfachung. Nach 10 mal Knicken wächst der Turm also von 0,1 mm auf über 100 mm = 0,1 m an. Nach nochmals 10 Verdopplungen beträgt die Höhe über 100 m usw.

1.6 Darstellung des Taschenrechners für sehr große und sehr kleine Zahlen

Der Taschenrechner bedient sich bei der Darstellung von sehr großen und sehr kleinen Zahlen der Exponentialfunktion 10^x . So steht der

Ausdruck: $4,3 \cdot 10^{-4}$ für $4,3 \cdot 10^{-4} = \frac{4,3}{10^4} = 0,00043$

und $2,76 \cdot 10^{11}$ steht für $2,76 \cdot 10^{11} = 276.000.000.000$

1.7 Rechenregeln für Exponenten

$$1) a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Diese Regel lässt sich an einem Beispiel gut verdeutlichen:

$a^2 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ (es soll ja gerade 5 mal a mit sich selbst malgenommen werden)

Manchmal wird auch eine gesonderte Regel für Quotienten definiert:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

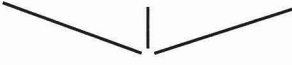
Diese ergibt sich sofort aus der zuerst angeführten Regel¹:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}$$

$$2) (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Auch diese Regel kann gut an einem Beispiel verdeutlicht werden:

$$(a^4)^3 = (a \cdot a \cdot a \cdot a)^3 = \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{4 \text{ a's}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{4 \text{ a's}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a \cdot a)}_{4 \text{ a's}} = a^{4 \cdot 3} = a^{12}$$



3 mal 4 a's

1: Da die Division die inverse Operation zur Multiplikation ist, lassen sich auf ähnliche Weise alle "extra" Regeln für Quotienten auf die Regeln für die Multiplikation zurückführen.

1.8 Logarithmen

Die Umkehrfunktion einer Funktion erhält man, indem man die Variablen vertauscht und dann wieder nach y auflöst. Für die Funktion $y = 10^x$ ergibt sich demnach:

$$x = 10^y$$

Wie kann dieser Ausdruck nun nach y aufgelöst werden?

Mit den bisher behandelten mathematischen Verfahren ist dies nicht möglich. Für viele Problemstellungen ist es aber notwendig, eine Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zu haben. Da sich der Ausdruck aber mit schon bekannten Umformungen nicht auflösen lässt, muß eine neue Funktion definiert werden, die dies tut. Diese neu zu definierende Funktion ist der Logarithmus.

Man schreibt nun statt $10^y = x$:

$$\log_{10}(x) = y$$

wobei der Logarithmus eben als die Funktion definiert wird, die den vorherigen Ausdruck nach y auflöst. Die Fragestellung bei dem Logarithmus bleibt also weiterhin: 10 hoch wieviel ist gleich x ? Dies sei an drei Beispielen verdeutlicht:

$$\log_{10}(100) = 2 \quad (10 \text{ hoch wieviel ist gleich } 100? \ 10^2 \text{ ist gleich } 100)$$

$$\log_{10}(10.000) = 4$$

$$\log_{10}(0,01) = -2 \quad (10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0,01)$$

Die nach unten gesetzte Zahl gibt an, zu welcher Exponentialfunktion der jeweilige Logarithmus die Umkehrfunktion ist. Diese Zahl nennt man auch die Basis des Logarithmus. Nachfolgend wird ein Logarithmus zur Basis 2 berechnet:

$$\log_2(32) = 5 \quad (\text{denn } 2^5 \text{ ist } 32)$$

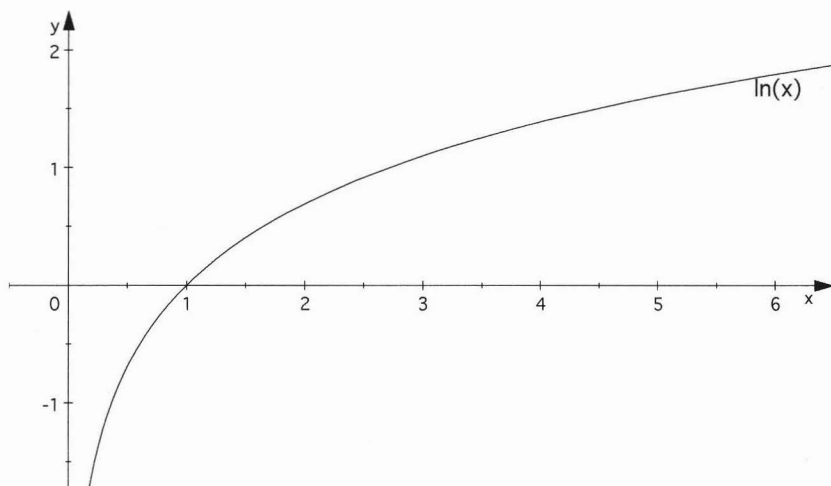
Wenn nur "log" ohne Angabe einer Basis oder auch lg geschrieben wird, so ist dies eine abkürzende Schreibweise für $\log_{10}$. Für den Logarithmus zur Basis e gibt es auch noch eine besondere Bezeichnung:

$$\log_e(x) = \ln(x)$$

Diesen Logarithmus nennt man auch den natürlichen Logarithmus. Aus

den gleichen Gründen, aus denen die e-Funktion die wichtigste Exponentialfunktion ist, ist der natürliche Logarithmus (er ist gerade die Umkehrfunktion zur e-Funktion) der wichtigste Logarithmus. Die Taschenrechner bieten den 10er Logarithmus und den natürlichen Logarithmus als Funktion.

Nachfolgend eine Zeichnung des natürlichen Logarithmus:



Wie alle Logarithmen ist der $\ln$ nur für positive x -Werte definiert. Die Fragestellung hinter dem natürlichen Logarithmus lautet: e hoch wieviel ist x ? Da e positiv ist, ist auch jede beliebige Potenz von e positiv. Somit kann x nur positiv sein.

1.9 Rechenregeln für Logarithmen

Diese Regeln werden nachfolgend aus den Rechenregeln für die Exponentialfunktion hergeleitet:

$$1) \quad \ln(x) + \ln(y) = \ln(e^{\ln(x)+\ln(y)})$$

Es wurden der Logarithmus und die e -Funktion eingefügt. Da diese beiden Funktion und zugehörige Umkehrfunktion sind, heben sie sich in ihrer Wirkung gerade auf, so dass die Umformung korrekt ist.

$$\ln(e^{\ln(x)+\ln(y)}) = \ln(e^{\ln(x)} * e^{\ln(y)})$$

Hier wurde die 1. Rechenregel für Exponentialfunktionen angewandt.

$$\ln(e^{\ln(x)} * e^{\ln(y)}) = \ln(x * y)$$

Funktion und Umkehrfunktion heben sich gerade auf.

Es gilt also:

$$\ln(x * y) = \ln(x) + \ln(y)$$

Für einen Quotienten ergibt sich auf analoge Weise:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$2) \ln(x^y) = \ln((e^{\ln(x)})^y)$$

Hier wurden wieder e-Funktion und Logarithmus eingefügt. $e^{\ln(x)}$ ist gerade x.

$$\ln((e^{\ln(x)})^y) = \ln(e^{y * \ln(x)})$$

Hier wurde die zweite Regel für Exponentialfunktionen benutzt.

$$\ln(e^{y * \ln(x)}) = y * \ln(x)$$

ln und e-Funktion heben sich wieder gegenseitig auf. Es gilt also folgende Regel:

$$\ln(x^y) = y * \ln(x)$$

Mittels dieser Regel können Logarithmen zu beliebigen Basen berechnet werden. Hinter dem Logarithmus $y = \log_a(x)$ steht die folgende Frage:

a hoch wieviel ist gleich x, also $a^y = x$.

Diesen Ausdruck kann man umformen:

$$a^y = x \quad | \ln \quad (\text{beide Seiten werden logarithmiert})$$

$$\Leftrightarrow \ln(a^y) = \ln(x)$$

$$\Leftrightarrow y * \ln(a) = \ln(x) \quad | / \ln(a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$$

$$\text{Also gilt } y = \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$$

1.10 Anwendungen von Logarithmen

Logarithmen werden vielen im Verlauf ihres Studiums wieder begegnen, denn es gibt zahlreiche Problemstellungen, bei denen Logarithmen sehr hilfreich sind. Einige typische Fälle werden nachfolgend behandelt.

1) Untersuchung von Funktionen

Oft interessiert man sich für die Extremwerte einer Funktion. Statt der ursprünglichen Funktion y kann aber auch der Logarithmus dieser Funktion auf Extremwerte untersucht werden, denn da es sich bei dem Logarithmus um eine streng monoton steigende Funktion handelt, ist der Logarithmus einer Funktion genau dann am größten, wenn die Funktion selber am größten ist. Die Hochpunkte (bzw. Tiefpunkte) der Funktion $\ln(y)$ liegen daher an den gleichen Stellen wie die der Ausgangsfunktion y . Wenn sich die Funktion durch die Anwendung des Logarithmus vereinfachen lässt, bietet es sich daher an, die Ausgangsfunktion zunächst zu logarithmieren.

- a) Eine typische ökonomische Produktions- oder Nutzenfunktion hat z. B. folgende Gestalt (Cobb-Douglas-Funktion):

$$y = A \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta$$

Diese Gleichung lässt sich durch die Anwendung des Logarithmus auf die beiden Seiten der Gleichung vereinfachen:

$$y = A \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \ln(A \cdot x_1^\alpha \cdot x_2^\beta)$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \ln(A) + \ln(x_1^\alpha) + \ln(x_2^\beta) \quad (1. \text{Rechenregel für Logarithmen})$$

$$\Leftrightarrow \ln(y) = \ln(A) + \alpha \ln(x_1) + \beta \ln(x_2) \quad (2. \text{Rechenregel für Logarithmen})$$

Nun hat man eine in $\ln(x_1)$ bzw. $\ln(x_2)$ lineare Funktion erhalten. Die Untersuchung auf Extremwerte ist für diese Funktion einfacher als für die Ausgangsfunktion.

- b) In der Statistik treten z. B. bei der Bestimmung von Maximum-Likelihood-Schätzern (ML-Schätzern) Funktionen mit Produkten auf. Derartige Produkte können ebenfalls mit Logarithmen umgeformt werden, es handelt sich hierbei um eine Verallgemeinerung der zuvor dargestellten Umformungen:

$$\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \ln(x_i)$$

Hierbei handelt es sich um eine Anwendung der Regel 1. Die Bestimmung eines Maximums von der Summe ist viel einfacher als von dem Produkt.

2) Zeitreihen

In sehr vielen verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen werden Zeitreihen betrachtet. So werden in der Ökonomie z. B. Zeitreihen für die Werte des Sozialproduktes oder für Aktienkurse untersucht und in der Biologie ergeben sich Zeitreihen für die Entwicklung einer Population. Die relevante Größe bei einer derartigen Zeitreihe ist oft nicht die absolute, sondern die relative Veränderung. Einen Aktionär wird beispielsweise primär nicht interessieren, um wie viel Euro eine Aktie gestiegen ist, sondern um wie viel Prozent. Dass eine Aktie um einen Euro gestiegen ist, sagt noch nicht viel aus, war der bisherige Aktienkurs z. B. bei 100 EUR, so ist sie um 1% gestiegen, war der Kurs allerdings bei 1 EUR, so ist sie um 100% gestiegen. Im ersten Fall hätte man einen Gewinn in der Höhe von 1% des Einsatzes gemacht, im zweiten Fall hätte man seinen Einsatz verdoppelt.

a) grafische Darstellung

Aus den vorherigen Ausführungen ergibt sich, dass ein Aktienchart, bei dem man einfach die absoluten Kurse abträgt, wenig aussagekräftig ist. Das menschliche Auge bewertet gleiche absolute Abstände in einer grafischen Darstellung als gleichwertig und führt den Betrachter in derartigen Fällen in die Irre. Durch eine logarithmische Skala bei den Aktienkursen wird erreicht, dass gleiche absolute Abstände in der Grafik für eine gleiche relative Veränderung der Kurse stehen. Entsprechend werden Aktiencharts in Publikationen oft auf einer logarithmischen Skala dargestellt. Auch für andere Größen als Aktienkurse gilt, dass oft eine logarithmische Darstellung sinnvoll ist.

b) lineare Regression

Die lineare Regression ist ein Standardverfahren der statistischen Analyse, wenn allerdings Daten vorliegen, die primär einem relativen Veränderungsprozess unterliegen, so werden die Ausgangsdaten sicherlich keinen linearen Zusammenhang zeigen. In diesen Fällen ist oft eine lineare Regression der logarithmierten Daten sinnvoll.

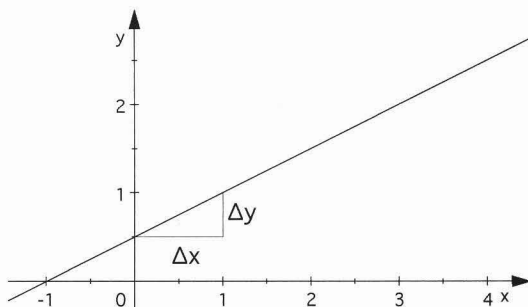
2 Steigung von Funktionen/Ableitungen

2.1 Grundlagen

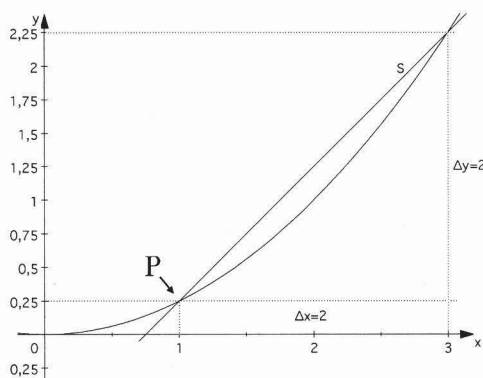
Die Steigung einer Funktion gibt an, wie steil sie ist, also wie viel Einheiten sie nach oben geht, wenn man eine Einheit nach rechts geht. Eine

Gerade hat überall die gleiche Steigung, so dass man diese einfach über ein Steigungsdreieck bestimmen kann.

Die abgebildete Gerade geht pro Schritt nach rechts einen halben Schritt nach oben, daher ist die Steigung $\frac{1}{2}$. Formal ergibt sich die Steigung als der Quotient: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



Bei anderen Funktionen als Geraden ist die Steigung überall unterschiedlich. In der folgenden Abbildung ist der positive Ast der Parabel



$$y = \frac{1}{4} x^2$$

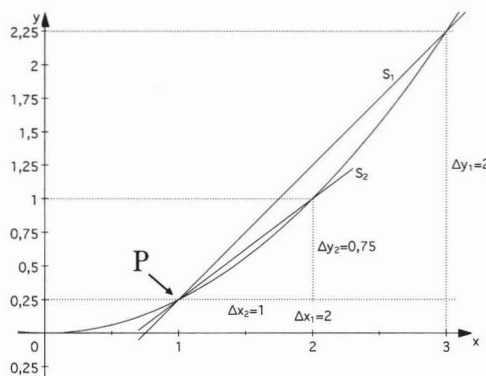
dargestellt. Es ist klar, dass diese Funktion keine einheitliche Steigung besitzt. Je weiter man nach rechts geht, desto steiler wird die Funktion. Gesucht sei die Steigung bei dem Punkt P.

Zwischen $x=1$ und $x=3$ ist ein Steigungsdreieck eingezeichnet.

Über dieses Steigungsdreieck ergibt sich die Steigung der eingezeichneten Geraden S. Eine derartige Gerade, die eine Funktion in zwei Punkten schneidet, nennt man eine **Sekante**. Allerdings erkennt man, dass die Steigung von S nicht mit der Steigung der Funktion bei P identisch ist, denn die Sekante hat eine weitaus größere Steigung als die Funktion bei P.

Für die Steigung der Sekante ergibt sich: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,25 - 0,25}{3 - 1} = \frac{2}{2} = 1$

Bei der Berechnung werden im Zähler und Nenner Differenzen berechnet und es handelt sich insgesamt um einen Quotienten (Bruch), daher nennt man den Ausdruck $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ auch den **Differenzenquotient**.



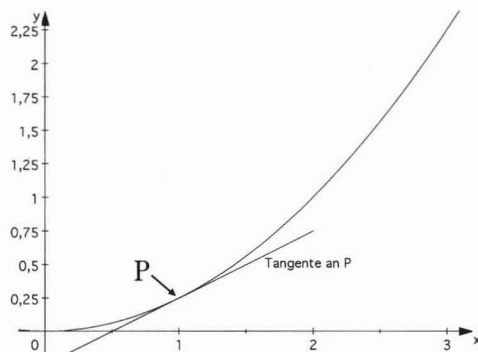
$$\Rightarrow \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \frac{0,75}{1} = 0,75$$

In der nebenstehenden Zeichnung wurde die vorherige Sekante mit S_1 bezeichnet und es wurde zusätzlich eine weitere Sekante S_2 mit dem zugehörigen Steigungsdreieck eingezeichnet.

Für die Steigung von S_2 ergibt sich:

$$\Delta x_2 = 1 \text{ und } \Delta y_2 = 0,75$$

Die eingezeichneten Geraden sind beide steiler als die Funktion in dem Punkt P. Die Gerade S_2 weicht aber weniger von dem richtigen Wert ab als die Gerade S_1 . Wenn man sich nun vorstellt, immer kleinere Steigungsdreiecke einzuzichnen, so wird die Steigung der dazugehörigen Geraden immer kleiner, wobei sie aber immer noch größer als die Steigung der Funktion in dem Punkt P sein wird. Je kleiner die Steigungsdreiecke werden, desto näher kommt man an den Wert für die Steigung der Funktion in dem Punkt P heran. **Als Grenzwert für unendlich kleine**



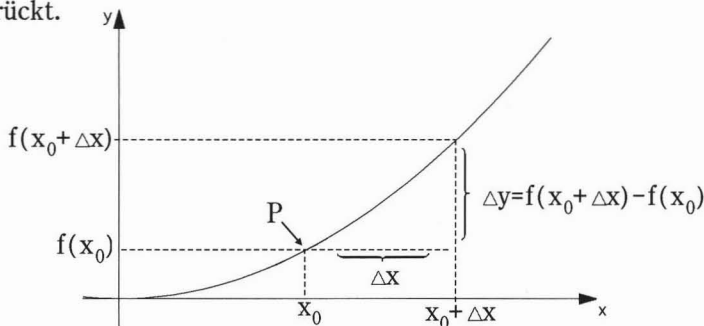
Steigungsdreiecke erhält man also den richtigen Wert für die Steigung im Punkt P. Bei diesem Grenzübergang wird aus der Sekante eine **Tangente** (Berührende). In der nebenstehenden Zeichnung ist die Tangente an den Punkt P eingezeichnet. Die Steigung dieser Geraden ist mit der Steigung der Funktion im Punkt P identisch; um sie zu bestimmen, muss der Grenzwert des Differenzenquotienten für Δx gegen Null bestimmt wer-

den. **Grenzwert des Differenzenquotienten für Δx gegen Null bestimmt wer-**

den. Es ist also folgender Grenzwert zu untersuchen:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Um diesen Grenzwert konkret zu bestimmen wird nachfolgend der x -Wert des Punktes mit x_0 bezeichnet und Δy wird entsprechend der nachfolgenden Darstellung mittels der entsprechenden Funktionswerte ausgedrückt.



Die Breite des Steigungsdreiecks beträgt Δx , daher geht das Steigungsdreieck von der Stelle x_0 bis zur Stelle $x_0 + \Delta x$. Hieraus ergeben sich die Funktionswerte $f(x_0)$ und $f(x_0 + \Delta x)$. Δy ergibt sich als die Differenz dieser beiden Funktionswerte: $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Für die Funktion $f(x) = x^2$ soll nun die Steigung bestimmt werden. Für $f(x_0 + \Delta x)$ ergibt sich:

$$f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2$$

Insgesamt ergibt sich für den Grenzwert des Differenzenquotienten somit:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0 \end{aligned}$$

(Da Δx zwar gegen Null geht, aber nicht Null wird, konnte Δx gekürzt werden.)

Somit ergibt sich also für die Funktion $f(x)=x^2$ an der Stelle x_0 die Steigung $2x_0$. Da x_0 ein beliebiger Wert sein kann, gilt dieser Zusammenhang auch für die ganze Funktion. Die Steigung einer Funktion nennt man auch die **Ableitung** der Funktion und bezeichnet sie mit $f'(x)$ (sprich: f Strich von x). Für die Funktion $f(x)=x^2$ gilt also $f'(x) = 2x$.

Bei dem Grenzwert des Differentialquotienten gehen sowohl Δx als auch Δy gegen 0. Für derartige unendlich kleine Abschnitte gibt es eine eigene Bezeichnung, man nennt sie dx und dy und schreibt deshalb auch:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'(x) = f'(x) \quad \text{oder auch} \quad \frac{df}{dx}$$

dx und dy nennt man **Differentiale**. Daher bezeichnet man den

Quotienten $\frac{dy}{dx}$ auch als **Differentialquotient**.

Insbesondere in den Naturwissenschaften ist es üblich, Ableitungen nach der Zeit (die Variable x bzw. in diesen Fällen oft t ist die Zeit) mittels eines Punktes zu kennzeichnen:

$$y'(x) = \dot{y}(x) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dy}{dt} = y'(t) = \dot{y}(t)$$

2.2 Ableitung für Potenzen von x

Bei dem vorherigen Beispiel ($f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$) lässt sich schon ein bestimmtes Schema erkennen: Die Zahl im Exponenten wird "vor" den Ausdruck geschrieben, und der Exponent wird um eins reduziert. Es lässt sich beweisen, dass sich auf diese Weise alle Potenzen von x differenzieren (ein anderer Ausdruck für ableiten) lassen. Dies gilt selbst dann, wenn es sich bei dem Exponenten um keine ganzen Zahlen handelt. Es gilt also ganz allgemein

für $f(x) = x^b$ ist $f'(x) = b \cdot x^{b-1}$ mit $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (b Element $\mathbb{R}$ **ohne** Null)

Die Null muss ausgeschlossen werden, denn x^0 ist 1. Für $b=0$ würde die Funktion somit lauten $f(x) = 1$. Der y -Wert dieser Funktion ist immer eins, egal wie groß x ist. Somit handelt es sich hierbei um eine waagerechte Gerade.

Die Steigung einer derartigen Funktion ist natürlich Null. Also gilt:

$$f(x) = a \quad a \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = 0$$

Aus der zuvor angeführten Regel ergibt sich auch die Ableitung für Wurzelfunktionen, denn jede Wurzel kann auch als Potenz geschrieben werden. In dem Abschnitt zu Wurzelfunktionen war folgender Zusammenhang angegeben worden:

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \text{oder auch allgemein} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

Somit ergibt sich für die Ableitung der zweiten Wurzel, die in der Regel gemeint ist, wenn einfach nur von der Wurzel gesprochen wird:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[2]{x} \Leftrightarrow f(x) = x^{\frac{1}{2}} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Der Term kann nun noch umgeformt werden:

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Es wurde zunächst die x -Potenz in den Nenner geschrieben und hierbei das Vorzeichen im Exponenten verändert. Anschließend wurde die Potenz wieder als Wurzel geschrieben.

2.3 Ableitungen für Sinus- und Cosinusfunktionen

Auch für diese Funktionen lässt sich, wie zuvor beschrieben, ein Grenzwert bilden und so die Ableitung bestimmen. Es ergeben sich folgende Regeln:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f'(x) &= \cos(x) \\ g(x) &= \cos(x) & g'(x) &= -\sin(x) \end{aligned}$$

2.4 Ableitungen von Exponentialfunktionen und Logarithmen

Wie schon angesprochen, ist die e -Funktion die einzige Funktion, deren Funktionswerte gleichzeitig die Steigung an der jeweiligen Stelle angeben (wenn man es ganz genau nimmt, gilt dies allerdings auch noch für die Funktion $y=0$). Daher ist die e -Funktion ihre eigene Steigung. Es gilt also:

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

Andere Exponentialfunktionen lassen sich durch die Kenntnis der Ableitung der e -Funktion ableiten. Hierzu formt man sie mittels der e -Funktion und des natürlichen Logarithmus um:

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Hierbei wurde zunächst die e -Funktion und ihre Umkehrfunktion eingefügt und danach die 2. Rechenregel für Logarithmen benutzt. Der nun entstandene Ausdruck kann mittels der Kettenregel abgeleitet werden.

Die entsprechende Ableitung wird in dem Abschnitt zur Kettenregel berechnet.

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus lautet:

$$f(x) = \ln(x) \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Für beliebige Logarithmen ist in Abschnitt 1.9 der folgende Zusammenhang dargelegt:

$$f(x) = \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$$

Für die Ableitung ergibt sich:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} * \frac{1}{x}$$

($\frac{1}{\ln(a)}$ ist ein konstanter Faktor und bleibt deshalb beim Ableiten einfach stehen.)

2.5 Kettenregel

Wenn verschiedene Funktionsvorschriften nacheinander ausgeführt werden, spricht man von verketteten Funktionen. Z.B. ist die Funktion $f(x) = (\sin(x))^2$ eine verkettete Funktion. Zunächst wird die sinus-Funktion auf das x angewendet, und auf das Ergebnis dieser Berechnung wird dann die Funktion "hoch 2" angewendet. Die Funktion kann auch durch die verketteten Funktionen beschrieben werden: $f(x) = g(h(x))$ (g von h von x), wobei für diesen Fall gilt:

$$h(x) = \sin(x) \text{ und } g(x) = x^2$$

Hier wurde die Funktionsvariable jeweils mit x bezeichnet. Intuitiv wird die Verkettung etwas klarer, wenn man diese auch schon in der Benennung der Variablen ausdrückt:

$$y = h(x) = \sin(x) \text{ und } g(y) = y^2$$

Hier wird bereits durch die Benennung der Variablen klar, dass das Ergebnis der ersten Funktion (y) in die zweite Funktion als Variable eingesetzt werden soll. Aber da die Bezeichnung von Variablen für das Ergebnis egal ist, kann es durchaus sein, dass bei beiden Funktionen die Variable mit x bezeichnet wird.

Die Kettenregel besagt nun, dass sich die Ableitung einer verketteten Funktion als das Produkt der Ableitungen der äußeren Funktion und der inneren Funktion ergibt. In diesem Fall ist y^2 die äußere und $\sin(x)$ die

innere Funktion. Somit ergibt sich als Ableitung:

$$f'(x) = \underset{\text{äußere Ableitung}}{2y} * \underset{\text{innere Ableitung}}{\cos(x)}$$

Die verkettete Funktion hängt nur von der Variablen x ab. In obigem Ausdruck tauchen aber als Variable noch x und y auf. y muss nun noch entsprechend der inneren Funktion ($y = \sin(x)$) ersetzt werden. Somit ergibt sich insgesamt:

$$f'(x) = \underset{\text{äußere Ableitung}}{2 * \sin(x)} * \underset{\text{innere Ableitung}}{\cos(x)}$$

Man kann sich auch zunächst die äußere und die innere Ableitung einzeln hinschreiben und die Terme dann erst zusammenfügen. Auf diese Weise würde sich für die Lösung der Aufgabe folgendes ergeben:

$$f(x) = (\sin(x))^2 = g(h(x))$$

mit $y = h(x) = \sin(x)$ und $g(y) = y^2$

die einzelnen Ableitungen lauten nun:

$$h'(x) = \cos(x) \text{ und } g'(y) = 2y \Leftrightarrow g'(x) = 2 * \sin(x)$$

Somit ergibt sich für $f'(x)$:

$$f'(x) = g'(x) * h'(x) = 2 * \sin(x) * \cos(x)$$

Formal geschrieben, lautet die Kettenregel folgendermaßen:

$$g(h(x))' = g'(h(x)) * h'(x)$$



Zur Unterscheidung von innerer und äußerer Funktion:

Die innere Funktion ist immer der "Ausdruck", der zuerst auf das x angewendet werden muss. In obigem Beispiel lautete die Funktion:

$$f(x) = (\sin(x))^2$$

Hier muss zunächst der Sinus von x gebildet werden, also ist $\sin(x)$ die innere Funktion. Nachfolgend wird die Funktion leicht modifiziert:

$$f(x) = \sin(x^2)$$

Hier muss das x zunächst quadriert werden. Also ist die innere Funktion nun $h(x) = x^2$. Nachfolgend noch ein anderes Beispiel:

$$f(x) = \ln(3x)$$

Das x muss zunächst mit 3 multipliziert werden, bevor der $\ln$ auf das Ergebnis angewendet wird. Daher lautet die innere Funktion $h(x) = 3x$ und die äußere entsprechend $g(y) = \ln(y)$.

Es war zuvor bereits gezeigt worden, dass für eine beliebige Exponentialfunktion folgender Zusammenhang gilt:

$$f(x) = a^x = e^{\ln(a^x)} = e^{x \cdot \ln(a)}$$

Daher lautet die Ableitung:

$$f'(x) = \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln(a)}$$

Der linke Term $(\ln(a))$ stellt die innere Ableitung dar. Statt $e^{x \cdot \ln(a)}$ kann nun wieder a^x geschrieben werden, somit ergibt sich folgende Regel:

$$f(x) = a^x \quad f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$$

2.6 Produktregel

Die Ableitung bei Produkten von Funktionen ist nicht ganz so einfach wie bei Summen oder Differenzen. Für die Produkte von Funktionen lässt sich die **Produktregel** herleiten, die folgendermaßen lautet:

$$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$



Man kann sich die Regel so merken, dass die erste Funktion abgeleitet und mit der zweiten multipliziert wird und zu diesem Term ein Term addiert wird, bei dem die zweite Funktion abgeleitet und mit der ersten Funktion multipliziert wird.

Nachfolgend sei dies an einigen Beispielen verdeutlicht:

$$f(x) = \sin(x) \cdot x^2$$

$$g(x) = \sin(x) \quad h(x) = x^2$$

Der $\sin(x)$ ist hier also die erste Funktion, und diese wird mit der Funktion x^2 multipliziert. Wer sich bei der Anwendung der Produktregel nicht so sicher ist, sollte nun zunächst die einzelnen Funktionen und ihre Ableitungen bilden:

$$g(x) = \sin(x) \quad g'(x) = \cos(x)$$

$$h(x) = x^2 \quad h'(x) = 2x$$

Nun folgt nach der Produktregel für die Ableitung von f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x) = \cos(x) * x^2 + \sin(x) * 2x \\ &= (\cos(x) * x + 2\sin(x)) * x \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde x ausgeklammert.

In dem folgenden Beispiel könnte man zuerst die Klammern ausmultiplizieren und dann erst ableiten. Auf diese Weise könnte die Aufgabe auch ohne die Anwendung der Produktregel gelöst werden. Nachfolgend wird sie aber über die Produktregel ausgerechnet:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x - 3) * (x^2 - x + 5) \\ f'(x) &= 2 * (x^2 - x + 5) + (2x - 3) * (2x - 1) \\ &= 2x^2 - 2x + 10 + 4x^2 - 2x - 6x + 3 = 6x^2 - 10x + 13 \end{aligned}$$

Die Division ist die inverse Operation zur Multiplikation. Daher lässt sich auch jeder Quotient über die Produktregel ableiten. Hierzu muss er nur in ein Produkt umgeschrieben werden:

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{\sin(x)} = (x^2 + x) * [\sin(x)]^{-1}$$

Nun kann mittels der Produktregel abgeleitet werden, wobei allerdings bei dem zweiten Ausdruck beachtet werden muss, dass dieser eine Verkettung der Funktionen $\sin(x)$ und "hoch -1" ist.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1) * [\sin(x)]^{-1} + (x^2+x) * (-1) * [\sin(x)]^{-2} * \cos(x) \\ &\quad \text{äußere Ableitung} \quad \text{innere Ableitung} \\ &= \frac{2x+1}{\sin(x)} - \frac{(x^2+x) * \cos(x)}{[\sin(x)]^2} \end{aligned}$$

Diesen Term könnte man nun noch auf den Hauptnenner bringen. In diesem Fall bringt das aber keine große Vereinfachung. Häufig ergeben sich aber Terme, die man für die weitere Berechnung auf den Hauptnenner bringen muss. Daher macht es Sinn, für Quotienten eine extra Ableitungsregel zu definieren, bei der der ganze Ausdruck schon auf den Hauptnenner gebracht ist. Diese Regel nennt man Quotientenregel.

2.7 Quotientenregel

Aus dem zuvor Dargelegten ergibt sich, dass sich die Quotientenregel relativ leicht aus der Produktregel herleiten lässt. Dieses wird zunächst durchgeführt:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x) * [h(x)]^{-1}$$

$$f'(x) = g'(x) * [h(x)]^{-1} + g(x) * (-1) * [h(x)]^{-2} * h'(x)$$

Den Ausdruck kann man nun wieder als Bruch schreiben und ihn dann auf den Hauptnenner bringen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{g'(x)}{h(x)} - \frac{g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2} = \frac{g'(x) * h(x)}{[h(x)]^2} - \frac{g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2} \\ &= \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2} \end{aligned}$$

Somit lautet die **Quotientenregel**:

$$f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2}$$



Nachfolgend wird eine Ableitung mit der Quotientenregel berechnet:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 6}$$

Also gilt:

$$g(x) = x^3 + 2x \quad g'(x) = 3x^2 + 2$$

$$h(x) = x^2 - 6 \quad h'(x) = 2x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2) * (x^2 - 6) - (x^3 + 2x) * 2x}{(x^2 - 6)^2} \\ &= \frac{3x^4 - 18x^2 + 2x^2 - 12 - 2x^4 - 4x^2}{(x^2 - 6)^2} = \frac{x^4 - 20x^2 - 12}{(x^2 - 6)^2} \end{aligned}$$

Man hätte diese Aufgabe natürlich auch direkt über die Produktregel lösen können. Hierbei hätte man den Term $f(x) = (x^3 + 2x) * (x^2 - 6)^{-1}$ mittels der Produktregel ableiten müssen.

2.8 Ableitungsübersicht

Nachfolgend wird eine Übersicht über die wichtigsten Ableitungen gegeben. Funktionen, vor denen ein $\Rightarrow$ steht, können mittels der angegebenen Umformungen und der zuvor angeführten Regel abgeleitet werden.

Funktion	Ableitung
$f(x)$	$f'(x)$
a	0
$x^n \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\Rightarrow \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\Rightarrow \frac{1}{x} = x^{-1}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\Rightarrow \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$
e^x	e^x
$\Rightarrow a^x = e^{\ln(a) \cdot x}$	$\ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x$

Wenn die Funktionen mit Konstanten multipliziert werden, so muss auch die Ableitung mit diesen Konstanten multipliziert werden. Summen und Differenzen von Funktionen können einzeln abgeleitet werden:

Faktoren: $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x)$

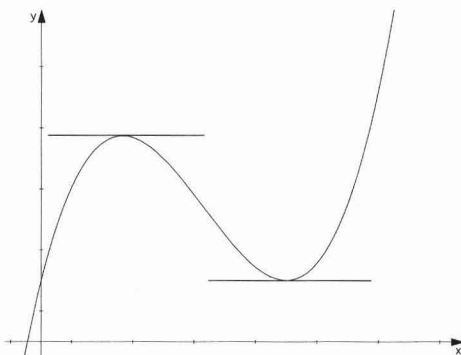
Summen/Differenzen: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Für Produkte und Quotienten sowie für verkettete Funktionen müssen die entsprechenden Regeln beachtet werden.

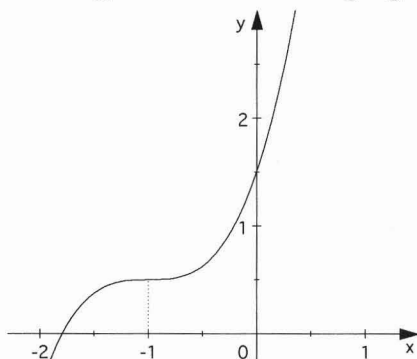
3 Bestimmung von Extremwerten/ Hoch-, Tief- und Sattelpunkte

3.1 Notwendige Bedingung

Ein Hochpunkt¹ liegt genau dann vor, wenn alle Punkte neben der betrachteten Stelle niedriger als an der Stelle selbst sind. Dieses ist aber nur dann möglich, wenn die Steigung der Funktion an der betrachteten Stelle 0 ist. Auf einem Berggipfel ist die Steigung immer 0. Wenn ich mich an einer Stelle befinde, an der die Steigung nicht 0 ist, so bin ich noch nicht auf dem Gipfel, denn dann gibt es eine Richtung, in der es noch weiter nach oben geht. Notwendige Bedingung für alle Hoch- und analog auch alle Tiefpunkte ist daher, dass die Steigung der Funktion an den entsprechenden Stellen 0 ist. Die Funktion muss dort also eine waagerechte Tangente haben.²



Allerdings bedeutet eine Steigung von Null noch nicht zwingend, dass an der entsprechenden Stelle ein Extremwert vorliegt. Es kann sich auch um einen Sattelpunkt handeln.



In der Zeichnung links ist ein **Sattelpunkt** dargestellt. Bei $x = -1$ ist die Steigung der Funktion 0, aber wie sich deutlich erkennen lässt, ist der Punkt weder ein Hoch- noch ein Tiefpunkt.

- 1: Hochpunkte in diesem Sinne nennt man auch lokale Maxima, weil es eine lokale Umgebung gibt, für die dieser Punkt der höchste Wert ist. Entsprechend werden Tiefpunkte auch lokale Minima genannt.
- 2: Die hier angeführten Zusammenhänge gelten natürlich nur unter der Voraussetzung, dass die Funktion differenzierbar ist.

Bei einem Hoch- oder Tiefpunkt muss die Steigung der Funktion also Null sein, aber es lässt sich aus einer Steigung von Null noch nicht folgern, dass tatsächlich ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt. Daher spricht man bei dieser Bedingung von der notwendigen Bedingung für Hoch- bzw. Tiefpunkte. Es gilt:

Notwendige Bedingung¹ für Hoch- und Tiefpunkte:

$$f'(x) = 0$$

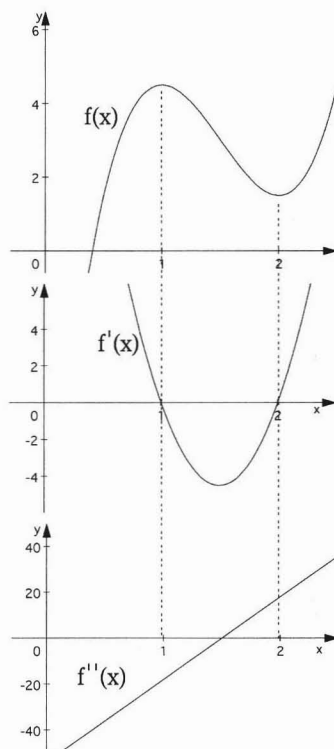
$f'(x) = 0$ bedeutet, dass die Nullstellen der ersten Ableitung bestimmt werden müssen. Es stellt sich nun die Frage, wie man analytisch (rechnerisch) feststellen kann, ob es sich bei einer Nullstelle der ersten Ableitung um einen Sattel-, Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

3.2 Hinreichende Bedingung für Hoch- und Tiefpunkte

Nebenstehend ist eine Funktion mit einem Hoch- und Tiefpunkt gezeichnet. Darunter ist die Ableitung der Funktion und wiederum darunter die zweite Ableitung der Funktion (dies ist die Ableitung der Ableitung) dargestellt.

Aus der Zeichnung der Funktion lässt sich entnehmen, dass diese bei $x=1$ einen Hochpunkt und bei $x=2$ einen Tiefpunkt hat. An diesen beiden Stellen ist die Steigung der Funktion also Null. Dies lässt sich auch gut in der Zeichnung der ersten Ableitung erkennen.

Es gibt bei dem Hoch- und Tiefpunkt aber einen Unterschied bei dem Verhalten der ersten Ableitung. Beim Hochpunkt schneidet f' die x -Achse von oben kommend, während f' beim Tiefpunkt von unten kommend schneidet. Dieser Unterschied ist kein Zufall und lässt sich auch



1: Man nennt diese Bedingung auch Bedingung erster Ordnung.

leicht verstehen: links von einem Hochpunkt muss die Steigung der Funktion positiv und rechts von ihm negativ sein. Denn wenn man von links auf einen Hochpunkt zukommt, so muss es zunächst nach oben gehen. Sobald man den Hochpunkt erreicht hat, muss es aber nach unten gehen (negative Steigung), denn sonst würde es sich ja um keinen Hochpunkt handeln. Aus dem Dargelegten lässt sich folgende Regel ableiten:

Links von einem Hochpunkt ist die Steigung der Funktion positiv und rechts davon negativ. Wenn also die erste Ableitung der Funktion bei ihrer Nullstelle das Vorzeichen von + nach - wechselt, so handelt es sich um einen Hochpunkt.

Auf analoge Weise lässt sich für Tiefpunkte herleiten:

Wenn die erste Ableitung der Funktion bei ihrer Nullstelle das Vorzeichen von - nach + wechselt, so handelt es sich um einen Tiefpunkt.

Aus der angeführten Bedingung lässt sich eine weitere Regel folgern, welche bisweilen einfacher zu handhaben ist. Bei dem Hochpunkt schneidet die erste Ableitung die x-Achse von oben kommend. Dieses ist aber gleichbedeutend damit, dass die Steigung der ersten Ableitung in dem Schnittpunkt negativ ist. Die Steigung der ersten Ableitung ist gerade durch die zweite Ableitung der Funktion gegeben (diese ist ja genau die Ableitung der Ableitung). Wenn die zweite Ableitung bei der Nullstelle der ersten Ableitung negativ ist, ändert sich also das Vorzeichen der ersten Ableitung von + nach -, und es liegt somit ein Hochpunkt vor. Entsprechend gilt, dass, wenn bei der Nullstelle der ersten Ableitung die zweite Ableitung positiv ist, es sich um einen Tiefpunkt handelt.

Es gelten also folgende Regeln:

$$f'(x_n) = 0 \wedge f''(x_n) < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt bei } x_n \quad 1)$$

$$f'(x_n) = 0 \wedge f''(x_n) > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt bei } x_n$$

1: Das Zeichen „ $\wedge$ “ bedeutet „und“.

Die angeführte Gleichung $f'(x_n) = 0$ ist die Bedingung 1. Ordnung (notwendige Bedingung) und die nachfolgende Ungleichung ist die Bedingung 2. Ordnung. Sind beide Bedingungen erfüllt, so liegt ein Hoch- bzw. Tiefpunkt vor. Beide Bedingungen zusammen sind also hinreichend für die Existenz eines Extremwertes, daher nennt man beide Bedingungen zusammen auch hinreichende Bedingung.

Wenn die zweite Ableitung auch Null ist, so muss die Funktion weiter untersucht werden. Ist die dritte Ableitung an der entsprechenden Stelle ungleich Null, so liegt ein Sattelpunkt vor. Also gilt:

Wenn $f'(x_n) = 0$ und $f''(x_n) = 0$ und $f'''(x_n) \neq 0$
liegt ein **Sattelpunkt** bei x_n vor.

Natürlich kann auch die dritte Ableitung wieder Null sein. Insgesamt gilt für die Fälle, bei denen die erste und zweite Ableitung Null sind:

Es sei $f'(x_n) = 0$ und $f''(x_n) = 0$,

so wird die Funktion so lange abgeleitet, bis man eine Ableitung erhält, die an der Stelle x_n ungleich Null ist. Handelt es sich bei dieser Ableitung um eine ungerade Ableitung (dritte, fünfte, siebente ... Ableitung), so hat die Funktion einen Sattelpunkt.

Handelt es sich um eine geradzahlige Ableitung, so hat die Funktion ein Extremum. Ist die betreffende Ableitung positiv, so handelt es sich um ein Minimum, ist sie negativ, so ist es ein Maximum.

Nachfolgend ist das Vorgehen bei der Bestimmung von Extremwerten in einem Schema dargestellt.

3.3 Schema zur Bestimmung von Extremwerten

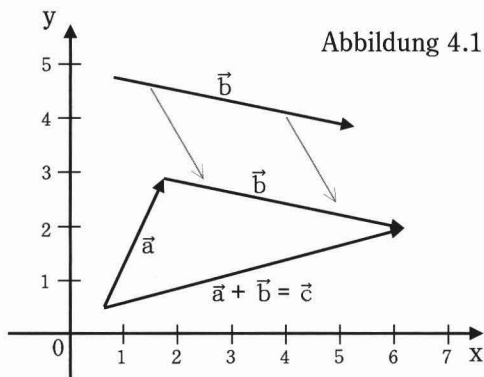
- 1) Feststellen, ob die Funktion stetig ist.
- 2) Die erste Ableitung der Funktion muss zunächst berechnet und dann gleich Null gesetzt werden. Die dadurch entstandene Gleichung muss gelöst werden.
- 3) An den Stellen, wo die erste Ableitung Null ist, muss untersucht werden, ob es sich um Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte handelt. Hierzu gibt es **zwei verschiedene Möglichkeiten**. Die erste Methode empfiehlt sich vor allem dann, wenn es sehr schwierig ist, die zweite Ableitung zu bilden:
 - 3a) Untersuchung der ersten Ableitung auf Vorzeichenwechsel. Hierzu wird ein x -Wert links und einer rechts der Nullstelle der ersten Ableitung in die erste Ableitung eingesetzt. Es ist zu beachten, dass zwischen der Nullstelle und dem eingesetzten Wert keine andere Nullstelle der ersten Ableitung und keine Unstetigkeitsstelle der Funktion liegt. Ist der linke Wert positiv und der rechte negativ, so handelt es sich um einen Hochpunkt. Ist der linke Wert negativ und der rechte positiv, so handelt es sich um einen Tiefpunkt. Sind beide Werte positiv oder beide negativ, so liegt ein Sattelpunkt vor.
 - 3b) Es wird die zweite Ableitung gebildet. Dann werden die x -Werte, für die die erste Ableitung Null ist, in die zweite Ableitung eingesetzt. Ergibt sich hierbei ein positiver Wert, so liegt ein Tiefpunkt vor. Ergibt sich ein negativer Wert, so handelt es sich um einen Hochpunkt. Ergibt sich auch für die zweite Ableitung Null, so kann nun entweder doch wie unter a) beschrieben auf Vorzeichenwechsel untersucht werden, oder es wird nun so lange abgeleitet und eingesetzt, bis sich eine Ableitung ergibt, die an der entsprechenden Stelle nicht Null ist. Ist dies eine ungeradzahlige Ableitung, so handelt es sich um einen Sattelpunkt, also keine Extremstelle. Ist es eine geradzahlige Ableitung, so liegt ein Extremum vor: Bei einem positiven Wert ist es ein Tiefpunkt und bei einem negativen Wert ein Hochpunkt.
- 4) Um den Extremwert vollständig anzugeben, muss der gefundene x -Wert noch in die Ausgangsfunktion $f(x)$ eingesetzt und auf diese Weise der zugehörige y -Wert ermittelt werden.

4 Vektorrechnung

4.1 Grundlagen

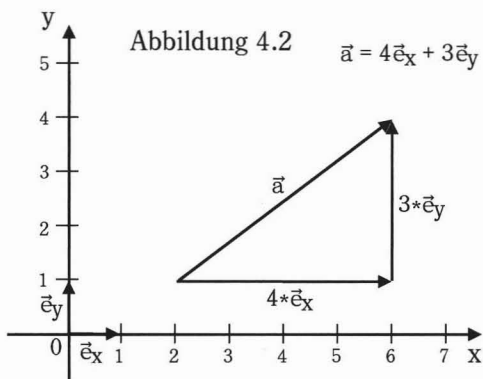
In der Oberstufe wird in aller Regel Vektorrechnung behandelt, wobei es hier häufig unter dem Oberbegriff „Lineare Algebra“ oder auch „Analytische Geometrie“ firmiert. Insbesondere der Bereich der Analytischen Geometrie wird im Studium nur selten benötigt. Es ist also in der Regel nicht nötig, den gesamten Schulstoff zu beherrschen, aber die nachfolgend behandelten Grundideen der Vektorrechnung sind doch oft nützlich. So lassen sich z.B. die meisten Eigenschaften von beliebig dimensionalen Vektorräumen "begreifen", wenn man sie sich anhand von zwei- oder dreidimensionalen Vektorräumen, wie sie nachfolgend betrachtet werden, vorstellt.

Jeder kennt sicher noch Zeichnungen, in denen man Vektoren als Pfeile darstellt. Die Addition von zwei Vektoren ergibt sich dann einfach, indem man die beiden Vektoren aneinanderreiht. Wichtig ist es hierbei zu beachten, dass alle parallelen Pfeile mit gleicher Länge und dem Pfeil auf der gleichen Seite den gleichen Vektor repräsentieren. Daher kann man die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ so verschieben, dass sie aneinander liegen. Die folgende Abbildung zeigt graphisch die Addition zweier Vektoren.



In diesem Fall handelt es sich um zweidimensionale Vektoren. Die zeichnerische Darstellung vermittelt zwar eine schöne Vorstellung von dem Problem, hilft aber bei konkreten Rechnungen nur wenig. Um Vektoren auch rechnerisch addieren zu können, müssen sie in derselben **Basis** dargestellt sein. Der Begriff der Basis wird später genauer erläutert wer-

den. Bei den dargestellten zweidimensionalen Vektoren ist die günstigste Basis die der Einheitsvektoren (Vektor mit der Länge 1) in x- und in y-Richtung. Diese Basis nennt man auch **kanonische Basis**. Durch die **Linearkombination** dieser Basisvektoren können nun alle anderen Vektoren in der xy-Ebene dargestellt werden (Linearkombination bedeutet, dass ein bestimmtes Vielfaches des einen Vektors mit einem bestimmten Vielfachen des anderen Vektors addiert wird). Im folgenden Diagramm wird dies verdeutlicht:



$\vec{e}_x$ steht hierbei für den Einheitsvektor in x-Richtung. Der Vektor $\vec{a}$ lässt sich darstellen, indem man 4-mal den Vektor $\vec{e}_x$ und 3-mal den Vektor $\vec{e}_y$ zusammenzählt. Auf diese Art und Weise lassen sich auch alle anderen Vektoren, die in der xy-Ebene liegen, darstellen.

Wenn man eine bestimmte Basis festgelegt hat, so kann man jeden Vektor durch seine "Länge" in Richtung der gewählten Basisvektoren angeben. Werden also in obigem Beispiel $\vec{e}_x$ und $\vec{e}_y$ als Basisvektoren gewählt, so kann der Vektor $\vec{a}$ auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

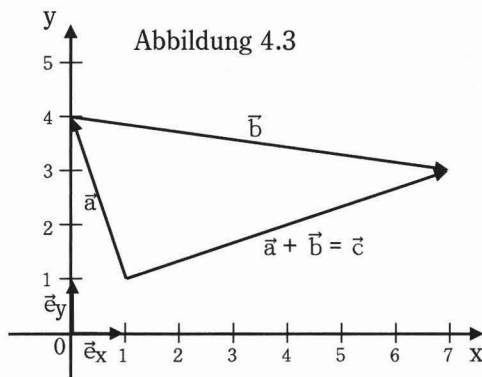
Dies ist eine abkürzende Schreibweise für: $\vec{a} = 4 \cdot \vec{e}_x + 3 \cdot \vec{e}_y$

Die Addition zweier Vektoren lässt sich nun sehr einfach ausführen. Es seien die beiden Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ gegeben, dann kann man $\vec{a} + \vec{b}$ berechnen, indem man die einzelnen Komponenten zusammenzählt.

Es ergibt sich:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + 7 \\ 3 + (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden ist die Addition noch einmal graphisch dargestellt:

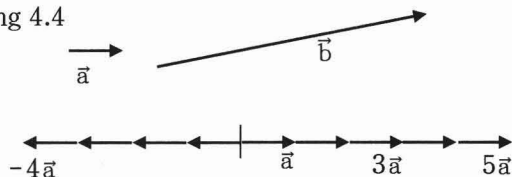


4.2 Lineare Abhängigkeit

Eine Menge von Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn sich einer von ihnen durch Addition beliebiger Vielfacher der anderen Vektoren darstellen lässt. In dem letzten Diagramm des vorherigen Abschnitts sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ (mit $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$) linear abhängig, denn es gilt ja $\vec{c} = 1 * \vec{a} + 1 * \vec{b}$.

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel zueinander sind. Denn bei zwei Vektoren bedeutet lineare Abhängigkeit, dass sich der eine als ein Vielfaches des anderen darstellen lassen muss. Bei zwei Vektoren, die linear abhängig sind, spricht man auch von **kollinearen** Vektoren.

Abbildung 4.4

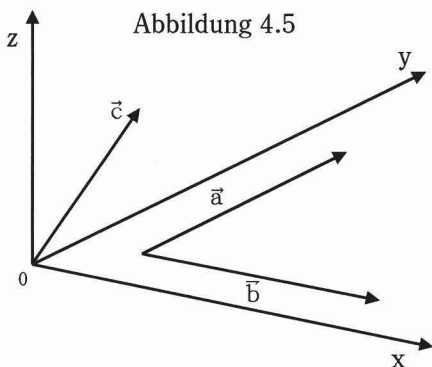


In obiger Skizze sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig, denn egal mit welcher Zahl man den Vektor $\vec{a}$ multipliziert, man wird nie den Vek-

tor $\vec{b}$ erhalten, sondern immer nur Vektoren, die wieder parallel zu $\vec{a}$ sind.

Drei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen. Die drei Vektoren ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$) aus Abbildung 4.3 sind linear abhängig. Durch geeignete Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich auch jeder andere Vektor in der xy -Ebene darstellen.

Die nächste Abbildung zeigt ein Beispiel für drei Vektoren, die linear unabhängig sind. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verlaufen sozusagen auf dem "Fußboden". Egal wie oft man diese aneinanderreicht, man bleibt immer auf dem Fußboden und kann nie den Vektor $\vec{c}$ bilden, der gewissermaßen in den Raum hineinragt.



Vielleicht erinnert sich manch einer noch aus der Schulzeit, dass man 3 Vektoren, die linear abhängig sind, auch **komplanare** Vektoren nennt. In der Schule wurden zwei Komplanaritätsbedingungen angegeben:

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \vec{c} \text{ oder } \vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Komplanar bzw. linear abhängig sind drei Vektoren, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist. Die erste Bedingung allein reicht nicht aus, denn wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schon untereinander linear abhängig sind, so liegen die drei Vektoren immer in einer Ebene, auch wenn sich $\vec{c}$ nicht als Linearkombination durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen lässt. Statt dieser beiden Bedingungen kann man auch folgende Bedingung aufstellen:

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann komplanar, wenn die Gleichung $\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c} = 0$ eine andere Lösung als die Trivillösung hat. Bei der Trivillösung sind alle Parameter (λ , μ und ν) Null. Diese Lösung existiert natürlich immer. Wenn es noch andere Lösungen gibt, so ist eine der beiden zuvor angeführten Bedingungen erfüllt. In diesem Fall sind die Vektoren also linear abhängig. Die zuletzt angeführte Bedingung für lineare Abhängigkeit lässt sich auf eine beliebige Anzahl von Vektoren verallgemeinern.

Es gilt:

Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ nur erfüllbar ist, wenn alle λ_i gleich Null sind.

Die Vektoren sind also linear unabhängig, wenn die angeführte Gleichung nur die Trivillösung hat. Gibt es noch eine andere Lösung, so sind die Vektoren linear abhängig.

Mit Hilfe des Summenzeichens kann man die Gleichung auch folgendermaßen schreiben:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{a}_i = 0$$

Das Summenzeichen bedeutet, dass für i nacheinander alle natürlichen Zahlen von 1 bis n eingesetzt werden müssen und die sich jeweils ergebenden Ausdrücke summiert werden sollen. Man kann es sich als eine abkürzende Schreibweise für den in der Definition verwendeten Ausdruck vorstellen.

4.3 Vektorräume

Ein Vektorraum ist eine Menge von Vektoren (die Elemente können auch Zahlen oder Matrizen sein), die bestimmte Eigenschaften erfüllt. Es ist also nicht jede Menge von Vektoren ein Vektorraum. Einen Vektorraum nennt man auch linearen Raum. Dieses drückt schon die wesentliche Eigenschaft von Vektorräumen aus, sie müssen nämlich abgeschlossen bezüglich der Linearkombination ihrer Elemente sein. Betrachtet man z.B. die Menge, die nur aus den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus Abbildung 4.1 besteht. Diese Menge ist kein Vektorraum, denn der Vektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ist eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, aber er ist nicht in der Menge enthalten.

Dagegen ist die Menge aller Vektoren, die in der xy -Ebene liegen, ein Vektorraum, denn jede beliebige Linearkombination von Vektoren aus der xy -Ebene ergibt wieder einen Vektor in der xy -Ebene. Diesen Vektorraum nennt man auch $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$ hoch zwei), denn wenn man die Elemente dieses Vektorraumes in einer bestimmten Basis darstellt, so haben sie die Form:

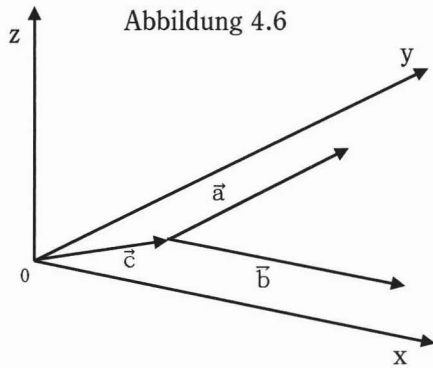
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wobei sowohl x als auch y beliebige Elemente aus $\mathbb{R}$ sein können.

Wenn man drei beliebige Variable aus $\mathbb{R}$ wählen darf und so einen Vektorraum bildet, so spricht man von dem $\mathbb{R}^3$. Er hat die Elemente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ mit } x, y \text{ und } z \in \mathbb{R} \text{ („} \in \text{“ bedeutet Element)}$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus Abbildung 4.5 spannen gerade den $\mathbb{R}^3$ auf, das heißt, dass die Menge aller möglichen Linearkombinationen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gerade der $\mathbb{R}^3$ ist. Drei Vektoren, die in einer Ebene liegen, spannen dagegen nicht den $\mathbb{R}^3$, sondern den $\mathbb{R}^2$ auf, denn egal wie man diese Vektoren zusammenzählt, man kommt nie aus der Ebene heraus. (Siehe z. B. Abbildung 4.6)



Eine Menge ist nur dann ein Vektorraum, wenn sie alle möglichen Linearkombinationen ihrer

Elemente enthält; wenn also z.B. die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Elemente der Menge sind, so müssen, damit diese Menge ein Vektorraum ist, auch alle Vektoren $\vec{x}$, die folgendermaßen gebildet werden,

$$\vec{x} = \lambda * \vec{a} + \mu * \vec{b} \quad (\text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

Elemente dieser Menge sein.

Hierbei werden die Vektoren mit beliebigen Skalaren (reellen Zahlen) multipliziert und dann addiert. Man kann diese Operationen auch einzeln betrachten und formulieren:

Ein Vektorraum muss bezüglich der Addition und der Multiplikation mit einem Skalar abgeschlossen sein. D.h. wenn man beliebige Vektoren eines Vektorraums addiert oder mit einem beliebigem Skalar multipliziert, so muss das Ergebnis dieser Operation stets wieder ein Element des Vektorraums sein.

4.4 Dimension und Basis

Die Dimension eines Vektorraumes gibt die Anzahl von linear unabhängigen Vektoren an, die nötig sind, um durch ihre Linearkombination alle Elemente des Vektorraumes zu bilden. Die Dimension des $\mathbb{R}^3$ ist z.B. 3, die des $\mathbb{R}^2$ ist 2 etc.. Der $\mathbb{R}^3$ ist gerade der Raum, der uns ständig umgibt, in ihm kann man sich die Zusammenhänge noch vorstellen, während z.B. der $\mathbb{R}^4$ bereits über unser Vorstellungsvermögen hinausgeht. Glücklicherweise gelten aber die Zusammenhänge, die wir uns im $\mathbb{R}^3$ vorstellen können, vom Prinzip her auch in höher dimensionalen Vektorräumen. Um den $\mathbb{R}^3$ aufzuspannen, reichen zwei linear unabhängige Vektoren nicht aus; deren Linearkombinationen ergeben stets nur eine Ebene. Es wird ein dritter, linear unabhängiger Vektor benötigt, um den $\mathbb{R}^3$ aufzuspannen. Drei derartige linear unabhängige Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ nennt man auch eine **Basis** des $\mathbb{R}^3$.

Die **Basis** ist also eine Menge von Vektoren, durch deren Linearkombination sich **alle Vektoren des Vektorraumes darstellen lassen**. Gleichzeitig darf die Basis aber **keine überflüssigen Vektoren** enthalten. Daher müssen die Basisvektoren immer **linear unabhängig** sein.

Die drei Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ von Abbildung 4.6 bilden keine Basis des $\mathbb{R}^2$. Mit ihrer Hilfe lassen sich zwar auch alle Vektoren des $\mathbb{R}^2$ als Linearkombination darstellen, aber hierzu würden auch zwei der drei Vektoren ausreichen. Eine Menge von Vektoren, die den Vektorraum aufspannt, nennt man auch **Erzeugendensystem**. Die drei Vektoren $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ bilden also ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$. Eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bilden sie aber nicht, denn die drei Vektoren sind linear abhängig. Zwei der drei Vektoren würden ausreichen, um den $\mathbb{R}^2$ aufzuspannen. Die Vektoren $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ bilden z. B. auch ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$; da die beiden Vektoren außerdem linear unabhängig sind, stellen sie gleichzeitig auch eine Basis des $\mathbb{R}^2$ dar.

Es gilt:

1. Eine Menge von Vektoren, die einen Vektorraum aufspannt, nennt man ein **Erzeugendensystem** des Vektorraumes. Aufspannen bedeutet hierbei, dass der Vektorraum der Menge aller möglichen Linearkombinationen der Vektoren entspricht.
2. Ein Erzeugendensystem, dessen Vektoren linear unabhängig sind, ist eine Basis des entsprechenden Vektorraumes.

Zuvor wurde bereits der Begriff der Dimension benutzt, ohne diesen näher zu erläutern. Hierbei wurde darauf Bezug genommen, dass eine Ebene zweidimensional und der uns umgebende Raum dreidimensional ist. Im Zusammenhang mit der Basis eines Vektorraumes lässt sich nun folgende Aussage treffen:

Die **Anzahl der Basisvektoren** einer Basis eines Vektorraumes entspricht stets der **Dimension** des Vektorraumes.

In diesem Abschnitt wurden die wesentlichen Begriffe für den Umgang mit Vektorräumen anhand von zwei- und dreidimensionalen Beispielen erläutert. Die wesentlichen Zusammenhänge gelten auch für abstraktere Vektorräume, also z.B. den $\mathbb{R}^4$ oder den Vektorraum der reellen Matrizen usw.

5 Lösungen von Gleichungen

In vielen Aufgaben zu sehr unterschiedlichen Gebieten ist es notwendig, Gleichungen oder Gleichungssysteme zu lösen. Deshalb wird nachfolgend ein Überblick über die Lösungsverfahren gegeben.

5.1 Lineare Gleichungen

Wenn eine lineare Gleichung nach einer Variablen aufgelöst werden soll, so sollten zunächst alle Terme mit dieser Variablen auf die eine Seite und alle anderen Terme auf die andere Seite gebracht werden:

$$\begin{aligned}3x + 5x - 14 &= x \quad | -x + 14 \\ \Leftrightarrow 7x &= 14\end{aligned}$$

Dann kann durch den Faktor vor der Variablen geteilt werden:

$$\begin{aligned}7x &= 14 \quad | :7 \\ x &= 2\end{aligned}$$

5.2 Quadratische Gleichungen

Bei quadratischen Gleichungen taucht die Variable in zweiter Potenz auf. Folgende Gleichung ist z.B. eine quadratische Gleichung:

$$2x^2 - 4x = 6$$

Eine derartige Gleichung kann man entweder mittels einer quadratischen Ergänzung lösen oder die auf diese Weise hergeleitete pq-Formel benutzen.

5.2.1 Quadratische Ergänzung

Der Term mit x^2 und der mit x^1 müssen beide auf einer Seite der Gleichung stehen. Dies ist hier der Fall. Zunächst muss dafür gesorgt werden, dass vor dem x^2 kein Faktor mehr steht:

$$\begin{aligned}2x^2 - 4x &= 6 \quad | :2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x &= 3\end{aligned}$$

Nun wird die linke Seite der Gleichung so umgeformt, dass eine Klammer entsteht, die quadriert wird. Folgende Klammer ergibt quadriert:

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Die ersten beiden Terme entsprechen den ersten beiden Termen in der obigen Gleichung. Wenn man die linke Seite der obigen Gleichung durch

die Klammer ersetzt, so muss der dritte Term (die 1) wieder abgezogen werden:

$$x^2 - 2x = 3 \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 1 = 3$$

(Den zweiten Ausdruck in der Klammer erhält man, indem der in der Gleichung vor dem x stehende Faktor durch zwei geteilt wird ($-1 = \frac{-2}{2}$).)

Die Gleichung kann nun nach x aufgelöst werden:

$$(x - 1)^2 - 1 = 3 \quad | +1$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

Nun wird die Wurzel gezogen. Hierbei ist zu beachten, dass es immer die positive und die negative Wurzel gibt:

$$\Leftrightarrow x - 1 = 2 \text{ oder } x - 1 = -2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ oder } x = -1$$

5.2.2 pq-Formel

Mittels der quadratischen Ergänzung kann eine allgemeine Formel zur Lösung von quadratischen Gleichungen hergeleitet werden. Man formt die Gleichung zunächst so um, dass auf der einen Seite der Gleichung eine Null steht. Anschließend sorgt man durch das Multiplizieren (oder auch Teilen) der Gleichung mit einem geeigneten Faktor dafür, dass vor dem x^2 nur noch eine 1 steht. Den Faktor, der nun noch vor dem x steht, nennt man p und den Term, der ohne x steht, q. Die Gleichung lautet dann:

$$x^2 + px + q = 0$$

Diese Gleichung kann nun mittels quadratischer Ergänzung gelöst werden.

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad | + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad | \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad | - \frac{p}{2}$$

Als Lösung für x ergibt sich somit:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Da in der Gleichung p und q auftreten, nennt man die Formel häufig auch pq -Formel.

Nachfolgend wird das zuvor schon angeführte Beispiel mit der pq -Formel berechnet:

$$2x^2 - 4x = 6$$

Zunächst wird die 6 auf die andere Seite gebracht. Dann wird die Gleichung durch 2 geteilt:

$$2x^2 - 4x = 6 \quad | -6$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad | /2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

An dieser Gleichung kann man nun den Wert für p und q ablesen. p ist der Wert, mit dem x multipliziert wird, und q ist der Wert, der allein steht. Wichtig ist, dass auch das Vorzeichen zu p und q gehört. In diesem Fall hat also p den Wert von -2 und q den Wert von -3 . Wenn man dies einsetzt, ergibt sich:

$$x = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - (-3)}$$

$$x = +\frac{2}{2} \pm \sqrt{1+3}$$

$$\Leftrightarrow x = 1+2 \quad \text{oder} \quad x = 1-2$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{oder} \quad x = -1$$

5.2.3 Weitere Zusammenhänge

Bisweilen wird auch eine sogenannte abc -Formel zur Berechnung von quadratischen Gleichungen angeführt. Hierbei wird die Gleichung nicht so umgeformt, dass vor dem x^2 nichts mehr steht, sondern der Ausdruck vor dem x wird mit a bezeichnet. Entsprechend lautet die allgemeine Form der quadratischen Gleichung:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit der quadratischen Gleichung oder auch der pq -Formel löst, so ergibt sich:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

Ganz allgemein gibt es für die Anzahl von Lösungen von quadratischen Gleichungen 3 verschiedene Möglichkeiten:

- wenn der Ausdruck in der auftretenden Wurzel negativ ist, gibt es keine Lösung in $\mathbb{R}$
- wenn der Ausdruck in der Wurzel 0 ist, existiert genau eine Lösung
- wenn der Ausdruck in der Wurzel größer als Null ist, existieren genau zwei Lösungen

5.3 Homogene Gleichungen höherer Ordnung

Bei homogenen Gleichungen tauchen keine einzelnen Zahlen oder Konstanten auf. Bei solchen Gleichungen kommt man meist durch Ausklammern weiter und erhält so zumindest eine Lösung. Dies wird nachfolgend an einem Beispiel demonstriert:

Es sei folgende Gleichung dritten Grades zu lösen:

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

Hier kann x ausgeklammert werden:

$$\Leftrightarrow x \cdot (x^2 + x - 2) = 0$$

Nun ist ein Produkt entstanden. Ein Produkt ist immer dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Es muss also gelten:

$$x = 0 \text{ oder } x^2 + x - 2 = 0$$

Der rechte Ausdruck könnte nun entsprechend den Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen weiter gelöst werden.

5.4 Inhomogene Gleichungen höherer Ordnung

Typisch wären hier etwa Gleichungen dritten Grades. Angenommen, es sei folgende Gleichung zu lösen:

$$x^3 + 10x^2 - x = 10$$

Numerisch können derartige Gleichungen natürlich mit Näherungsverfahren gelöst werden. Wenn man aber direkt eine Lösung finden will, so muss man zunächst eine Lösung erraten. In der Realität wird es natürlich zumeist unmöglich sein, eine Lösung zu erraten, denn im allgemeinen kann die Lösung aus irgendwelchen Zahlen aus $\mathbb{R}$ bestehen. In Klausuraufgaben sind aber solche Aufgaben recht beliebt, bei denen sich die Lösung einfach erraten lässt (zumeist ist dann 1, 2, 3, -1, -2, oder -3 eine Lösung). Bei der gestellten Aufgabe ist 1 eine Lösung. Nun könnte man natürlich versuchen, weiter zu raten, aber wenn man bei ei-

ner Gleichung dritten Grades eine Lösung gefunden hat, so lassen sich die anderen Lösungen mittels **Polynomdivision** ermitteln. Zunächst muss die Funktion so umgestellt werden, dass auf der einen Seite Null steht.

$$x^3 + 10x^2 - x - 10 = 0$$

Dieser Ausdruck wird nun gewissermaßen durch die gefundene Lösung geteilt. Genaugenommen wird durch das entsprechende Polynom geteilt, für das die gefundene Lösung Null wird. Es wird also aus dem gesamten Polynom sozusagen die eine Nullstelle "herausgeteilt". Die erratene Lösung war $x = 1$, das entsprechende Polynom lautet $(x - 1)$, denn dieser Ausdruck wird für $x = 1$ gerade Null. Die nun durchzuführende Division wird nach dem Verfahren der schriftlichen Division durchgeführt.

$$x^3 + 10x^2 - x - 10 / (x - 1) = ?$$

Zunächst muss nun ein Ausdruck gefunden werden, der mit x multipliziert gerade die höchste x -Potenz des vorderen Ausdrucks ergibt. Dieser Ausdruck ist x^2 . Von der ursprünglichen Funktion muss dann das Produkt aus diesem Ausdruck und $(x - 1)$ abgezogen werden:

$$\begin{array}{r} x^3 + 10x^2 - x - 10 / (x - 1) = x^2 \dots\dots \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 11x^2 - x - 10 \end{array}$$

Für den nun unten stehenden Ausdruck muss genauso verfahren werden:

$$\begin{array}{r} x^3 + 10x^2 - x - 10 / (x - 1) = x^2 + 11x + 10 \\ -(x^3 - x^2) \\ \hline 11x^2 - x - 10 \\ -(11x^2 - 11x) \\ \hline 10x - 10 \\ -(10x - 10) \\ \hline 0 \end{array}$$

Die restlichen Lösungen der ursprünglichen Gleichung ergeben sich jetzt durch die Lösung der übriggebliebenen Gleichung:

$$x^2 + 11x + 10 = 0$$

Diese quadratische Gleichung kann mittels der pq-Formel gelöst werden:

$$\begin{aligned} x &= -5,5 \pm \sqrt{5,5^2 - 10} = -5,5 \pm 4,5 \\ \Leftrightarrow x &= -1 \vee x = -10 \end{aligned}$$

5.5 Gleichungen mit Quotienten

Bei Gleichungen mit Quotienten ist es in der Regel am besten, zunächst die Quotienten zu beseitigen. Diese lassen sich beseitigen, indem man die Gleichung mit ihnen multipliziert.

$$\frac{x^2+2}{x} = 3 + \frac{2}{x} \quad | \cdot x$$

Hier gilt es aber zu beachten, dass nicht mit 0 malgenommen werden darf. Wenn der Nenner (hier also x) Null ist, so ist der ganze Ausdruck nicht definiert. Falls sich bei der weiteren Berechnung eine Lösung von Null ergibt, so muss diese ausgeschlossen werden.

$$\Rightarrow x^2 + 2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Die Lösung $x=0$ wurde zuvor ausgeschlossen, so dass sich als einzige Lösung $x=3$ ergibt.

Ein Quotient wird als Ganzes Null, wenn der Zähler Null ist und der Nenner gleichzeitig ungleich Null ist.

5.6 Komplexere Gleichungen

Im allgemeinen können in Gleichungen alle möglichen Funktionen auftreten. Wenn auf die betrachtete Variable eine bestimmte Funktion angewendet wird, so kann man die Funktion "entfernen", indem man die **Umkehrfunktion** auf die Gleichung anwendet. In derartigen Fällen muss man darauf achten, die Umkehrfunktion auch wirklich auf beide Seiten der Gleichung komplett anzuwenden. Dies soll nachfolgend an Beispielen verdeutlicht werden:

$$1) \quad 5 + \ln(x) = a + 1 \quad (a \in \mathbb{R})$$

Um diese Gleichung nach x aufzulösen, bringt man am besten zunächst die 5 auf die andere Seite:

$$\Leftrightarrow \ln(x) = a - 4$$

Nun muss der $\ln$ "entfernt" werden. Hierzu wird auf die ganze Gleichung die Umkehrfunktion des $\ln$ (die e -Funktion) angewendet, so dass sich ergibt:

$$\Leftrightarrow x = e^{(a-4)}$$

Wichtig ist hierbei, die e -Funktion auf der rechten Seite auf beide Terme anzuwenden. Ein typischer Fehler wäre z. B. folgende Auflösung:

$$x = e^a - e^4 \quad (\text{falsch})$$

Hierbei wurde die e-Funktion einfach auf die einzelnen Komponenten der rechten Seite angewendet. Dies ist aber keinesfalls zulässig, wie die folgende Auflösung des richtigen Ergebnisses zeigt:

$$x = e^{(a-4)} \Leftrightarrow x = e^a * e^{-4}$$

Hierbei wurde die entsprechende Rechenregel für Exponenten benutzt. Man sieht deutlich, dass sich ein anderes Ergebnis als bei der zuvor angeführten falschen Auflösung ergibt.

2) Es sei folgende Gleichung nach y aufzulösen:

$$2^y = 4x + 2 \mid \log_2$$

$$\Leftrightarrow y = \log_2(4x+2)$$

Auch hier war darauf zu achten, dass der entsprechende Logarithmus auf die ganze rechte Seite angewendet wird.

Alternativ kann die Gleichung auch mit dem ln aufgelöst werden:

$$2^y = 4x + 2 \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2^y) = \ln(4x+2) \Leftrightarrow y * \ln(2) = \ln(4x+2) \mid / \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\ln(2)} * \ln(4x+2)$$

3) Nachfolgend sei noch eine relativ komplexe Gleichung gegeben, die ebenfalls nach y aufgelöst werden soll:

$$\sin(\ln(y^2+a)) = \cos(x) - 3a \mid \arcsin \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \ln(y^2+a) = \arcsin(\cos(x) - 3a) \mid e^{\text{hoch}}$$

$$\Leftrightarrow y^2 + a = e^{\arcsin(\cos(x) - 3a)} \mid -a$$

$$\Leftrightarrow y^2 = e^{\arcsin(\cos(x) - 3a)} - a \mid \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[2]{e^{\arcsin(\cos(x) - 3a)} - a}$$

4) Tauchen **Wurzeln** oder **Potenzen** auf, so werden diese – falls möglich – am besten zunächst beseitigt:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 + 5x + 7} \mid ^2$$

Die gesamte Gleichung wird quadriert. Hierbei ergibt sich:

$$x^2 - 2x = x^2 + 5x + 7 \mid -x^2 - 5x$$

$$\Leftrightarrow -7x = 7 \mid /(-7)$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

5.7 Gleichungssysteme

5.7.1 Lineare Gleichungssysteme

Bei linearen Gleichungssystemen sind mehrere lineare Gleichungen gegeben, die gleichzeitig erfüllt sein sollen. Zunächst wird ein einfaches Beispiel mit 2 Gleichungen angeführt:

$$x + y = 2$$

$$x - 3y = 1$$

Aus den einzelnen Gleichungen kann man noch keine Werte für x und y bestimmen. Man muss mit geeigneten Verfahren eine Gleichung produzieren, in der nur noch eine der Variablen vorkommt. Entweder kann eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst und das Ergebnis dann in die andere Gleichung eingesetzt werden (**Einsetzungsverfahren**), oder man kann das **Additionsverfahren** verwenden. Hierbei addiert oder subtrahiert man zu der einen Gleichung ein Vielfaches der anderen Gleichung, so dass eine der Variablen aus der entstehenden Gleichung herausfällt. In dem Beispiel kann man einfach von der ersten Gleichung die zweite abziehen.

$$\begin{array}{r} x + y = 2 \\ - (x - 3y = 1) \\ \hline 0 + 4y = 1 \end{array}$$

Aus der so entstandenen Gleichung kann nun y berechnet und das Ergebnis dann in eine der ursprünglichen Gleichungen eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} 4y = 1 &\Leftrightarrow y = 0,25 \\ \Rightarrow x + 0,25 &= 2 \Leftrightarrow x = 1,75 \end{aligned}$$

Wenn die Anzahl der Gleichungen größer ist, kann vom Prinzip her genauso verfahren werden; es seien beispielsweise folgende 3 Gleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0 \\ x + y - 1 &= -2z \\ x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Hier muss man zunächst zwei Gleichungen erzeugen, in denen nur noch zwei bestimmte Variable vorkommen. Die meisten werden bei derartigen Berechnungen schon einmal erlebt haben, dass man sehr schnell den Überblick verliert und sich verzettelt. Noch problematischer wird dies natürlich bei 4, 5 oder noch mehr Gleichungen. Daher erscheint es sinn-

voll, zur Lösung dieser Gleichungen eine gewisse formale Strenge einzuhalten. Wie man dies macht, wird im Folgenden beschrieben, wobei es sich einfach um eine Anwendung des Additionsverfahrens handelt.

Zunächst formt man die Gleichungen so um, dass alle Variablen auf der linken Seite und alle einzelnen Zahlen oder Konstanten auf der rechten Seite stehen. In dem Beispiel sind die erste und dritte Gleichung bereits in der geforderten Form gegeben. Nur die zweite muss umgeformt werden:

$$x + y + 2z = 1$$

Nun schreibt man die Gleichungen untereinander, wobei man darauf achten muss, dass die gleichen Variablen direkt untereinander stehen:

$$2x - 2y = 0 \quad | : 2$$

$$x + y + 2z = 1$$

$$x + y + z = 1$$

Jetzt wird zunächst dafür gesorgt, dass die erste Variable in allen Gleichungen in gleicher Anzahl vorkommt. Hierzu wird die erste Gleichung durch 2 geteilt:

$$x - y = 0$$

$$x + y + 2z = 1 \quad | -I$$

$$x + y + z = 1 \quad | -I$$

In der zweiten und dritten Gleichung wird das x eliminiert. Hierzu werden zu diesen Gleichungen geeignete Vielfache der ersten Gleichung addiert oder subtrahiert. In diesem Fall muss von der zweiten und dritten Gleichung je einmal die erste Gleichung abgezogen werden. Hinter den zuvor angeführten Gleichungen wird dies durch die römischen Zahlen hinter den Gleichungen angedeutet. Werden diese Rechnungen ausgeführt, ergibt sich:

$$x - y = 0$$

$$2y + 2z = 1$$

$$2y + z = 1 \quad | -II$$

In der zweiten und dritten Gleichung kommen nur noch y und z vor. Somit kann aus diesen Gleichungen eine neue Gleichung, in der nur noch eine Variable auftaucht, ermittelt werden. Dies wird nachfolgend erreicht, indem von der dritten Gleichung die zweite abgezogen wird:

$$x - y = 0$$

$$2y + 2z = 1$$

$$0 + 0 - z = 0$$

In der letzten Gleichung steht nun schon, wie groß z ist. Dieses Ergebnis kann man in die zweite Gleichung einsetzen, um y zu bestimmen. Durch Einsetzen des Ergebnisses für y in die erste Gleichung erhält man dann x :

$$z = 0$$

$$2y + 0 = 1 \Leftrightarrow y = 0,5$$

$$x - 0,5 = 0 \Leftrightarrow x = 0,5$$

5.7.2 Nichtlineare Gleichungssysteme

Während sich bei linearen Gleichungssystemen entweder eine eindeutige Lösung oder eine unendliche Lösungsmenge ergibt, kann es bei nicht-linearen Gleichungen eine beliebige Anzahl von Lösungen geben. Manchmal muss man aufpassen, dass man bei der Lösung keine vergisst.

Für nicht-lineare Gleichungssysteme gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren wie für lineare Gleichungssysteme. Nachfolgend werden einige wesentliche Aspekte für das Lösen von nicht-linearen Gleichungssystemen herausgearbeitet:

$$1) \quad 2x + y = 0 \wedge x^2 + y^2 = 20$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$y = -2x$$

Dieses Ergebnis kann nun in die zweite Gleichung für y eingesetzt werden:

$$x^2 + (-2x)^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 + 4x^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 = 20 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = -2$$

Aus der ersten Gleichung kann nun jeweils der y -Wert bestimmt werden:

$$y = -2 \cdot 2 = -4 \vee y = -2 \cdot (-2) = 4$$

Somit ergeben sich die folgenden 2 Wertepaare als Lösungen:

$$(2, -4) \text{ oder } (-2, 4)$$

2) Tauchen Klammerausdrücke von Wurzeln oder Potenzen auf, so werden diese am besten zunächst beseitigt:

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 + 5x + 7} \quad | \cdot^2$$

Die gesamte Gleichung wird quadriert. Hierbei ergibt sich:

$$x^2 - 2x = x^2 + 5x + 7 \quad | -x^2 - 5x$$

$$\Leftrightarrow -7x = 7 \quad | /(-7)$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

5.8 Ungleichungen

Bei Ungleichungen taucht statt des Gleichheitszeichens der Gleichung ein kleiner ($<$), kleiner-gleich ($\leq$), größer ($>$) oder größer-gleich ($\geq$) Zeichen auf. Bezüglich der meisten Umformungen können Ungleichungen wie Gleichungen behandelt werden. Ein wichtiger Unterschied ergibt sich insbesondere, wenn eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert wird. In diesem Fall muss das Relationszeichen umgedreht werden:

$$3 < 7 \quad | *(-2)$$

$$\Leftrightarrow -6 > -14$$

An folgendem Beispiel kann die Sinnhaftigkeit dieser Regel gut nachvollzogen werden:

$$3 - x < 0 \quad | +x \quad \Leftrightarrow 3 < x$$

Natürlich könnte bei dieser Gleichung auch zuerst die 3 auf die andere Seite gebracht werden:

$$3 - x < 0 \quad | -3 \quad \Leftrightarrow -x < -3 \quad | *(-1)$$

Wenn das Relationszeichen nun bei der Multiplikation mit -1 nicht umgedreht werden würde, so erhielte man ein anderes Ergebnis als zuvor!

Häufig wird übersehen, dass die angeführte Regel auch dann beachtet werden muss, wenn mit Termen multipliziert wird, die möglicherweise negativ sind. Es sei folgende Ungleichung aufzulösen:

$$\frac{-1}{x-2} > 1$$

Um diese Gleichung nach x aufzulösen, muss zunächst mit dem Nenner multipliziert werden:

$$\frac{-1}{x-2} > 1 \quad | * (x-2) \quad (\text{für } x \neq 2)$$

Nun muss eine **Fallunterscheidung** durchgeführt werden. Für den Fall $x > 2$ wird mit einem positiven Term multipliziert, und das Relationszei-

chen ändert sich nicht. Für $x < 2$ wird hingegen mit einem negativen Term multipliziert, so dass das Zeichen umgedreht werden muss:

für $x > 2$

$$-1 > x - 2 \quad | +2$$

$$\Leftrightarrow 1 > x$$

$$\Leftrightarrow x < 1$$

für $x < 2$

$$-1 < x - 2 \quad | +2$$

$$\Leftrightarrow 1 < x$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Für den Fall $x > 2$ gibt es also keine Lösung, denn x kann nicht gleichzeitig größer als 2 und kleiner als 1 sein. Eine Lösung ergibt sich nur, wenn x kleiner als 2 und größer als 1 ist. Somit lautet die Lösung für x :

$$1 < x < 2$$

Oder anders ausgedrückt:

$$x \in]1, 2[\quad (x \text{ ist Element des offenen Intervalls zwischen 1 und 2})$$

Wenn **Potenzen** in Ungleichungen auftauchen, so ist besondere Vorsicht geboten. Denn das Potenzieren oder Wurzelziehen kann das Vorzeichen der Seiten der Ungleichung beeinflussen, und somit sind besondere Regeln für diese Fälle erforderlich. Dies sei an den nachfolgenden Beispielen verdeutlicht:

$$x^2 < 9$$

Um die Gleichung nach x aufzulösen, muss die Wurzel gezogen werden. Wenn man einfach wie bei einer Gleichung die Wurzel zieht, ergibt sich:

$$x < 3 \quad \vee \quad x < -3 \quad (, \vee " \text{ bedeutet „oder“})$$

Die Lösung wäre also $x < 3$, denn wenn $x < -3$ ist, so ist es natürlich auch kleiner als 3. Allerdings lässt sich leicht überprüfen, dass dies nicht die richtige Lösung ist, denn wenn man für x z. B. -4 in die Ausgangsgleichung einsetzt (dies ist kleiner als 3), so ergibt sich:

$$(-4)^2 < 9, \text{ dies gilt aber nicht, denn } 16 \text{ ist nicht kleiner als } 9.$$

Die richtige Lösung erhält man, indem man beim Wurzelziehen den Betrag von x bildet, also

$$x^2 < 9$$

$$\Leftrightarrow |x| < 3$$

Denn da x^2 immer positiv ist und dies kleiner als 9 sein soll, muss x vom Betrag her kleiner als 3 sein. Statt $|x| < 3$ kann man auch schreiben:

$$x < 3 \quad \wedge \quad x > -3 \quad (, \wedge " \text{ bedeutet „und“})$$

Die angeführte Lösung mit dem Betrag beim Wurzelziehen gilt für alle **geradzahligen** (2, 4, 6, etc.) Wurzeln.

Bei **ungeradzahligen** Wurzeln kann die Wurzel aus Ungleichungen genauso wie bei Gleichungen gezogen werden, denn eine ungeradzahlige Wurzel verändert das Vorzeichen nicht. Entsprechend können ungeradzahlige Potenzen auf Ungleichungen angewendet werden, ohne dass sich etwas verändert. Z.B. können beide Seiten einer Ungleichung hoch 3 genommen werden.

Wenn hingegen geradzahlige Potenzen auf eine Ungleichung angewendet werden, so muss das Relationszeichen in bestimmten Fällen umgedreht werden, falls das Vorzeichen verändert wird.

6 Grundlegende Rechenregeln

Nachfolgend sind einige sehr wichtige Rechenregeln angeführt.

6.1 Wurzeln und Potenzen

Für Wurzeln und Potenzen gelten die gleichen Rechenregeln. Dieses muss schon deshalb so sein, weil sich jede Wurzel als Potenz schreiben lässt:

$$n\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Besonders wichtig ist, dass bei Summen und Differenzen die Wurzeln oder Potenzen **nicht** einfach auf die einzelnen Terme angewendet werden dürfen:

$$(a + c)^3 \neq a^3 + c^3 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a - c} \neq \sqrt{a} - \sqrt{c}$$

Bei Produkten oder Quotienten darf die Wurzel oder Potenz dagegen einfach auf die einzelnen Terme angewendet werden.

$$(a * c)^3 = a^3 * c^3 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{a * c} = \sqrt{a} * \sqrt{c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$1a) \text{ multiplizieren} \quad (a * b)^x = a^x * b^x$$

$$1b) \text{ dividieren} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

(Die Regeln für Wurzeln stecken in den angeführten Gleichungen mit drin. Wenn x z. B. $\frac{1}{2}$ ist, so ergibt sich gerade die entsprechende Regel für die 2. Wurzel. Auch bei den nachfolgenden Beziehungen ergeben sich auf diese Weise die entsprechenden Gleichungen für Wurzeln.)

$$2a) \quad a^n * a^m = a^{n+m}$$

$$2b) \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$3) \quad (a^n)^m = a^{n*m}$$

$$4) \quad a^x = e^{\ln(a)*x}$$

6.2 Logarithmen

$\log_a(x)$ ist der Logarithmus zur Basis $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Es gilt:

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x$$

Die Fragestellung hinter dem Logarithmus lautet also: "a hoch wieviel ergibt den vorgegebenen x-Wert?"

$$1a) \quad \log_a(x*y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$1b) \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$2) \quad \log_a(x^y) = y * \log_a(x)$$

$$3) \quad \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$$

Natürlich gelten die angeführten Regeln auch für $a=10$ (10er Logarithmus, der auch $\log$ oder $\lg$ genannt wird) und $a=e$ (natürlicher Logarithmus, der auch $\ln$ genannt wird).

6.3 Multiplizieren von Klammern

Hier muss jeder Term der einen Klammer mit jedem Term der anderen Klammer multipliziert werden. Z.B.:

$$(a + b + c) * (d - e) = ad + bd + cd - ae - be - ce$$

Sollen zwei gleiche oder bis aufs Vorzeichen gleiche Klammern miteinander multipliziert werden, so kann auch auf die Binomischen Formeln zurückgegriffen werden:

1. Binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. Binomische Formel $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

3. Binomische Formel $(a + b) * (a - b) = a^2 - b^2$

Die Binomischen Formeln lassen sich natürlich leicht durch Multiplizieren der Klammern herleiten.

6.4 Bruchrechnen

multiplizieren: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a * c}{b * d}$

dividieren: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} * \frac{d}{c} = \frac{a * d}{b * c}$

addieren und subtrahieren
(mittels Hauptnenner): $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a * d}{b * d} \pm \frac{c * b}{d * b} = \frac{ad \pm cb}{db}$

(ausführlicher unter www.bruchrechnen.de)

6.5 Ableitungsregeln

Faktoren: $(a * f(x))' = a * f'(x)$

Summen/Differenzen: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Kettenregel: $g(h(x))' = \underset{\text{äußere}}{g'(h(x))} * \underset{\text{innere}}{h'(x)}$ Ableitung

Produktregel: $(g(x) * h(x))' = g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$

Quotientenregel: $f'(x) = \frac{g'(x) * h(x) - g(x) * h'(x)}{[h(x)]^2}$

7 Typische Fehler

Nachfolgend werden typische Fehler, also Fehler, die immer wieder gemacht werden, angeführt. Für die meisten dürfte es nützlich sein, die Liste auf eigene Fehler zu durchforsten. Nachfolgend wird für die nicht erlaubten Umformungen das $\neq$ Zeichen benutzt. Hiermit ist gemeint, dass die angeführten Umformungen im allgemeinen nicht gestattet sind. In Spezialfällen können sie natürlich gelten.

- 1) $(x + y)^n \neq x^n + y^n$
- 2) $\sqrt{a + c} \neq \sqrt{a} + \sqrt{c}$
- 3) $\frac{2b-5}{b} \neq 2 - 5$
- 4) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$
- 5) $a^n + a^m \neq a^{n+m}$
- 6) $\log(x+y) \neq \log(x) + \log(y)$
- 7) $a - (3 + b) \neq a - 3 + b$
- 8) $f(x) = x^2 * \sin(x) \nRightarrow f'(x) = 2x * \cos(x)$

Bei den angeführten Umformungen wurde häufig die Verknüpfung "+" verwendet. Es könnte genauso gut auch "-" verwendet werden.

Nachfolgend werden Erläuterungen zu einigen der Fehler angeführt:

- 1) Bei + und - darf eine Potenz nicht einfach in die Klammer gezogen werden, bei * und $\div$ ist dieses hingegen erlaubt, z. B. $(x * y)^n = x^n * y^n$.
- 2) Wie zuvor bei den Potenzen ist dieses nur bei * und $\div$ erlaubt.
- 3) Auch die 5 muss durch b geteilt werden.
- 4) Brüche müssen zum Addieren auf den Hauptnenner gebracht werden, dann können die Zähler der Brüche addiert werden.
- 6) Es gilt $\log(x*y) = \log(x) + \log(y)$.
- 7) Beim Auflösen der Klammer ergibt sich "-b"
- 8) Es muss die Produktregel angewendet werden.

8 Mathematische Zeichen

Mengen

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null	$\{0,1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\{\dots -3,-2,-1,0,1,2,3, \dots\}$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	Menge aller als Bruch ganzer Zahlen darstellbarer Zahlen (Ratio = Verhältnis).
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	zusätzlich zu $\mathbb{Q}$ sind auch alle irrationalen Zahlen (z.B. $\pi, e, \sqrt{2}$) enthalten.
$\mathbb{R}^+$	Menge der positiven reellen Zahlen	Für die Elemente x dieser Menge muss gelten: $x \in \mathbb{R}$ und $x > 0$
$\mathbb{R}_0^+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	Für die Elemente x dieser Menge muss gelten: $x \in \mathbb{R}$ und $x \geq 0$
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen	zusätzlich zu $\mathbb{R}$ sind auch alle Wurzeln aus negativen Zahlen (imaginäre Zahlen) enthalten.

Logische Verknüpfungen

$\vee$	oder
$\wedge$	und

Verknüpfungen von Mengen

$\setminus$	ohne
$\cup$	vereinigt
$\cap$	geschnitten
$\in$	ist Element
$\subset$	ist Teilmenge
$\supset$	ist Obermenge (die zweitgenannte Menge ist in diesem Fall Teilmenge der ersten Menge)

Wichtige Konstante

e	Eulersche Zahl	2,71828...
π	Pi	3,14159...

Intervalle

$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall	alle reellen Zahlen zwischen a und b , wobei a und b in dem Intervall mit enthalten sind.
$]a, b[$	offenes Intervall	alle reellen Zahlen zwischen a und b , wobei a und b in dem Intervall nicht mit enthalten sind.
$[a, b[$ bzw. $]a, b]$	halboffene Intervalle	die eine Grenze ist jeweils in dem Intervall mit enthalten, die andere nicht.

Weitere Zeichen

Σ	Summenzeichen
Π	Produktzeichen
$*$	In diesem Buch verwendetes "mal" Zeichen
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\Leftrightarrow$	Äquivalent (gleichbedeutend), (dieses Zeichen wird bei der Umformung von Gleichungen verwendet, wenn das "daraus folgt"($\Rightarrow$) in beide Richtungen, also auch "rückwärts", gilt.
$\neq$	ungleich
$\exists$	es existiert ein ...
$\forall$	es gilt für alle ...
$\circ$	verknüpft-Zeichen für Funktionen
dx	Differential (unendlich kleines Stück in x -Richtung)

Oberstufenmathematik leicht gemacht

Band 1: Differential- und Integralrechnung

Band 2: Lineare Algebra/Analytische Geometrie

„Da

waren nämlich noch diese zwei grünen Bücher mit dem verheißungsvollen - oder zynischen? - Titel "Oberstufenmathematik leicht gemacht". Und was soll ich sagen - es war genau das, was ich gesucht hatte! Die verwendeten Begriffe waren die, die ich aus dem Unterricht kannte. Jedes Thema war langsam und verständlich aufgebaut und es schlossen sich Aufgaben an, deren Lösungsweg klar dargestellt war. Schade, daß ich das Buch noch nicht zu Anfang der 11. hatte! Aber ihr habt ja noch genug Zeit, euch mit dem wohl meistgehassten Fach zu versöhnen. Mathe nicht zu mögen, ist jedenfalls kein Grund, Mathe nicht zu verstehen!"

*Quelle: Sabine Storm in Stachelschwein, Jugendmagazin am
Gymnasium Laurentianum zu Arnsberg., 1999*

„Das

Lernen mit diesem Buch fällt auch deswegen leicht, weil es den Leser nicht mit Tausenden von Spezialfällen und spitzfindigen Rechentricks verwirrt, sondern sich auf das Grundsätzliche und Wesentliche (im wahrsten Sinne des Wortes) beschränkt. Wer dieses Buch gelesen hat, wird zwar nicht gleich ein Einstein werden, zumindest aber das Wesen und das Prinzipielle der Differential- und Integralrechnung kennen und vielleicht verstanden haben.“

*Quelle: Fehlanzeiger 2/98 Schülerzeitung
der IGS Mühlenberg*

„Der

Autor ist bemüht, sein Buch so zu gestalten, daß es von Schülern wirklich verstanden werden kann. So wird auch der Stoff, der für die Lösung der Aufgaben dieses Buches benötigt wird, im Buch und in einem umfangreichen Anhang über alle wichtigen Rechenregeln (z.B. Bruchrechenregeln, Logarithmen, verschiedene Gleichungen etc.) kurz beschrieben. Ich kann das Buch anderen Schülern empfehlen. Mir hat es gut gefallen und es war mir auch bei den Hausaufgaben der 13. Klasse eine Hilfe.“

*Quelle: Frank Eichinger in Impulz:
Jugendmagazin der FWS Hannover-
Maschsee Nr. 58, November 1997*

www.pd-verlag.de

Oberstufenmathematik leicht gemacht

Band 2:
Lineare Algebra
Analytische Geometrie

4. überarbeitete und
erweiterte Auflage
mit zahlreichen Abbildungen
und Übungsaufgaben

Peter Dürsam



Oberstufenmathematik leicht gemacht

Band 1: Differential- und Integralrechnung, 5. Aufl., 272 S., ISBN 978-3-930737-66-6

Band 2: Lineare Algebra/Analytische Geometrie, 4. Aufl., 320 S., ISBN 978-3-86707-264-9

"Ein übersichtliches und klares Werk, überzeugend durch recht ausführliche Erläuterungen und andererseits den Mut zur inhaltlichen Beschränkung."

Besprechung der Einkaufszentrale für öffentliche Bibliotheken

Oberstufenmathematik leicht gemacht

Band 1:
Differential- und Integralrechnung

5. überarbeitete Auflage
mit zahlreichen Abbildungen
und Übungsaufgaben

Peter Dürsam



9 Index

A

Abbildungsvorschrift 6

Ableitungen 22, 32

-cosinus 24
 -e-Funktion 24
 -Exponentialfunktionen 24
 -Kettenregel 25
 -Produktregel 27
 -Quotientenregel 29
 -sinus 24
 -Übersicht 30

Abszisse 7

abzählbar 6

achsensymmetrisch 10

Additionsverfahren 51

Äquivalent 61

Analytische Geometrie 62

ausklammern 47

B

Basis 36, 42

Basis des Logarithmus 15

Basisvektoren 37

Binomische Formeln 58

D

Definitions Menge 5, 6, 9

Differential 61

Differentiale 23

Differentialquotient 23

Differenzenquotient 21

Dimension 42

Division 28

E

e-Funktion 13

Einheitsvektor 37

Element 60

Erzeugendensystem 42

Exponent 12

Exponentialfunktion 13, 15

Extremwerte 35

-Hinreichende Bedingung 32

-Hochpunkt 31

-Notwendige Bedingung 32

-Sattelpunkt 31

-Schema 35

-Tiefpunkt 31

F

Fallunterscheidung 55

Fehler 59

Formeln

-Ableitungen 30, 58

-Bruchrechnen 58

-Logarithmen 57

Funktionen 5

-achsensymmetrisch 10

-Definition 5

-Definitions Menge 5

-ganzrationale 9

-Logarithmus 15

-punktsymmetrisch 10

-Steigung 20

-Wertemenge 5

-Wurzel 10

G

ganze Zahlen 60

ganzrationale Funktionen 9

Gerade 20

geschnitten 60

Gleichungen 44

-dritten Grades 47

-homogene 47

-inhomogene 47

-lineare 44

-Lösungsverfahren 44

-mit Quotienten 49

-nicht lineare 53

-quadratische 44

Grad einer Funktion 9

Graph 7

H

hinreichende Bedingung 34

Hochpunkt 31, 32, 33

homogene Gleichungen 47

I			
irrationale Zahl	13	punktsymmetrisch	10
K		Q	
kanonische Basis	37	quadratische Gleichungen	44
kartesisches Koordinatensystem	7	Quotientenregel	29, 58
Kettenregel	58	R	
kollineare Vektoren	38	rationale Zahlen	60
komplanare Vektoren	39	Rechenregeln für Logarithmen	16
komplexe Zahlen	60	reelle Zahlen	60
Koordinatensystem	8	Relationszeichen	54
L		S	
linear abhängig	38	Sattelpunkt	31
linear unabhängig	40	Sekante	20
lineare Gleichungssysteme	51	Steigung	13, 20, 31
linearer Raum	40	Steigungsdreieck	20
Linearkombination	37, 40	Summenzeichen	40, 61
Logarithmus	15	T	
Logische Verknüpfungen	60	Tangente	21, 31
M		Taschenrechner	14
mathematische Zeichen	60	Teilmenge	60
Maximum-Likelihood-Verfahren	18	Tiefpunkt	31, 32
Mengen	60	typische Fehler	59
ML-Verfahren	18	U	
N		Umkehrfunktion	15
natürliche Zahlen	60	Ungleichungen	54
Natürlicher Logarithmus	15	Ursprung	7
Normalparabel	9	V	
notwendige Bedingung	34	Vektor	36
Nullstelle	33	Vektorraum	40, 41
O		vereinigt	60
Obermenge	60	Vorzeichenwechsel	33
Oberstufenmathematik	62	W	
Ordinate	7	Wertemenge	5, 6
P		Wertetabelle	8
Parabeln	9	Wurzel	10
Polynomdivision	48	Wurzelfunktion	10
Polynomfunktionen	9	Z	
pq-Formel	45	Zuordnung	5
Produktregel	27, 58	Zweite Wurzel	10
Produktzeichen	61		

Sehr oft werden im Studium mathematische Kenntnisse benötigt. Allerdings wird in der Regel nicht der gesamte Schulstoff als Grundlage gefordert. Einige wichtige Fragestellungen tauchen aber immer wieder auf, so z.B. das Lösen von Gleichungen, der Umgang mit Funktionen und Ableitungen, die Bestimmung von Extremwerten usw. Diese für den Studiumsalltag wichtigen Grundkenntnisse werden in dieser Abhandlung verständlich erklärt.

Weitere Lehrbücher aus dem PD-Verlag:

Mathematik

Mathematik - anschaulich dargestellt - für Studierende der Wirtschaftswissenschaften
13. Aufl., 368 S., ISBN 978-3-86707-013-3

Für Studierende der **Wirtschaftswissenschaften**, in weiten Teilen aber auch für **Studierende anderer Fächer** bestens geeignet.

Ausführliche Darstellung des Stoffes: Lineare Algebra, Differential- und Integralrechnung, Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$, Differenzen- und Differentialgleichungen, Finanzmathematik, Anhang mit wichtigen mathematischen Grundlagen aus der Mittelstufe und einer Formelsammlung.

„Diese ausgezeichnete Darstellung sei nachdrücklich weiterhin empfohlen.“ ekz-Informationsdienst (Besprechung der 9. Auflage)

Mathematik in den Wirtschaftswissenschaften. Aufgabensammlung mit Lösungen

8. Aufl., 176 S., ISBN 978-3-930737-18-5
Über 160 grundlegende Klausuraufgaben mit ausführlichen Lösungsvorschlägen.

Oberstufenmathematik leicht gemacht
Band 1: Differential- und Integralrechnung
5. Aufl., 272 S., ISBN 978-3-930737-66-6

Band 2: Lineare Algebra/Analytische Geometrie, 4. Aufl., 320 S., ISBN 978-3-86707-264-9.
Ideal für alle Schülerinnen und Schüler der Oberstufe und alle Studierenden mit größeren Defiziten in Mathematik.

Statistik

Wirtschaftsstatistik – anschaulich dargestellt,
6. Aufl., 104 S., ISBN 978-3-86707-206-9

VWL

Grundlagen der VWL – anschaulich dargestellt, 5. Aufl., 331 S., ISBN 978-3-86707-475-9

„Sehr preisgünstiges Lehrbuch für Erstsemester“ ekz-Informationsdienst (Besprechung der 1. Auflage)

Mikroökonomie – anschaulich dargestellt
2. Aufl., 416 S., ISBN 978-3-930737-77-2

Makroökonomie – anschaulich dargestellt
2. Aufl., 443 S., ISBN 978-3-86707-492-6

BWL

Grundlagen der Finanzierung – anschaulich dargestellt

3. Aufl., 264 S., ISBN 978-3-930737-49-9

Grundlagen der Investitionsrechnung – anschaulich dargestellt
5. Aufl., 112 S., ISBN 978-3-86707-405-6

Grundlagen der Entscheidungstheorie – anschaulich dargestellt
5. Aufl., 112 S., ISBN 978-3-86707-305-9
Jeweils mit eingehenden Erklärungen und Aufgaben mit Lösungen.

Studienhilfen

Mehr Erfolg bei Prüfungen und Klausuren
2. Aufl., 104 S., ISBN 978-3-930737-58-1

Grundstudium – was dann? Leitfaden für das BWL- und VWL-Hauptstudium
3. Aufl., 128 S., ISBN 978-3-930737-83-3

So gelingen Seminar-, Bachelor- und Diplomarbeiten. Von der Recherche bis zur fertigen Arbeit, ISBN 978-3-86707-561-9

Aktuelle Informationen, auch über unser weiteres Buchprogramm, finden Sie im Internet:

www.pd-verlag.de

ISBN 978-3-86707-506-0

€ 2,90