

2 Vektorräume

In diesem Kapitel wird der Vektorraumbegriff axiomatisch eingeführt und einige grundlegende Begriffe erläutert, etwa „Unterraum“, „Linearkombination“, „lineare Unabhängigkeit“ und „Erzeugendensystem“. Für Vektoren eines allgemeinen Vektorraums benutzen wir stets lateinische Buchstaben u, v, w , wobei die Buchstaben x, y, z in der Regel Vektoren des K^n bezeichnen. Für Elemente des Grundkörpers K benutzen wir in den meisten Fällen griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

2.1 Grundbegriffe

Frage 93 Wie lauten die Axiome für einen K -Vektorraum?

Antwort: Sei K ein Körper. Ein K -Vektorraum ist eine Menge V zusammen mit einer inneren Verknüpfung $V \times V \longrightarrow V$, $(v, w) \longrightarrow v + w$, genannt „Addition“, und einer äußeren Verknüpfung $K \times V \longrightarrow V$, genannt „skalare Multiplikation“, für die die folgenden Eigenschaften gelten:

(V1) V ist eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition „+“.

(V2) Für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha, \beta \in K$ gilt:

- (i) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$ (Assoziativität)
- (ii) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,
 $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ (Distributivität)
- (iii) $1 \cdot v = v$

Frage 94 Wie erhält man aus den Axiomen die folgenden **Rechenregeln**?

- (i) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$ für alle $\alpha \in K$
- (ii) $0_K \cdot v = 0_V$ für alle $v \in V$
- (iii) $(-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v) = -\alpha \cdot v$
- (iv) Aus $\alpha \cdot v = 0_V$ folgt $\alpha = 0_K$ oder $v = 0_V$

(Das Nullelement des Körpers K und das des Vektorraums V werden hier durch einen entsprechenden Index unterschieden. Das wird aber nur an dieser Stelle so gemacht, im Weiteren wird auf den Unterschied nicht mehr durch eine spezielle Bezeichnungsweise hingewiesen.)

Antwort: (i) Es gilt $\alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot (0_V + 0_V) = \alpha \cdot 0_V$. Daraus folgt $\alpha \cdot 0_V = 0_K$.

(ii) Aus $0_K \cdot v + 0_K \cdot v = (0_K + 0_K) \cdot v = 0_K \cdot v$ folgt $0_K \cdot v = 0_V$.

(iii) Mit (i) und (ii) gilt

$$\begin{aligned}\alpha \cdot v + (-\alpha) \cdot v &= (\alpha + (-\alpha)) \cdot v = 0_K \cdot v = 0_V \quad \text{und} \\ \alpha \cdot v + \alpha \cdot (-v) &= \alpha \cdot (v + (-v)) = \alpha \cdot 0_V = 0_V.\end{aligned}$$

Daraus folgt (iii).

Sei $\alpha v = 0_V$ und $\alpha \neq 0_K$. Dann gilt

$$v = 1 \cdot v = \alpha^{-1} \alpha \cdot v = \alpha^{-1} \cdot (\alpha v) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V. \quad \blacklozenge$$

Frage 95 Können Sie einige Beispiele für Vektorräume nennen?

Antwort: (i) Das Standardbeispiel ist der Raum

$$K^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) ; x_i \in K\},$$

bestehend aus allen n -Tupeln von Elementen aus K . Definiert man die Addition und die skalare Multiplikation komponentenweise durch

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ \alpha \cdot (x_1, \dots, x_n) &= (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n),\end{aligned}$$

so ergibt sich die Gültigkeit der Vektorraumaxiome für K^n unmittelbar aus den Körpereigenschaften von K .

Aus denselben Gründen sieht man, dass auch die Räume

$$K[X] := \{\text{Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } K ; x_i = 0 \text{ für fast alle } i\}$$

und

$$K^{\mathbb{N}} := \{\text{Folgen } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } K\},$$

versehen mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, jeweils K -Vektorräume sind. Man nennt $K[X]$ den *Polynomring über K* . Im Unterschied zu K^n haben die Räume $K^{\mathbb{N}}$ und $K[X]$ *unendliche Dimension* (vgl. Frage 115).

(ii) Die Menge $\text{Abb}(K, K)$ der Abbildungen $K \rightarrow K$ ist ein Vektorraum, wenn man die Addition und skalare Multiplikation durch

$$(f + a)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

für $f, g \in K^K$ und $\alpha \in K$ definiert.

In der Regel interessiert man sich nur für bestimmte Teilmengen von $\text{Abb}(K, K)$, die in den meisten interessanten Fällen ebenfalls eine Vektorraumstruktur tragen. Speziell für $K = \mathbb{R}$ bilden z. B. die Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{C}[a, b] &:= \{\text{stetige Funktionen auf } [a, b]\} \\ \mathcal{C}^n[a, b] &:= \{n\text{-mal stetig differenzierbare Funktionen auf } [a, b]\} \\ \mathcal{R}[a, b] &:= \{\text{Regelfunktionen auf } [a, b]\}\end{aligned}$$

Vektorräume.

(iii) Für jede rein irrationale Zahl ξ sind die Mengen

$$\mathbb{Q}(\alpha) := \{a + b\xi ; a, b \in \mathbb{Q}\}$$

Vektorräume über $\mathbb{Q}$. Beispielsweise ist die Menge $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ als *Erweiterungskörper* von $\mathbb{Q}$ insbesondere ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Ein analoger Zusammenhang gilt für alle Erweiterungskörper eines Grundkörpers K (vgl. [4]).

(iv) Die *komplexen Zahlen*

$$\mathbb{C} := \{a + bi ; a, b \in \mathbb{R}\}$$

sind insbesondere ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

(v) Jeder Körper K besitzt die Struktur eines K -Vektorraums, indem man die Multiplikation als skalare Multiplikation deutet. $\blacklozenge$

Frage 96 Was versteht man unter einem **Unterraum** eines K -Vektorraums V ?

Antwort: Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt *Untervektorraum* oder *linearer Unterraum* oder kurz *Unterraum* von V , wenn U zusammen mit der in V gegebenen Vektoraddition und skalaren Multiplikation ebenfalls einen Vektorraum bildet. Da die Assoziativ- und Distributivgesetze in U automatisch gelten, da sie in V gelten, ist eine Teilmenge $U \subset V$ durch folgende drei Eigenschaften als Unterraum ausgezeichnet:

- (i) $U \neq \emptyset$
- (ii) $v, w \in U \implies v + w \in U$
- (iii) $v \in U \implies \alpha v \in U$ für alle $\alpha \in K$.

Man beachte, dass man aus (iii) sofort $-1 \cdot v = -v \in U$ sowie $0 \cdot v = 0 \in U$ erhält.

Beispiele: (a) Jeder Vektorraum enthält insbesondere sich selbst als Unterraum sowie den trivialen Unterraum $U = \{0\}$.

(b) Die Menge

$$U := \{(x_1, x_2, x_3) ; x_1, x_2, x_3 \in K, x_3 = 0\} \subset K^3$$

bildet einen Unterraum von K^3 , die Menge

$$X := \{(x_1, x_2, x_3) ; x_1, x_2, x_3 \in K, x_3 = 1\} \subset K^3$$

allerdings nicht, da die Summe zweier Elemente aus X nicht mehr in X liegt.

(c) Für $\alpha_1, \alpha_2, \beta \in K$ ist

$$U := \{(x_1, x_2) \in K ; \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \beta\}$$

genau dann ein Unterraum, wenn $\beta = 0$ gilt. In diesem Fall enthält U nämlich den Nullvektor, und für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ und $\lambda \in K$ folgt

$$\begin{aligned}\alpha_1(x_1 + y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2) &= (\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) + (\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2) = 0 + 0 = 0 \\ \alpha_1\lambda x_1 + \alpha_2\lambda x_2 &= \lambda(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2) = \lambda \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

also $x + y \in U$ und $\lambda x \in U$.

Für $\beta \neq 0$ ist U jedoch kein Unterraum, denn U enthält in diesem Fall nicht den Nullvektor.

(d) Ist A eine reelle $m \times n$ -Matrix (vgl. Kapitel 3), dann ist die Lösungsmenge

$$U := \{x \in K^n ; A \cdot x = 0\}$$

des zugehörigen homogenen Systems ein Unterraum von K^n .

(e) Im Raum $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat man die folgende aufsteigende Kette von Unterräumen

$$\mathbb{R}_d[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}) \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Dabei bezeichnet $\mathbb{R}_d[X]$ die Menge aller Polynome mit Grad $\leq d$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ die Menge der differenzierbaren reellen Funktionen, $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ die Menge der stetigen reellen Funktionen und $\mathcal{R}(\mathbb{R})$ die Menge der Regelfunktionen in $\mathbb{R}$. ♦

Frage 97 Ist die Menge

$$U := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1 \cdot x_2 \geq 0\}$$

ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$?

Antwort: Die Vektoren $v = (1, 2)$ und $w = (-2, -1)$ liegen beide in U , trotzdem gilt $v + w = (-1, 1) \notin U$. Also ist U kein Unterraum. ♦

Frage 98 Können Sie zeigen, dass der Durchschnitt (auch unendlich vieler) Unterräume eines Vektorraums V wieder ein Unterraum von V ist? Gilt dasselbe auch für die Vereinigung von Unterräumen?

Antwort: Sei $(U_i)_{i \in I}$ ein System von Unterräumen aus V , wobei I irgendeine Indexmenge bezeichnet. Der Durchschnitt $\bigcap_{i \in I} U_i$ enthält den Nullvektor, da dieser in allen U_i liegt. Ferner gilt für $v, w \in \bigcap_{i \in I} U_i$

$$u, w \in U_i \quad \text{für alle } i \in I,$$

und folglich, da die U_i Unterräume sind,

$$v + w \in U_i \quad \text{und} \quad \alpha v \in U_i \quad \text{für alle } i \in I,$$

also

$$v + w \in \bigcap_{i \in I} U_i \quad \text{und} \quad \alpha v \in \bigcap_{i \in I} U_i.$$

Somit ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V .

Dagegen ist die Vereinigung $U_1 \cup U_2$ zweier Unterräume $U_1, U_2 \in V$ in der Regel kein Unterraum. Sei zum Beispiel

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in K^2 ; x_1 = 0\}, \quad \text{und} \quad U_2 = \{(x_1, x_2) \in K^2 ; x_2 = 0\},$$

dann liegen die Vektoren $u_1 = (0, 1)$ und $u_2 = (1, 0)$ beide in $U_1 \cup U_2$, nicht aber deren Summe $u_1 + u_2 = (1, 1)$. $\blacklozenge$

Frage 99 Was versteht man unter einer **Linearkombination** eines endlichen Systems $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren eines K -Vektorraums V ?

Antwort: Unter einer *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \dots, v_r \in V$ versteht man jede Summe der Form

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r,$$

wobei α_i für $i = 1, \dots, r$ beliebige Elemente des Grundkörpers K sind. Da V gegenüber skalarer Multiplikation und Addition von Vektoren abgeschlossen ist, ist jede Linearkombination von Vektoren aus V damit selbst ein Element aus V . $\blacklozenge$

Frage 100 Was versteht man unter einer Linearkombination von Vektoren eines *unendlichen* Systems von Vektoren aus V ?

Antwort: Eine Linearkombination eines unendlichen Systems S ist eine Linearkombination eines endlichen Teilsystems von S , d. h. eine Linearkombination von endlich vielen Vektoren aus S .

Man betrachte zum Beispiel das unendliche System $S = (1, X, X^2, X^3, \dots)$ des Polynomrings $K[X]$. Jede Linearkombination aus S besitzt dann die Gestalt

$$\alpha_0 + \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_r X^r$$

mit $\alpha_i \in K$ und $r \in \mathbb{N}$. $\blacklozenge$

Frage 101 Was versteht man unter dem von einem System $S = (v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren in V aufgespannten **Unterraum**? Wieso handelt es sich dabei überhaupt um einen linearen Unterraum?

Antwort: Der von S aufgespannte Unterraum ist die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus S . Er wird mit $\text{span}(S)$ bezeichnet. Ergänzend definiert man $\text{span}(\emptyset) := \{0\}$.

Beispiel: Für die Vektoren $e_1 = (1, 0, 0)$ und $e_2 = (0, 1, 0)$ aus K^3 gilt

$$\text{span}(e_1, e_2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 ; x_3 = 0\}.$$

Um zu zeigen, dass $\text{span}(S)$ Unterraum ist, betrachte man zwei Vektoren $v, w \in \text{span}(S)$. Es gilt

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r, \quad w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r$$

mit bestimmten $\alpha_i, \beta_i \in K$, also

$$\begin{aligned} -v &= (-\alpha_1)v_1 + \cdots + (-\alpha_r)v_r && \in \text{span}(S), \\ v + w &= (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_r + \beta_r)v_r && \in \text{span}(S). \end{aligned}$$

Damit ist insbesondere $0 \in \text{span}(S)$. Weiter gilt für jedes $\lambda \in K$

$$\lambda v = (\lambda\alpha_1)v_1 + \cdots + (\lambda\alpha_r)v_r \in \text{span}(S).$$

Damit ist $\text{span}(S)$ abgeschlossen gegenüber skalarer Multiplikation und der Addition von Vektoren. Außerdem gelten in $\text{span}(S)$ die Assoziativ- und Distributivgesetze, da sie in V gelten. Also ist $\text{span}(S) \subset V$ ein Vektorraum, folglich ein Unterraum von V . $\blacklozenge$

Frage 102 Sei $S = (v_1, v_2, \dots)$ ein (eventuell unendliches) System von Vektoren aus V . Durch welche Eigenschaft lässt sich der Unterraum $\text{span}(S)$ charakterisieren?

Antwort: Es gilt:

$\text{span}(S)$ ist der kleinste Unterraum von V , der alle Vektoren aus S enthält. Genau bedeutet das

$$\text{span}(S) = \bigcap \{U \subset V ; U \text{ Unterraum mit } S \subset U\}.$$

Beweis: Sei

$$W := \bigcap \{U \subset V ; U \text{ Unterraum mit } S \subset U\}.$$

Die Menge W bildet nach Frage 98 einen Unterraum von V . Ebenso ist $\text{span}(S)$ nach Frage 101 ein Untervektorraum. Da $S \subset \text{span}(S)$ gilt, folgt $W \subset \text{span}(S)$. Umgekehrt erhält man aber auch $\text{span}(S) \subset W$, denn jedes $v \in \text{span}(S)$ lässt sich als Linearkombination

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r$$

für ein $r \in \mathbb{N}$ und bestimmten $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ schreiben. Diese Linearkombination ist in jedem Unterraum U mit $S \subset U$ und damit auch in W enthalten. $\blacklozenge$

Frage 103 Was versteht man unter einem **Erzeugendensystem** eines Vektorraums V ? Wann heißt ein Vektorraum V **endlich erzeugt**?

Antwort: Ein System S von Vektoren aus V heißt *Erzeugendensystem* von V , wenn

$$V = \text{span}(S)$$

gilt. V heißt *endlich erzeugt*, wenn es ein Erzeugendensystem von V gibt, das nur endlich viele Elemente enthält. $\blacklozenge$

Frage 104 Wann heißt ein System $S = (v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren eines K -Vektorraums V **linear unabhängig** bzw. **linear abhängig**?

Antwort: S heißt *linear unabhängig*, wenn für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \iff \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0.$$

S heißt *linear abhängig*, wenn S nicht linear unabhängig ist, wenn es also eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors mit Vektoren aus V gibt.

Zum Beispiel ist das System der beiden Funktionen $f_1: x \mapsto e^x$ und $f_2: x \mapsto e^{-x}$ im Vektorraum $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ linear unabhängig, dagegen sind die drei Funktionen $(f_1, f_2, \sinh)$ wegen

$$\frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - \sinh x = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

linear abhängig. $\blacklozenge$

Frage 105 Wann heißt ein *unendliches* System S von Vektoren linear unabhängig?

Antwort: Ein unendliches System $S = (v_1, v_2, \dots)$ heißt linear unabhängig, wenn jedes endliche Teilsystem linear unabhängig ist. Das bedeutet, dass für jedes $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0 \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0.$$

In diesem Sinne ist z. B. das System der Polynome $(p_0, p_1, p_2, \dots)$ mit

$$p_i(x) = X^i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}[X]$. Für jedes $r \in \mathbb{N}$ folgt nämlich aus

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_r p_r = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_r X^r = 0$$

notwendigerweise $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$. $\blacklozenge$

Frage 106 Was bedeutet die lineare Abhängigkeit bei Systemen der Länge 1 bzw. 2?

Antwort: Ein System $S = (v)$ ist linear abhängig genau dann, wenn $v = 0$ gilt, ein System $S = (v, w)$ genau dann, wenn $v = \alpha \cdot w$ mit einem $\alpha \in K$ gilt. $\blacklozenge$

Frage 107 Können Sie folgenden Zusammenhang begründen: Ein System $S = (v_1, \dots, v_r)$ ist linear unabhängig genau dann, wenn für $k = 1, \dots, r$ gilt:

$$v_k \notin \text{span}(v_1, \dots, v_{k-1})$$

(dabei ist $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$)?

Antwort: Beweis mit Induktion nach r . Der Fall $r = 1$ ist klar, da $\{v_1\}$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $v_1 \neq 0$, also $v_1 \notin \text{span}(\emptyset)$ gilt. Sei daher $r \geq 2$ und die Behauptung für $k < r$ schon gezeigt. Angenommen, die Vektoren $(v_1, \dots, v_r)$ sind linear abhängig. Dann gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ mit $\alpha_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, r\}$, so dass gilt

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0, \quad (*)$$

also

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r-1} v_{r-1} = -\alpha_r v_r.$$

Ist $\alpha_r \neq 0$, dann liefert die Division durch $-\alpha_r$ eine Darstellung von v_r als Linearkombination von $v_1, \dots, v_{r-1}$, in diesem Fall gilt also $v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_{r-1})$. Ist $\alpha_r = 0$, dann sind bereits die Vektoren $v_1, \dots, v_{r-1}$ linear abhängig. Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich v_{r-1} als Linearkombination von $v_1, \dots, v_{r-2}$ darstellen, und indem man diese in $(*)$ substituiert, erhält man

$$\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{r-2} v_{r-2} + \alpha_r v_r = 0,$$

mit bestimmten $\beta_i \in K$, die nicht alle verschwinden. Das System $(v_1, \dots, v_{r-2}, v_r)$ der Länge $r - 1$ ist demnach linear abhängig. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_{r-2})$ und damit erst recht $v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_{r-1})$. Das zeigt insgesamt die Implikation

$$v_1, \dots, v_r \text{ linear abhängig} \implies v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_{r-1}).$$

Sei umgekehrt $v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_{r-1})$. Dann gilt

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{r-1} v_{r-1} = v_r,$$

für bestimmte $\alpha_i \in K$, und durch Addition von $-v_r$ auf beiden Seiten der Gleichung erhält man eine nichttriviale Linearkombination des Nullvektors. $\blacklozenge$

2.2 Basis und Dimension

Der Begriff der Basis ist von fundamentaler Bedeutung für die Lineare Algebra. In der Tat ergeben sich die meisten Zusammenhänge der Linearen Algebra als eine Folge der Tatsache, dass Vektorräume überhaupt eine Basis besitzen. Auf

dem Begriff der Basis gründet sich auch der Dimensionsbegriff. Außerdem ermöglicht die Auswahl einer Basis, Vektoren eines n -dimensionalen Vektorraums durch n -Tupel von Elementen aus K zu beschreiben und lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen durch Matrizen. Die wichtigsten Sätze in diesem Kapitel sind der *Basisauswahlsatz*, der *Basisergänzungssatz* sowie der *Austauschsatz von Steinitz*.

Frage 108 Was versteht man unter einer **Basis** in einem K -Vektorraum V ?

Antwort: Eine *Basis* ist ein System S von Vektoren aus V mit den beiden Eigenschaften

- (i) S ist ein Erzeugendensystem von V , also $V = \text{span}(S)$.
- (ii) S ist linear unabhängig.

Beispiele: (a) Eine Basis des K^n ist gegeben durch die *Standardbasis* $\mathcal{E}_n = (e_1, \dots, e_n)$ mit $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

(b) Eine Basis des Vektorraums $K[X] = \{\sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i X^i; \alpha_i = 0 \text{ für fast alle } i\}$ der Polynome in K ist gegeben durch das unendliche System $(1, X, X^2, \dots)$.

(c) Die Elemente 1 und $\sqrt{2}$ bilden eine Basis des $\mathbb{Q}$ -Vektorraums $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(d) $(1, i)$ ist eine Basis von $\mathbb{C}$, betrachtet als $\mathbb{R}$ -Vektorraum. ♦

Frage 109 Wie lassen sich Basen in einem endlich erzeugten Vektorraum $V \neq \{0\}$ charakterisieren?

Antwort: Folgende Aussagen sind für $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ äquivalent:

- (i) $\mathcal{B}$ ist eine Basis von V .
- (ii) $\mathcal{B}$ ist ein unverlängerbares (maximales) linear unabhängiges System in V , d. h., fügt man zu $\mathcal{B}$ irgendeinen Vektor $v \in V$ hinzu, so ist das neue System linear abhängig.
- (iii) $\mathcal{B}$ ist ein unverkürzbares (minimales) Erzeugendensystem von V , d. h., lässt man einen Vektor weg, so ist das neue System kein Erzeugendensystem mehr.
- (iv) Jeder Vektor aus V lässt sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}$ schreiben.

Beweis: (i) $\implies$ (ii): Sei $v \in V$ beliebig. Da $\mathcal{B}$ als Basis insbesondere ein Erzeugendensystem von V ist, lässt sich v als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, es gilt also $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ mit geeigneten $\alpha_i \in K$. Subtraktion von v auf beiden Seiten der Gleichung liefert dann

$$v - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0.$$

Da zumindest der Koeffizient bei v in dieser Linearkombination nicht verschwindet, bedeutet das, dass die Vektoren $v, v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind.

(ii) $\implies$ (iii): Sei $\mathcal{B}$ ein maximal linear unabhängiges System. Wäre $\mathcal{B}$ kein Erzeugendensystem, dann gäbe es einen Vektor $v \in V$ mit $v \notin \text{span}(\mathcal{B})$ und somit wäre $\mathcal{B} \cup \{v\}$ ebenfalls linear unabhängig, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{B}$. Da andererseits $\mathcal{B}$ als maximal linear unabhängiges System insbesondere linear unabhängig ist, ist $\mathcal{B} \setminus \{v_i\}$ für jeden Basisvektor $v_i \in \mathcal{B}$ kein Erzeugendensystem mehr. Daraus folgt die Minimalitätseigenschaft von $\mathcal{B}$.

(iii) $\implies$ (iv): Ist $\mathcal{B}$ ein minimales Erzeugendensystem, so lässt sich jeder Vektor aus $v \in V$ als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$ darstellen. Angenommen, die Darstellung sei nicht eindeutig, es gelte also $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\alpha_n \neq \beta_n$ annehmen können. Dann folgt

$$v_n = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_n - \beta_n} v_i, \quad \text{also} \quad v_n \in \text{span}(v_1, \dots, v_{n-1}).$$

Für jede Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ gilt dann mit $\alpha' := -\frac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_n - \beta_n}$

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_i + \lambda_n \alpha') v_i.$$

Das heißt, $(v_1, \dots, v_{n-1})$ ist ebenfalls ein Erzeugendensystem von V , im Widerspruch dazu, dass $\mathcal{B}$ minimal ist.

(iv) $\implies$ (i): Unter der Voraussetzung ist $\mathcal{B}$ zumindest ein Erzeugendensystem von V , und aus der Eindeutigkeit der Linearkombinationen folgt, dass sich insbesondere der Nullvektor nur durch eine einzige Linearkombination darstellen lässt, nämlich durch die, in der alle Koeffizienten verschwinden. Daraus folgt die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$. $\blacklozenge$

Frage 110 Was besagt der Basisauswahlsatz?

Antwort: Der Basisauswahlsatz lautet:

Jedes Erzeugendensystem $E = (v_1, \dots, v_m)$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V enthält ein Teilsystem, das eine Basis von V ist.

Beweis: Da E endlich ist, enthält E ein minimales Erzeugendensystem. Dieses muss dann eine Basis von V sein. $\blacklozenge$

Frage 111 Was besagt der Basisergänzungssatz oder Austauschsatz von Steinitz?

Antwort: Der Satz besagt:

Jedes linear unabhängige System $S = (u_1, \dots, u_r)$ von Vektoren eines endlich erzeugten Vektorraums V lässt sich durch Hinzunahme von Vektoren eines Erzeugendensystems $E = (v_1, \dots, v_m)$ zu einer Basis von V ergänzen.

Beweis: Ausgehend von $S_0 := S$ konstruiere man linear unabhängige Systeme $S_1, \dots, S_m$ durch die rekursive Vorschrift

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1} & \text{falls } v_i \in \text{span}(S_{i-1}) \\ S_{i-1} \cup \{v_i\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Nach Konstruktion sind alle Systeme S_i für $i = 1, \dots, m$ linear unabhängig. S_m ist aber auch ein Erzeugendensystem von V , da $\text{span}(S_m)$ alle Vektoren des Erzeugendensystems E enthält. Also ist S_m eine Basis von V und der Satz damit bewiesen.

Will man beispielsweise die linear unabhängigen Vektoren $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 1, 0)$ des $\mathbb{R}^4$ mit Vektoren aus der Standardbasis zu einer Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}^4$ ergänzen, so liefert der obige Algorithmus

$$S_0 = (v_1, v_2), \quad S_1 = (v_1, v_2, e_1) = S_2 = S_3, \quad S_4 = (v_1, v_2, e_1, e_4) = \mathcal{B}. \quad \blacklozenge$$

Frage 112 Können Sie begründen, warum jeder endlich erzeugte K -Vektorraum V eine Basis besitzt?

Antwort: Man wende den Basisauswahlsatz auf ein endliches Erzeugendensystem E von V an. Die so erhaltene Basis $\mathcal{B} \subset E$ ist dann in jedem Fall sogar endlich. $\blacklozenge$

Frage 113 Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum, $E = (v_1, \dots, v_m)$ ein Erzeugendensystem und $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_r)$ eine Basis von V . Wieso gilt dann $r \leq m$?

Antwort: Das linear unabhängige System $(u_2, \dots, u_r)$ lässt sich nach dem Basisergänzungssatz durch die Hinzunahme von i_1 Vektoren aus E zu einer Basis $\mathcal{B}_1$ von V ergänzen, wobei notwendigerweise $i_1 \geq 1$ gilt. Analog lässt sich das linear unabhängige System $\mathcal{B}_1 \setminus \{u_2\}$ zu einer Basis $\mathcal{B}_2$ ergänzen, indem man i_2 weitere Vektoren aus E hinzufügt. Auf diese Weise fortfahrend konstruiert man eine Folge $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ von Vektorraumbasen mit

$$\begin{aligned} |\mathcal{B}_1| &= r - 1 + i_1 \\ |\mathcal{B}_2| &= r - 2 + i_1 + i_2 \\ &\dots \\ |\mathcal{B}_r| &= i_1 + i_2 + \dots + i_r. \end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{B}_r \subset E$ gilt $i_1 + \dots + i_r \leq m$ und wegen $i_j \geq 1$ für $j = 1, \dots, r$ folgt daraus $r \leq m$ wie gewünscht. $\blacklozenge$

Frage 114 Warum haben je zwei Basen eines endlich erzeugten K -Vektorraums dieselbe Länge?

Antwort: Seien $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ zwei Basen von V der Länge n bzw. m . Da $\mathcal{B}_2$ insbesondere ein Erzeugendensystem ist, gilt $m \geq n$ nach Frage 113. Aus demselben Grund gilt aber auch $n \leq m$, also insgesamt $n = m$. $\blacklozenge$

Frage 115 Wie ist die **Dimension** eines K -Vektorraums definiert?

Antwort: Wenn V endlich erzeugt ist, haben alle Basen nach Frage 114 dieselbe Länge. Diese Länge nennt man die *Dimension* von V ($\dim V$). Ist V nicht endlich erzeugt, so setzt man $\dim V = \infty$ und sagt, V sei *unendlich-dimensional*. ♦

Frage 116 Wie ist der **Rang** $\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_r)$ eines endlichen Systems $(v_1, \dots, v_r)$ von Vektoren aus V definiert?

Antwort: Es ist

$$\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_n) = \dim \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n). \quad \blacklozenge$$

Frage 117 Können Sie zeigen, dass es in einem nicht endlich erzeugten K -Vektorraum linear unabhängige Systeme beliebiger Länge gibt?

Antwort: Angenommen, der Zusammenhang gilt nicht. Dann gibt es ein linear unabhängiges System maximaler Länge in V . Dies wäre dann eine Basis von V , also insbesondere ein endliches Erzeugendensystem von V , im Widerspruch dazu, dass V unendlichdimensional ist. ♦

Frage 118 Man betrachte zum Raum der stetigen Funktionen aus $\mathbb{R}$ die folgende Teilmenge

$$S = \{f_a: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f_a(x) = x + a\}.$$

Können Sie alle maximal linear unabhängigen Teilmengen von S bestimmen?

Antwort: Für $a \neq b$ sind die beiden Funktionen f_a und f_b linear unabhängig, denn aus $\alpha_1 f_a + \beta f_b = 0$ folgt

$$\alpha f_a(x) + \beta f_b(x) = \alpha(x + a) + \beta(x + a) = (\alpha + \beta)x + \alpha a + \beta b = 0 \quad (*)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen der speziellen Werte $x = 0$ und $x = 1$ liefert $\alpha a + \beta b = \alpha + \beta + \alpha a + \beta b = 0$, also $\beta = -\alpha$ und damit $\alpha(a - b) = 0$, was wegen $a \neq b$ dann $\alpha = 0$ und schließlich auch $\beta = 0$ impliziert. Das zeigt die lineare Unabhängigkeit der Funktionen f_a, f_b .

Je drei paarweise verschiedene Funktionen f_a, f_b, f_c aus S sind jedoch linear abhängig. Wie oben führt $\alpha f_a + \beta f_b + \gamma f_c = 0$ auf

$$(\alpha + \beta + \gamma)x + \alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

was auf jeden Fall für die Lösungen des Gleichungssystems $\alpha + \beta + \gamma = \alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ erfüllt ist. Dieses System aus zwei Gleichungen in drei Unbekannten besitzt aber stets eine nichttriviale Lösung. (Was sich unmittelbar aus der Theorie linearer Gleichungssysteme ergibt, auf „elementarem“ Weg aber auch durch explizite Konstruktion der Lösungen wie im ersten Teil der Antwort verifiziert werden kann.)

Insgesamt folgt, dass die maximal linear unabhängigen Systeme aus S genau diejenigen sind, die zwei verschiedene Funktionen aus S enthalten. $\blacklozenge$

Frage 119 Ist $\mathcal{B}$ eine Basis eines K -Vektorraums V , wieso gilt dann $|V| = \max\{|\mathcal{B}|, |K|\}$?

Antwort: Die Ungleichung $|V| \geq |\mathcal{B}|$ ist klar. Um $|V| \geq |K|$ zu beweisen, wähle man einen beliebigen Vektor $v \in \mathcal{B}$. Wegen $v \neq 0$ gilt $\alpha v \neq \beta v$ für $\alpha \neq \beta$. Es folgt $K = Kv \subset V$, also $|K| \leq |V|$.

Zum Beweis der anderen Ungleichung betrachte man die für jeden Vektor $v \in V$ eindeutige Darstellung $v = \sum_{i=1}^{k(v)} \alpha_i v_i$ und ordne dem Vektor v die Menge

$$\Psi(v) := \{(\alpha_1, v_1), \dots, (\alpha_{k(v)}, v_{k(v)})\} \subset K \times \mathcal{B}$$

zu. Damit ist Ψ eine injektive Abbildung $V \rightarrow \mathcal{P}_{\text{fin}}(K \times \mathcal{B})$, wobei $\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)$ für eine beliebige Menge M die Menge der endlichen Teilmengen von M bezeichnet. Ist M unendlich, so gilt der allgemeine Zusammenhang $|\mathcal{P}_{\text{fin}}(M)| = |M|$, und damit erhält man insgesamt

$$|V| \leq |\mathcal{P}_{\text{fin}}(K \times \mathcal{B})| = |K \times \mathcal{B}| = \max\{|K|, |\mathcal{B}|\}. \quad \blacklozenge$$

Frage 120 Ist $\mathcal{B}$ eine Basis des Raums $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathcal{C}$ eine Basis des Raums $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, dann gilt $|\mathcal{B}| > |\mathbb{R}|$ und $|\mathcal{C}| = |\mathbb{R}|$. Können Sie das begründen?

Antwort: Die Abbildung $\Psi: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\Psi(f) = \{x \in \mathbb{R} ; f(x) = 0\}$ ist surjektiv. Also gilt $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$. Da $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = \max\{|\mathbb{R}|, |\mathcal{B}|\}$ nach Frage 119 gilt, folgt $|\mathcal{B}| > |\mathbb{R}|$.

Eine stetige Funktion ist durch ihre Werte in $\mathbb{Q}$ bereits eindeutig festgelegt. Daher ist die Abbildung

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}, \quad f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$$

injektiv. Es folgt $|\mathcal{C}(\mathbb{R})| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Zusammen mit $|\mathcal{C}(\mathbb{R})| = \max\{|\mathbb{R}|, |\mathcal{C}|\}$ folgt daraus die Behauptung. $\blacklozenge$

Frage 121 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Können Sie $\dim U \leq \dim V$ zeigen und dass $\dim U = \dim V$ nur für $U = V$ gilt?

Antwort: Sei $\dim V = n$. Angenommen, $\dim U > n$. Dann gibt es ein linear unabhängiges System der Länge $n+1$ von Vektoren aus U . Das System dieser Vektoren ist natürlich auch in V linear unabhängig, im Widerspruch zu Antwort 109 (d). Also ist U endlich erzeugt mit $\dim U \leq \dim V$. Der Zusatz folgt aus dem Basisergänzungssatz. $\blacklozenge$

Frage 122 Seien $U, W \subset V$ Unterräume eines K -Vektorraums V . Unter welcher Bedingung ist auch $U \cup W$ ein Unterraum von V ?

Antwort: Bezüglich der Vereinigung von Unterräumen gilt: $U \cup W$ ist genau dann ein Unterraum, wenn $U \subset W$ oder $W \subset U$ gilt. Hier ist die „Rückrichtung“ der Äquivalenz offensichtlich, da $U \cup W$ in diesem Fall einem der beiden Unterräume U oder W entspricht. Gilt umgekehrt $U \not\subset W$ und $W \not\subset U$, dann wähle man Vektoren $u \in U \setminus W$ und $w \in W \setminus U$. Der Vektor $u + w$ kann dann nicht in U enthalten sein, denn aus $u + w = u' \in U$ folgt $w = u - u' \in U$, im Widerspruch zur Voraussetzung. Analog folgt $u + w \notin W$, insgesamt also $u + w \notin U \cup W$. Daher kann $U \cup W$ in diesem Fall kein Vektorraum sein. ♦

2.3 Summen von Vektorräumen

Die Antworten zu den Fragen 98 und 122 zeigen, dass man durch die bloße mengentheoretische Vereinigung zweier Unterräume in der Regel keinen neuen Unterraum erhält. Um gegebene Unterräume U und W zu einem größeren Raum zusammenzufassen, der ebenfalls eine lineare Struktur trägt, bildet man statt dessen die *Summe* $U + W$, welche gerade dem Erzeugnis der Menge $U \cup W$ entspricht.

Frage 123 Wie ist die Summe $U + W$ zweier Unterräume eines K -Vektorraums V definiert?

Antwort: Man definiert $U + W = \text{span}(U \cup W)$. Damit besitzt jedes Element aus $v \in U + W$ eine Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Diese Darstellung braucht im Allgemeinen jedoch nicht eindeutig zu sein. ♦

Frage 124 Wie lautet die **Dimensionsformel für Unterräume**? Können Sie eine Beweisskizze geben?

Antwort: Die Dimensionsformel lautet:

Für endlich-dimensionale Untervektorräume $U, W \subset V$ gilt

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W).$$

Beweis: Sei $(v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von $U \cap W$. Gemäß dem Basisergänzungssatz kann man diese zu einer Basis $\mathcal{B}_U = (v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_r)$ von U bzw. einer Basis $\mathcal{B}_W = (v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_s)$ von W ergänzen. Durch Zusammenfassen von $\mathcal{B}_U$ und $\mathcal{B}_W$ erhält man

$$\mathcal{B} := (v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s).$$

Da das System $\mathcal{B}$ genau $\dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$ Vektoren enthält, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis von $U + W$ ist. Offensichtlich ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $U + W$, also muss nur noch die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen werden. Dazu betrachte man

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r}_{=: v} + \underbrace{\gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s}_{=: -v} = 0. \quad (*)$$

Der Vektor v lässt sich sowohl als Linearkombination von Vektoren aus $\mathcal{B}_U$ als auch von Vektoren aus $\mathcal{B}_W$ darstellen und liegt folglich in $U \cap W$. Daher muss er sich bereits als Linearkombination der Vektoren $v_1, \dots, v_m$ darstellen lassen, also ist $(*)$ äquivalent zu

$$\alpha'_1 v_1 + \cdots + \alpha'_m v_m + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_s w_s = 0$$

mit eindeutig bestimmten $\alpha'_i \in K$. Das ist eine Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathcal{B}_W$. Da $\mathcal{B}_W$ linear unabhängig ist, folgt daraus $\gamma_i = 0$ für $i = 1, \dots, s$. Setzt man dieses Ergebnis in $(*)$ ein, so liefert die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}_U$, dass auch die restlichen Koeffizienten in $(*)$ verschwinden. Das zeigt die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$ und damit insgesamt die Behauptung. $\blacklozenge$

Frage 125 Wann heißt die Summe $U + W$ zweier Unterräume eines K -Vektorraums V **direkt**?

Antwort: Eine Summe $U + W$ heißt *direkt*, geschrieben $U \oplus W$, wenn $U \cap W = \{0\}$ gilt. Das ist äquivalent dazu, dass jedes Element $v \in U \oplus W$ eine *eindeutige* Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$ besitzt. Hat man nämlich eine Basis $(u_1, \dots, u_r)$ von U und eine Basis $(w_1, \dots, w_m)$ von W , so impliziert $U \cap W = \{0\}$, dass das System $(u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_m)$ linear unabhängig und damit eine Basis von $U + W$ ist. Jeder Vektor $v \in U + W$ hat dann eine eindeutige Darstellung $v = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$ mit $u = \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i \in U$ und $w = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i \in W$. $\blacklozenge$

Frage 126 Wann gilt für zwei Unterräume U und W eines endlichdimensionalen K -Vektorraums $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W)$?

Antwort: Nach der Dimensionsformel aus Frage 124 gilt die Formel genau dann, wenn $\dim(U \cap W) = 0$, also $U \cap W = \{0\}$ gilt bzw. genau dann, wenn die Summe *direkt* ist. $\blacklozenge$

Frage 127 Was ist ein **Komplement** eines Unterraums $U \subset V$ in V ? Ist ein Komplement, falls es existiert, eindeutig bestimmt?

Antwort: Ein *Komplement* eines Unterraums $U \subset V$ ist ein Unterraum $W \subset V$ derart, dass $V = U \oplus W$ gilt.

Ein Komplement ist nicht eindeutig bestimmt. Sei V zum Beispiel zweidimensional und U der von einem Vektor $u \in V$ aufgespannte Unterraum. Für zwei von u linear unabhängige Vektoren w und w' gilt dann

$$V = U \oplus Kw = U \oplus Kw',$$

aber $Kw \neq Kw'$, sofern $w \neq w'$ ist.

