

3 Lineare Abbildungen und Matrizen

In der Linearen Algebra bewegt man sich immer innerhalb von Vektorräumen, also Mengen mit einer bestimmten algebraischen Struktur. Wie meistens in der Mathematik gehört zu einer bestimmten, durch strukturelle Eigenschaften ausgezeichneten Klasse von Mengen aber auch eine bestimmte Klasse von Abbildungen, die die Struktur ebendieser Mengen respektieren. Im Fall der Linearen Algebra sind das die *linearen Abbildungen* oder *Vektorraumhomomorphismen*.

Eine lineare Abbildung $F: V \longrightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W überträgt alle vektorraumspezifischen Relationen, die zwischen den Vektoren aus V bestehen, auf deren Bilder in W . So gilt z. B.

$$\begin{aligned} v \in \text{span}(v_1, \dots, v_r) &\implies F(v) \in \text{span}(F(v_1), \dots, F(v_r)) \\ v_1, \dots, v_r \text{ linear abhängig} &\implies F(v_1), \dots, F(v_r) \text{ linear abhängig} \\ w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r &\implies F(w) = \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_r F(v_r). \end{aligned}$$

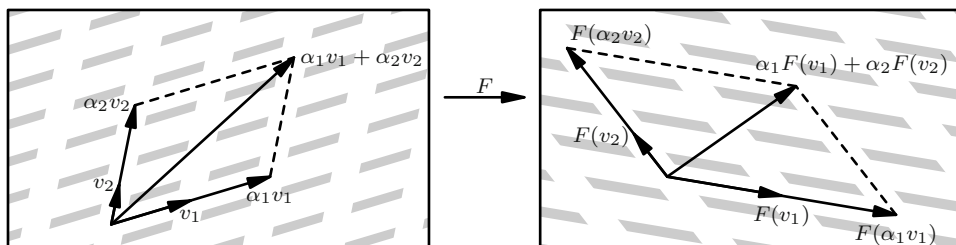
Das letzte Beispiel ist besonders aufschlussreich. Da sich jede Relation, die zwischen den Elementen eines Vektorraums besteht, durch den Begriff der Linearkombination ausdrücken lässt, genügt es, für eine lineare Abbildung zu fordern, dass sie bestehende Gleichungen zwischen Linearkombinationen überträgt, dass also für $v_1, \dots, v_r \in V$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ stets gilt:

$$F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r) = \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_r F(v_r)$$

Dies ist bereits in der kürzeren Forderung

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) \quad \text{für alle } v_1, v_2 \in V \text{ und } \alpha_1, \alpha_2 \in K$$

enthalten.



Da sich alle Elemente eines Vektorraums als Linearkombinationen der Basisvektoren darstellen lassen, verwundert es nicht, dass lineare Abbildungen die Eigenschaft besitzen, bereits durch ihre Werte auf den Basisvektoren eindeutig bestimmt zu sein, was ein große rechnerische und theoretischen Tragweite besitzt.

3.1 Grundbegriffe

Wir führen in diesem Abschnitt die wesentlichen Grundbegriffe ein und leiten daraus die ersten elementaren Eigenschaften linearer Abbildungen ab. Hier und im Folgenden bezeichnen wir lineare Abbildungen stets große lateinische Buchstaben F, G . Ist von allgemeinen, nicht unbedingt linearen, Abbildungen die Rede, dann benutzen wir kleine Buchstaben f, g, h .

Frage 128 Wann heißt eine Abbildung $F: V \longrightarrow W$ zwischen K -Vektorräumen V und W **K -linear** oder **K -Homomorphismus**?

Antwort: Eine Abbildung $F: V \longrightarrow W$ heißt K -linear bzw. K -Homomorphismus, wenn für alle $v, w \in V$ und alle $\alpha \in K$ gilt

- (i) $F(v + w) = F(v) + F(w)$.
- (ii) $F(\alpha v) = \alpha \cdot F(v)$.

Die beiden Bedingungen lassen sich zusammenfassen, indem man für $v, w \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ fordert

$$F(\alpha v + \beta w) = \alpha F(v) + \beta F(w).$$



Frage 129 Können Sie die Begriffe **Isomorphismus**, **Epimorphismus**, **Endomorphismus** und **Automorphismus** erläutern?

Antwort: Alle vier Begriffe bezeichnen Spezialfälle linearer Abbildungen. Eine lineare Abbildung $F: V \longrightarrow W$ zwischen K -Vektorräumen V und W heißt

Isomorphismus, wenn F bijektiv ist,

Epimorphismus, wenn F surjektiv ist,

Endomorphismus, wenn F eine Selbstabbildung ist, also $V = W$ gilt,

Automorphismus, wenn $V = W$ gilt und F bijektiv ist.



Frage 130 Können Sie einige Beispiele linearer Abbildungen nennen?

Antwort: Seien V, W Vektorräume.

- (a) Die identische Abbildung $\text{id}: V \longrightarrow V$ ist wegen

$$\begin{aligned}\text{id}(v + v') &= v + v' = \text{id}(v) + \text{id}(v') \\ \text{id}(\alpha v) &= \alpha v = \alpha \cdot \text{id}(v)\end{aligned}$$

ein Homomorphismus, aufgrund der Bijektivität sogar ein Isomorphismus.

(b) Die Nullabbildung $o: V \longrightarrow W$ mit $o(v) = 0$ für alle $v \in V$ ist K -linear:

$$\begin{aligned} o(v + v') &= 0 = 0 + 0 = o(v) + o(v') \\ o(\alpha v) &= 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot o(v). \end{aligned}$$

(c) Für einen Unterraum $U \subset V$ ist die Inklusionsabbildung $U \hookrightarrow V$ ein Vektorraumhomomorphismus.

(d) Die komplexe Konjugation $\bar{\cdot}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $x + iy \mapsto x - iy$ ist $\mathbb{R}$ -linear, allerdings nicht $\mathbb{C}$ -linear. Für $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt nämlich

$$\overline{\alpha z} = \overline{\alpha} \cdot \bar{z} \neq \alpha \bar{z}.$$

Das ist übrigens der Grund, weshalb die komplexe Konjugation keine *holomorphe Funktion* ist (vgl. [6], S. 265).

(e) Die linearen Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sind genau die Abbildungen des Typs $x \mapsto ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, also genau diejenigen Abbildungen, deren Graph eine Gerade durch den Ursprung beschreibt.

(f) Zu $m, n \in \mathbb{N}$ seien $m \times n$ Elemente $\alpha_{ij} \in K$ mit $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gegeben. Die Abbildung $f: K^n \longrightarrow K^m$, die jeden Vektor $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ auf den Vektor

$$\left(\sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n \alpha_{mj} x_j \right)$$

abbildet, ist eine K -lineare Abbildung.

(h) Für ein Intervall $[a, b]$ bezeichne $\mathcal{C}([a, b])$ den $\mathbb{R}$ -Vektorraum der stetigen Funktionen und $\mathcal{C}^1([a, b])$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$. Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{int}: \mathcal{C}([a, b]) &\longrightarrow \mathcal{C}^1([a, b]), & f &\longmapsto F \quad \text{mit} \quad F(x) = \int_a^x f(t) dt, \\ \text{diff}: \mathcal{C}^1([a, b]) &\longrightarrow \mathcal{C}([a, b]), & f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ -lineare Abbildungen zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen. ◆

Frage 131 Ist die Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F((x_1, x_2)) = x_1 - x_2$ linear? Wie verhält es sich mit $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $G((x_1, x_2)) = x_1 x_2$?

Antwort: Die Abbildung F ist linear. Für zwei Vektoren $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} F(x + y) &= F((x_1 + y_1, x_2 + y_2)) = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) \\ &= (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = F(x) + F(y) \\ F(\alpha x) &= F((\alpha x_1, \alpha x_2)) = \alpha x_1 - \alpha x_2 = \alpha(x_1 - x_2) = \alpha F((x_1, x_2)) = \alpha F(x). \end{aligned}$$

Dagegen ist G nicht linear. Es ist nämlich

$$G(x+y) = G((x_1+y_1, x_2+y_2)) = (x_1+y_1)(x_2+y_2) \neq x_1x_2 + y_1y_2 = G(x) + G(y).$$

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, so folgt die Nichtlinearität von G auch aus

$$G(\alpha x) = G((\alpha x_1, \alpha x_2)) = \alpha^2 x_1 x_2 \neq \alpha x_1 x_2 = \alpha G(x). \quad \blacklozenge$$

Frage 132 Warum ist die Zusammensetzung (Verkettung) linearer Abbildungen wieder linear?

Antwort: Seien $G: U \longrightarrow V$ und $F: V \longrightarrow W$ linear. Dann gilt für alle Vektoren $u, u' \in U$

$$\begin{aligned} F \circ G(u + u') &= F(G(u + u')) \\ &= F(G(u) + G(u')) && \text{(wegen der Linearität von } G\text{)} \\ &= F(G(u)) + F(G(u')) && \text{(wegen der Linearität von } F\text{)} \\ &= F \circ G(u) + F \circ G(u'). \end{aligned}$$

Nach demselben Muster zeigt man für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$F \circ G(\alpha u) = F(G(\alpha u)) = F(\alpha G(u)) = \alpha F(G(u)) = \alpha (F \circ G)(u).$$

Also ist $F \circ G$ linear. $\blacklozenge$

Frage 133 Ist $F: V \longrightarrow W$ linear und bijektiv, warum ist dann auch die Umkehrabbildung $G: W \longrightarrow V$ linear und bijektiv?

Antwort: Die Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung ist immer bijektiv. Um die Linearität zu zeigen, betrachte man $w, w' \in W$ und $v, v' \in V$ mit $F(v) = w$ und $F(v') = w'$. Dann folgt wegen $G \circ F = \text{id}$ und der Linearität von F

$$G(w + w') = G(F(v) + F(v')) = G(F(v + v')) = v + v' = G(w) + G(w').$$

Weiter erhält man für alle $\alpha \in K$

$$G(\alpha w) = G(\alpha F(v)) = G(F(\alpha v)) = \alpha v = \alpha G(w). \quad \blacklozenge$$

Frage 134 Warum ist die Zusammensetzung von Isomorphismen wieder ein Isomorphismus?

Antwort: Die Zusammensetzung zweier Isomorphismen ist als Zusammensetzung zweier bijektiver Abbildungen bijektiv und außerdem linear nach Frage 132. $\blacklozenge$

Frage 135 Wie ist der **Kern**, wie das **Bild** einer linearen Abbildung $F: V \longrightarrow W$ erklärt?

Antwort: Man definiert

$$\ker F := F^{-1}(0) := \{v \in V ; F(v) = 0\} \subset V$$

$$\operatorname{im} F := F(V) := \{w \in W ; \text{es gibt ein } v \in V \text{ mit } w = F(v)\} \subset W. \quad \blacklozenge$$

Frage 136 Warum besitzen der Kern und das Bild einer K -linearen Abbildung $F: V \longrightarrow W$ stets eine Vektorraumstruktur?

Antwort: Seien $v, v' \in \ker F$ und $\alpha \in K$. Dann gilt

$$F(v + v') = F(v) + F(v') = 0 + 0 = 0, \quad \text{also } v + v' \in \ker F$$

$$F(\alpha v) = \alpha \cdot F(v) = \alpha \cdot 0 = 0, \quad \text{also } \alpha v \in \ker F,$$

Somit ist $\ker F$ ein Untervektorraum von V .

Liegen $w, w' \in W$ im Bild von F , dann gibt es Vektoren $v, v' \in V$ mit $w = F(v)$ und $w' = F(v')$. Mit $\alpha \in K$ folgt

$$w + w' = F(v) + F(v') = F(v + v') \in \operatorname{im} F$$

$$\alpha w = \alpha \cdot F(v) = F(\alpha v) \in \operatorname{im} F,$$

also ist $\operatorname{im} F$ ein Untervektorraum von W . $\blacklozenge$

Frage 137 Können Sie zur linearen Abbildung

$$F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, x_2)^T \longmapsto x_1 - x_2$$

den Kern und das Bild angeben?

Antwort: Wegen

$$F((x_1, x_2)^T) = 0 \iff (x_1 - x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$$

folgt

$$\ker F = \{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 ; x_1 = x_2\} = \mathbb{R} \cdot (1, 1)^T.$$

Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ gibt es mit $(a, 0)$ zumindest ein Urbild unter F (es gibt natürlich noch viel mehr). Daher ist $\operatorname{im} F = \mathbb{R}$. $\blacklozenge$

Frage 138 Wie lässt sich die Surjektivität bzw. Injektivität einer linearen Abbildung $F: V \longrightarrow W$ mittels der Eigenschaften von $\operatorname{im} F$ bzw. $\ker F$ charakterisieren?

Antwort: Es gilt:

- (i) F surjektiv $\iff \operatorname{im} F = W$,
- (ii) F injektiv $\iff \ker F = \{0\}$.

Aussage (i) ist klar: F ist surjektiv genau dann, wenn für jedes $w \in W$ ein $v \in V$ mit $F(v) = w$ existiert, was gerade bedeutet, dass jedes $w \in W$ im Bild von F liegt.

Zu Aussage (ii): Ist F injektiv, so kann natürlich nur ein Element auf die Null abgebildet werden. Das zeigt die „Hinrichtung“. Ist umgekehrt $\ker F = \{0\}$, dann folgt aus $F(v) = F(v')$, also $F(v - v') = 0$, dass $v - v' = 0$ und damit $v = v'$ gilt. D. h., F ist injektiv. $\blacklozenge$

Frage 139 Was besagt der „Basisbildersatz“ für lineare Abbildungen?

Antwort: Der Satz besagt:

Seien V, W Vektorräume, $F: V \rightarrow W$ linear, sowie $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Dann ist die Abbildung F durch die Bilder $F(v_1), \dots, F(v_n)$ der Basisvektoren bereits eindeutig bestimmt.

Beweis: Für beliebiges $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte Skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ mit

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Für den Wert $F(v)$ unter einer linearen Abbildung $F: V \rightarrow W$ gilt dann

$$F(v) = F(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 F(v_1) + \dots + \alpha_n F(v_n).$$

Der Wert $F(v)$ ist also für jedes $v \in V$ durch die Bilder $F(v_1), \dots, F(v_n)$ der Basisvektoren bereits eindeutig bestimmt. $\blacklozenge$

Frage 140 Gibt es eine lineare Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$F((2, 1)^T) = (1, 1)^T, \quad F((1, 1)^T) = (2, 1)^T, \quad F((1, 2)^T) = (1, 2)^T?$$

Antwort: Die Vektoren $v_1 = (2, 1)^T$ und $v_2 = (1, 1)^T$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$. Nach dem Basisbildersatz ist F durch die Werte für v_1 und v_2 bereits eindeutig festgelegt, sofern F linear ist. In diesem Fall erhielte man wegen $(1, 2)^T = -v_1 + 3 \cdot v_2$

$$F((1, 2)^T) = -F(v_1) + 3 \cdot F(v_2) = -(1, 1)^T + 3 \cdot (2, 1)^T = (5, 2)^T \neq (1, 2)^T.$$

Daraus folgt, dass keine lineare Abbildung mit den angegebenen Eigenschaften existiert. $\blacklozenge$

Frage 141 Mit $\text{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet man die Menge aller K -linearen Abbildungen $V \rightarrow W$. Wie lässt sich auf $\text{Hom}_K(V, W)$ eine Vektorraumstruktur definieren?

Antwort: Für zwei Abbildungen $F, G \in \text{Hom}_K(V, W)$ und $\alpha \in K$ definiere man die Vektorraumaddition sowie die skalare Multiplikation durch

$$F + G: V \longrightarrow W, \quad (F + G)(v) = F(v) + G(v) \quad (\text{i})$$

$$\alpha F: V \longrightarrow W, \quad (\alpha F)(v) = \alpha \cdot F(v). \quad (\text{ii})$$

Dann sind $F + G$ und αF K -linear wegen

$$\begin{aligned} (F + G)(v + v') &= F(v + v') + G(v + v') = F(v) + F(v') + G(v) + G(v') \\ &= (F + G)(v) + (F + G)(v'), \\ (F + G)(\alpha v) &= F(\alpha v) + G(\alpha v) = \alpha F(v) + \alpha G(v) = \alpha(F(v) + G(v)) \\ &= \alpha(F + G)(v). \end{aligned}$$

Die Abbildungen $F + G$ und αF gehören damit ebenfalls zu $\text{Hom}_K(V, W)$, also handelt es sich bei $\text{Hom}_K(V, W)$ zusammen mit den beiden Operationen (i) und (ii) um einen K -Vektorraum. $\blacklozenge$

Frage 142 Warum ist $\text{Hom}_K(K, W)$ (kanonisch) isomorph zu W ?

Antwort: Sei $F \in \text{Hom}_K(K, W)$. Für jedes $\alpha \in K$ gilt dann $F(\alpha) = \alpha \cdot F(1)$, und damit ist F bereits durch den Wert $F(1) \in W$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt lässt sich zu jedem $w \in W$ eine lineare Abbildung $G \in \text{Hom}_K(K, W)$ allein durch die Festsetzung $G(1) = w$ definieren. Die Abbildung

$$\Phi: \text{Hom}_K(K, W) \longrightarrow W, \quad F \longmapsto F(1)$$

ist also bijektiv. Sie ist ferner linear, denn für $F, G \in \text{Hom}_K(K, W)$ und $\alpha, \beta \in K$ hat man wegen der Linearität von F und G

$$\Phi(\alpha F + \beta G) = (\alpha F + \beta G)(1) = \alpha F(1) + \beta G(1) = \alpha \Phi(F) + \beta \Phi(G).$$

Insgesamt handelt es sich bei F also um einen Isomorphismus. $\blacklozenge$

Frage 143 Was versteht man unter dem **Rang** einer linearen Abbildung $F: V \longrightarrow W$?

Antwort: Der Rang von F ist definiert als die Dimension des Bildes von F

$$\text{rg } F := \dim \text{im } F.$$

Beispielsweise besitzt eine konstante Abbildung $V \longrightarrow W$ mit $v \longmapsto w$ für ein $w \in W$ und alle $v \in V$ den Rang 1. Für die identische Abbildung $\text{id}: V \longrightarrow V$ gilt $\text{rg id} = \dim V$, und für die Nullabbildung $o: V \longrightarrow \{0\}$ ist $\text{rg } o = 0$. $\blacklozenge$

Frage 144 Was besagt die **Dimensionsformel** (Rangformel) für lineare Abbildungen? Können Sie eine Beweisskizze geben?

Antwort: Die Dimensionsformel liefert einen Zusammenhang zwischen der Dimension des Kerns und der des Rangs einer linearen Abbildung. Sie lautet:

Für K -Vektorräume V, W und K -lineare Abbildungen $f: V \longrightarrow W$ gilt

$$\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{im} F.$$

Beweis: Ist einer der beiden Räume $\operatorname{im} F$ oder $\ker F$ unendlich-dimensional, so auch V , und in diesem Fall gilt die Formel. Man kann also annehmen, dass $\ker F$ und $\operatorname{im} F$ beide von endlicher Dimension sind. Man wähle eine Basis $(v_1, \dots, v_r)$ von $\ker F$. Nach dem Basisergänzungssatz kann diese zu einer Basis $(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$ von V ergänzt werden, wobei $s + r = n = \dim V$ gilt. Die Vektoren

$$F(w_1), \dots, F(w_s)$$

bilden dann ein Erzeugendensystem von $\operatorname{im} F$, denn für $v \in V$ hat man eine Darstellung $v = \sum_{i=1}^r \alpha'_i v_i + \sum_{j=1}^s \alpha_j w_j$ mit eindeutig bestimmten $\alpha'_i, \alpha_j \in K$. Daraus folgt

$$F(v) = \sum_{i=1}^r \underbrace{\alpha'_i f(v_i)}_{=0} + \sum_{j=1}^s \alpha_j F(w_j) = \sum_{j=1}^s \alpha_j F(w_j).$$

Somit ist $\operatorname{im} F = \operatorname{span}(F(w_1), \dots, F(w_s))$. Die Dimensionsformel folgt also, wenn jetzt noch die lineare Unabhängigkeit der $F(w_i)$ gezeigt werden kann. In diesem Fall gilt dann nämlich $\dim \operatorname{im} F = s = n - r = \dim V - \dim \ker F$.

Sei also

$$\alpha_1 F(w_1) + \dots + \alpha_s F(w_s) = 0.$$

Dann folgt aufgrund der Linearität von F

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_s w_s \in \ker F,$$

also

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_s w_s = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_r v_r$$

für eindeutig bestimmte $\beta_i \in \mathbb{R}$. Man erhält

$$-\beta_1 v_1 - \dots - \beta_r v_r + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_s w_s = 0,$$

und daraus folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = \beta_1 = \dots = \beta_r = 0$, da $(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s)$ eine Basis von V ist. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von $(F(w_1), \dots, F(w_s))$ und insgesamt die Dimensionsformel bewiesen. $\blacklozenge$

Frage 145 Können Sie folgenden Zusammenhang begründen? Ist V oder W endlich-dimensional, so gilt für $F \in \text{Hom}_K(V, W)$ stets

$$\text{rg } F \leq \min(\dim V, \dim W).$$

Antwort: Wegen $\text{im } F \subset W$ gilt stets $\text{rg } F = \dim \text{im } F \leq \dim W$. Es muss im Folgenden also nur noch $\text{rg } F \leq \dim V$ nachgewiesen werden.

Ist W endlich-dimensional und V unendlich-dimensional, dann gilt erst recht $\text{rg } F < V$, und die Ungleichung ist in diesem Fall richtig.

Für endlich-dimensionales V folgt $\text{rg } F \leq \dim V$ aus dem Basisbildersatz, demzufolge $\text{im } F$ ein Erzeugendensystem der Länge $\dim V$ besitzt. Also gilt $\dim \text{im } F = \text{rg } F \leq \dim V$ aufgrund von Frage 113. $\blacklozenge$

Frage 146 Folgt aus $\dim \ker F < \infty$ und $\dim \text{im } F < \infty$ die Endlichkeit von $\dim V$?

Antwort: Ja, denn $\dim V = \dim \ker F + \dim \text{im } F < \infty$. $\blacklozenge$

Frage 147 Sei $\dim V = \dim W < \infty$. Können Sie zeigen, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind?

- (i) F ist surjektiv, (ii) F ist injektiv, (iii) F ist bijektiv.

Mit anderen Worten: Eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen derselben Dimension ist bereits dann bijektiv, wenn sie injektiv oder surjektiv ist.

Antwort: Ist F surjektiv, dann gilt $\dim \text{im } F = \dim W = \dim V$, und damit folgt aus der Dimensionsformel $\dim \ker F = 0$, also $\ker F = \{0\}$, d. h., F ist injektiv nach Frage 138.

Ist F injektiv, dann gilt $\dim \ker F = 0$, und zwar wieder aufgrund von Frage 138. Die Dimensionsformel liefert dann $\dim W = \dim V = \dim \text{im } F$. Daraus folgt die Surjektivität von F .

Damit ist die Äquivalenz (i) $\iff$ (ii) gezeigt, aus der unmittelbar folgt, dass beide Aussagen mit (iii) äquivalent sind. $\blacklozenge$

Frage 148 Sei $\dim V = \dim W = n$. Warum ist F genau dann ein Isomorphismus, wenn $\text{rg } F = n$ gilt?

Antwort: Ist F bijektiv, dann gilt $\ker F = \{0\}$, und aus der Dimensionsformel folgt

$$\text{rg } F = \dim V = \dim W = n.$$

Gilt umgekehrt $\text{rg } F = n$, dann liefert die Dimensionsformel $\dim \ker F = 0$. Also ist F injektiv und aufgrund von Frage 147 auch bijektiv, also ein Isomorphismus. $\blacklozenge$

3.2 Quotientenvektorräume und affine Unterräume

Das Äquivalent zu den Nebenklassen der Gruppentheorie bilden bei den Vektorräumen die *affinen Unterräume*. In der Euklidischen Geometrie handelt es sich dabei um Punkte, Geraden und Ebenen. Dies sind selbst in der Regel keine Unterräume, sondern entstehen aus diesen durch *Parallelverschiebung* entlang eines Vektors.

Frage 149 Was ist ein **affiner Unterraum** eines Vektorraums V ? Können Sie einige Beispiele nennen?

Antwort: Man nennt eine Teilmenge $A \subset V$ einen *affinen Unterraum*, wenn A leer ist oder es ein Element $a \in V$ und einen linearen Unterraum $U \subset V$ gibt, so dass gilt

$$A = a + U := \{a + u ; u \in U\}.$$

Im $\mathbb{R}^3$ sind die affinen Unterräume gerade die Punkte, Geraden und Ebenen, im $\mathbb{R}^2$ analog die Punkte und Geraden. Die Gerade $x_2 = x_1 + 1$ etwa ist der um den Vektor $(0, 1)^T$ parallel verschobene Unterraum $\mathbb{R} \cdot (1, 1)^T \subset \mathbb{R}^2$.

Ein weiteres wichtiges Beispiel für affine Unterräume sind die Lösungsmengen nicht-homogener Gleichungssysteme (s. Frage 223). ♦

Frage 150 Wie ist die **Dimension eines affinen Unterraums** definiert? Was versteht man unter einer affinen Gerade bzw. einer affinen Ebene?

Antwort: Die Dimension eines affinen Unterraums $v + U$ ist $\dim U$. Man nennt einen affinen Unterraum A *Gerade*, wenn A die Dimension 1 und *Ebene*, wenn A die Dimension 2 hat. ♦

Frage 151 Was ist eine affine Hyperebene? Können Sie ein Beispiel nennen?

Antwort: Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum der Dimension $n - 1$, so ist jeder affine Unterraum $v + U$ eine Hyperebene in V .

Beispiele für Hyperebenen sind die Geraden im $\mathbb{R}^2$ und die Ebenen im $\mathbb{R}^3$. ♦

Frage 152 Wann heißen zwei affine Unterräume $A_1 = v_1 + U_1$ und $A_2 = v_2 + U_2$ **parallel**? Wann ist eine affine Gerade zu einer affinen Ebene parallel?

Antwort: A_1 und A_2 heißen parallel, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$ gilt. Ist A_1 eine affine Gerade, A_2 eine affine Ebene, so ist A_1 parallel zu A_2 , wenn U_1 ein Unterraum von U_2 ist. ♦

Frage 153 Können Sie zeigen: Ist $U \subset V$ ein Unterraum, dann gilt für $v, w \in V$ entweder $v + U = w + U$ oder $(v + U) \cap (w + U) = \emptyset$? (Anschaulich: Zwei nicht identische parallele affine Unterräume besitzen keinen Schnittpunkt.)

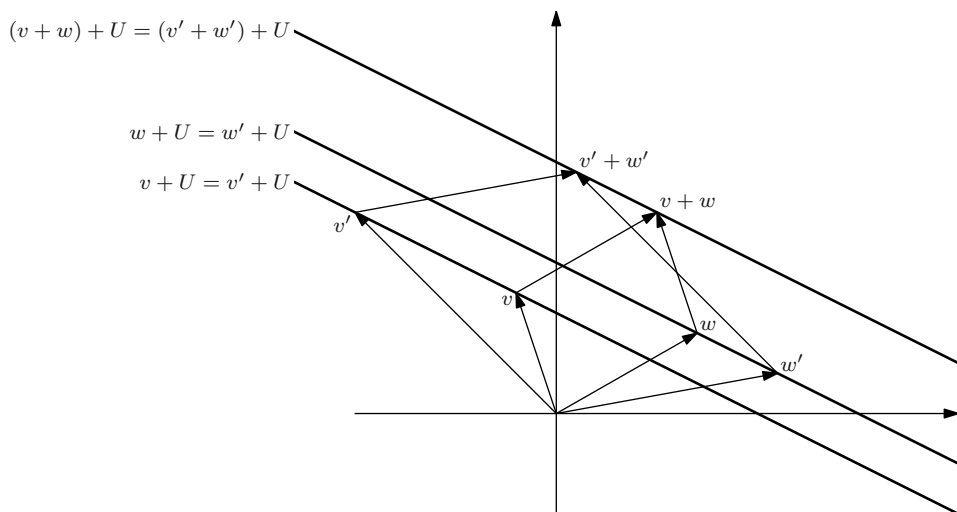
Antwort: Sei $a \in (v + U) \cap (w + U)$. Dann gibt es $u_1, u_2 \in U$ mit $a = v + u_1 = w + u_2$. Daraus folgt zunächst $v = w + u_2 - u_1$. Ist nun b ein beliebiges Element aus $v + U$, dann gilt $b = v + u_3$ für ein $u_3 \in U$, also $b = w + u_2 - u_1 + u_3 \in w + U$. Das zeigt $v + U \subset w + U$, und auf dieselbe Weise folgt $w + U \subset v + U$. Das zeigt die Behauptung. $\blacklozenge$

Frage 154 Sei U ein Unterraum und $V/U := \{v + U ; v \in V\}$. Wie kann man dieser Menge eine K -Vektorraumstruktur aufprägen? Wie nennt man den Raum V/U ?

Antwort: Setzt man versuchsweise

$$(v + U) + (w + U) = (v + w) + U, \quad \alpha(v + U) = \alpha v + U, \quad (*)$$

so erfüllt V/U zusammen mit diesen Verknüpfungen formal alle Vektorraumaxiome. Die Frage wäre damit beantwortet, *vorausgesetzt* man kann zeigen, dass durch $(*)$ überhaupt eine wohldefinierte Abbildung gegeben ist, was in diesem Fall bedeutet, dass die Definition der Summe und skalaren Multiplikation unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten sind. Es muss also gezeigt werden, dass aus $v + U = v' + U$ und $w + U = w' + U$ stets $(v + w) + U = (v' + w') + U$ und $\alpha v + U = \alpha v' + U$ folgt, wie es in dem Beispiel in der Abbildung der Fall ist.



Gelte also $v + U = v' + U$ und $w + U = w' + U$. Dann folgt $v' = v + u_1$ und $w' = w + u_2$ für bestimmte $u_1, u_2 \in U$. Es folgt dann $(v' + w') + U = (v + u_1 + w + u_2) + U = (v + w) + u_1 + u_2 + U = (v + w) + U$ und $\alpha v' + U = \alpha(v + u_1) + U = \alpha v + \alpha u_1 + U = \alpha v + U$. Damit sind die Verknüpfungen durch $(*)$ in der Tat wohldefiniert und V/U damit ein K -Vektorraum. Man nennt V/U *Quotientenvektorraum*. $\blacklozenge$

Frage 155 Sei $F: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung und $w \in W$. Was versteht man unter der **Faser** von F über w ?

Antwort: Die Faser ist die Urbildmenge $F^{-1}(w)$ des Vektors w unter F :

$$F^{-1}(w) := \{v \in V ; F(v) = w\}.$$

Die Faser von F über w ist genau dann nichtleer, wenn w im Bild von F liegt. ♦

Frage 156 Wieso wird V durch die Fasern von F in disjunkte Teilmengen zerlegt?

Antwort: Jedes $v \in V$ wird auf genau ein Element $F(v) = w \in W$ abgebildet und liegt daher in genau einer Faser, nämlich in $F^{-1}(w)$. ♦

Frage 157 In welchem Zusammenhang stehen die Fasern von F mit den affinen Unterräumen von V ?

Antwort: Es gilt:

Für $v \in V$ ist die Faser von F über $F(v)$ gerade der affine Unterraum $v + \ker F$. Es gilt also

$$v + \ker F = F^{-1}(F(v)).$$

Ist F insbesondere surjektiv, dann entsprechen die Fasern von F auf bijektive Weise den affinen Unterräumen $v + U$ mit $U = \ker F$.

Beweis: Sei $U := \ker F$. Für $v + u \in v + U$ gilt $F(v + u) = F(v)$, also $v + u \in F^{-1}(F(v))$ und damit $v + U \subset F^{-1}(F(v))$. Ist umgekehrt $v' \in F^{-1}(F(v))$, dann gilt $F(v') = F(v)$, also $F(v' - v) = 0$ bzw. $v' - v \in U$. Es folgt $v' = v + u$ mit einem $u \in U$ und schließlich $v' \in v + U$. Das zeigt insgesamt die erste Behauptung.

Die zweite folgt daraus unmittelbar, denn für ein surjektives F liegt über jedem $w = F(v)$ genau eine nichtleere Faser, und diese ist nach dem ersten Teil von der Gestalt $v + U$. ♦

Frage 158 Wie ist die **natürliche Projektion** $\pi_U: V \longrightarrow V/U$ definiert?

Antwort: Für $v \in V$ definiert man

$$\pi_U(v) = v + U.$$

Damit ist π_U ein surjektiver Homomorphismus mit $\ker \pi_U = U$. ♦

Frage 159 Sei $F: V \longrightarrow W$ linear $w \in \text{im } F$ und $u \in F^{-1}(w)$ beliebig. Können Sie

$$F^{-1}(w) = u + \ker F = \{u + v ; v \in \ker F\}$$

zeigen?

Antwort: Sei $u' \in F^{-1}(w)$. Dann gilt $F(u') = F(u)$, also $u' - u \in \ker F$ und damit $u' = u + v$ für ein $v \in \ker F$.

Gilt umgekehrt $u' = u + v$ mit $v \in \ker F$, dann ist $F(u' - u) = 0$ und folglich $F(u') = F(u) = w$, also $u' \in F^{-1}(w)$. $\blacklozenge$

Frage 160 Wie lautet der **Faktorisierungssatz**?

Antwort: Der Satz lautet:

Sei $F: V \rightarrow W$ surjektiv und linear mit $\ker F = U$. Sei ferner U' ein Komplement von U in V , also ein linearer Unterraum, mit dem $V = U \oplus U'$ gilt. Dann ist die Einschränkung $F|_{U'}: U' \rightarrow W$ ein Isomorphismus und mit der Projektion

$$\pi: V = U \oplus U' \rightarrow U', \quad u + u' \mapsto u'$$

auf den zweiten Summanden gilt

$$F = F|_{U'} \circ \pi.$$

In Form eines Diagramms hat man

$$\begin{array}{ccc} V = U \oplus U' & \xrightarrow{F} & W \\ & \searrow \pi & \nearrow F|_{U'} \\ & U' & \end{array}$$

Beweis: Die erste Aussage (ii) ergibt sich daraus, dass $F|_{U'}$ erstens U' surjektiv auf W abbildet und zweitens wegen $\ker F|_{U'} = \{0\}$ injektiv ist. Damit folgt die zweite Aussage unmittelbar aufgrund der Konstruktion von π . $\blacklozenge$

Frage 161 Wie lautet der **Homomorphiesatz** für Vektorräume?

Antwort: Der Satz lautet:

Sei $U \subset V$ ein linearer Unterraum eines K -Vektorraums V und sei $\pi: V \rightarrow V/U$ der kanonische Epimorphismus oder allgemeiner ein Epimorphismus mit $\ker \pi \subset U$. Dann gibt es zu jeder K -linearen Abbildung $F: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung $\bar{F}: V/U \rightarrow W$, so dass das unten stehende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{F} \\ & V/U & \end{array}$$

Es ist $\bar{F}$ genau dann injektiv, wenn $U = \ker F$ gilt und genau dann surjektiv, wenn F surjektiv ist.

Beweis: Die Eindeutigkeit ist klar. Um die Existenz zu zeigen beachte man, dass für zwei Vektoren v, v' mit $\pi(v) = \pi(v')$ gilt

$$v' - v \in U \subset \ker F$$

und daher $v' = v + u$ mit einem $u \in \ker F$. Es folgt dann $F(v') = F(v + u) = F(v)$, und daher ist die durch

$$\bar{F}: V/U \longrightarrow W, \quad \bar{v} \longmapsto F(v)$$

gegebene Abbildung wohldefiniert, wobei mit v jeweils irgendein Urbild von $\bar{v} \in V/U$ unter π gemeint ist. Mit dieser Definition ist die Beziehung $F = \bar{F} \circ \pi$ erfüllt. Weiter muss gezeigt werden, dass $\bar{F}$ K -linear ist. Dazu seien $\bar{v}, \bar{v}' \in \bar{V}$ und v, v' entsprechende Urbilder in V sowie $\alpha \in K$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{F}(\bar{v} + \bar{v}') &= F(v + v') = F(v) + F(v') = \bar{F}(\bar{v}) + \bar{F}(\bar{v}') \\ \bar{F}(\alpha \bar{v}) &= F(\alpha v) = \alpha \cdot F(v) = \alpha \cdot \bar{F}(\bar{v}). \end{aligned}$$

Damit ist auch die K -Linearität von $\bar{F}$ nachgewiesen.

Es bleiben noch die beiden Zusatzbehauptungen zu zeigen. Es gilt $\bar{F}(\bar{v}) = F(v) = 0$ genau dann, wenn $v \in \ker F$ gilt. Ist $U = \ker F$, so folgt daraus $\bar{v} = \bar{0}$, also ist $\bar{F}$ injektiv. Ist umgekehrt $\bar{F}$ injektiv, so gilt die Gleichung $\bar{F}(\bar{v}) = 0$ dann und nur dann, wenn v in $\ker F$ liegt. In diesem Fall muss dann $\ker F = U$ gelten.

Dass $\bar{F}$ genau dann surjektiv ist, wenn F dies ist, ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion von $\bar{F}$. $\blacklozenge$

Frage 162 Der Homomorphiesatz besitzt als Spezialfall ein für die Anwendungen wichtiges Korollar, den sogenannten **Isomorphiesatz**. Können Sie diesen noch einmal herleiten?

Antwort: Der Isomorphiesatz lautet:

Sei $F: V \longrightarrow W$ eine K -lineare Abbildung. Dann induziert F in natürlicher Weise einen Isomorphismus $V/\ker F \simeq \operatorname{im} F$, also einen Isomorphismus $V/\ker F \simeq W$, falls F surjektiv ist. In Form eines Diagramms erhält man

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & \operatorname{im} F \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{F} \\ & V/\ker F & \end{array}$$

$\blacklozenge$

Frage 163 Können Sie zeigen, dass sich jeder affine Unterraum $A = v + U$ von V als Faser einer linearen Abbildung $F: V \longrightarrow W$ realisieren lässt?

Antwort: Ist $A = \emptyset$, so betrachte man etwa die Nullabbildung $o: V \longrightarrow W$ mit $o(v) = 0$ für alle $v \in V$. Dann gilt $A = \emptyset = o^{-1}(1)$.

Ist $A \neq \emptyset$, dann betrachte man den kanonischen Epimorphismus $\pi: V \longrightarrow V/U$. Es gilt $A = v + U = \pi^{-1}(\pi(v))$, also ist A eine Faser von π . $\blacklozenge$

Frage 164 Sei A eine Teilmenge eines K -Vektorraums V . Können Sie zeigen, dass A genau dann ein affiner Unterraum von V ist, wenn für jeweils endlich viele Elemente $a_0, \dots, a_r$ und Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ mit $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$ stets folgt $\sum_{i=1}^r \alpha_i a_i \in A$?

Antwort: Sei A ein affiner Unterraum von V . Nach Frage 163 existiert dann ein Homomorphismus $V \rightarrow W$ in einen Vektorraum W mit $A = F^{-1}(w)$ für ein Element $w \in W$. Es folgt

$$F\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=0}^r \alpha_i F(a_i) = \sum_{i=0}^r \alpha_i \cdot w = w.$$

Also gilt

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i a_i \in F^{-1}(w) = A.$$

Um die Umkehrung zu zeigen, betrachte man zu beliebigem $a_0 \in A$ die Menge $\Delta A := \{a - a_0 ; a \in A\}$. Wir zeigen, dass ΔA ein Untervektorraum von V ist. Zum einen ist jedenfalls $0 \in \Delta A$ und damit $\Delta A \neq \emptyset$. Sind nun $a, b \in \Delta A$, so ist $a = a_1 - a_0$ und $b = a_2 - a_0$ mit $a_1, a_2 \in A$. Es folgt

$$a + b = (a_1 - a_0 + a_2) - a_0 \in \Delta A.$$

Für $\alpha \in K$ gilt aufgrund der Voraussetzung $\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_0 \in A$, da die Koeffizienten in dieser Summe sich zu 1 summieren. Also hat man, wiederum aufgrund der Voraussetzung,

$$\alpha a = (\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_0) - a_0 \in \Delta A.$$

Folglich ist ΔA ein Untervektorraum und damit $A = a_0 + \Delta A$ ein affiner Unterraum von V . ♦

3.3 Matrizen

Nach dem zentralen *Basisbildersatz*, der in Frage 139 behandelt wurde, ist eine lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ durch ihre Werte auf den Vektoren einer Basis von V bereits eindeutig festgelegt. Ist V endlich-dimensional, dann existiert eine endliche Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, und F ist ausreichend durch die n Werte

$$F(v_1), F(v_2), \dots, F(v_n)$$

beschrieben. Ist auch W endlich-dimensional, dann lassen sich die n Vektoren $F(v_j) \in W$ bezüglich einer Basis $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ von W als Linearkombination

$$F(v_j) = \alpha_{1j}w_1 + \dots + \alpha_{mj}w_m$$

darstellen, wobei die Koeffizienten $\alpha_{ij} \in K$ für $i = 1, \dots, m$ eindeutig bestimmt sind. Aus diesen beiden Eigenschaften zusammen schließt man, dass sämtliche Informationen über die lineare Abbildung F in den $m \cdot n$ Körperelementen

$$\alpha_{ij}, \quad \text{für } 1 \leq m \leq i, j \leq n$$

bereits eindeutig codiert sind. Diese kann man auch übersichtlich in einem rechteckigen Schema, einer sogenannten $m \times n$ -Matrix eintragen. Das sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matrizen beschreiben also lineare Abbildungen. Den Anwendungen linearer Abbildungen entsprechen dann bestimmte kalkülmäßige Operationen an Matrizen, die sich auf Additionen und Multiplikationen innerhalb des Grundkörpers K reduzieren. Matrizen repräsentieren daher die eher „rechnerische Seite“ der Linearen Algebra, weswegen sie in konkreten Anwendungen eine außerordentliche Rolle spielen. Wichtig ist aber zu betonen, dass eine Matrix eine lineare Abbildung immer nur im Hinblick auf bestimmte gegebene Vektorraumbasen des Definitions- und Wertebereichs beschreibt.

Frage 165 Wie kann man den Begriff einer $m \times n$ -Matrix in einem Körper K formal definieren?

Antwort: Eine $m \times n$ -Matrix mit Koeffizienten kann man formal als eine Abbildung

$$A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow K, \quad (i, j) \longmapsto a_{ij}$$

definieren. Man nennt den Index i den Zeilenindex, den Index j den Spaltenindex des Elements a_{ij} .

Die $m \cdot n$ Werte dieser Abbildung, durch die A eindeutig bestimmt ist, lassen sich übersichtlich in einem rechteckigen Schema anordnen

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Meist spricht man von diesem Schema selbst als einer Matrix und bezieht sich darauf, wenn von Zeilen, Spalten, Diagonalen und dergleichen die Rede ist. In manchen Zusammenhängen schreiben wir eine $m \times n$ -Matrix A auch in der Form

$$A = (s_1, \dots, s_n) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_m \end{pmatrix},$$

wobei $s_1, \dots, s_n$ die Spalten (verstanden als Spaltenvektoren in K^m) und $z_1, \dots, z_m$ die Zeilen (verstanden als Zeilenvektoren in K^n) bezeichnen.

Die Menge der $m \times n$ -Matrizen über K bezeichnen wir mit $M(m \times n, K)$. Eine weitere gebräuchliche Bezeichnung ist $K^{m \times n}$. Für die Menge der *quadratischen* $n \times n$ -Matrizen über K benutzen wir die Schreibweise $M(n, K)$.

Wir behandeln hier in den meisten Fällen nur Matrizen mit Einträgen aus einem Körper K . Es sei nur bemerkt, dass Matrizen sich natürlich auch für kommutative Ringe gemäß der obigen Definition einführen lassen. Die Regeln für die Addition und Multiplikation lassen sich dann genauso übernehmen. ♦

Frage 166 Wie sind für Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ und $\alpha \in K$ die Summe $A + B$ und das skalare Produkt αA erklärt? Ist $K^{m \times n}$ ein K -Vektorraum?

Antwort: Addition und skalare Multiplikation werden in $K^{m \times n}$ komponentenweise erklärt. Für $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ ist also

$$(A + B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$$

sowie

$$(\alpha A)_{ij} = (\alpha a_{ij}).$$

Damit ist $K^{m \times n}$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Addition. Neutrales Element ist die Matrix, deren sämtliche Einträge null sind, und die zu $A = (a_{ij})$ bezüglich der Addition inverse Matrix lautet $-A = (-a_{ij})$.

Zusammen mit der skalaren Multiplikation ist $K^{m \times n}$ damit ein K -Vektorraum. Er besitzt die Dimension $m \cdot n$, denn die Matrizen E_{ij} , deren Einträge in der i -ten Zeile und j -ten Spalte gleich 1 sind, und deren andere Einträge alle verschwinden, bilden offensichtlich eine Basis von $K^{m \times n}$. ♦

Frage 167 Wie ist für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ und einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ das Produkt $A \cdot x$ definiert?

Antwort: Das Produkt $A \cdot x$ ist wie folgt erklärt:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix}$$

Man beachte: Das Produkt $A \cdot x$ ist nur für den Fall definiert, in dem die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Komponenten von x übereinstimmt.

Zur Bezeichnung: Bewegt man sich innerhalb des Matrizenkalküls, so ist aus formalen Gründen eine Unterscheidung zwischen *Zeilen-* und *Spaltenvektoren* aus K^n wichtig – eine Unterscheidung, die in anderen Zusammenhängen keine Rolle spielt. Wir fassen Vektoren $x \in K^n$ in Zukunft stets als *Spaltenvektoren* auf. Um denselben Vektor als Zeilenvektor darzustellen, benutzen wir die Schreibweise x^T (mit „T“ wie „Transponierte“).

Etwas übersichtlicher kann man die Matrizenmultiplikation auch folgendermaßen darstellen: Sind $s_1, \dots, s_n \in K^m$ die Spaltenvektoren von A , dann lässt sich $A \cdot x$ auch in der Form

$$A \cdot x = x_1 s_1 + \dots + x_n s_n$$

schreiben, also z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 100 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 1000 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 168 Können Sie

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ausrechnen?

Antwort: Man erhält als Ergebnis den Vektor

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-4) \\ 5 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + -1 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \\ 19 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 169 Inwiefern ist durch eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ eine Abbildung $F_A : K^n \longrightarrow K^m$ gegeben?

Antwort: Für jedes $x \in K^n$ ist $A \cdot x$ ein Element aus K^m . Durch

$$x \longmapsto A \cdot x$$

ist also eine Abbildung $F_A : K^n \longrightarrow K^m$ gegeben. Diese Abbildung ist linear. Bezeichnen nämlich $s_1, \dots, s_n$ die Spaltenvektoren von A und sind $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ zwei Vektoren aus K^n sowie $\alpha, \beta \in K$, dann gilt

$$\begin{aligned} A \cdot (\alpha x + \beta y) &= s_1 \cdot (\alpha x_1 + \beta y_1) + \dots + s_n \cdot (\alpha x_n + \beta y_n) \\ &= \alpha(s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) + \beta(s_1 y_1 + \dots + s_n y_n) \\ &= \alpha \cdot Ax + \beta \cdot Ay. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Frage 170 Können Sie zeigen, dass sich umgekehrt jeder linearen Abbildung $F : K^n \longrightarrow K^m$ eindeutig eine Matrix $A_F \in K^{m \times n}$ so zuordnen lässt, dass $F(x) = A_F \cdot x$ für alle $x \in K^n$ gilt?

Antwort: Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des K^n . Man betrachte die Matrix

$$A := (F(e_1), \dots, F(e_n)) \in K^{m \times n},$$

die als Spalten die Bilder der Basisvektoren des K^n enthält. Nach Frage 169 beschreibt A eine lineare Abbildung $F: K^n \rightarrow K^m$. Für alle $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ gilt

$$\begin{aligned} F_A(x) &= A \cdot x = (F(e_1), \dots, F(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 F(e_1) + \dots + x_n F(e_n) \\ &= F(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = F(x). \end{aligned}$$

Es folgt $F(x) = F_A(x)$. Damit wird F eindeutig durch die Matrix A beschrieben. Die gesuchte Matrix $A_F = A$ ist also diejenige Matrix, deren Spalten aus den Bildern $F(e_j)$ der Basisvektoren e_j besteht. Das beantwortet die Frage.

Als Faustregel kann man sich merken:

Die einer linearen Abbildung $F: K^n \rightarrow K^m$ zugeordnete Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist diejenige Matrix, deren Spalten die Bilder $F(e_j)$ der Einheitsvektoren e_j für $j = 1, \dots, n$ sind. ♦

Frage 171 Gibt es eine Bijektion zwischen $\text{Hom}(K^n, K^m)$ und $K^{m \times n}$?

Antwort: Die Abbildung

$$\text{Hom}(K^n, K^m) \rightarrow K^{n \times m}, \quad F \mapsto (F(e_1), \dots, F(e_n))$$

ist nach Antwort 170 injektiv und nach Antwort 169 surjektiv, definiert folglich eine Bijektion zwischen der Menge der linearen Abbildungen $K^n \rightarrow K^m$ und der Menge der Matrizen $A \in K^{m \times n}$. ♦

Frage 172 Können Sie der linearen Abbildung

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x_2, x_2)^T \mapsto (x_1 - x_2, 2x_1)^T$$

ihre Matrix bezüglich der Standardbasis zuordnen?

Antwort: Mit $e_1 = (1, 0)^T$ und $e_2 = (0, 1)^T$ gilt

$$F(e_1) = (1, 2)^T, \quad F(e_2) = (-1, 0)^T.$$

Nach Frage 170 erhält man als gesuchte Matrix

$$A_F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 173 Sei $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die geometrisch eine Drehung im Uhrzeigersinn um den Winkel ϑ beschreibt. Wie lautet die F zugeordnete Matrix A_F ?

Antwort: Mit

$$F(e_1) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta), \quad F(e_2) = \left(\cos \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right), \sin \left(\vartheta + \frac{\pi}{2} \right) \right) = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

erhält man als Darstellungsmatrix

$$A_F = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 174 Unter welchen Voraussetzungen ist das **Produkt** $A \cdot B$ **zweier Matrizen** definiert? Wie lautet gegebenenfalls die Definition?

Antwort: Das Produkt $A \cdot B$ ist für zwei Matrizen A und B genau dann erklärt, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist, wenn also natürliche Zahlen m, n, p existieren mit

$$A \in K^{m \times n} \quad \text{und} \quad B \in K^{n \times p}. \quad (*)$$

Für zwei Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ wie in $(*)$ ist das Produkt $A \cdot B$ dann eine Matrix in $K^{m \times p}$. Für die Koeffizienten von $A \cdot B$ gilt

$$(A \cdot B)_{k\ell} := \sum_{i=1}^n a_{ki} b_{i\ell},$$

oder etwas schematischer

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{ip} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{ip} \end{pmatrix}.$$

Man kann sich die Multiplikation auch so einprägen: *Die Spaltenvektoren von AB sind die Bilder der Spaltenvektoren von B unter der Abbildung $x \mapsto A \cdot x$.* $\blacklozenge$

Frage 175 Wie lautet das Ergebnis der Multiplikation

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 8 \\ 5 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -8 \\ 2 & 9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}?$$

Antwort: Man erhält als Ergebnis die 2×2 -Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 8 \cdot 1 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 8 - 2 \cdot 9 + 8 \cdot 1 \\ 5 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 5 \cdot 2 - 1 \cdot 8 + 3 \cdot 9 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 5 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 0 \cdot 1 & 3 \cdot 2 - 0 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -20 \\ 37 & 26 \\ 23 & 42 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 176 Seien $F: K^n \longrightarrow K^m$ und $G: K^m \longrightarrow K^p$ lineare Abbildungen, die durch die Matrizen $A_F \in K^{m \times n}$ bzw. $A_G \in K^{p \times m}$ beschrieben werden. Wieso gilt dann

$$(A_G \cdot A_F) \cdot x = (G \circ F)(x) \quad \text{für alle } x \in K^n,$$

d. h., dass auf der Ebene der Matrizen der Verkettung linearer Abbildungen gerade die Multiplikation von Matrizen entspricht?

Antwort: Man betrachte den ℓ -ten Spaltenvektor $s_\ell = (a_{1\ell}, \dots, a_{m\ell})^T$ der Matrix A_F . Nach Antwort 170 gilt $s_\ell = F(e_\ell)$ mit dem ℓ -ten Standardbasisvektor $e_\ell \in K^n$. Man erhält

$$\begin{aligned} (G \circ F)(e_\ell) &= G(F(e_\ell)) = G((a_{1\ell}, \dots, a_{m\ell})^T) \\ &= G(a_{1\ell}\epsilon_1 + \dots + a_{m\ell}\epsilon_m) = a_{1\ell}G(\epsilon_1) + \dots + a_{m\ell}G(\epsilon_m), \end{aligned}$$

wobei $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ die Standardbasisvektoren in K^m bezeichnen. Die Vektoren $G(\epsilon_1), \dots, G(\epsilon_m)$ sind nach Antwort 170 genau die Spalten von A_G , also ist die rechte Summe identisch mit $A_G \cdot s_\ell = A_G \cdot (A_F e_\ell) = (A_G \cdot A_F) \cdot e_\ell$, also der ℓ -ten Spalte von $A_G \cdot A_F$. Damit gilt

$$A_G \cdot A_F = ((G \circ F)(e_1), \dots, (G \circ F)(e_n)),$$

und nach Frage 170 ist das die Darstellungsmatrix von $G \circ F$. $\blacklozenge$

Frage 177 Unter welchen Bedingungen sind sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ definiert?

Antwort: Die Produkte lassen sich nur dann bilden, wenn sowohl A als auch B *quadratische* Matrizen sind, also $A, B \in M(n, K)$ gilt. Auf der Ebene der linearen Abbildungen, die durch Matrizen beschrieben werden, wird diese Bedingung dadurch verständlich, dass die Verkettungen $F \circ G$ und $G \circ F$ nur dann *beide* definiert sind, wenn F und G denselben Definitions- und Zielbereich haben. In dem gegenwärtigen Zusammenhang heißt das speziell, dass es sich bei beiden um Endomorphismen $K^n \longrightarrow K^n$ handeln muss. $\blacklozenge$

Frage 178 Ist die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen kommutativ?

Antwort: Nein. Es gilt zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das zweite Produkt zeigt obendrein, dass der Matrizenring nicht *nullteilerfrei* ist. $\blacklozenge$

Frage 179 Geben Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an, die eine Drehung um die x_3 -Achse um den Winkel ϑ , gefolgt von einer Drehung um die x_1 -Achse um den Winkel ϱ beschreibt (beide Drehungen im Uhrzeigersinn). Können Sie zeigen, dass man im Allgemeinen ein anderes Ergebnis erhält, wenn man die Reihenfolge der Drehungen vertauscht?

Antwort: Sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x_3 -Achse um den Winkel ϑ und $G: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Drehung um die x_1 -Achse um den Winkel ϱ beschreiben. Für die zugehörigen 3×3 -Matrizen A_F und A_G erhält man durch eine einfache Verallgemeinerung der Argumentation aus Frage 173

$$A_F = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varrho & -\sin \varrho \\ 0 & \sin \varrho & \cos \varrho \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\Phi = G \circ F$ und folglich

$$A_\Phi = A_G \cdot A_F = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \cos \varrho \sin \vartheta & \cos \varrho \cos \vartheta & -\sin \varrho \\ \sin \varrho \sin \vartheta & \sin \varrho \cos \vartheta & \cos \varrho \end{pmatrix}.$$

Vertauscht man die Reihenfolge der Drehungen, so erhält man als Darstellungsmatrix der so erhaltenen Abbildung $\Phi': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$A_{\Phi'} = A_F \cdot A_G = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \cos \varrho & \sin \vartheta \sin \varrho \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \varrho & -\cos \vartheta \sin \varrho \\ 0 & \sin \varrho & \cos \varrho \end{pmatrix} \neq A_\Phi.$$

Daraus folgt $\Phi' \neq \Phi$, die beiden Abbildungen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ sind also verschieden. ♦

3.4 Matrizenringe

Da sich quadratische Matrizen miteinander addieren und multiplizieren lassen und diese Operationen zudem die Assoziativ- und Distributivgesetze erfüllen, besitzt die Menge $M(n, K)$ der quadratischen $n \times n$ -Matrizen über einem Körper K die Struktur eines Rings (oder spezieller die einer K -Algebra, da $M(n, K)$ zusätzlich ein K -Vektorraum ist). Die Menge aller *invertierbaren* Matrizen aus $M(n, K)$ bildet darüberhinaus einen Körper.

Frage 180 Können Sie für $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in K^{n \times p}$, $C = (c_{ij}) \in K^{p \times q}$ verifizieren, dass die Matrizenmultiplikation assoziativ und distributiv ist, dass also $(AB)C = A(BC)$ gilt?

Antwort: Wir benutzen folgende Notation: $M_{k\ell}$ bezeichne den Eintrag in der k -ten Zeile und ℓ -ten Spalte einer Matrix M . Es gilt

$$((AB)C)_{k\ell} = \sum_{i=1}^p (AB)_{ki} c_{i\ell} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{ji} c_{i\ell} = \sum_{j=1}^n a_{kj} \sum_{i=1}^p b_{ji} c_{i\ell} = (A(BC))_{k\ell}.$$

Das zeigt die Assoziativität der Matrizenmultiplikation. ◆

Frage 181 Was ist eine **K-Algebra**?

Antwort: Sei K ein Körper. Eine *Algebra mit Eins über K* (kurz K -Algebra) ist ein Ring R mit 1, der gleichzeitig ein K -Vektorraum ist, so dass

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

für alle $\alpha \in K$ und $A, B \in R$ gilt. ◆

Frage 182 Warum ist $M(n, K)$ eine K -Algebra?

Antwort: $M(n, K)$ ist mit der Addition und Multiplikation von Matrizen ein Ring mit 1. Das folgt aus den Fragen 178 und 180. Das Distributivgesetz gilt wegen

$$(A(B + C))_{k\ell} = \sum_{i=1}^n a_{ki}(b_{i\ell} + c_{i\ell}) = \sum_{i=1}^n (a_{ki}b_{i\ell} + a_{ki}c_{i\ell}) = (AB + AC)_{k\ell}$$

In Antwort 166 wurde schon begründet, dass $M(n, K)$ ein Vektorraum ist. Ferner rechnet man ohne Probleme nach, dass $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ für alle $\alpha \in K$ und $A, B \in M(n, K)$. Also ist $M(n, K)$ eine K -Algebra. ◆

Frage 183 Was versteht man unter dem **Spaltenraum** $S(A)$, was unter dem **Zeilenraum** $Z(A)$ einer Matrix $A \in K^{m \times n}$?

Antwort: Als *Spaltenraum* von A definiert man den durch die Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_n \in K^m$ von A aufgespannten Unterraum von K^m . Entsprechend ist der *Zeilenraum* der durch die Zeilenvektoren $z_1, \dots, z_m \in K^n$ von A aufgespannte Unterraum von K^n , also

$$S(A) := \text{span}(s_1, \dots, s_n), \quad Z(A) := \text{span}(z_1, \dots, z_m).$$

Man kann Zeilenraum und Spaltenraum daher auch charakterisieren durch

$$S(A) := \{Ax ; x \in K^n\}, \quad Z(A) := \{x^T A ; x \in K^m\}. \quad \text{◆}$$

Frage 184 Wie sind **Spaltenrang** und **Zeilenrang** einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ definiert?

Antwort: Der *Spaltenrang* rg_s von A ist die Dimension des Spaltenraumes, der *Zeilenrang* rg_z entsprechend die Dimension des Zeilenraumes. Der Spalten- bzw. Zeilenrang entspricht damit der Anzahl linear unabhängiger Spalten bzw. Zeilen in A . ♦

Frage 185 Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Spaltenrang von $A \in K^{m \times n}$ und dem Rang der linearen Abbildung $F_A: K^n \rightarrow K^m$ mit $F(x) = A \cdot x$?

Antwort: Die Spaltenvektoren $s_1, \dots, s_m$ von A bilden ein Erzeugendensystem von $\text{im } f$, da für jedes $w = F(x) \in \text{im } f$ gilt:

$$w = F(x) = A \cdot x = (s_1, \dots, s_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 s_1 + \dots + x_n s_n.$$

Somit ist $\text{rg } f = \dim \text{im } f$ gleich der Dimension des durch die Spaltenvektoren s_i aufgespannten Unterraums von W , also gleich dem Spaltenrang von A . ♦

Frage 186 Können Sie beweisen, dass für jede Matrix Zeilen- und Spaltenrang übereinstimmen, so dass also allgemein von *dem* Rang einer Matrix gesprochen werden kann?

Antwort: Beim Beweis kann man so vorgehen, dass man zunächst zeigt, dass sich der Zeilenrang von A nicht ändert, wenn man eine Spalte aus A entfernt, die sich aus den übrigen Spalten linear kombinieren lässt (der Spaltenrang ändert sich dadurch offensichtlich nicht).

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man dabei davon ausgehen, dass sich die letzte Spalte von A als Linearkombination der ersten $n-1$ Spalten darstellen lässt, so dass also gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m(n-1)} & \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Sei $A' \in K^{m \times (n-1)}$ diejenige Matrix, die man durch Streichen der letzten Spalte aus A erhält. Sind die Zeilen von A' linear unabhängig, dann natürlich auch die von A . Sind aber die Zeilen von A' linear abhängig, gilt also

$$\sum_{j=1}^m \beta_j a_{jk} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

mit bestimmten $\beta_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$, dann folgt daraus für die Elemente der letzten Spalte von A

$$\sum_{j=1}^m \beta_j a_{jn} = \sum_{k=1}^m \beta_j \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_{ji} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\sum_{j=1}^m \beta_j a_{ji}}_{=0} = 0.$$

Man sieht also, dass die Zeilen von A genau dann linear abhängig sind, wenn die Zeilen aus A' dies sind. Beim Streichen einer Spalte, die sich aus den anderen linear kombinieren lässt, ändert sich der Zeilenrang nicht. Auf dieselbe Weise zeigt man, dass das Streichen einer linear abhängigen Zeile keinen Einfluss auf den Spaltenrang hat.

Man kann in der Matrix A daher so lange linear abhängige Spalten und Zeilen streichen, bis man zu einer – in aller Regel kleineren – Matrix $\tilde{A} \in K^{m' \times n'}$ gelangt, deren Spalten- und Zeilenvektoren alle jeweils voneinander linear unabhängig sind, und die denselben Spalten- und Zeilenrang wie A hat. $\tilde{A}$ muss dann quadratisch sein, denn wäre etwa $n' > m'$, dann könnten die n' Spaltenvektoren von A als Elemente aus $K^{m'}$ nicht linear unabhängig sein.

Insgesamt ist damit $\text{rg}_s(A) = \text{rg}_s(\tilde{A}) = \text{rg}_z(\tilde{A}) = \text{rg}_z(A)$ gezeigt. $\blacklozenge$

Frage 187 Wann heißt eine Matrix $A \in M(n, K)$ **invertierbar**?

Antwort: Eine Matrix $A \in M(n, K)$ heißt *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in M(n, K)$ gibt, so dass

$$AB = BA = E_n$$

gilt. Dabei bezeichnet E_n die Einheitsmatrix aus $M(n, K)$.

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist beispielsweise invertierbar. Durch Ausprobieren findet man schnell

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 188 Wieso ist die inverse Matrix B zu einer invertierbaren Matrix A eindeutig bestimmt?

Antwort: Ist B' eine Matrix mit $AB' = B'A = E_n$, so folgt

$$B' = B'E_n = B'(AB) = (B'A)B = (AB')B = E_nB = B.$$

Man kann daher von *der* Inversen einer Matrix A sprechen. Man bezeichnet sie mit A^{-1} . $\blacklozenge$

Frage 189 Warum ist eine Matrix $A \in M(n, K)$ genau dann invertierbar, wenn die durch sie beschriebene lineare Abbildung $F_A: K^n \rightarrow K^n$ ein Isomorphismus ist?

Antwort: Ist F_A ein Isomorphismus, dann existiert eine Umkehrabbildung F_A^{-1} mit

$$F_A \circ F_A^{-1} = \text{id}.$$

Da die identische Abbildung des K^n durch die Einheitsmatrix E_n beschrieben wird, folgt daraus mit Frage 176

$$A \cdot B = E_n,$$

wobei B die zur Abbildung F_A^{-1} gehörende Matrix ist. Folglich ist A invertierbar, und die Inverse A^{-1} ist gerade die zur Umkehrabbildung von F_A^{-1} gehörende Matrix. $\blacklozenge$

Frage 190 Lässt sich die Invertierbarkeit einer Matrix $A \in M(n, K)$ auch durch den Rang von A charakterisieren?

Antwort: Aus den Antworten 185 und 189 folgt unmittelbar

$$A \in M(n, K) \text{ invertierbar} \iff \text{rg } A = n. \quad \blacklozenge$$

Frage 191 Wie ist die **allgemeine lineare Gruppe** (General Linear Group $\text{GL}(n, K)$) definiert? Können Sie begründen, weshalb $\text{GL}(n, K)$ bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe ist?

Antwort: $\text{GL}(n, K)$ ist die Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $M(n, K)$.

Sind A, B invertierbare Matrizen, so ist wegen $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ auch AB invertierbar und somit ein Element aus $\text{GL}(n, K)$. Das Assoziativgesetz überträgt sich vom Ring der Matrizen auf $\text{GL}(n, K)$. Mit E_n enthält $\text{GL}(n, K)$ ein neutrales Element, und für jede Matrix $A \in \text{GL}(n, K)$ existiert nach Definition ein inverses Element A^{-1} , und wegen $A = (A^{-1})^{-1}$ ist dieses auch invertierbar, also ein Element aus $\text{GL}(n, K)$. Damit sind alle Gruppenaxiome für die allgemeine lineare Gruppe nachgewiesen. $\blacklozenge$

Frage 192 Können Sie – auch im Hinblick auf spätere Kapitel – eine möglichst große Liste von Eigenschaften einer Matrix $A \in M(n, K)$ angeben, die zur Invertierbarkeit äquivalent sind?

Antwort: Zur Invertierbarkeit von A äquivalente Eigenschaften sind

- (a) Es gibt eine Matrix $B \in M(n, K)$ mit $AB = E_n$ („Rechtsinverses“).
- (b) Es gibt eine Matrix $B \in M(n, K)$ mit $BA = E_n$ („Linksinverses“).
- (c) Die Gauß-Jordan'sche Normalform ist die Einheitsmatrix.
- (d) $\text{rg } A = n$.

- (e) $\operatorname{rg}_z A = n$
- (f) $\operatorname{rg}_s A = n$
- (g) F_A ist ein Isomorphismus.
- (h) F_A ist bijektiv.
- (i) F_A ist surjektiv.
- (j) F_A ist injektiv.
- (k) Das homogene LGS $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung.
- (l) Das LGS $Ax = b$ ist universell lösbar.
- (m) A ist Basiswechselmatrix geeigneter Basen. ◆

Frage 193 Wieso gilt für $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$

$$\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)?$$

Antwort: Sei $F_A : K^n \rightarrow K^m$ bzw. $F_B : K^p \rightarrow K^n$ die von A bzw. B vermittelte lineare Abbildung. Wegen $\operatorname{im}(F_A \circ F_B) \subset \operatorname{im}(F_A)$ ist

$$\operatorname{rg}(AB) = \dim \operatorname{im}(F_A \circ F_B) \leq \dim \operatorname{im}(F_A) = \operatorname{rg} A.$$

Nach der Dimensionsformel gilt $\dim K^p = \dim \operatorname{im}(F_B) + \dim \ker(F_B)$ sowie $\dim K^p = \dim \operatorname{im}(F_A \circ F_B) + \dim \ker(F_B)$, also insgesamt

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(AB) &= \dim \operatorname{im}(F_A \circ F_B) \\ &= \dim \operatorname{im}(F_B) + \dim \ker(F_B) - \dim \ker(F_A \circ F_B) \\ &\leq \dim \operatorname{im}(F_B) = \operatorname{rg} B, \end{aligned}$$

weil $\ker(F_B) \subseteq \ker(F_A \circ F_B)$. ◆

Frage 194 Wann heißen zwei Matrizen $A, B \in K^{m \times n}$ **äquivalent**, in Zeichen $A \approx B$?

Antwort: A und B heißen *äquivalent*, wenn es Matrizen $P \in \operatorname{GL}(m, K)$ und $Q \in \operatorname{GL}(n, K)$ gibt, so dass $A = PBQ$ gilt. ◆

Frage 195 Können Sie zeigen, dass durch „ $\approx$ “ eine Äquivalenzrelation auf $K^{m \times n} \times K^{m \times n}$ definiert wird?

Antwort: Die Relation „ $\approx$ “ ist reflexiv, denn wegen $A = E_m A E_n$ gilt $A \approx A$, sie ist symmetrisch, denn aus $A \approx B$, also $A = PBQ$ folgt $B = P^{-1} A Q^{-1}$, also $B \approx A$. Die Relation ist ferner transitiv, denn wenn $A \approx B$ und $B \approx C$, also $A = PBQ$ und $B = SCT$, gilt, dann ist $A = P(SCT)Q = (PS)C(TQ)$, und damit $A \approx C$.

Die Relation „ $\approx$ “ ist also reflexiv, symmetrisch und transitiv und definiert damit eine Äquivalenzrelation auf $K^{m \times n}$. ◆

Frage 196 Können Sie den folgenden **Invarianzsatz** zeigen? Für $A \in K^{m \times n}$, $P \in \text{GL}(m, K)$, $Q \in \text{GL}(n, K)$ gilt

$$\text{rg}(PAQ) = \text{rg}(A).$$

Antwort: Durch die Rechtsmultiplikation mit Q werden die Spalten von A auf die Spalten von AQ abgebildet. Da Q einen Isomorphismus beschreibt, ändert sich die Anzahl linear unabhängiger Spalten dadurch nicht. Es ist also $\text{rg}_s(A) = \text{rg}_s(AQ)$ und damit $\text{rg } A = \text{rg } AQ$.

Mit demselben Argument zeigt man, dass PAQ genauso viele unabhängige Zeilen enthält wie AQ . Damit hat man $\text{rg}_z(PAQ) = \text{rg}_z(AQ)$ und $\text{rg}(PAQ) = \text{rg}(AQ)$.

Insgesamt folgt daraus $\text{rg}(A) = \text{rg}(PAQ)$. ◆

3.5 Koordinatenisomorphismen und Basiswechselformalismus

Hat man in einem Vektorraum V der Dimension $n < \infty$ eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ bestimmt, so lässt sich jeder Vektor $v \in V$ in der Form

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

schreiben, wobei die Koeffizienten $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eindeutig bestimmt sind. Der Vektor $v \in V$ kann daher hinsichtlich der gegebenen Basis eindeutig durch das n -Tupel $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ beschrieben, also mit einem Element aus K^n identifiziert werden.

Was hier im Wesentlichen dahintersteckt, ist ein Isomorphismus $V \longrightarrow K^n$, der es in jedem Fall ermöglicht, Strukturen eines endlich-dimensionalen Vektorraums durch Übertragung auf den K^n dort zu untersuchen und damit auch rechnerisch zugänglich zu machen.

In diesem Abschnitt werden alle Vektorräume als *endlich-dimensional* vorausgesetzt.

Frage 197 Sei V ein Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Was versteht man unter einem **Koordinatensystem** für V ?

Antwort: Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V , so existiert nach Frage 139 genau ein Isomorphismus

$$\kappa_{\mathcal{B}}: K^n \longrightarrow V,$$

welcher die Standardbasis des K^n auf $\mathcal{B}$ abbildet, für den also

$$\kappa_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

gilt. Den bei gegebener Basis $\mathcal{B}$ eindeutig bestimmten Isomorphismus $\kappa_{\mathcal{B}}$ nennt man das *Koordinatensystem von V bezüglich der Basis $\mathcal{B}$* . Für jeden nichttrivialen endlich-dimensionalen Vektorraum über einem unendlichen Körper existieren also unendlich viele Koordinatensysteme, nämlich zu jeder Basis genau eines. $\blacklozenge$

Frage 198 Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\kappa_{\mathcal{B}}: K^n \rightarrow V$ ein Koordinatensystem. Was versteht man unter einem **Koordinatenvektor** $\kappa_{\mathcal{B}}(v)$ eines Elements $v \in V$ bezüglich $\mathcal{B}$?

Antwort: Der Koordinatenvektor von v ist das Urbild von v unter dem Koordinatensystem $\kappa_{\mathcal{B}}$, also der Vektor

$$\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(v) \in K^n.$$

Für die Basisvektoren v_i gilt definitionsgemäß

$$\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) = e_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

Wird v durch die Linearkombination

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

dargestellt, so folgt also

$$\kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(v) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T.$$

Um den Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathcal{B}$ zu bezeichnen, benutzen wir in Zukunft auch die abkürzende Schreibweise $v_{\mathcal{B}}$. Es soll also definitionsgemäß $v_{\mathcal{B}} = \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ gelten. $\blacklozenge$

Frage 199 Wieso ist jeder Vektorraum V der Dimension $n < \infty$ isomorph zu K^n ?

Antwort: Die Koordinatenabbildung $\kappa_{\mathcal{B}}$ ist für jede beliebige Basis $\mathcal{B}$ ein Isomorphismus. Dies folgt unmittelbar aus dem Basisbildersatz (Frage 139). $\blacklozenge$

Frage 200 Seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ Basen von V bzw. W und $F: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wie ist die **beschreibende Matrix** $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ von F bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ definiert?

Antwort: Die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F)$ ist definiert als diejenige Matrix, deren Spalten die Koordinatenvektoren der Bilder $F(v_1), \dots, F(v_n)$ bezüglich der Basis $\mathcal{C}$ sind. Gilt also

$$\begin{aligned} F(v_1) &= \beta_{11}w_1 + \beta_{21}w_2 + \dots + \beta_{m1}w_m \\ &\vdots \\ F(v_n) &= \beta_{1n}w_1 + \beta_{2n}w_2 + \dots + \beta_{mn}w_m, \end{aligned}$$

so ist

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) := \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass der obere Index die Basis des Definitionsbereichs, der untere die Basis des Wertebereichs von F bezeichnet. Diese Schreibweise ermöglicht einen sehr suggestiven kalkülmäßigen Umgang mit beschreibenden Matrizen, der an der Kürzung von Brüchen angelehnt ist (vgl. Frage 209).

Frage 201 Sei $F: V \longrightarrow W$ linear. Können Sie

$$(F(v))_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \cdot v_{\mathcal{B}}$$

zeigen?

Antwort: Sei $v_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ der Koordinatenvektor von v . Dann gilt

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

und folglich, wenn wir die Bezeichnungen wie in der Antwort 200 wählen,

$$\begin{aligned} F(v) &= \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) \\ &= \alpha_1 (\beta_{11} w_1 + \cdots + \beta_{m1} w_m) + \cdots + \alpha_n (\beta_{1n} w_1 + \cdots + \beta_{mn} w_m) \\ &= (\alpha_1 \beta_{11} + \cdots + \alpha_n \beta_{1n}) w_1 + \cdots + (\alpha_1 \beta_{m1} + \cdots + \alpha_n \beta_{mn}) w_m. \end{aligned}$$

Es folgt

$$(F(v))_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_{11} + \cdots + \alpha_n \beta_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_1 \beta_{m1} + \cdots + \alpha_n \beta_{mn} \end{pmatrix},$$

und aus dieser Darstellung erkennt man die Gültigkeit der Formel.

Das zugehörige kommutative Diagramm ist

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{F} & W \\ \kappa_{\mathcal{B}}^{-1} \downarrow & & \uparrow \kappa_{\mathcal{C}} \\ K^n & \xrightarrow{A} & K^m \end{array} \quad \text{dabei ist } A := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F). \quad \blacklozenge$$

Frage 202 Können Sie den folgenden, sogenannten **Normalformensatz** zeigen? Sind V und W endlich-dimensional und $F: V \longrightarrow W$ linear, dann gibt es stets Basen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{C}$ von W , so dass gilt

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } r = \operatorname{rg} F.$$

Antwort: Sei $\mathcal{B}_0 = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Die Bilder $F(v_1), \dots, F(v_n)$ bilden ein Erzeugendensystem von $\text{im } F$, und wegen $\dim \text{im } F = \text{rg } F = r$ finden sich darunter genau r linear unabhängige, die man – nach eventueller Neuordnung – mit $F(v'_1), \dots, F(v'_r)$ bezeichnen kann. Nach der Dimensionsformel besitzt $\ker F$ die Dimension $n - r$, und daher gibt es eine Basis $(v'_{r+1}, \dots, v'_n)$ von $\ker F$. Dann ist $\mathcal{B} = (v'_1, \dots, v'_r, v'_{r+1}, \dots, v'_n)$ eine Basis von V , für die gilt

$$(F(v'_1), \dots, F(v'_r)) \text{ ist Basis von } \text{im } F \quad \text{und} \quad F(v'_{r+1}) = \dots = F(v'_n) = 0.$$

Man ergänze die Vektoren $F(v'_1), \dots, F(v'_r)$ nun zu einer Basis

$$\mathcal{C} = (F(v'_1), \dots, F(v'_r), w'_{r+1}, \dots, w'_m)$$

von W . Man hat dann

$$(F(v'_i))_{\mathcal{C}} = e_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq r \quad \text{und} \quad (F(v'_j))_{\mathcal{C}} = 0 \quad \text{für } r+1 \leq j \leq n$$

und folglich

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacklozenge$$

Frage 203 Seien $\dim V, W$ Vektorräume mit endlichen Dimensionen $\dim V = n$, $\dim W = m$. Mit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ seien zwei Basen von V bzw. W gegeben. Können Sie zeigen, dass dann die **Elementarabbildungen**

$$F_{ij}: V \longrightarrow W, \quad F_{ij}(v_k) = \delta_{jk} w_i$$

eine Basis von $\text{Hom}(V, W)$ bilden?

Antwort: Sei $G \in \text{Hom}(V, W)$. Für die Bilder der Basisvektoren gelte

$$G(v_k) = \alpha_{k1} w_1 + \dots + \alpha_{kn} w_n, \quad 1 \leq k \leq n$$

Für den Basisvektor v_k stimmt dann G mit der Abbildung

$$G_k := \alpha_{k1} F_{1k} + \dots + \alpha_{kn} F_{nk}$$

überein, es gilt also

$$G_k(v_j) = \begin{cases} G(v_j) & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt $G = G_1 + \dots + G_n$, da die Abbildungen auf beiden Seiten dieser Gleichung auf sämtlichen Basisvektoren und folglich überall übereinstimmen. Es ist also

$$G = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} F_{ji},$$

woraus folgt, dass die Funktionen F_{ij} ein Erzeugendensystem von $\text{Hom}(V, W)$ bilden. Es bleibt zu zeigen, dass sie linear unabhängig sind. Sei

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} F_{ji} = 0,$$

dann gilt insbesondere für $k = 1, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} F_{ji}(v_k) = 0, \quad \text{also} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \delta_{ik}(v_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} w_i = 0.$$

Daraus folgt $\alpha_{ij} = 0$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ und alle $j \in \{1, \dots, m\}$, also die lineare Unabhängigkeit der F_{ij} . $\blacklozenge$

Frage 204 Können Sie eine Basis von $K^{2 \times 2}$ angeben?

Antwort: Eine Basis ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dies sind gerade die beschreibenden Matrizen der vier Elementarabbildungen $F_{ij}: K^2 \rightarrow K^2$. $\blacklozenge$

Frage 205 Gegeben seien lineare Abbildungen $F: U \rightarrow V$ und $G: V \rightarrow W$ sowie Basen $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ von U , $\mathcal{C} = (v_1, \dots, v_m)$ von V und $\mathcal{D} = (w_1, \dots, w_p)$ von W . Sei

$$A := M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \in K^{m \times n} \quad \text{und} \quad B := M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{C}}(G) \in K^{p \times m}.$$

Wie kann man dann

$$C := M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(G \circ F) \in K^{p \times n}$$

aus A und B berechnen?

Antwort: Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{F} & V & \xrightarrow{G} & W \\ \downarrow \kappa_{\mathcal{B}}^{-1} & & \downarrow \kappa_{\mathcal{C}}^{-1} & & \downarrow \kappa_{\mathcal{D}}^{-1} \\ K^n & \xrightarrow{F_A} & K^m & \xrightarrow{F_B} & K^p \end{array}$$

ist kommutativ, da das linke und rechte Teildiagramm dies sind. Folglich gilt

$$C = M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}(\kappa_{\mathcal{D}} \circ (F_B \circ F_A) \circ \kappa_{\mathcal{B}}^{-1}).$$

und nach Definition von $M_{\mathcal{D}}^{\mathcal{B}}$ folgt daraus, dass C gerade die zur Abbildung $F_B \circ F_A$ gehörende Matrix ist, also $C = AB$ gilt. $\blacklozenge$

Frage 206 Sei $\dim V = n$ und $\mathcal{B}$ eine Basis von V . Können Sie zeigen, dass durch

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}: \text{Hom}(V, V) \longrightarrow M(n, K), \quad F \longmapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$$

ein Isomorphismus von K -Algebren definiert wird?

Antwort: Die Abbildung ist linear und injektiv, da eine lineare Abbildung F durch die Bilder der Basisvektoren, die als Spalten in $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ auftreten, eindeutig bestimmt ist. Sie ist ferner surjektiv, da durch jede Festlegung der Bilder der Basisvektoren eine lineare Abbildung definiert wird. $\blacklozenge$

Frage 207 Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit den Basen $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ bzw. $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$. In welcher Beziehung stehen die Koordinatenvektoren $v_{\mathcal{C}}$ und $v_{\mathcal{B}}$ ($v \in V$) zueinander? Wie erhält man die **Basiswechselmatrix** für den Übergang von den $\mathcal{B}$ -Koordinaten zu den $\mathcal{C}$ -Koordinaten?

Antwort: Sei $v_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ und $v_{\mathcal{C}} = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$, d. h., v besitze bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{C}$ die eindeutigen Darstellungen

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ v &= \alpha'_1 v'_1 + \dots + \alpha'_n v'_n. \end{aligned}$$

Für $1 \leq i \leq n$ sei ferner $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ der Koordinatenvektor von v_i bezüglich $\mathcal{C}$, d. h., es gilt

$$v_i = a_{i1} v'_1 + \dots + a_{in} v'_n, \quad \text{für } 1 \leq i \leq n.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} v &= \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ &= \alpha_1 (a_{11} v'_1 + \dots + a_{1n} v'_n) + \dots + \alpha_n (a_{n1} v'_1 + \dots + a_{nn} v'_n) \\ &= (a_{11} \alpha_1 + \dots + a_{n1} \alpha_n) v'_1 + \dots + (a_{1n} \alpha_1 + \dots + a_{nn} \alpha_n) v'_n. \end{aligned}$$

Für $i = 1, \dots, n$ gilt also

$$\alpha'_i = a_{1i} \alpha_1 + \dots + a_{ni} \alpha_n.$$

Ist $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ die Matrix, die die Koordinatenvektoren von $(v'_1, \dots, v'_n)$ als Spalten besitzt, also

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

so erhält man damit den Zusammenhang

$$v_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

Die Matrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ ($= M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\text{id})$) nennt man *Basiswechselmatrix*. $\blacklozenge$

Frage 208 Warum sind Basiswechselformalisten stets invertierbar?

Antwort: Da sowohl id , κ_B und κ_C in dem unten stehenden kommutativen Diagramm Isomorphismen sind, ist auch F_A ein Isomorphismus. Dessen Darstellungsmatrix ist die Basiswechselformalisten M_C^B , die somit invertierbar ist.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{id}} & V \\ \uparrow \kappa_B & & \uparrow \kappa_C \\ K^n & \xrightarrow{F_A} & K^n \end{array} \quad \text{mit } A = M_C^B.$$

Frage 209 Begründen Sie die folgenden Formeln (Basiswechselformalismus): Sind B, C, D Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums, so gilt

$$M_D^B = M_D^C \cdot M_C^B \quad \text{und} \quad M_B^C = (M_C^B)^{-1}.$$

Antwort: Nach Antwort 207 gilt

$$v_D = M_D^C v_C \quad \text{und} \quad v_C = M_C^B v_B.$$

Daraus folgt

$$v_D = M_D^C M_C^B v_B$$

und damit die erste Formel. Die zweite folgt aus

$$v_C = M_C^B v_B$$

durch Linksmultiplikation mit $(M_C^B)^{-1}$.

Frage 210 In $V = \mathbb{R}^2$ sei $\mathcal{S} = (e_1, e_2)$ die Standardbasis und $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = (3, 4)^T$ und $v_2 = (-1, 2)^T$ eine weitere Basis. Können Sie M_B^S und M_S^B bestimmen?

Können Sie ferner für

$$v = s_1 e_1 + s_2 e_2 = t_1 v_1 + t_2 v_2$$

die Koordinaten t_1 und t_2 durch s_1 und s_2 ausdrücken?

Antwort: M_B^S ist nach Antwort 207 die Matrix, die die Koordinatenvektoren von (v_1, v_2) bezüglich $\mathcal{S}$ als Spalten besitzt. Also ist

$$M_B^S = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

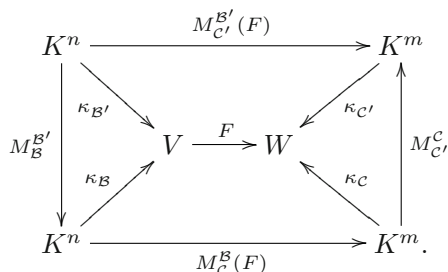
Wegen $e_1 = 0.2 \cdot v_1 - 0.4 \cdot v_2$ und $e_2 = 0.1 \cdot v_1 + 0.3 \cdot v_2$ gilt ferner

$$M_S^B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ -0.4 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Für die Koordinaten gilt

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = M_B^S \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Frage 211 Sei $F : V \longrightarrow W$ linear, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ seien Basen von V und $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ seien Basen von W . Können Sie erläutern, warum das Diagramm



kommutativ ist und warum für die beteiligten Matrizen

$$M_{C'}^{B'}(F) = M_{C'}^C \cdot M_C^B(F) \cdot P_B^{B'}$$

gilt?

Antwort: Die beiden trapezförmigen Teildigramme oben und unten sind nach den Antworten 199 bzw. 201 kommutativ, die beiden dreieckigen Teildigramme links und rechts nach Antwort 207. Daraus folgt die Kommutativität des gesamten Diagramms, und aus dieser ergibt sich auch unmittelbar die Formel. ♦

3.6 Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

Das Gauß'sche Eliminationsverfahren bietet eine praktikable Methode zur Bestimmung des Rangs einer Matrix sowie zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Das dahinter liegende Prinzip ist es, eine Matrix durch eine Reihe von *elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen*, die weder den Rang der Matrix noch die Lösungsmenge des Gleichungssystems verändern, auf sogenannte *Zeilenstufenform* zu transformieren, aus der sich die gesuchten Informationen unmittelbar „ablesen“ lassen.

Frage 212 Was versteht man unter der **Zeilenstufenform einer Matrix** $A \in K^{m \times n}$? Wie lässt sich der Rang einer Matrix in Zeilenstufenform unmittelbar ablesen?

Antwort: Eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist in *Zeilenstufenform*, wenn A die folgende Gestalt hat:

$$A = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 \cdots 0 & a_1 \cdots * & * \cdots * & \cdots & * \cdots * & * \cdots * & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & a_2 \cdots * & \cdots & * \cdots * & * \cdots * & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & * \cdots * & * \cdots * & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 \cdots 0 & a_r \cdots * & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\ 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & & & & \end{array} \right).$$

Aus dieser Zeilenstufenform folgt $\text{rg}(A) = r$, da die ersten r Zeilen von A linear unabhängig sind. $\blacklozenge$

Frage 213 Welche Arten von Umformungen einer Matrix bezeichnet man als **elementare Zeilenumformungen**?

Antwort: Es gibt drei Typen elementarer Zeilenumformungen.

Typ I: Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\alpha \in K$

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ a_i \\ \cdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cdots \\ \alpha a_i \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Typ II: Addition des α -fachen der j -ten Zeile zur i -ten Zeile

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ a_i \\ \cdots \\ a_j \\ \cdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cdots \\ a_i + \alpha a_j \\ \cdots \\ a_j \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Typ III: Vertauschung zweier Zeilen

$$\begin{pmatrix} \cdots \\ a_i \\ \cdots \\ a_j \\ \cdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cdots \\ a_j \\ \cdots \\ a_i \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Analog definiert man elementare *Spaltenumformungen*, indem man in allen drei Definitionen das Wort „Zeile“ durch „Spalte“ ersetzt. $\blacklozenge$

Frage 214 Wieso ändert sich der Rang einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen nicht?

Antwort: Es ist

$$\text{span}(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = \begin{cases} \text{span}(a_1, \dots, \alpha a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ \text{span}(a_1, \dots, a_i + \alpha a_j, \dots, a_j, \dots, a_n) \\ \text{span}(a_1, \dots, \alpha a_j, \dots, a_i, \dots, a_n). \end{cases}$$

Damit ändert sich die Dimension des von den Zeilenvektoren von A aufgespannten Untervektorraums – also $\text{rg } A$ – durch elementare Zeilenumformungen nicht. Somit gilt

Erhält man $B \in K^{m \times n}$ aus $A \in K^{m \times n}$ durch eine Reihe elementarer Zeilenumformungen, so gilt stets $\text{rg } A = \text{rg } B$. ♦

Frage 215 Was besagt der Satz über das **Gauß'sche Eliminationsverfahren**?

Antwort: Der Satz besagt:

Jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ lässt sich durch eine Serie elementarer Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen.

Beweis: Ist A nicht die Nullmatrix, dann gibt es einen kleinsten Spaltenindex j_1 , so dass $a_{i_1 j_1} \neq 0$ für ein $i_1 \in \{1, \dots, m\}$ gilt. Man vertausche die i_1 -te Zeile mit der ersten (Umformung vom Typ I). Dies führt auf eine Matrix der Gestalt

$$A' = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a'_{11} & \cdots & a'_{1r} \\ 0 \cdots 0 & a'_{21} & \cdots & a'_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & a'_{m1} & \cdots & a'_{mr} \end{pmatrix}$$

mit $a'_{11} = a_{i_1 j_1} \neq 0$. Zu denjenigen Zeilen aus A' mit dem Zeilenindex k ($k \neq 1$), in denen die unter a'_{11} stehende Komponente ungleich null ist, addiere man nun das $-\frac{a'_{k1}}{a'_{11}}$ -fache der ersten Zeile (elementare Zeilenumformung vom Typ II). Dies führt auf eine Matrix der Gestalt

$$A'' = \left(\begin{array}{cc|c} 0 \cdots 0 & a'_{11} & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & A^{(1)} \end{array} \right)$$

Dasselbe Verfahren lässt sich nun auf die kleinere Matrix $A^{(1)}$ anwenden, wobei deren elementare Zeilenumformungen als solche von A'' zu interpretieren sind. Rekursiv gewinnt man auf diese Weise die gewünschte Zeilenstufenform. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab, und zwar genau dann, wenn nach m Schritten $A^{(m)}$ entweder die leere Matrix oder die Nullmatrix ist. ♦

Frage 216 Wie lautet die Zeilenstufenform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}?$$

Antwort: Das Gauß'sche Verfahren liefert

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◆

Frage 217 Welche Gestalt besitzt die Zeilenstufenform einer Matrix?

- (i) $A \in K^{m \times n}$ mit $\text{rg } A = n$ ($m \geq n$),
- (ii) $A \in K^{m \times n}$ mit $\text{rg } A = m$ ($n \geq m$),
- (iii) $A \in \text{GL}(n, K)$?

Antwort: Die Zeilenstufenformen der Matrizen sehen folgendermaßen aus:

$$(i) \begin{pmatrix} * & & & * \\ \text{---} & * & & \\ & \dots & & \\ & & * & \\ & & \text{---} & * \\ & 0 & & \text{---} & * \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} * & & & * \\ \text{---} & * & & \\ & \dots & & \\ & & * & \\ & & \text{---} & * \\ & 0 & & \text{---} & * \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} * & & & * \\ \text{---} & * & & \\ & \dots & & \\ & & * & \\ & & \text{---} & * \\ & 0 & & \text{---} & * \end{pmatrix} \quad \blacklozenge$$

Frage 218 Welche Typen von **Elementarmatrizen** sind Ihnen bekannt? Wie kann man sie definieren, warum sind sie invertierbar?

Antwort: Es gibt im Wesentlichen drei Arten von Elementarmatrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \dots & \alpha \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Typ I: ($\alpha \neq 0$): Diese Elementarmatrizen unterscheiden sich von der Einheitsmatrix nur im Diagonalelement a_{kk} . Linksmultiplikation (Rechtsmultiplikation) mit einer solchen Matrix bewirkt eine Multiplikation der k -ten Zeile (Spalte) mit α .

Typ II: Diese Elementarmatrizen unterscheiden sich von der Einheitsmatrix nur im Koeffizienten a_{kl} mit $k \neq l$. Linksmultiplikation (Rechtsmultiplikation) mit einer Matrix dieses Typs bewirkt eine Addition des α -fachen der l -ten Zeile zur k -ten Zeile (der k -ten Spalte zur l -ten Spalte).

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Typ III: Diese Elementarmatrizen unterscheiden sich von der Einheitsmatrix in den vier Koeffizienten a_{kk} , a_{ll} , a_{kl} , a_{lk} . Linksmultiplikation (Rechtsmultiplikation) mit einer Matrix dieses Typs bewirkt eine Vertauschung der l -ten und k -ten Zeile (Spalte).

Elementarmatrizen sind invertierbar, weil sie Zeilen- bzw. Spaltenumformungen beschreiben, die umkehrbar sind.

Bemerkung: Linksmultiplikation bewirkt immer eine Zeilenumformung, Rechtsmultiplikation eine Spaltenumformung. Jede Elementarmatrix bewirkt die Umformung, durch die sie aus der Einheitsmatrix entstanden ist. $\blacklozenge$

Frage 219 Begründen Sie: Die Matrix $B \in K^{m \times n}$ entstehe aus der Matrix $A \in K^{m \times n}$, indem man auf A eine endliche Abfolge elementarer Zeilenumformungen anwendet. Wendet man diese Zeilenumformungen in derselben Weise auf die Einheitsmatrix E_m an, so erhält man eine Matrix $P \in GL(m, K)$ mit $PA = B$.

Antwort: Gilt $\Lambda_r \cdots \Lambda_1 \cdot A = B$ mit Elementarmatrizen $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r \in K^{m \times m}$, so folgt wegen $E_m A = A$

$$PA = (\Lambda_r \cdots \Lambda_1 \cdot E_m)A = \Lambda_r \cdots \Lambda_1 \cdot A = B.$$

Da Elementarmatrizen genauso wie die Einheitsmatrix stets invertierbar sind, ist P ein Produkt invertierbarer Matrizen, und damit gilt $P \in GL(n, K)$. $\blacklozenge$

Frage 220 Wie lässt sich mit dem Zusammenhang aus Frage 219 eine Methode zur Inversenbestimmung einer Matrix $A \in GL(n, K)$ formulieren?

Antwort: Die Matrix A lässt sich durch eine Reihe elementarer Zeilenumformungen auf die Einheitsmatrix E_n transformieren. Es gibt also Elementarmatrizen $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r \in K^{n \times n}$, so dass gilt

$$E_n = \Lambda_r \cdots \Lambda_1 A = (\Lambda_r \cdots \Lambda_1 E_n)A.$$

Daraus folgt

$$\Lambda_r \cdots \Lambda_1 E_n = A^{-1}.$$

Man erhält damit die Regel

Erhält man E_n aus einer Reihe elementarer Zeilenumformungen aus A , so verwandeln dieselben Zeilenumformungen die Matrix E_n in A^{-1} . $\blacklozenge$

Frage 221 Erläutern Sie den Algorithmus zur Inversenbestimmung an der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Antwort: Um die Methode aus Antwort 220 praktisch anzuwenden, schreibe man die Matrizen A und E_3 nebeneinander

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und transformiere A mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix. In jedem Schritt wird dieselbe Zeilenumformung auf die rechts stehende Matrix angewendet. Steht dann nach endlich vielen Schritten auf der linken Seite die Einheitsmatrix E_3 , so steht rechts die zu A inverse Matrix A^{-1} . Dies liefert also

$$\begin{aligned} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 7 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$



3.7 Lineare Gleichungssysteme Teil 1

Die Theorie linearer Gleichungssysteme steht in engem Zusammenhang mit der linearen Abbildungen. Wie lineare Abbildungen $K^n \longrightarrow K^m$ durch eine Matrix aus $K^{m \times n}$ eindeutig bestimmt sind, lassen sich auch Gleichungssysteme mit m Gleichungen in n Unbekannten in der Form $A \cdot x = b$ schreiben, bei der A eine $m \times n$ -Matrix ist und b ein Vektor aus K^m . Das Problem, die Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = b$ zu bestimmen, ist damit in geometrischer Hinsicht äquivalent zu der Aufgabe, die „Niveaumenge“ der durch $x \mapsto A \cdot x$ definierten linearen Abbildung $F_A: K^n \longrightarrow K^m$ zum Wert b zu ermitteln.

Frage 222 Was versteht man unter einem **linearen Gleichungssystem** (LGS) mit Koeffizienten in K ? Wann heißt ein Gleichungssystem **homogen**, wann **inhomogen**?

Antwort: Unter einem *Gleichungssystem* in K mit m Gleichungen und n Unbekannten versteht man ein System von Gleichungen der Art

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \cdots & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_n. \end{array} \quad (*)$$

Die Koeffizienten a_{ij} und die b_i sind hier Elemente des Grundkörpers K . Das Gleichungssystem heißt *homogen*, falls $b_i = 0$ für $i = 1, \dots, m$ gilt, andernfalls *inhomogen*. Eine *Lösung* des Gleichungssystems ist ein n -Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit Elementen aus K , für welche alle m Gleichungen zutreffen.

Mit der $m \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$, dem Vektor $b = (b_1, \dots, b_m) \in K^m$ und dem „unbekannten“ Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in K^n$ lässt sich $(*)$ auch schreiben in der Form

$$A \cdot x = b.$$

Daher ist das Problem, sämtliche Lösungen von $(*)$ zu finden, äquivalent zu dem Problem, alle Vektoren $x \in K^n$ zu bestimmen, welche die Gleichung $A \cdot x = b$ erfüllen. ♦

Frage 223 Was versteht man unter dem **Lösungsraum** $L(A, b)$ eines linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$? Wie erhält man aus der Definition sofort eine einfache Charakterisierung des Lösungsraums?

Antwort: Der Lösungsraum ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = b$, also

$$L(A, b) = \{x \in K^n ; A \cdot x = b\}.$$

Für die lineare Abbildung $F: K^n \longrightarrow K^m$, $x \longmapsto A \cdot x$ gilt

$$L(A, b) = F^{-1}(b).$$

Nach Frage 157 handelt es sich bei $L(A, b)$ also um einen affinen Unterraum von K^n . $\blacklozenge$

Frage 224 Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Welche Struktur besitzt der Lösungsraum $L(A, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$? Was ist die Dimension von $L(A, 0)$?

Antwort: Es gilt:

Der Lösungsraum $L(A, 0)$ des homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ ist ein linearer Unterraum von K^n der Dimension $n - \operatorname{rg} A$.

Beweis: Wegen $A \cdot 0 = 0$ ist $0 \in L(A, 0)$. Ferner gilt mit $x, y \in L(A, 0)$ und $\alpha, \beta \in K$

$$A \cdot (\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot A \cdot x + \beta \cdot A \cdot y = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

also $\alpha x + \beta y \in L(A, 0)$. Der Lösungsraum ist damit ein linearer Unterraum von K^n .

Für die lineare Abbildung $F: K^n \longrightarrow K^m$, $x \longmapsto A \cdot x$ gilt $L(A, 0) = \ker F$. Mit der Dimensionsformel folgt daher $\dim \ker F = \dim K^n - \operatorname{rg} F$, also $\dim L(A, 0) = n - \operatorname{rg} A$. $\blacklozenge$

Frage 225 Sei das LGS $A \cdot x = b$ mit $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ lösbar und es sei $\operatorname{rg} A = n$. Warum besteht die Lösungsmenge dann nur aus einem Element?

Antwort: Sei F_A die durch A gegebene Abbildung. Aus der Dimensionsformel folgt

$$\dim \ker F_A = \dim V - \operatorname{rg} F_A = n - \operatorname{rg} A = 0,$$

also $\ker F_A = \{0\}$. Damit ist F_A injektiv, und es gibt höchstens ein $x \in V$ mit $F_A(x) = A \cdot x = b$. Zusammen mit der Voraussetzung, dass das LGS lösbar ist, folgt daraus, dass es genau eine Lösung gibt. $\blacklozenge$

Frage 226 Können Sie ein Verfahren schildern, mit dem sich der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ effektiv berechnen lässt?

Antwort: Eine sinnvolle Methode zur Berechnung des Lösungsraums liefert das Gauß'sche Eliminationsverfahren, mit dessen Hilfe sich eine Basis von $L(A, 0)$ konstruieren lässt. Grundlage für die Anwendbarkeit des Verfahrens ist die Tatsache, dass sich der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ nicht ändert, wenn man an A elementare Zeilenumformungen durchführt. Nach Frage 218 entsprechen elementare Zeilenumformungen an A der Linksmultiplikation von A mit einer Matrix $S \in \operatorname{GL}(m, K)$. Nun gilt

$$(S \cdot A) \cdot x = 0 \Leftrightarrow A \cdot x = 0,$$

was man durch Multiplikation mit S bzw. S^{-1} der Gleichung auf der entsprechenden Seite dieser Äquivalenz unmittelbar erkennt.

Man kann also zur Lösung des Gleichungssystems $A \cdot x = 0$ die Matrix A mittels des Gauß'schen Verfahrens auf eine Matrix A' in Zeilenstufenform transformieren und das Gleichungssystem $A' \cdot x = 0$ lösen. Da der Lösungsraum invariant gegenüber elementaren Zeilenumformungen ist, gilt $L(A, 0) = L(A', 0)$. Dieses Vorgehen besitzt den Vorteil, dass sich die Struktur des Lösungsraumes an A' bereits unmittelbar „ablesen“ lässt, wie wir im Folgenden darlegen wollen.

Um die dazugehörige Überlegungen zu vereinfachen, wollen wir annehmen, dass A' die spezielle Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & a_{1n} \\ & a_{22} & & & a_{2n} \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & a_{rr} & a_{rn} \\ & 0 & & 0 & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \\ & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt, bei der also die besetzten Zeilen jeweils mit einem Eintrag auf der Hauptdiagonalen beginnen. Diese Form lässt sich immer durch Vertauschen der Spalten realisieren, was im Hinblick auf das Gleichungssystem einer Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ entspricht. Die Voraussetzung an die Zeilenstufenform von A' bedeutet daher keine wirkliche Einschränkung, macht die allgemeine Darstellung aber wesentlich übersichtlicher. Durch weitere Zeilenumformungen kann man A' weiter auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ & 1 & 0 & 0 & a_{1,r+1} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & & & & \\ & & & \dots & & & \\ & & & & 1 & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ & 0 & & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & & \dots & \dots & \\ & & & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

bringen. Die i -te Gleichung des zu lösenden linearen Gleichungssystems lautet damit

$$x_i + \sum_{j=r+1}^n a_{ij} x_j = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Also gilt

$$x_i = - \sum_{j=r+1}^n a_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, r.$$

Mit dieser Darstellung lassen sich beliebige Lösungen nun unmittelbar angeben, da die Werte für die Unbekannten $x_{r+1}, \dots, x_n$ nicht durch interne Abhängigkeiten zwischen den Gleichungen festgelegt sind, mit anderen Worten frei gewählt werden können. Für jede Wahl der Werte $x_{r+1}, \dots, x_n$ ist also der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} - \sum_{j=r+1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ - \sum_{j=r+1}^n a_{rj} x_j \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

eine Lösung des Gleichungssystems $A' \cdot x = b$. Umgekehrt besitzt jede Lösung dieses Gleichungssystems die Form (*). Insbesondere erkennt man an dieser Darstellung noch einmal $\dim L(A', 0) = n - r$, und durch die Wahl einer Basis von K^{n-r} ist eine Basis von $L(A', 0)$ festgelegt. Bezüglich der Einheitsbasis etwa erhält man

$$\begin{pmatrix} -a_{1,r+1} \\ \vdots \\ -a_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a_{1,r+2} \\ \vdots \\ -a_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -a_{1,n} \\ \vdots \\ -a_{r,n} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Basis von $L(A', 0)$. Durch eine entsprechende Anordnung der Zeilen, die die Umnummerierung der Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ rückgängig macht, erhält man daraus eine Basis von $L(A, 0)$. ◆

Frage 227 Sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Mit $(A|b)$ sei diejenige Matrix aus $K^{m \times (n+1)}$ bezeichnet, die man aus A durch Hinzufügen der Spalte b erhält. Es gilt dann

$$A \cdot x = b \text{ lösbar} \iff \operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg} A.$$

Können Sie diesen Zusammenhang zeigen?

Antwort: Sei $A \cdot x = b$ lösbar. Da der Rang von A durch Hinzufügen einer Spalte natürlich nicht kleiner werden kann, gilt stets $\text{rg}(A|b) \geq \text{rg } A$. Angenommen, es gilt $\text{rg}(A|b) > \text{rg } A$. Dann gilt $b \notin \text{span}(a_1, \dots, a_n)$, wobei $a_1, \dots, a_n$ die Spaltenvektoren aus A bezeichnen. In diesem Fall kann aber $A \cdot x = b$ nicht lösbar sein, da für eine Lösung $x = (x_1, \dots, x_n)$ gelten muss

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b,$$

also $b \in \text{span}(a_1, \dots, a_n)$. Aus diesem Widerspruch folgt $\text{rg}(A|b) = \text{rg } A$.

Gilt umgekehrt $\text{rg}(A|b) = \text{rg } A$, dann folgt $b \in \text{span}(a_1, \dots, a_n)$, also existiert eine Linearkombination

$$x_1a_1 + \dots + x_na_n = b.$$

Dies ist genau die Gleichung $A \cdot x = b$. Der Vektor $(x_1, \dots, x_n)^T$ ist in diesem Fall eine Lösung von $A \cdot x = b$. ◆

Frage 228 Können Sie zeigen, dass für $A \in K^{m \times n}$ das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann für jedes $b \in K^m$ lösbar ist, wenn $\text{rg } A = m$ gilt?

Antwort: Gilt $\text{rg } A = m$, dann bilden die Spalten von A bereits ein Erzeugendensystem von K^m , und durch Hinzufügen eines Spaltenvektors $b \in K^m$ lässt sich $\text{rg } A$ nicht mehr vergrößern. Es gilt also $\text{rg } A = \text{rg}(A|b)$ für jedes $b \in K^m$, und damit ist $Ax = b$ nach Frage 227 lösbar.

Ist umgekehrt $Ax = b$ für jedes $b \in K^m$ lösbar, so gilt $\text{rg } A = \text{rg}(A|b)$ für jedes $b \in K^m$. Das bedeutet, dass die Spaltenvektoren von A bereits ein Erzeugendensystem von K^m bilden und daher $\text{rg } A = m$ gelten muss. ◆

Frage 229 Können Sie zeigen, dass für $A \in M(n, K)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind?

- (i) Das homogene LGS $A \cdot x = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.
- (ii) Für jedes $b \in K^n$ hat das LGS $A \cdot x = b$ mindestens eine Lösung.
- (iii) Für jedes $b \in K^n$ hat das LGS $A \cdot x = b$ genau eine Lösung.
- (iv) $\text{rg } A = n$.

Antwort: (i) $\implies$ (iv): Sei F_A die zu A assoziierte Abbildung. Hat das LGS $A \cdot x = 0$ nur die triviale Lösung, dann ist $\ker F_A = \{0\}$, und aus der Dimensionsformel folgt $\text{rg } A = \text{rg } F_A = \dim K^n = n$.

(iv) $\implies$ (ii): Aus $\text{rg } A = n$ folgt $\text{rg } A = \text{rg}(A|b)$ für jeden Vektor $b \in K^n$, und damit ist das LGS $A \cdot x = b$ lösbar für jeden Vektor $b \in K^n$.

(ii) $\implies$ (iii): Die Gleichung $A \cdot x = b$ besagt, dass sich der Vektor b als Linearkombination der Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ von A schreiben lässt:

$$x_1a_1 + \dots + x_na_n = b.$$

Diese Darstellung ist eindeutig, sofern die Spalten von A linear unabhängig sind. Gäbe es daher für ein $b \in K^n$ mehrere Lösungen des Gleichungssystems $A \cdot x = b$, so wären die Spalten von A linear abhängig und folglich kein Erzeugendensystem von K^n . Damit gäbe es einen von den Spalten von A linear unabhängigen Vektor $b' \in K^n$, und für diesen besäße das LGS $A \cdot x = b'$ keine Lösung.

(iii) $\implies$ (i): Man setze $b = 0$. ◆

Frage 230 Wie erhält man sämtliche Lösungen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$?

Antwort: Es gilt:

Ist x_{inh} eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems $A \cdot x = b$, so besitzt jede weitere Lösung x_0 die Form $x_0 = x_{inh} + x_{hom}$, wobei x_{hom} eine Lösung des homogenen Systems $A \cdot x = 0$ ist. Es gilt also $L(A, b) = x_{inh} + L(A, 0)$.

Beweis: Für einen beliebigen Vektor $x_{hom} \in L(A, 0)$ gilt

$$A \cdot x_0 = A \cdot (x_{inh} + x_{hom}) = A \cdot x_{inh} + A \cdot x_{hom} = b + 0 = b.$$

Es folgt $x_{inh} + L(A, 0) \subset L(A, b)$. Umgekehrt gilt für $x_0 \in L(A, b)$

$$A \cdot (x_0 - x_{inh}) = A \cdot x_0 - A \cdot x_{inh} = b - b = 0,$$

also $x_0 - x_{inh} \in L(A, 0)$ bzw. $x_0 \in x_{inh} + L(A, 0)$. Das zeigt die andere Inklusion. ◆

3.8 Der Dualraum

Ist F eine lineare Abbildung $K^n \longrightarrow K$, dann gilt für jeden Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$

$$F(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

mit bestimmten $\alpha_i \in K$. Der Vektor $v := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ gibt also Anlass zu einer linearen Abbildung $K^n \longrightarrow K$. Umgekehrt lässt sich jede lineare Abbildung $K^n \longrightarrow K$ durch genau einen Vektor $v \in K^n$ beschreiben. Unter Berücksichtigung der für endlich-dimensionale Vektorräume V gültigen Isomorphie $V \simeq K^n$ erkennt man, dass die Struktur jedes endlich-dimensionalen Vektorraums V sich in derjenigen des Raums der linearen Abbildungen $V \longrightarrow K$ in isomorpher Weise widerspiegelt, was eine Untersuchung des *Dualraums* $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$ motiviert.

Eine Theorie dualer Räume lässt sich auch für unendlich-dimensionale Vektorräume entwickeln, allerdings lassen sich die meisten der hier behandelten Sätze nicht ohne Weiteres auf den unendlich-dimensionalen Fall übertragen.

Frage 231 Was versteht man unter einer **Linearform** auf einem K -Vektorraum V , was unter dem zu V **dualen Vektorraum** V^* ?

Antwort: Eine *Linearform* ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow K$. Beispielsweise ist durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ eine Linearform auf K^n gegeben. Spezielles Interesse in der Analysis haben die Abbildungen

$$f \mapsto \int_a^b f(x) dx \quad \text{und} \quad f \mapsto \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}.$$

Diese sind ebenfalls Linearformen auf den entsprechenden Räumen der integrierbaren bzw. differenzierbaren Funktionen.

Der zu V **duale Vektorraum** V^* ist die Menge aller Linearformen auf V , also $V^* = \text{Hom}_K(V, K)$. ◆

Frage 232 Sei V endlich-dimensional, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Wie erhält man daraus die zu $\mathcal{B}$ **duale Basis** $\mathcal{B}^*$ von V^* ?

Antwort: Setzt man

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so ist $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ eine Basis von V^* .

Beweis: $\mathcal{B}^*$ ist ein Erzeugendensystem für V^* . Ist nämlich ξ eine Linearform auf V , die auf den Basisvektoren die Werte $\xi(v_i) = \alpha_i \in K$ annimmt, dann gilt $\xi = \sum \alpha_i v_i^*$.

Die Vektoren in $\mathcal{B}^*$ sind ferner linear unabhängig. Aus der Gleichung $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i^* = 0$ folgt nämlich, indem man v_j einsetzt, $\alpha_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. ◆

Frage 233 Wieso sind die Räume V und V^* isomorph?

Antwort: Bei gegebener Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V ist die durch

$$\Psi_{\mathcal{B}}(v_i) = v_i^*$$

gegebene lineare Abbildung nach Frage 232 ein Isomorphismus $V \rightarrow V^*$. ◆

Frage 234 Warum lässt sich das Verfahren aus Frage 232 zur Konstruktion einer dualen Basis nicht auch auf unendlich-dimensionale Vektorräume verallgemeinern?

Antwort: Ist $(v_1, v_2, \dots)$ ein unendliches Erzeugendensystem, dann enthält die Menge

$$\text{span}(v_1^*, v_2^*, \dots) = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i v_i^* ; \alpha_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}$$

nur diejenigen Linearformen ξ , für die $\xi(v_i) = 0$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Andererseits lässt sich auch für einen unendlich-dimensionalen Vektorraum eine Linearform $V \rightarrow K$ konstruieren, indem man die Bilder der Basisvektoren beliebig vorgibt. Insbesondere existieren Linearformen $V \rightarrow K$, die auf unendlich vielen Basisvektoren Werte $\neq 0$ annehmen. Daraus folgt $\text{span}(v_1^*, v_2^*, \dots) \neq V^*$, die Linearformen $v_1^*, v_2^*, \dots$ bilden also kein Erzeugendensystem für V^* . ♦

Frage 235 Man betrachte die Basis (v_1, v_2) des $\mathbb{R}^2$ mit $v_1 = e_1 = (1, 0)^T$ und $v_2 = (1, 1)^T$. Wie lautet die dazu duale Basis (v_1^*, v_2^*) von $\mathbb{R}^{2*}$?

Antwort: Die Gleichungen $v_1^*(v_1) = v_2^*(v_2) = 1$, $v_1^*(v_2) = v_2^*(v_1) = 0$ liefern $v_1^* = (1, -1)$ und $v_2^* = (0, 1)$.

Frage 236 Sei $U \subset V$ Untervektorraum eines K -Vektorraums V . Wie ist der *Annulator* U^0 von U definiert?

Antwort: Unter dem *Annulator* versteht man die Menge

$$U^0 = \{\xi \in V^* ; \xi(u) = 0 \text{ für alle } u \in U\}. \quad \blacklozenge$$

Frage 237 Wieso gilt

$$\dim U^0 = \dim V - \dim U,$$

falls V endlich-dimensional ist?

Antwort: Man betrachte eine Basis $(u_1, \dots, u_\ell)$ von U und ergänze diese zu einer Basis $(u_1, \dots, u_\ell, v_1, \dots, v_r)$ von V . Es genügt dann zu zeigen, dass $(v_1^*, \dots, v_r^*)$ eine Basis von U^0 ist. Die lineare Unabhängigkeit ist klar, da $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig sind. Es bleibt also

$$U^0 = \text{span}(v_1^*, \dots, v_r^*)$$

zu zeigen, wobei die Inklusion „ $\supset$ “ wiederum trivial ist, da nach Konstruktion der dualen Basis $v_i^*(u_j) = 0$ für alle $i = 1, \dots, r$ und alle $j = 1, \dots, \ell$ gilt. Um „ $\subset$ “ zu zeigen, sei $\xi \in U^0$ und

$$\xi = \alpha_1 u_1^* + \dots + \alpha_\ell u_\ell^* + \beta_1 v_1^* + \dots + \beta_r v_r^*.$$

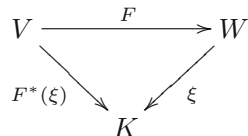
Einsetzen von u_i liefert dann $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \dots, \ell$, also $\xi \in \text{span}(v_1^*, \dots, v_r^*)$. ♦

Frage 238 Was versteht man unter der zu einer linearen Abbildung $F: V \longrightarrow W$ zwischen K -Vektorräumen V und W **dualen Abbildung** F^* ? Wieso ist F^* linear?

Antwort: Die zu $F: V \longrightarrow W$ *duale Abbildung* ist definiert durch

$$F^*: W^* \longrightarrow V^*, \quad \xi \longmapsto \xi \circ F.$$

Für jede auf W definierte Linearform ξ ist damit $F^*(\xi)$ eine Linearform auf V . Die Wirkung der dualen Abbildung besteht also darin, auf W definierte Linearformen auf V „zurückzuholen“. Das wird in dem nebenstehenden Diagramm beschrieben.



Seien $\xi, \chi \in V^*$ und $\alpha \in K$. Die Linearität von F^* folgt aus

$$\begin{aligned} F^*(\xi + \chi) &= (\xi + \chi) \circ F = \xi \circ F + \chi \circ F = F^*(\xi) + F^*(\chi) \\ F^*(\alpha\xi) &= (\alpha\xi) \circ F = \alpha(\xi \circ F) = \alpha F^*(\xi). \end{aligned}$$

◆

Frage 239 Wieso gilt $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ für zwei K -lineare Abbildungen $F, G \in \text{Hom}_K(V, W)$?

Antwort: Für jede Linearform $\xi \in W^*$ hat man

$$(F \circ G)^*(\xi) = \xi \circ (F \circ G) = (\xi \circ F) \circ G = (F^*(\xi)) \circ G = G^*(F^*(\xi)) = (G^* \circ F^*)(\xi).$$

Daraus folgt $(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$ wie gewünscht.

◆

Frage 240 Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ und $F: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Können Sie beweisen, dass für die Darstellungsmatrizen der folgende Zusammenhang gilt:

$$M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(F^*) = \left(M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) \right)^T,$$

mit anderen Worten, dass die duale Matrix bezüglich der dualen Basen durch die transponierte Matrix beschrieben wird?

Antwort: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$. Mit $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(F) = (a_{ij})$ gilt $F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$, und durch Anwendung von w_i^* auf beide Seiten der Gleichung erhält man

$$w_i^*(F(v_j)) = a_{ij}, \quad \text{also} \quad F^*(w_i^*)(v_j) = a_{ij}. \quad (*)$$

Umgekehrt: Ist $M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(F^*) = (b_{ji})$, so hat man $F^*(w_i^*) = \sum_{j=1}^n b_{ji} v_j^*$, und Einsetzen von v_j liefert

$$F^*(w_i^*)(v_j) = b_{ji},$$

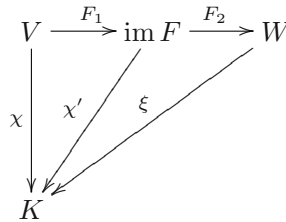
Zusammen mit $(*)$ folgt $b_{ji} = a_{ij}$, also die Behauptung.

◆

Frage 241 Können Sie zeigen:

- (i) Ist F injektiv, so ist F^* surjektiv.
- (ii) Ist F surjektiv, so ist F^* injektiv.

Antwort: (i) Sei F injektiv. Es gilt zu zeigen, dass zu jeder Linearform $\chi \in V^*$ eine Linearform $\xi \in W^*$ mit $F^*(\xi) = \xi \circ F = \chi$ existiert. Dazu zerlegen wir F in die beiden Abbildungen $F_1: V \rightarrow \text{im } F$ und $F_2: \text{im } F \hookrightarrow W$. Wegen der Injektivität von F ist F_1 bijektiv, und daher kann man durch $\chi' := \chi \circ F_1^{-1}$ eine Linearform $\chi': \text{im } F \rightarrow K$ definieren, für die $\chi = \chi' \circ F_1$ gilt. Um χ' auf ganz W fortzusetzen, wähle man ein Komplement U zu $\text{im } F$ in W , so dass also $W = \text{im } F \oplus U$ gilt, und für $w + u \in \text{im } F \oplus U$ definiere man die Linearform $\xi: W \rightarrow K$ durch $\xi(w + u) = \chi'(w)$. Für jedes $v \in V$ gilt dann $\xi(F(v)) = \chi'(F(v)) = \chi'(F_1(v)) = \chi(v)$, also $\xi \circ F = \chi$ wie gewünscht.



- (ii) Sei $F: V \rightarrow W$ surjektiv. Dann gibt es zu jedem $w \in W$ ein $v \in V$ mit $F(v) = w$, und aus $F^*(\xi) = F^*(\xi')$ folgt dann

$$\xi(w) = \xi(F(v)) = F^*(\xi)(v) = F^*(\xi')(v) = \xi'(F(v)) = \xi'(w).$$

Da diese Gleichung für alle $w \in W$ gilt, folgt $\xi = \xi'$, also die Injektivität von F^* . ◆

Frage 242 Können Sie zeigen, dass für eine lineare Abbildung $F: V \rightarrow W$ zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen stets $\text{rg } F = \text{rg } F^*$ gilt?

Antwort: Man betrachte die folgende Aufspaltung von F

$$F: V \xrightarrow{F_1} \text{im } F \xrightarrow{F_2} W,$$

in eine surjektive Abbildung F_1 und eine injektive Abbildung F_2 . Nach Frage 239 induziert dies die duale Sequenz

$$F^*: W^* \xrightarrow{F_2^*} (\text{im } F)^* \xrightarrow{F_1^*} V^*,$$

bei der nun nach Frage 241 F_2^* surjektiv und F_1^* injektiv ist. Das bedeutet, dass $(\text{im } F)^*$ durch F_1^* bijektiv auf $\text{im } F^*$ abgebildet wird, und daraus folgt

$$\text{rg } F^* = \dim \text{im } F^* = \dim (\text{im } F)^* = \dim (\text{im } F) = \text{rg } F. \quad \text{◆}$$

Frage 243 Können Sie mit den Mitteln der Dualraumtheorie noch einmal einen Beweis dafür liefern, dass für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ Spalten- und Zeilenrang übereinstimmen?

Antwort: Sei F_A die durch A beschriebene Matrix. Mit den Antworten 240 und 242 erhält man

$$\operatorname{rg}_s A = \operatorname{rg} F_A = \operatorname{rg} F_A^* = \operatorname{rg}_s A^T = \operatorname{rg}_z A. \quad \blacklozenge$$

Frage 244 Können Sie zeigen, dass V und V^{**} kanonisch isomorph sind?

Antwort: Für $v \in V$ definiere man die Abbildung $v^{**}: V^* \rightarrow K$ durch $v^{**}(\xi) = \xi(v)$ für alle $\xi \in V^*$. Dann ist die Abbildung

$$\Phi: V \longrightarrow V^{**}, \quad v \longmapsto v^{**}$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Beweis: Φ ist ein Homomorphismus, denn für alle $v, w \in V$, alle $\alpha \in K$ und alle $\xi \in V^*$ gilt

$$\begin{aligned} \Phi(v+w)(\xi) &= (v+w)^{**}(\xi) = \xi(v+w) = \xi(v) + \xi(w) = v^{**}(\xi) + w^{**}(\xi) \\ &= \Phi(v)(\xi) + \Phi(w)(\xi), \\ \Phi(\alpha v)(\xi) &= (\alpha v)^{**}(\xi) = \xi(\alpha v) = \alpha \xi(v) = \alpha v^{**}(\xi) = \alpha \Phi(v)(\xi). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\Phi(v+w) = \Phi(v) + \Phi(w)$ und $\Phi(\alpha v) = \alpha \Phi(v)$, also die Linearität von Φ .

Ist $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die hierzu duale Basis, dann gilt

$$v_i^{**}(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ji}.$$

Also ist $\mathcal{B}^{**} = (v_1^{**}, \dots, v_n^{**})$ die duale Basis zu $\mathcal{B}^*$. Das heißt, dass Φ Basen von V auf Basen von V^{**} abbildet und damit notwendigerweise ein Isomorphismus ist. $\blacklozenge$