

Grundlagen der Mathematik 1

Satz-Definitionen-Skript

Wintersemester 2010/11

Jörn Saß

sass@mathematik.uni-kl.de
FB Mathematik, TU Kaiserslautern

10. März 2011

Dieses Skript stellt nur knapp die Definitionen und Sätze zusammen. Beweise, Erläuterungen und ausführliche Beispiele werden in der Vorlesung gegeben. Für weitere Beispiele, viele der Beweise und weitere Erklärungen sei auf das Skript vom Thomas Markwig verwiesen, an dessen Struktur sich die Vorlesung eng anlehnt.

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlegende Begriffsbildung	1
1	Etwas Logik	1
2	Mengen	2
3	Abbildungen	3
4	Vollständige Induktion	5
5	Mächtigkeit von Mengen	6
6	Gruppen und Körper	7
7	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	9
8	Eigenschaften der reellen Zahlen	12
9	Komplexe Zahlen	13
II	Eindimensionale Analysis	15
10	Folgen und Grenzwerte	15
11	Reihen	18
12	Grenzwerte von Funktionen	22
13	Stetigkeit	25
14	Konvergenz von Funktionenfolgen	27
15	Exponentialfunktion, Logarithmus, Potenzgesetze und einige trigonometrische Funktionen	28
16	Differenzierbarkeit	31
17	Mittelwertsatz und Anwendungen	32
18	Riemann-Integral	36
19	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	39

20 Uneigentliche Integrale	41
III Lineare Algebra	43
21 Rechnen mit Matrizen	43
22 Vektorräume und lineare Abbildungen	44
23 Lineare Unabhängigkeit und Basen von Vektorräumen	48
24 Endlichdimensionale Vektorräume	50

Teil I

Grundlegende Begriffsbildung

1 Etwas Logik

- 1.1 Definition.** (a) Eine *Aussage* ist ein sprachliches Gebilde (kurz: Satz), dem genau einer der Wahrheitswerte *wahr* (w) oder *falsch* (f) zugeordnet werden kann.
- (b) Aus vorhandenen Aussagen A, B erhält man durch Anwendung logischer Operatoren neue Aussagen.

$\neg A$	„nicht A “	<i>Negation</i>
$A \wedge B$	„ A und B “	<i>Konjunktion</i>
$A \vee B$	„ A oder B “	<i>Disjunktion</i>
$A \Leftrightarrow B$	„ A ist äquivalent zu B “	<i>Äquivalenz</i>
$A \Rightarrow B$	„aus A folgt B “	<i>Implikation</i>

Die Wirkung der logischen Operatoren wird durch eine Wahrheitstafel wie folgt festgelegt:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	f	w
f	f	w	f	f	w	w

- (c) Die Reihenfolge der Auswertung kann mit Klammern festgelegt werden. Zur Klammerersparnis legen wir fest, dass $\neg$ stärker bindet als $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, und dass $\wedge, \vee$ jeweils stärker binden als $\Rightarrow, \Leftrightarrow$.

Eine Aussage, die immer wahr ist, heißt *Tautologie*. Ist $A \Leftrightarrow B$ eine Tautologie, so schreiben wir auch $A = B$. Wenn wir sagen, dass eine Aussage „gilt“, so meinen wir, dass sie eine Tautologie ist. Wenn $A \Rightarrow B$ gilt, so muss nicht B gelten! Wenn aber A und $A \Rightarrow B$ gelten, so gilt auch B . Ein *Axiom* ist eine Aussage, die wir nicht aus anderen Aussagen ableiten und als wahr voraussetzen.

1.2 Satz (Beweisprinzipien). *Es gelten*

- (a) $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$ (*Hin und Rückrichtung bei Äquivalenz*)
- (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (*Kontraposition*)
- (c) $(\neg B \Rightarrow f) \Leftrightarrow B$ (*Widerspruchsbeweis, indirekter Beweis*)
- (d) $(A \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ (*Kettenschluss, direkter Beweis*)

1.3 Satz (Nützliche Tautologien). *Die folgenden Aussagen sind Tautologien.*

- (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$
- (b) *De Morgansche Gesetze:*

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

(c) *Assoziativgesetz*:

$$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C), \quad (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

(d) *Kommutativgesetz*:

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A, \quad A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

(e) *Distributivgesetz*:

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C), \quad A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

1.4 Definition. (a) Ein Satz mit (einer) freien Variablen, der erst durch Einsetzen von Werten für diese Variable(n) zu einer Aussage wird, heißt *Aussageform*.

(b) Eine freie Variable kann durch einen der folgenden *Quantoren* gebunden werden:

$\forall$	„für alle“	<i>Allquantor</i>
$\exists$	„es gibt (mindestens) ein“	<i>Existenzquantor</i>
$\exists!, \exists_1$	„es gibt genau ein“	
$\nexists$	„es gibt kein“	

1.5 Bemerkung (Verneinung von Quantoren). Es gelten

$$\neg(\forall x : A(x)) = \exists x : \neg A(x), \\ \neg(\exists x : A(x)) = \forall x : \neg A(x).$$

Die Reihenfolge von Existenz- und Allquantor kann im Allgemeinen nicht vertauscht werden!

1.6 Bemerkung. Das griechische Alphabet.

2 Mengen

Nach Georg Cantor ist eine *Menge* „eine Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.“ Die in einer Menge zusammengefassten Objekte sind ihre *Elemente*.

2.1 Notation. (a) Mengen können durch Auflistung oder durch Angabe einer beschreibenden Eigenschaft, z.B. $M := \{x \mid x \text{ reelle Zahl und } x^2 = 1\}$, eingeführt werden.

(b) Ist x ein Element einer Menge M , so schreiben wir „ $x \in M$ “; andernfalls schreiben wir „ $x \notin M$ “.

(c) Seien M und N Mengen. M heißt *Teilmenge* von N und wir schreiben $M \subseteq N$, wenn gilt: $\forall_{x \in M} : x \in N$. Dies ist äquivalent zu $x \in M \Rightarrow x \in N$. Die Mengen M und N sind *gleich*, $M = N$, falls $M \subseteq N \wedge N \subseteq M$. Die Menge M ist eine *echte Teilmenge* von N und wir schreiben $M \subsetneq N$, wenn $(M \subseteq N) \wedge (M \neq N)$ gilt, wobei $M \neq N = \neg(M = N)$.

(d) Spezielle Mengen sind die *leere Menge* $\emptyset = \{\}$ und die *Potenzmenge* $\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subseteq M\}$ einer Menge M .

2.2 Bemerkung. Wir setzen folgende Mengen als bekannt voraus:

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} && \text{natürliche Zahlen,} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{ganze Zahlen,} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\} && \text{rationale Zahlen,} \\ \mathbb{R} &&& \text{reelle Zahlen.}\end{aligned}$$

Existenz und Eigenschaften der reellen Zahlen werden wir axiomatisch voraussetzen (siehe Kapitel I.8). Sie könnten aber aus den Axiomen der Mengenlehre und der Logik hergeleitet werden.

2.3 Definition. Seien M und N Mengen.

(a) Wir definieren

$$\begin{aligned}M \cap N &:= \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} && \text{Durchschnitt von } M \text{ und } N, \\ M \cup N &:= \{x \mid x \in M \vee x \in N\} && \text{Vereinigung von } M \text{ und } N, \\ M \setminus N &:= \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} && \text{Differenzmenge, } M \text{ ohne } N, \\ M \triangle N &:= M \setminus N \cup N \setminus M && \text{symmetrische Differenz von } M \text{ und } N.\end{aligned}$$

(b) M und N heißen *disjunkt*, falls $M \cap N = \emptyset$ gilt.

(c) $M \times N := \{(x, y) \mid x \in M, y \in N\}$ heißt *kartesisches Produkt*. Dabei ist (x, y) ein geordnetes Paar, bei dem es auf die Reihenfolge ankommt. Daher sind zwei geordnete Paare (x, y) und (u, v) *gleich*, wenn $x = u$ und $y = v$ gelten.

Ist $M = N$, so schreiben wir auch $M^2 = M \times M$.

2.4 Bemerkung. Ist X eine Menge und $M \subseteq X$, so heißt $X \setminus M$ auch das *Komplement* von M in X . Wir schreiben $C_X M = X \setminus M$ oder bei bekannter Obermenge X auch CM , $\overline{M}$ oder M^c .

2.5 Satz. Seien M , N und P Mengen. Es gelten

- (a) die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze für $\cap$ und $\cup$,
(b) die Identitätsgesetze

$$M \cup \emptyset = M, \quad \text{und} \quad M \subseteq N \Rightarrow (M \cap N) = M,$$

(c) und die Komplementgesetze

$$M \subseteq N \Rightarrow M \cup (N \setminus M) = N \quad \text{und} \quad M \subseteq N \Rightarrow M \cap (N \setminus M) = \emptyset.$$

2.6 Bemerkung (Russellsches Paradoxon). $M = \{X \mid X \text{ ist Menge} \wedge X \notin X\}$ ist keine Menge.

3 Abbildungen

3.1 Definition. Es seien X und Y Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von X nach Y ist eine eindeutige Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.

Notation: $f : X \rightarrow Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ oder mit der Zuordnungsvorschrift

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x).$$

X heißt *Definitionsbereich* und Y *Wertebereich* von f . Zwei Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : U \rightarrow V$ sind *gleich*, wenn $X = U$, $Y = V$ und $g(x) = f(x)$ für alle $x \in X$ gelten.

3.2 Beispiel. (a) Für jede Menge A ist $\text{id}_A : A \rightarrow A, x \mapsto x$ eine Abbildung, die *Identität*.

(b) Verschiedene reellwertige Funktionen.

(c) Seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$. Dann ist

$$f|_A : A \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

eine Abbildung, die *Einschränkung von f auf A* .

3.3 Definition. Seien $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung sowie $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$.

(a) $\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ ist der *Graph von f* .

(b) $f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$ ist das *Bild von A unter f* . $f(X)$ heißt *Bild von f* .

(c) $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ ist das *Urbild von B unter f* . Für $y \in Y$ heißen die Elemente im Urbild $f^{-1}(\{y\})$ die *Urbilder von y unter f* .

3.4 Definition. Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) f heißt *surjektiv*, falls $f(X) = Y$ gilt.

(b) f heißt *injektiv*, falls gilt:

$$\forall_{x, x' \in X} (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x').$$

(c) f heißt *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Eine bijektive Abbildung nennen wir auch *Bijektion*.

3.5 Beispiel. $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist weder surjektiv noch injektiv. Aber für $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ist die Einschränkung $f_2 = f_1|_{\mathbb{R}_+}$ injektiv, $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto f_1(x)$ ist surjektiv und $f_4 = f_2|_{\mathbb{R}_+}$ ist bijektiv.

Ferner motiviert das Beispiel, dass für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gelten

- f ist surjektiv, falls für alle $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ mindestens ein Element hat.
- f ist injektiv, falls für alle $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ höchstens ein Element hat.
- f ist bijektiv, falls für alle $y \in Y$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element hat.

3.6 Definition. Sei $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Die Abbildung, die jedem Element $y \in Y$ das eindeutig bestimmte Element $x \in X$ zuordnet, für das $f(x) = y$, heißt *Umkehrabbildung* oder *Umkehrfunktion von f* . Wir bezeichnen diese mit f^{-1} , also

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, \quad y \mapsto f^{-1}(y),$$

wobei sich $f^{-1}(y)$ eindeutig aus $f(f^{-1}(y)) = y$ bestimmt.

Beachte, dass in diesem Fall $\{f^{-1}(y)\} = f^{-1}(\{y\})$, wobei links die Umkehrfunktion steht, die nur für bijektive f existiert, und rechts das Urbild von $\{y\}$ steht, dass für jede Abbildung f existiert.

3.7 Definition. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow V$ Abbildungen. Die Abbildung

$$g \circ f : X \rightarrow V, x \mapsto g(f(x))$$

heißt *Komposition* von f und g , Lesart „ g nach f “.

3.8 Beispiel. (a) Beispiel für $g \circ f \neq f \circ g$.

(b) Für eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit Umkehrfunktion f^{-1} gelten

$$f^{-1} \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ f^{-1} = \text{id}_Y.$$

3.9 Satz. Die Komposition von Abbildungen ist assoziativ.

3.10 Satz. (a) Die Umkehrabbildung einer bijektiven Abbildung ist bijektiv.

(b) Sei $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Existiert eine bijektive Abbildung $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$, so ist $g = f^{-1}$.

(c) Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow U$ Abbildungen. Dann gelten

- (i) Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.
- (ii) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.
- (iii) Sind f und g bijektiv, so ist $g \circ f$ bijektiv.

4 Vollständige Induktion

Eine Eigenschaft von $\mathbb{N}$ (das *Induktionsaxiom*) besagt, dass man durch sukzessive Addition der Zahl 1 zu 0 nach und nach alle Zahlen in $\mathbb{N}$ erreicht.

4.1 Satz (Prinzip der vollständigen Induktion). Sei $A(n)$ eine Aussage für jedes $n \in \mathbb{N}$. Falls $A(0)$ wahr ist und $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, so ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eine mögliche Schreibweise für einen Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang:

Zeige, dass $A(0)$ wahr ist.

Induktionsvoraussetzung (I.V.):

$A(n)$ sei wahr für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsbehauptung: Dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Zeige die Induktionsbehauptung unter Annahme von I.V.

Der Schluss von der I.V. auf die Induktionsbehauptung wird auch als *Induktionsschritt* oder *Induktionsschluss* bezeichnet.

4.2 Bemerkung. (a) Statt 0 kann man bei der vollständigen Induktion in Satz 4.1 auch mit einem $n_0 \in \mathbb{Z}$ starten, also zeigen, dass $A(n_0)$ gilt. Wird dann $(A(n) \Rightarrow A(n+1))$ für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ gezeigt, so ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$.

(b) In (a) kann man im Induktionsschritt auch voraussetzen, dass $A(n_0), A(n_0+1), \dots, A(n)$ wahr sind. Zeigt man dann die Gültigkeit $A(n_0)$ und von $A(n_0) \wedge \dots \wedge A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$, so folgt wieder, dass $A(n)$ wahr ist für alle $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$.

Dabei meint „ $n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$ “, dass $n \in \{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq n_0\}$.

4.3 Beispiel (Gauß). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

5 Mächtigkeit von Mengen

5.1 Lemma. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

- (a) Genau dann gibt es eine injektive Abbildung von N nach M , wenn $n \leq m$.
- (b) Genau dann gibt es eine bijektive Abbildung von N nach M , wenn $n = m$.

5.2 Definition. Seien A und B Mengen.

- (a) A heißt *endlich*, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und eine bijektive Abbildung $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$ existieren. Wir schreiben $|A| := n$ (oder $\#A$) und nennen $|A|$ die *Mächtigkeit* von A .
Andernfalls heißt A *unendlich* und wir setzen $|A| := \infty$.
- (b) A und B heißen *gleichmächtig*, falls es eine Bijektion $f : A \rightarrow B$ gibt.
- (c) A heißt *abzählbar unendlich*, falls A gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
- (d) A heißt *abzählbar*, falls A endlich oder abzählbar unendlich ist.
- (e) A heißt *überabzählbar*, falls A nicht abzählbar ist.

5.3 Bemerkung. (a) Der folgende Satz wird zeigen, dass die Mächtigkeit einer endlichen Menge der „Anzahl“ ihrer Elemente entspricht.

(b) Man kann zeigen, dass für endliche Mengen A, B gelten:

- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$, $A \subsetneq B \Rightarrow |A| < |B|$,
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, insbesondere $|A \cup B| = |A| + |B|$ für $A \cap B = \emptyset$.

(c) Die Idee der Definition von „abzählbar unendlich“ ist, dass die Elemente einer abzählbar unendlichen Menge A durch die Bijektion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$ gezählt werden, d.h. $A = \{f(0), f(1), \dots\}$; jedem Element wird eine Nummer zugeordnet.

(d) Man kann auch zeigen, dass

- (B abzählbar und $A \subseteq B$) $\Rightarrow A$ abzählbar,
- (A überabzählbar und $A \subseteq B$) $\Rightarrow B$ überabzählbar.

5.4 Satz. Seien A und B endliche Mengen. Dann sind A und B genau dann gleichmächtig, wenn $|A| = |B|$ gilt.

5.5 Satz. Seien A, B endliche Mengen mit $|A| = |B|$. Dann gilt für eine Abbildung $f : A \rightarrow B$

$$f \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ bijektiv}.$$

5.6 Satz. Sei A eine endliche Menge. Dann gilt für die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$:

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}.$$

Für die Vereinigung und den Durchschnitt endlich vieler Mengen $A_1, \dots, A_n$ benutzen wir die Schreibweise

$$\bigcup_{i=1}^n A_i := A_1 \cup \dots \cup A_n \quad \text{bzw.} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i := A_1 \cap \dots \cap A_n.$$

Für eine beliebige Menge I und Mengen $A_i, i \in I$, können wir auch Vereinigung und Durchschnitt definieren:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i \in I} A_i & \quad :\Leftrightarrow \quad \exists_{i \in I} : x \in A_i, \\ x \in \bigcap_{i \in I} A_i & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall_{i \in I} : x \in A_i. \end{aligned}$$

Ist die Indexmenge I abzählbar (abzählbar unendlich) so sprechen wir von einer/m abzählbaren/m (abzählbar unendlichen/m) Vereinigung/Durchschnitt.

5.7 Satz. (a) Die abzählbar unendliche Vereinigung abzählbar unendlicher Mengen ist abzählbar unendlich.

(b) Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar.

5.8 Theorem. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar unendlich.

5.9 Theorem. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

6 Gruppen und Körper

6.1 Definition. Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $*$, d.h.,

$$* : G \times G \rightarrow G, \quad (x, y) \mapsto x * y,$$

so dass die folgenden Gruppenaxiome (G1), (G2), (G3) gelten.

(G1) $\forall_{x,y,z \in G} : (x * y) * z = x * (y * z)$ (Assoziativität).

(G2) $\exists_{e \in G} \forall_{x \in G} : e * x = x * e = x$ (Existenz eines neutralen Elements).

(G3) $\forall_{x \in G} \exists_{x^{-1} \in G} : x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ (Existenz inverser Elemente).

Eine Gruppe heißt *abelsch* oder *kommutativ*, falls zusätzlich

(G4) $\forall_{x,y \in G} : x * y = y * x$.

Man kann in (G2) und (G3) auch nur „ $e * x = x$ “ bzw. „ $x^{-1} * x = e$ “ fordern und dann „ $x * e = x$ “ sowie „ $x * x^{-1} = e$ “ aus den übrigen Gruppenaxiomen zeigen.

6.2 Lemma. Sei $(G, *)$ eine Gruppe.

(a) Es gibt genau ein neutrales Element.

(b) Zu jedem $x \in G$ gibt es genau ein inverses Element.

(c) Für $x \in G$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$ und für alle $x, y \in G$ gilt $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

(d) Für $x, y, z \in G$ gelten die Kürzungsregeln $(x * z = y * z \Rightarrow x = y)$ sowie $(z * x = z * y \Rightarrow x = y)$.

6.3 Notation. • Im Falle einer Interpretation von $*$ als Multiplikation, schreiben wir $* = \cdot$, $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}$, $e = 1$, $x \cdot y = xy$.

• Im Falle einer Addition schreiben wir $* = +$, $x^{-1} = -x$, $e = 0$ und $x + (-y) = x - y$.

In additiver Schreibweise, sagt Lemma 6.2 also

(c)' $-(-x) = x$ und $-(x+y) = -x-y$ für alle $x, y \in G$.

(d)' $(x+z=y+z \Rightarrow x=y)$ für alle $x, y, z \in G$.

6.4 Beispiel. (a) $(\mathbb{R}, +)$ ist eine Gruppe.

(b) $(\mathbb{R}, \cdot)$ ist keine Gruppe, aber $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.

(c) Für eine Menge M bildet $\text{Sym}(M) := \{f \mid f : M \rightarrow M \text{ Bijektion}\}$ mit der Komposition $\circ$ eine Gruppe, die *symmetrische Gruppe auf M* .

(d) Für eine nichtleere Menge M bilden weder $(\mathcal{P}(M), \cap)$ noch $(\mathcal{P}(M), \cup)$ eine Gruppe.

6.5 Definition. Ein *Körper* ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$ mit Menge K und Verknüpfungen $+: K \times K \rightarrow K$ und $\cdot: K \times K \rightarrow K$, so dass gelten

(1) $(K, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Sei 0 das neutrale Element dieser Gruppe.

(2) $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe.

(3) Es gilt das Distributivgesetz: $\forall_{x,y,z \in K} : x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Wir benutzen die Notationen 6.3 auch in einem Körper und vereinbaren zur Klammerersparnis, dass „ $\cdot$ “ stärker bindet als „ $+$ “. Wenn wir von „Körper K “ sprechen, meinen wir den Körper $(K, +, \cdot)$, denken uns also eine „Addition“ und eine „Multiplikation“ gegeben.

6.6 Beispiel. (a) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ sind Körper.

(b) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist kein Körper.

6.7 Lemma (Rechenregeln im Körper). *Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und seien $x, y, z, u, v \in K$.*

(a) *Die Rechenregeln aus Lemma 6.2 gelten auch im Körper. Beachte dabei auch die additive Notation 6.3 und dass 0 nicht in der multiplikativen Gruppe liegt, z.B. gilt die Kürzungsregel $xz = yz \Rightarrow x = y$ nur für $z \neq 0$ und 0^{-1} ist nicht definiert.*

(b) $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

(c) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$.

(d) $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ und $(-x)(-y) = xy$.

(e) Für $y \neq 0$ und $v \neq 0$ gelten $\frac{x}{y} \cdot \frac{u}{v} = \frac{xu}{yv}$ sowie $\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{xv+uy}{yv}$.

6.8 Notation. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $x_m, \dots, x_n \in K$, $x \in K$. Dann setzen wir

(a) $x^n := \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ mal}}$ für $n \geq 1$ und $x^0 := 1$. Wir schreiben auch $x^{-n} := (x^{-1})^n = \frac{1}{x^n}$.

(b) $\sum_{i=m}^n x_i := x_m + x_{m+1} + \dots + x_n$ für $m \leq n$ und $\sum_{i=m}^n x_i := 0$ für $m > n$.

(c) $\prod_{i=m}^n x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot \dots \cdot x_n$ für $m \leq n$ sowie $\prod_{i=m}^n := 1$ für $m > n$.

6.9 Definition. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$n! := \prod_{i=1}^n i \quad (n \text{ Fakultät})$$

(b) Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten von n über k* durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{für } n \geq k$$

und durch

$$\binom{n}{k} := 0 \quad \text{für } n < k.$$

Beachte, dass $0! = 1$ und für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ gelten

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}, \quad \text{insbesondere} \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \\ \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1}. \end{aligned}$$

6.10 Lemma. Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad \text{wobei} \quad \binom{n}{-1} := 0.$$

Lemma 6.10 kann durch das *Pascalsche Dreieck* visualisiert werden, in dem in der n -ten Zeile an k -ter Stelle der Wert des Binomialkoeffizienten von n über k geschrieben wird. Auf Grundlage dieses Lemmas kann per vollständiger Induktion gezeigt werden, dass $\binom{n}{k}$ genau die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge ist. Dies zeigt insbesondere, dass die Binomialkoeffizienten nur Werte in $\mathbb{N}$ haben.

6.11 Satz (Binomische Formel). Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Für alle $x, y \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

7 Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

7.1 Definition. Seien X und Y Mengen.

(a) Eine *Relation* R zwischen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$. Wir schreiben xRy für $(x, y) \in R$ und sagen in diesem Fall, dass „ x mit y in Relation R steht“. Ist $X = Y$, so nennen wir R eine *Relation in X* .

(b) Eine Relation R auf X heißt

- *reflexiv*, falls $\forall_{x \in X} : xRx$,
- *symmetrisch*, falls $\forall_{x, y \in X} : xRy \Rightarrow yRx$,
- *antisymmetrisch*, falls $\forall_{x, y \in X} : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$,
- *transitiv*, falls $\forall_{x, y, z \in X} : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

7.2 Definition. Eine Relation R in X heißt *Äquivalenzrelation auf X* , falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Wir schreiben $\sim$ für R und nennen x *äquivalent zu y* , falls $x \sim y$.

7.3 Definition. (a) Eine Relation R in X heißt *Ordnungsrelation* in X (auch *partielle Ordnung*, *Teilordnung*), falls R reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Man schreibt für R auch $\leq$ und spricht von der (*partiell oder teil-*)geordneten Menge $(X, \leq)$.

Besteht keine Verwechslungsgefahr, so wird auch „ $\leq$ “ anstatt „ $\leq$ “ geschrieben. Gilt $x \leq y$ (oder $x \leq y$) und $x \neq y$ so schreiben wir auch $x < y$ (bzw. $x < y$). Statt $x \leq y$ oder $x < y$ schreiben wir auch $y \geq x$ bzw. $y > x$.

(b) Eine Ordnungsrelation $\leq$ auf X heißt *vollständige Ordnung* oder *Totalordnung* auf X , falls

$$\forall_{x,y \in X} : \quad xRy \vee yRx.$$

$(X, \leq)$ heißt dann *vollständig geordnet* oder *total geordnet*.

7.4 Beispiel. (a) Zuordnung von Kleidungsfarbe zu Studenten ist eine Relation und im Allgemeinen keine Abbildung.

(b) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

(i) $\text{Graph}(f)$ ist eine Relation.

(ii) Durch

$$x_1 \sim x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert, die *durch f auf X induzierte Äquivalenzrelation*.

(c) Auf $\mathbb{R}$ werden durch „ $\leq$ “ eine Totalordnung, durch „ $=$ “ eine Äquivalenzrelation und durch „ $<$ “ eine Relation, die keine Ordnungsrelation ist, induziert.

(d) Nennen wir zwei Studenten *äquivalent*, wenn sie die gleiche Augenfarbe haben, so definiert dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Studenten.

(e) Die Teilmengenbeziehung definiert eine Ordnungsrelation auf einer Menge von Mengen, die i.A. keine Totalordnung ist.

7.5 Definition. Sei X eine Menge. Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X heißt

$$[x] := \{y \in X : y \sim x\}$$

die *Äquivalenzklasse* von x und jedes $y \in [x]$ heißt *Repräsentant* von $[x]$. Die Menge der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ wird mit $X/\sim$ bezeichnet.

Können wir jedem Element i einer Menge I ein mathematisches Objekt X_i zuordnen, so nennen wir $(X_i)_{i \in I}$ eine *Familie* dieser Objekte. Dabei muss die *Indexmenge* I nicht abzählbar sein!

7.6 Definition. Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer nichtleeren Menge X . Dann heißt $(X_i)_{i \in I}$ eine *Partition* von X , wenn

$$\begin{aligned} X_i \cap X_j &= \emptyset \quad \text{für alle} \quad i \neq j \text{ mit } i, j \in I, \quad \text{und} \\ X &= \bigcup_{i \in I} X_i. \end{aligned}$$

7.7 Satz. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer nichtleeren Menge X .

(a) Zwei Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ sind entweder disjunkt oder gleich.

(b) Die Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ bilden eine Partition von X .

(c) Umgekehrt wird zu jeder Partition $(X_i)_{i \in I}$ durch

$$xRy \quad :\Leftrightarrow \quad \exists_{i \in I} : \{x, y\} \subseteq X_i$$

eine Äquivalenzrelation R auf X mit Äquivalenzklassen X_i , $i \in I$, definiert.

7.8 Definition. Sei M eine Menge.

- (a) Ist $\leq$ eine Ordnungsrelation auf M , $A \subseteq M$ und $x \in A$, so heißt x *minimal* (*maximal*) in A , falls für alle $y \in A$ mit $y \leq x$ (bzw. $y \geq x$) bereits $y = x$ folgt.
- (b) Eine Totalordnung auf M heißt *Wohlordnung*, falls jede nicht-leere Teilmenge von M ein minimales Element besitzt.

7.9 Bemerkung. Sei M eine Menge. Das Minimum bzw. Maximum von $A \subseteq M$ bzgl. einer Totalordnung auf M ist eindeutig, sofern es existiert. Wir bezeichnen dieses mit $\min A$ bzw. $\max A$.

7.10 Beispiel. (a) $(\mathbb{R}, \leq)$ mit der üblichen Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ ist total geordnet, aber nicht wohlgeordnet.

- (b) Gleiches trifft auf $(\mathbb{Z}, \leq)$ mit der üblichen Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ zu. Aber $0 < -1 < 1 < -2 < 2 < \dots$ legt eine Ordnungsrelation fest, für die $\mathbb{Z}$ wohlgeordnet ist.

7.11 Bemerkung (Archimedisches Prinzip). Die natürlichen Zahlen $(\mathbb{N}, \leq)$ mit der üblichen Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ sind wohlgeordnet.

7.12 Definition. Es sei $\leq$ eine Totalordnung auf einer Menge M und $A \subseteq M$, $A \neq \emptyset$.

- (a) Wir nennen $s \in M$ *obere Schranke* von A , falls $x \leq s$ für alle $x \in A$.
- (b) A heißt *nach oben beschränkt*, falls A eine obere Schranke besitzt.
- (c) Existiert ein Minimum s in der Menge der oberen Schranken von A , so heißt dieses das *Supremum* von A , Schreibweise $s = \sup A$. (Insbesondere ist s selbst eine obere Schranke)
- (d) Wir nennen $s \in M$ *untere Schranke* von A , falls $s \leq x$ für alle $x \in A$.
- (e) A heißt *nach unten beschränkt*, falls A eine untere Schranke besitzt.
- (f) Existiert ein Maximum s in der Menge der unteren Schranken von A , so heißt dieses das *Infimum* von A , Schreibweise $s = \inf A$. (Insbesondere ist s selbst eine untere Schranke)
- (g) A heißt *beschränkt*, falls A nach oben und nach unten beschränkt ist.

7.13 Beispiel. (a) Sei $(M, \leq)$ total geordnet, $A \subseteq M$, $A \neq \emptyset$. Hat A ein Maximum (Minimum), so gilt $\sup A = \max A$ ($\inf A = \min A$).

- (b) Für $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}$ gelten $\sup A = \max A = 1$, $\inf A = 0$ und ein Minimum von A existiert nicht.
- (c) Für $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\} \subseteq \mathbb{R}$ gelten $\inf A = \min A = 0$, aber weder Maximum noch Supremum existieren in $\mathbb{R}$.

7.14 Bemerkung. Wir setzen ohne Beweis das *Supremumsaxiom der reellen Zahlen* voraus: Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Mit Übungsaufgabe 5/3(b) ($A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt $\Rightarrow \inf A = -\sup(-A)$), folgt aus dem Supremumsaxiom, dass jede nach unten beschränkte Menge in $\mathbb{R}$ ein Infimum in $\mathbb{R}$ hat.

7.15 Definition. Wir nennen $(K, +, \cdot, \leq)$ einen *angeordneten Körper*, falls $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $\leq$ eine Totalordnung auf K ist, und für alle $x, y, z \in K$ gelten:

- (1) $x < y \Rightarrow x + z < y + z$,
- (2) $x < y, \quad 0 < z \Rightarrow x \cdot z < y \cdot z$.

Sei $x \in K$. Ist $x > 0$, so heißt x *positiv*. Ist $x < 0$, so heißt x *negativ*. Dementsprechend nennt man x *nicht-negativ*, falls $x \geq 0$, und *nicht-positiv*, falls $x \leq 0$.

7.16 Lemma. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper. Dann gelten für $x, y, z \in K$:

- (a) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$.
- (b) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$, insbesondere $1 > 0$.
- (c) $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$.
- (d) $x < y, z < 0 \Rightarrow xz > yz$.

7.17 Satz. Seien $(K, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper, $A \subseteq K$, $A \neq \emptyset$ und $s \in K$. Dann gelten

- (a) Genau dann gilt $s = \sup A$, wenn s eine obere Schranke von A ist und es zu jedem $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, ein $x \in A$ gibt mit $s - \varepsilon < x$. (Supremumeigenschaft)
- (b) Genau dann gilt $s = \inf A$, wenn s eine untere Schranke von A ist und es zu jedem $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$, ein $x \in A$ gibt mit $x < s + \varepsilon$. (Infimumeigenschaft)

8 Eigenschaften der reellen Zahlen

8.1 Theorem (Charakterisierung der reellen Zahlen). $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ mit der üblichen Kleiner-Gleich-Relation $\leq$ ist der einzige angeordnete Körper, in dem jede nicht-leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

8.2 Bemerkung. Wir setzen von nun an die in Theorem 8.1 genannten Eigenschaften der reellen Zahlen axiomatisch voraus.

8.3 Satz (Archimedische Anordnung von $\mathbb{R}$). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$, $0 < x < y$, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y < nx$.

8.4 Folgerung. (a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists k \in \mathbb{Z} : k \leq x < k + 1$.

- (b) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$.

8.5 Notation. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Wir nennen

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall,
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Intervall,
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ halboffenes Intervall,
- $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ uneigentliches Intervall.

Entsprechend führen wir $(a, b]$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.

8.6 Satz. $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h.

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b \exists q \in \mathbb{Q} : q \in (a, b).$$

8.7 Definition. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Betrag oder *Absolutbetrag* von x . Die Abbildung $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto |x|$ heißt *Betragsfunktion*.

8.8 Lemma. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$(a) \quad |x| = |-x|, \quad |x| \geq 0 \quad \text{und} \quad (|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0).$$

$$(b) \quad |xy| = |x| |y|.$$

$$(c) \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

$$(d) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

$$(e) \quad \left| \frac{x}{z} \right| = \frac{|x|}{|z|} \quad \text{für } z \in \mathbb{R}, z \neq 0.$$

8.9 Satz (Bernoullische Ungleichung). Seien $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

8.10 Satz. Zu $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existiert eine eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, mit $a^n = x$.

8.11 Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Die nach Satz 8.10 eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, mit $a^n = x$ heißt n -te Wurzel von x . Wir schreiben $a = \sqrt[n]{x}$ oder $a = x^{\frac{1}{n}}$. Für $n = 2$ schreiben wir kürzer $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$.

8.12 Bemerkung. (a) Pythagoras, $\sqrt{2}$ ist Länge der Diagonale im Einheitsquadrat.

$$(b) \quad \sqrt{2} \text{ ist irrational, d.h., } \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

$$(c) \quad A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \text{ hat kein Supremum in } \mathbb{Q}. \text{ Also gilt das Supremumsaxiom nicht in } \mathbb{Q}.$$

9 Komplexe Zahlen

9.1 Definition. Die Menge der *komplexen Zahlen* ist definiert als $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Auf $\mathbb{C}$ definieren wir eine Addition durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v), \quad (x, y), (u, v) \in \mathbb{C},$$

und eine Multiplikation durch

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu), \quad (x, y), (u, v) \in \mathbb{C}.$$

Wir schreiben $i := (0, 1)$ und setzen $x := (x, 0)$. Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ nennen wir $\operatorname{Re}(z) := x$ und $\operatorname{Im}(z) := y$ den *Realteil* bzw. den *Imaginärteil* von z .

Diese Schreibweise $x = (x, 0)$ ist sinnvoll, da die in Definition 9.1 definierte Addition und Multiplikation auf $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ in der ersten Komponente der Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$ entspricht und wir $\mathbb{R} \times \{0\}$ daher mit $\mathbb{R}$ identifizieren können. Mit der Einführung von $i = (0, 1)$ erhalten wir mit der in Definition 9.1 definierten Addition und Multiplikation für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$

$$z = (x, y) = x + i y.$$

Dies benutzen wir fortan als weitere Schreibweise für z . Unter Beachtung von $i^2 = (0, 1)^2 = -1$ kann bei dieser Schreibweise wie mit den reellen Zahlen gerechnet werden, also z.B.

$$(x + i y)(u + i v) = xu + i xv + i yu + i^2 yv = xu - yv + i(xv + yu).$$

9.2 Satz. Die komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ mit der in Definition 9.1 definierten Addition und Multiplikation bilden einen Körper.

9.3 Definition. Für $z = x + i y \in \mathbb{C}$ nennen wir

$$\bar{z} := x - i y$$

die *komplex Konjugierte* von z , und

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$$

den *Betrag* von z .

9.4 Lemma. Für $z, w \in \mathbb{C}$ gelten

- (a) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ und $|z| = |\bar{z}|$.
- (b) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \leq |z|$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \leq |z|$.
- (c) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- (d) $|z \cdot w| = |z| |w|$.
- (e) $|z + w| \leq |z| + |w|$.

9.5 Bemerkung. (a) Da die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ mit geeigneter Addition und Multiplikation eingeführt wurden, können wir Mengen komplexer Zahlen in der Zahlenebene veranschaulichen. Diese wird dann auch *komplexe Zahlenebene* oder *Gaußsche Zahlenebene* genannt. So beschreibt z.B. $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ für $r > 0$ eine Kreisscheibe mit Radius r um den Ursprung $(0, 0)$ und $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\}$ für $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ eine Kreisscheibe mit Radius r um z_0 .

Identifiziert man komplexe Zahlen $z = (x, y)$, $w = (u, v)$ mit den entsprechenden Vektoren (kennen wir noch nicht) im $\mathbb{R}^2$, so kann man sich die Addition als eine Addition dieser Vektoren vorstellen, während bei der Multiplikation die Winkel zur x -Achse addiert und die Beträge multipliziert werden.

(b) Es gibt keine Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{C}$, mit der $(\mathbb{C}, +, \cdot, \leq)$ ein angeordneter Körper wäre.

(c) Im Vorgriff auf eine Algebra-Vorlesung sei erwähnt, dass jedes *Polynom*

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

mit komplexen *Koeffizienten* $a_0, \dots, a_{n-1}$ eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat. Dies besagt der *Fundamentalsatz der Algebra*.

Teil II

Eindimensionale Analysis

Sei $\mathbb{K}$ einer der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

10 Folgen und Grenzwerte

10.1 Definition. Eine *Folge in $\mathbb{K}$* ist eine Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$. Wir schreiben $a_n := \alpha(n)$ und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n)_{n=0,1,2,\dots}$ oder auch $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ für α . Für Folgen, die in n_0 starten, schreiben wir auch $(a_n)_{n \geq n_0} = (a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots)$.

Beispiele sind

- konstante Folge $(c)_{n \in \mathbb{N}} = (c, c, \dots)$ für $c \in \mathbb{K}$,
- $(\frac{1}{n})_{n \geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$,
- $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots)$,
- *geometrische Folge* $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ für $q \in \mathbb{K}$,
- *Fibonacci-Folge*, definiert durch $a_0 := 1$, $a_1 := 1$ und $a_{n+2} := a_n + a_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

10.2 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Dann heißt $a \in \mathbb{K}$ *Grenzwert (GW)* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Eine Folge heißt *konvergent*, falls sie einen GW hat, ansonsten *divergent*. Ist a ein GW von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so sagen wir, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *gegen a konvergiert* und schreiben

$$a_n \rightarrow a \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{oder} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Ferner heißt $U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{K} : |x - a| < \varepsilon\}$ die ε -Umgebung von $a \in \mathbb{K}$.

Anders formuliert, konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a genau dann, wenn fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder in der ε -Umgebung von a liegen.

10.3 Beispiel. $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.

10.4 Satz. Jede Folge in $\mathbb{K}$ hat höchstens einen Grenzwert.

10.5 Definition. (a) Eine Folge mit Grenzwert 0 (beachte $0 = (0, 0)$ in $\mathbb{C}$) heißt *Nullfolge*.

(b) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt *beschränkt*, falls

$$\exists s > 0 \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < s.$$

(c) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *nach oben (nach unten) beschränkt*, falls die Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nach oben (nach unten) beschränkt ist.

10.6 Beispiel. (a) Die Folge $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

(b) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat genau dann einen GW $a \in \mathbb{K}$, wenn $(a_n - a)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(c) $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge für $q \in \mathbb{K}$, $|q| < 1$.

Für $q = 1$ konvergiert $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1.

10.7 Satz. (a) Jede konvergente Folge in $\mathbb{K}$ ist beschränkt.

(b) Ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

Die Kontraposition von Satz 10.7 (a) besagt, dass eine unbeschränkte Folge divergent ist.

10.8 Beispiel. In Ergänzung zu Beispiel 10.6 (c) können wir zeigen, dass die geometrische Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent ist, falls $|q| > 1$ oder $|q| = 1 \wedge q \neq 1$.

10.9 Satz (Rechenregeln in $\mathbb{K}$). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{K}$ mit Grenzwerten a bzw. b . Dann gelten:

(a) $a_n + b_n \rightarrow a + b$.

(b) $a_n b_n \rightarrow ab$, insbesondere $c a_n \rightarrow c a$ für alle $c \in \mathbb{K}$.

(c) $|a_n| \rightarrow |a|$.

(d) Falls $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ gilt und die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$ gegen $\frac{a}{b}$ konvergiert.

10.10 Satz (Zusätzliche Rechenregeln in $\mathbb{R}$). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$ mit Grenzwerten a bzw. b .

(a) Dann gilt: $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$.

(b) Ist $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge in $\mathbb{R}$ und $a = b$, so gilt

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n \leq c_n \leq b_n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a.$$

Die Aussage in (b) wird auch *Sandwich-Theorem* genannt. Beachte, dass das Hinschreiben von " $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ " bereits die Aussage mit einschließt, dass $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist.

10.11 Beispiel. (a) Aus $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ und $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ folgt $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$.

(b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \in [a, b]$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in [a, b]$.

10.12 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt

monoton wachsend, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

monoton fallend, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

streng monoton fallend, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

monoton, falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend oder monoton fallend ist.

10.13 Satz. Jede monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Jede monoton fallende, nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

10.14 Beispiel. Für $c > 0$ konvergiert die durch $a_0 := 1$, $a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$, $n \in \mathbb{N}$, definierte Folge gegen $\sqrt{c}$.

Zum Beweis zeigt man, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nach unten beschränkt und monoton fallend ist. Nach Satz 10.13 existiert dann der Grenzwert und man kann in der Gleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{c}{a_n})$ wegen der Rechenregeln in Satz 10.9 zum Grenzwert $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ übergehen und nach a auflösen. Dieses Vorgehen ist nur erlaubt, da wir gezeigt haben, dass der Grenzwert existiert!

10.15 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist von der Gestalt

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots) \quad \text{mit} \quad 0 \leq n_0 < n_1 < n_2 < \dots$$

10.16 Satz (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

10.17 Definition. $a \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungswert (HW)* einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n_1 \in \mathbb{N} \exists n_2 > n_1 : |a_{n_2} - a| < \varepsilon.$$

10.18 Beispiel. (a) Hat $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen GW a , so ist a der einzige HW von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(b) Der Grenzwert einer konvergenten Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein HW von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat HWe -1 und 1 .

10.19 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{K}$ heißt *Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$* , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

10.20 Satz. *Eine Folge in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

10.21 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt *bestimmt divergent gegen ∞* , falls

$$\forall s \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n > s$$

und *bestimmt divergent gegen $-\infty$* , falls

$$\forall s \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : a_n < s.$$

Statt „bestimmt divergent“ sagt man auch „uneigentlich konvergent“. Wir schreiben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad a_n \rightarrow \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty, \quad a_n \rightarrow -\infty.$$

10.22 Bemerkung. Beachte, dass ∞ und $-\infty$ keine Zahlen in $\mathbb{R}$ sind und daher nicht alle Rechenregeln gelten, die wir im Körper $\mathbb{R}$ kennen. Man kann ∞ und $-\infty$ als Grenzwerte bestimmt divergenter Folgen einführen. Folgende Rechenregeln aus Satz 10.9 gelten für Folgen $a_n \rightarrow \infty$, $b_n \rightarrow \infty$, $c_n \rightarrow c$ mit $c \in \mathbb{R}$:

(a) $a_n + b_n \rightarrow \infty \quad (\infty + \infty = \infty).$

(b) $a_n b_n \rightarrow \infty \quad (\infty \cdot \infty = \infty).$

(c) $a_n + c_n \rightarrow \infty$, $a_n - c_n \rightarrow \infty \quad (\infty \pm c = \infty).$

(d) $\lambda a_n \rightarrow \infty$ für $\lambda > 0$ und $\lambda a_n \rightarrow -\infty$ für $\lambda < 0$.

(e) $\frac{\lambda}{a_n} \rightarrow 0$ für $\lambda \in \mathbb{R} \quad (\frac{\lambda}{\infty} = 0).$

Entsprechende Aussagen gelten für $-\infty$. Anderen Kombinationen kann man im Allgemeinen keinen sinnvollen Wert zuweisen, wie z.B. $\infty - \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. Dies zeigen folgende Beispiele. Für $a_n = n^2$ und $b_n = n$ gelten $a_n \rightarrow \infty$ und $b_n \rightarrow \infty$, aber

$$a_n - b_n = n^2 - n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad b_n - a_n = n - n^2 \rightarrow -\infty.$$

sowie

$$\frac{n}{n^2} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{n^2}{n} \rightarrow \infty.$$

10.23 Definition. (a) Ist eine Menge $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, nach oben unbeschränkt, so schreiben wir $\sup A = \infty$. Ist sie nach unten unbeschränkt, so schreiben wir $\inf A = -\infty$. Ferner setzt man $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$ für die leere Menge $\emptyset$.

(b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir nennen

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_m \mid m \geq n\}, & \text{falls } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach oben beschränkt,} \\ \infty, & \text{falls } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach oben unbeschränkt} \end{cases}$$

den *Limes Superior* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_m \mid m \geq n\}, & \text{falls } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach unten beschränkt,} \\ -\infty, & \text{falls } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ nach unten unbeschränkt} \end{cases}$$

den *Limes Inferior* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Andere Schreibweisen sind

$$\overline{\lim} \quad \text{für} \quad \limsup \quad \text{und} \quad \underline{\lim} \quad \text{für} \quad \liminf.$$

10.24 Beispiel. Für die durch

$$a_n := \begin{cases} 2, & n = 3k \\ 2 + \frac{n+1}{n}, & n = 3k+1 \\ 1 + \frac{1}{n}, & n = 3k+2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}$$

definierte Folge kann man zeigen, dass

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 3, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

gelten und dass $\{1, 2, 3\}$ die Menge der Häufungswerte ist.

10.25 Bemerkung. Für eine beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ist die Menge ihrer Häufungswerte H nicht leer und es gelten (siehe Übungen, Blatt 7)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \min H \quad \text{und} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \max H.$$

11 Reihen

11.1 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k$$

heißt *Reihe* (zu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$) und wird mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \left(\sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Konvergiert diese Reihe, so wird ihr Grenzwert auch mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet, d.h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n.$$

11.2 Beispiel. (a) Für alle $q \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Die *geometrische Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ konvergiert daher mit Grenzwert

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad \text{falls } |q| < 1,$$

da für $|q| < 1$ nach Beispiel 10.6 (c) $q^n \rightarrow 0$ gilt. Für $|q| \geq 1$ ist die geometrische Reihe divergent.

(b) Die *harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ ist divergent.

(c) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ist konvergent mit Grenzwert 1.

11.3 Satz (Rechenregeln). Für konvergente Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ in $\mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gelten

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$(c) \quad \text{Ist } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ und gilt } a_n \leq b_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \text{ so ist } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

11.4 Satz (Cauchy-Kriterium). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist genau dann konvergent, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

11.5 Folgerung (Nullfolgenkriterium). Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe in $\mathbb{K}$, so ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{K}$.

11.6 Satz (Leibniz-Kriterium). Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge (also in $\mathbb{R}$), so konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$.

11.7 Beispiel. (a) Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ ist konvergent.

(b) Ebenso ist die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergent. Zu dieser kann man eine Umordnung der Folgenglieder $(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ definieren, für die die Reihe bestimmt gegen ∞ divergiert. Es gibt auch Umordnungen, die gegen einen anderen Grenzwert als den der ursprünglichen Reihe konvergieren.

11.8 Definition. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{K}$ heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent ist.

11.9 Satz. Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist konvergent und es gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

11.10 Satz (Umordnungssatz). Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe ist absolut konvergent und konvergiert gegen denselben Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe.

11.11 Satz (Majorantenkriterium). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen in $\mathbb{K}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergent ist und $|a_n| \leq |b_n|$ für fast alle n gilt, so ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Unter den Voraussetzungen von Satz 11.11 nennen wir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine *konvergente Majorante* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

11.12 Beispiel. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ist konvergent für alle $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.

11.13 Satz (Minorantenkriterium). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen in $\mathbb{R}$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent ist und $a_n \geq b_n \geq 0$ für fast alle n gilt, so ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

Unter den Voraussetzungen von Satz 11.13 nennen wir $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine *divergente Minorante* von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

11.14 Satz (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$.

(a) Existieren $q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle $n \geq n_0$ gilt, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

11.15 Satz (Quotientenkriterium). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$.

(a) Existieren $q < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ und $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für alle $n \geq n_0$ gelten, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

(b) Gelten $a_n \neq 0$ und $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ für fast alle n , so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

11.16 Bemerkung. Es ist ganz wesentlich in den Sätzen 11.14 und 11.15, dass in Teil (a) wirklich die Existenz eines $q < 1$ gezeigt wird, so dass $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ bzw. $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für fast alle n gilt. Zum Beispiel für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gelten zwar sowohl $\sqrt[n]{1/n} < 1$ als auch $\frac{1/(n+1)}{1/n} < 1$, aber die Reihe ist divergent!

11.17 Folgerung (Wurzel- und Quotientenkriterium mit Grenzwert). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{K}$. Konvergiert $\left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ oder $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen einen Grenzwert a , so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent falls $a < 1$ und divergent falls $a > 1$. Im Fall $a = 1$ kann die Reihe konvergent oder divergent sein.

11.18 Beispiel. Für $x \in \mathbb{K}$ ist die *Exponentialreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergent. Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heißt *Exponentialfunktion*. Die Eulersche Zahl e ist definiert durch $e := \exp(1)$.

11.19 Satz (Cauchy-Produkt). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen in $\mathbb{K}$ und $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit Grenzwert

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

11.20 Satz (Erste Eigenschaften der Exponentialfunktion).

- (a) $\exp(x) \exp(y) = \exp(x+y)$ für alle $x, y \in \mathbb{K}$.
- (b) $\exp(0) = 1$ und $\exp(x) \neq 0$, $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ für alle $x \in \mathbb{K}$.
- (c) $\exp(x) > 0$ für $x \in \mathbb{R}$.
- (d) $\exp(n) = e^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

11.21 Definition. (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}$ und $x_0 \in \mathbb{K}$. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Potenzreihe in $x \in \mathbb{K}$ mit Koeffizienten $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und Entwicklungs-/Mittelpunkt x_0 .

(b) Zu einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ heißt

$$r := \sup \left\{ |x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ ist konvergent} \right\}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe.

Beachte

- Der Konvergenzradius r existiert in $[0, \infty)$ oder es gilt $r = \infty$, da die Potenzreihe zumindest für $x = x_0$ konvergiert mit Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_0)^n = a_0$.
- Es gilt auch $r = \sup \{ |y| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{ ist konvergent} \}$.
- Für die Exponentialreihe in Beispiel 11.18 ist der Mittelpunkt $x_0 = 0$ und der Konvergenzradius $r = \infty$.

11.22 Satz. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$ mit Konvergenzradius r

- (a) Für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| < r$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ absolut konvergent.
- (b) Für $x \in \mathbb{K}$ mit $|x - x_0| > r$ ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ divergent.

Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ mit Konvergenzradius r ist also in $\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| < r\}$ absolut konvergent und in $\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| > r\}$ divergent. Für $r = \infty$ konvergiert die Potenzreihe für alle $x \in \mathbb{K}$. Ist $r < \infty$, so kann die Potenzreihe auf dem Rand des Konvergenzbereichs, d.h. auf $\{x \in \mathbb{K} : |x - x_0| = r\}$, konvergent oder divergent sein. Es gibt Beispiele von Potenzreihen, die auf dem Rand für ein Element des Konvergenzbereiches konvergieren und für ein anderes Element divergieren, siehe Beispiel 11.24 (b).

11.23 Satz (Cauchy-Hadamard). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{K}$. Ist $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n \in \mathbb{N}}$ oder $(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|)_{n \geq n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ konvergent oder bestimmt divergent, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gegeben durch

$$r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{bzw.} \quad r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|},$$

wobei wir $\frac{1}{0} := \infty$ setzen.

11.24 Beispiel. (a) Der Konvergenzradius der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist 1. Für alle x auf dem Rand des Konvergenzbereiches ist sie divergent.

(b) Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ist 1. Auf dem Rand des Konvergenzbereiches ist die Reihe für $x = 1$ divergent (harmonische Reihe) und für $x = -1$ konvergent (alternierende harmonische Reihe).

(c) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ hat den Konvergenzradius ∞ . Die Abbildung

$$\cos : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

heißt *Cosinus*.

(c) Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ hat den Konvergenzradius ∞ . Die Abbildung

$$\sin : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} : x \mapsto \sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißt *Sinus*.

11.25 Satz (Eigenschaften von $\cos$, $\sin$ und weitere Eigenschaften von $\exp$).

(a) $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ für $x \in \mathbb{K}$.

(b) $\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x)$ für $x \in \mathbb{K}$.

(c) $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ für $x \in \mathbb{K}$.

(d) $\cos(t) = \operatorname{Re}(\exp(it))$, $\sin(t) = \operatorname{Im}(\exp(it))$ und $|\exp(it)| = 1$ für $t \in \mathbb{R}$.

12 Grenzwerte von Funktionen

12.1 Definition. Sei $U \subseteq \mathbb{K}$. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt *Häufungspunkt (HP)* von U , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x \in U \setminus \{a\} : |x - a| < \varepsilon.$$

12.2 Bemerkung. (a) Genau dann ist a ein HP von $U \subseteq \mathbb{K}$, wenn jede ε -Umgebung von a mindestens ein von a verschiedenes Element aus U enthält.

(b) Ein HP von U muss kein Element von U sein.

12.3 Beispiel. Jede reelle Zahl ist HP von $\mathbb{Q}$.

12.4 Satz (Folgenkriterium für Häufungspunkte). Sei $U \subseteq \mathbb{K}$. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ ist ein Häufungspunkt von U genau dann, wenn es eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $U \setminus \{a\}$ gibt, die gegen a konvergiert.

12.5 Beispiel. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist die Menge aller Häufungspunkte von $U = (a, b)$ gegeben durch $[a, b]$.

Wie in Definition 12.1 und Satz 12.4 lassen sich auch viele der folgenden Definitionen und Sätze in $\mathbb{K}$ formulieren – einige aber auch nicht. Zwecks einer konsistenten Darstellung werden wir in der eindimensionalen Analysis von nun an reellwertige Funktionen betrachten.

12.6 Definition (ε - δ -Kriterium für Grenzwerte von Funktionen). Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein HP von U . Wir nennen $y \in \mathbb{R}$ Grenzwert von f in a , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U \setminus \{a\} : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon).$$

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$.

12.7 Satz (Folgenkriterium für Grenzwerte von Funktionen). Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein HP von U . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$.
- (2) Für alle konvergenten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $U \setminus \{a\}$ und mit Grenzwert a gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$.

12.8 Beispiel. (a) Für $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ gilt $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

(b) Für

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

gilt $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

12.9 Definition. Für $U, V \subseteq \mathbb{R}$, Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\begin{aligned} cf & : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto cf(x), \\ f + g & : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x), \\ f - g & : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) - g(x), \\ fg & : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)g(x) \end{aligned}$$

und, falls $g(x) \neq 0$ für $x \in U \cap V$, auch

$$\frac{f}{g} : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}.$$

12.10 Satz (Grenzwertsätze/Rechenregeln für Funktionen). Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, a ein HP von U und $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten:

- (a) Der Grenzwert von f in a ist eindeutig bestimmt.
- (b) Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existieren, so gilt
 - (i) $\lim_{x \rightarrow a} (cf)(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
 (iii) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$.
 (iv) Falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = y$ mit $y \neq 0$ gilt, so folgt $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f|_V} \right)(x) = \frac{1}{y} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$, wobei $V = \{x \in U \mid f(x) \neq 0\}$ und $f|_V$ die Einschränkung von f auf V bezeichnet.

12.11 Definition. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Ist U nach oben unbeschränkt, so heißt y Grenzwert von f in ∞ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists s \in \mathbb{R} \forall x \in U, x > s : |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Ist U nach unten unbeschränkt, so heißt y Grenzwert von f in $-\infty$, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists s \in \mathbb{R} \forall x \in U, x < s : |f(x) - y| < \varepsilon.$$

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y$.

12.12 Bemerkung (Folgenkriterium für Grenzwerte in ∞ , $-\infty$). Seien $U \subseteq \mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = y$ genau dann, wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = y$ gilt. Eine entsprechende Aussage gilt für nach unten beschränktes U und $-\infty$.

12.13 Definition. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und a ein HP von U .

- (a) Wir nennen ∞ den *uneigentlichen Grenzwert von f in a* , falls

$$\forall s \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in U : (|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > s).$$

Wir nennen $-\infty$ den *uneigentlichen Grenzwert von f in a* , falls die Aussage mit „ $f(x) < s$ “ anstatt „ $f(x) > s$ “ gilt.

- (b) Ist U nach oben unbeschränkt, so nennen wir ∞ den *uneigentlichen Grenzwert von f in ∞* , falls

$$\forall s \in \mathbb{R} \exists t \in \mathbb{R} \forall x \in U : (x > t \Rightarrow f(x) > s).$$

Wir nennen $-\infty$ den *uneigentlichen Grenzwert von f in ∞* , falls die Aussage mit „ $f(x) < s$ “ anstatt „ $f(x) > s$ “ gilt.

- (c) Ist U nach unten unbeschränkt, so nennen wir ∞ den *uneigentlichen Grenzwert von f in $-\infty$* , falls

$$\forall s \in \mathbb{R} \exists t \in \mathbb{R} \forall x \in U : (x < t \Rightarrow f(x) > s).$$

Wir nennen $-\infty$ den *uneigentlichen Grenzwert von f in $-\infty$* , falls die Aussage mit „ $f(x) < s$ “ anstatt „ $f(x) > s$ “ gilt.

12.14 Beispiel. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Polynom vom Grad n mit Koeffizienten $c_0, \dots, c_n$* , falls $c_n \neq 0$ und

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für solch ein Polynom gelten $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ sowie

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } c_n > 0, \\ -\infty, & \text{falls } c_n < 0. \end{cases}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } (c_n > 0 \wedge n \text{ gerade}) \vee (c_n < 0 \wedge n \text{ ungerade}), \\ -\infty, & \text{falls } (c_n < 0 \wedge n \text{ gerade}) \vee (c_n > 0 \wedge n \text{ ungerade}). \end{cases}$$

12.15 Bemerkung (Folgenkriterium für uneigentliche Grenzwerte von Funktionen). Unter den Voraussetzungen von Definition 12.13 gelten:

- (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ genau dann, wenn für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $U \setminus \{a\}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty$ gilt.
- (b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ genau dann, wenn für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty$ gilt.
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ genau dann, wenn für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \infty$ gilt.

Die entsprechenden Aussagen gelten auch für die uneigentlichen Grenzwerte $\lim f(x) = -\infty$.

12.16 Beispiel. Für $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ sind $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

13 Stetigkeit

13.1 Definition. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$. Die Funktion f heißt *stetig in a* , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in U : (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

f heißt *stetig*, wenn f für alle $a \in U$ stetig in a ist. Sei $A \subseteq U$. Ist f stetig für alle $a \in A$, so nennen wir f *stetig auf A* . Die Menge der stetigen Funktionen auf U mit Werten in $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$.

13.2 Lemma. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$ ein Häufungspunkt von U . Die Funktion f ist genau dann stetig in a , wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

13.3 Satz (Folgenkriterium für die Stetigkeit). Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$. Genau dann ist f stetig in a , wenn für jede Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in U mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a)$ gilt.

13.4 Beispiel. (a) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist stetig.

(b) Alle Polynome sind stetig.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 1$ für $x \neq 0$ und $f(x) = 0$ für $x = 0$, ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und nicht stetig in 0.

(d) Ein Element $a \in \mathbb{R}$ heißt *isolierter Punkt* von $U \subseteq \mathbb{R}$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U \cap U_\delta(a) = \{a\}$. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist in jedem isolierten Punkt von U stetig.

(e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ist nirgends stetig.

(f) Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.

13.5 Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R} \setminus U$ Häufungspunkt von U . Dann heißt f *stetig fortsetzbar in a* , wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert. Die stetige Funktion

$$\tilde{f} : U \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x), & x \in U \\ \lim_{t \rightarrow a} f(t), & x = a \end{cases}$$

heißt *stetige Fortsetzung von f (in a)*.

13.6 Satz. (a) Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ in $a \in U$ stetig. Dann gelten

- (i) Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist die Funktion cf stetig in a .
- (ii) Die Funktionen $f + g$, $f - g$, fg sind stetig in a .
- (iii) Ist $g(a) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}|_{\{x \in U \mid g(x) \neq 0\}}$ stetig in a .

(b) Seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $a \in U$, $f(U) \subseteq V$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $g \circ f$ stetig in a .

13.7 Beispiel. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in a , so ist $|f| : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |f(x)|$ stetig in a , da $|f| = |\cdot| \circ f$.

13.8 Satz (Zwischenwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

13.9 Lemma. Jedes Polynom in $\mathbb{R}$ von ungeradem Grad hat eine Nullstelle.

13.10 Definition. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn $f(U)$ beschränkt ist.

13.11 Lemma. Seien $a \leq b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt.

13.12 Satz. Seien $a \leq b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f auf $[a, b]$ ihr Maximum und ihr Minimum an, d.h. $f([a, b])$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

13.13 Folgerung. Für jede stetige Funktion f auf $[a, b]$, $a \leq b$, ist

$$f([a, b]) = [c, d] \quad \text{für} \quad c = \min f([a, b]), \quad d = \max f([a, b]).$$

Wie für Folgen definieren wir

13.14 Definition. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

monoton wachsend, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in U$ mit $x_1 < x_2$,

streng monoton wachsend, falls $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in U$ mit $x_1 < x_2$,

monoton fallend, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in U$ mit $x_1 < x_2$,

streng monoton fallend, falls $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in U$ mit $x_1 < x_2$,

monoton, falls f monoton wachsend oder monoton fallend ist.

13.15 Lemma. Jede bijektive, monotone Funktion $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ist stetig.

13.16 Satz (Existenz und Stetigkeit von Umkehrfunktionen). Seien $a \leq b$, $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion und $c = f(a)$, $d = f(b)$. Dann ist f bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ist ebenfalls streng monoton wachsend und stetig. Die entsprechende Aussage gilt auch für streng monoton fallende Funktionen, für die wir aber $c = f(b)$ und $d = f(a)$ setzen.

13.17 Beispiel. Da $f : [0, 2] \rightarrow [0, 4]$ stetig und streng monoton wachsend ist mit $f(0) = 0$ und $f(2) = 4$, ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : [0, 4] \rightarrow [0, 2], x \mapsto \sqrt{x}$ nach Satz 13.16 stetig und streng monoton wachsend.

13.18 Bemerkung. Mit etwas mehr Aufwand kann die Aussage von Satz 13.16 auch für streng monoton wachsende, stetige Funktionen $f : (a, b) \rightarrow (c, d)$ gezeigt werden. Dabei seien $a < b$, $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und $c = \inf f((a, b))$, $d = \sup f((a, b))$. Dann ist f auch bijektiv und $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ ist streng monoton wachsend und stetig.

Ebenso gilt die entsprechende Aussage für halboffene Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$.

13.19 Definition. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig auf U* , falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in U (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Aus der Definition folgt sofort, dass jede gleichmäßig stetige Funktion stetig ist.

13.20 Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

13.21 Beispiel. (a) $x \mapsto 2x + 1$ ist gleichmäßig stetig.

(b) Sei $\alpha > 0$. $f : [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist gleichmäßig stetig.

(c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

In den Tutorien wird gezeigt:

13.22 Satz (Fixpunktsatz). Sei $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig. Dann gibt es mindestens einen Fixpunkt von f , d.h. ein $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = x$.

14 Konvergenz von Funktionenfolgen

14.1 Definition. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent*, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ für alle $x \in U$ existiert (in $\mathbb{R}$). Dann heißt die Funktion

$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

der (punktweise) Grenzwert von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, Schreibweise: $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

(b) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *gleichmäßig konvergent (auf U gegen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$)*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0, x \in U : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

Schreibweise: $f_n \rightarrow f$ (glm.).

Aus der Definition der Folgenkonvergenz, die in (a) zur Definition der punktweisen Konvergenz benutzt wird, folgt direkt, dass jede gleichmäßig gegen f konvergente Funktionenfolge auch punktweise konvergent ist mit punktweisem Grenzwert f .

14.2 Beispiel. Für $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}$, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ mit

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Aber $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmäßig gegen f .

14.3 Satz (Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius r . Dann konvergiert für jedes $R \in [0, r)$ die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

gleichmäßig gegen

$$f : [-R, R] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Beachte, dass – wie in Beispiel 14.2 gesehen – der punktweise Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen nicht stetig sein muss.

14.4 Satz. *Der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist stetig.*

14.5 Folgerung. *Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius r . Dann ist*

$$f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

stetig

14.6 Beispiel. Die Funktionen $\exp$, $\cos$, $\sin$ sind stetig auf $\mathbb{R}$.

15 Exponentialfunktion, Logarithmus, Potenzgesetze und einige trigonometrische Funktionen

15.1 Satz. (a) *Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(x) = \infty$.*

(b) *Die Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ von $\exp$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv mit $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$ sowie $\lim_{x \searrow 0} \ln(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$. Ferner gilt*

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{für alle } x, y > 0.$$

15.2 Definition. Die in Satz 15.1 (b) eingeführte Funktion $\ln$ heißt (natürlicher) *Logarithmus*.

Statt mit „ $\ln$ “ wird dieser auch oft mit „ $\log$ “ bezeichnet.

15.3 Bemerkung. *Erinnert sei an die bereits in Satz 11.20 eingeführten Eigenschaften der Exponentialfunktion wie z.B. der Funktionalgleichung $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ sowie an die Festlegung $e := \exp(1) = 2,7182\dots$. Man kann zeigen, dass e irrational ist.*

15.4 Satz. (a) *Für $a > 0$, $a \neq 1$ ist*

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), x \mapsto \exp_a(x) := \exp(x \ln(a))$$

stetig, bijektiv und

- *streng monoton wachsend, falls $a > 1$,*
- *streng monoton fallend, falls $a < 1$.*

(b) *Die Umkehrfunktion $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ von $\exp_a$ ist stetig bijektiv und*

- *streng monoton wachsend, falls $a > 1$,*
- *streng monoton fallend, falls $a < 1$.*

Beachte

- $\exp(x \ln(a)) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, falls $a = 1$.
- $\exp(n \ln(a)) = a^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

15.5 Definition. (a) Wir setzen für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$a^x := \exp(x \ln(a)).$$

(b) Für $a > 0$, $a \neq 1$, $y > 0$ heißt $\log_a(y)$ *Logarithmus von y zur Basis a* .

Beachte

- $\ln(x)$ ist der Logarithmus von x zur Basis e .
- $a^{\log_a(y)} = y$.

15.6 Satz (Potenzgesetze und Rechenregeln für den Logarithmus).

(a) Seien $a, b > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gelten

- (i) $a^0 = 1$ und $a^1 = a$.
- (ii) $a^{x+y} = a^x a^y$ und $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
- (iii) $a^{xy} = (a^x)^y$ und $(ab)^x = a^x b^x$.
- (iv) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $m \in \mathbb{Z}$.

(b) Seien $a > 0$, $a \neq 1$ und $x, y > 0$. Dann gelten

- (i) $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$.
- (ii) Für $z \in \mathbb{R}$ gilt $\log_a(x^z) = z \log_a(x)$, insbesondere $\ln(x^z) = z \ln(x)$.
- (iii) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ und $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

15.7 Satz (Wichtige Grenzwerte).

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} e^x = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-n} \ln(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
- (d) $\lim_{x \searrow 0} x^n \ln(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
- (e) Für $\alpha > 0$ gelten $\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0$ und $\lim_{x \searrow 0} x^{-\alpha} = \infty$.

15.8 Satz (Additionstheoreme für sin und cos). Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y), \\ \sin(x \pm y) &= \cos(y) \sin(x) \pm \cos(x) \sin(y).\end{aligned}$$

15.9 Lemma. (a) $\sin(x) > 0$ für $x \in (0, 2)$.

(b) $\cos$ ist auf $[0, 2]$ streng monoton fallend und hat genau eine Nullstelle in $[0, 2]$.

15.10 Definition. Das Doppelte der nach Lemma 15.9 (b) eindeutig bestimmten Nullstelle von $\cos$ in $[0, 2]$ bezeichnen wir mit π .

$\pi = 3,14159\dots$

15.11 Satz (Eigenschaften von Cosinus und Sinus).

x	0	$\frac{1}{2}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
(a) $\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0

(b) $\sin$ und $\cos$ sind 2π -periodisch.

(c) $\cos(\pi - x) = \cos(x)$ und $\sin(\frac{\pi}{2} \pm x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist streng monoton fallend, stetig und bijektiv.

15.12 Definition. Die Funktion

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

heißt *Tangens*.

15.13 Satz (Eigenschaften vom Tangens).

(a) $\tan$ ist stetig und π -periodisch.

(b) $\tan(-x) = -\tan(x)$.

(c) $\tan(0) = 0$ und $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$.

(d) $\lim_{x \nearrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$ und $\lim_{x \searrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$.

(e) $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv.

15.14 Definition. (a) Die Umkehrabbildung von $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ heißt *Arcussinus*, Bezeichnung $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Die Umkehrabbildung von $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ heißt *Arcusscosinus*, Bezeichnung $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$.

(c) Die Umkehrabbildung von $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Arcustangens*, $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

15.15 Satz (Polarkoordinatendarstellung).

(a) Jedes $z \in \mathbb{C}$ hat eine Darstellung $z = re^{i\varphi}$ mit $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.

(b) Die Darstellung in (a) ist eindeutig, wenn wir φ in $[0, 2\pi)$ wählen.

Beachte

- φ ist Winkel im *Bogenmaß* (zwischen z und Realteil-Achse in komplexer Zahlenebene).
- In Polarkoordinaten ist Multiplikation besonders leicht, z.B. $r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ oder auch $(re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$.
- $e^{i(\varphi + 2\pi)} = e^{i\varphi}$.

15.16 Beispiel. $z \in \mathbb{C}$ heißt *n-te Einheitswurzel*, wenn $z^n = 1$ gilt. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gibt genau n dieser n -ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$.

16 Differenzierbarkeit

16.1 Definition. Seien $U \subseteq \mathbb{R}$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

- (a) f heißt *in a differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(a) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert. $f'(a)$ heißt *Ableitung von f in a* .

- (b) f heißt *differenzierbar*, falls f in allen $a \in U$ differenzierbar ist. $f' : U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ heißt *Ableitung von f* .

16.2 Bemerkung. (a) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in a , so muss a ein Häufungspunkt von U sein.

- (b) Geometrische Interpretation für $U = \mathbb{R}$: Der *Differenzenquotient* $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ entspricht der Steigung der *Sekante* h durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, die definiert ist durch

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Ist f differenzierbar in a , so konvergiert der Differenzenquotient für $b \rightarrow a$ gegen $f'(a)$ und die Sekante „nähert“ sich

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a).$$

Die Gerade g heißt *Tangente von f in a* .

- (c) Man schreibt statt f' auch den *Differentialquotienten* $\frac{df}{dx}$. Vorsicht, in $\frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x)$ kommt x in doppelter Bedeutung vor, wie man an $f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \frac{df(x)}{dx}|_{x=a}$ erkennt.

16.3 Beispiel. (a) Für $c \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ differenzierbar mit

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto nx^{n-1}.$$

- (c) $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ist in 0 nicht differenzierbar.

- (d) Die Betragsfunktion ist in 0 nicht differenzierbar.

16.4 Satz. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in a , so ist f stetig in a .

16.5 Satz (Lineare Approximation). Seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und $a \in U$ Häufungspunkt von U . Dann ist f genau dann in a differenzierbar mit Ableitung c , wenn es eine Funktion $r : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{x - a} = 0 \quad \text{und} \quad f(x) = f(a) + c(x - a) + r(x) \quad \text{für alle } x \in U.$$

16.6 Satz (Rechenregeln).

- (a) Seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $a \in U$. Dann gelten

- (i) Für alle $c \in \mathbb{R}$ ist cf differenzierbar in a mit $(cf)'(a) = cf'(a)$.
- (ii) $f + g$ und $f - g$ sind differenzierbar in a mit $(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$.
- (iii) Produktregel: fg ist differenzierbar in a mit $(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$.
- (iv) Quotientenregel: Sei $g(a) \neq 0$. Dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar mit

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{g(a)f'(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$$

- (b) Kettenregel: Seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $f(U) \subseteq V$, $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, f differenzierbar in $a \in U$ und g differenzierbar in $f(a)$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in a mit

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

- (c) Ableitung der Umkehrfunktion: Seien I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Ist f differenzierbar in $a \in I$ mit $f'(a) \neq 0$, so ist $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ differenzierbar in $y = f(a)$ mit

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

16.7 Beispiel. (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ ist differenzierbar mit $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Durch Division zweier Polynome p, q auf $\mathbb{R}$ erhalten wir eine rationale Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $U = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$. Diese rationale Funktion ist differenzierbar.

- (c) Für $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), x \mapsto x^2$ ist $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ und $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, $y > 0$.

16.8 Definition. Sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) f heißt *stetig differenzierbar (auf U)*, wenn f differenzierbar ist und f' stetig ist.
- (b) f heißt *1-fach differenzierbar (auf U)*, wenn f differenzierbar ist. $f' = f^{(1)}$ heißt auch *erste Ableitung von f* . Für $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, heißt f *k -fach differenzierbar (auf U)*, wenn $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist. $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$ heißt dann *k -te Ableitung*. Schreibe auch $f^{(0)} = f$, $f'' = f^{(2)}$, $f''' = f^{(3)}$.
- (c) f heißt *k -fach stetig differenzierbar (auf U)*, wenn f k -fach differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist. Die Menge der k -fach stetig differenzierbaren Funktionen von U nach $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$.
- (d) f heißt *beliebig oft differenzierbar (auf U)*, falls $f \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$ für alle $k \geq 1$. Mit $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen.

16.9 Bemerkung. Es gibt stetige Funktionen, die nirgendwo differenzierbar sind.

17 Mittelwertsatz und Anwendungen

Wieder sei stets $U \subseteq \mathbb{R}$.

17.1 Definition. Seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in U$.

- (a) f hat ein *lokales Maximum (Minimum)* in c , falls es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $f(c) \geq f(x)$ (bzw. $f(c) \leq f(x)$) für alle $x \in U \cap U_\delta(c)$. Dann heißt c *Maximalstelle* (bzw. *Minimalstelle*). In beiden Fällen nennen wir c eine *Extremstelle* und $f(c)$ ein *Extremum*.

- (b) f hat ein *globales Maximum (Minimum)* in c , falls $f(c) \geq f(x)$ (bzw. $f(c) \leq f(x)$) für alle $x \in U$.

17.2 Satz (Notwendige Bedingungen für Extremstellen). Seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, f differenzierbar in $c \in U$ und $U_\delta(c) \subseteq U$ für ein $\delta > 0$. Ist c eine Extremstelle, so gilt $f'(c) = 0$.

17.3 Beispiel. (a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ hat ein Minimum in 0 und $f'(0) = 0$.

- (b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ hat kein Extremum in 0, aber $f'(0) = 0$.

17.4 Satz (Satz von Rolle). Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) , und es gelte $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c) = 0$.

17.5 Satz (Mittelwertsatz). (a) Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- (b) Für $a < b$ seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit $f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$ [Allgemeiner Mittelwertsatz].

Im Folgenden werden wir verschiedene Anwendungen des Mittelwertsatzes betrachten.

17.6 Satz (Monotonie). Für $a < b$ sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b) .

- (a) Gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton wachsend auf $[a, b]$.
 (b) Gilt $f'(x) < 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f streng monoton fallend auf $[a, b]$.
 (c) Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant auf $[a, b]$.

17.7 Bemerkung. (a) Auch für halboffene und offene, eigentliche und uneigentliche Intervalle (auch $\mathbb{R}$) anstatt $[a, b]$ lassen sich die Aussagen in Satz 17.6 mit Hilfe von diesem leicht zeigen.

- (b) Mit Satz 17.6 ergibt sich für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ folgende hinreichende Bedingungen für eine Maximalstelle $c \in U$: Es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(c) \subseteq U$, so dass für alle $x \in U \cap U_\delta(c)$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{für } x < c, \\ = 0 & \text{für } x = c, \\ < 0 & \text{für } x > c. \end{cases}$$

Und für eine Minimalstelle $c \in U$ ergibt sich die hinreichende Bedingungen: Es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(c) \subseteq U$, so dass für alle $x \in U \cap U_\delta(c)$

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < c, \\ = 0 & \text{für } x = c, \\ > 0 & \text{für } x > c. \end{cases}$$

17.8 Satz (Hinreichende Bedingungen für Maximal- und Minimalstellen bei zweifacher Differenzierbarkeit). Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweifach differenzierbar und $c \in (a, b)$.

- (a) Sind $f'(c) = 0$ und $f''(c) < 0$, so ist c Maximalstelle.

(b) Sind $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$, so ist c Minimalstelle.

17.9 Satz (Vertauschbarkeit von Grenzwert und Ableitung). Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_n \rightarrow f$ (punktweise) und $f'_n \rightarrow g$ (gleichmäßig) für Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist f stetig differenzierbar mit $f' = g$, d.h. es gilt

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (f'_n).$$

17.10 Satz (Differenzierbarkeit von Potenzreihen). Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ eine Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius r . Dann ist

$$f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad x \in (-r, r).$$

D.h., Potenzreihen können in ihrem Konvergenzgebiet gliedweise differenziert werden.

17.11 Folgerung. Potenzreihen sind innerhalb ihres Konvergenzgebietes beliebig oft differenzierbar.

17.12 Beispiel. Die folgenden Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar mit der angegebenen ersten Ableitung:

(a) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ mit $\exp'(x) = \exp(x)$,

$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\ln'(y) = \frac{1}{y}$,

(b) $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $x \mapsto \exp(\ln(a)x)$ für $a > 0$, mit $\exp'_a(x) = \ln(a) \exp_a(x)$,

$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\log'_a(y) = \frac{1}{y \ln(a)}$ für $a > 0$, $a \neq 1$,

(c) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ mit $\sin'(x) = \cos(x)$,

$\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ mit $\cos'(x) = -\sin(x)$,

$\arcsin : (-1, 1) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$,

$\arccos : (-1, 1) \rightarrow (0, \pi)$ mit $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$,

(d) $\tan : \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ für alle } k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tan'(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$,

$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

17.13 Satz (Regel von de l'Hôpital). Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und existiert

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R},$$

so gelten:

(a) Sind $\lim_{x \nearrow b} f(x) = 0$ und $\lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$, so sind $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ und

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

- (b) Sind $\lim_{x \nearrow b} g(x) = \infty$ oder $\lim_{x \nearrow b} g(x) = -\infty$, so ist $g(x) \neq 0$ für alle $x > s$ für ein $s \in (a, b)$ und es gilt

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für $x \searrow a$.

17.14 Beispiel. (a) Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0$ für $\alpha > 0$.

- (b) Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$. Beim Nachweis mit der Regel von de l'Hôpital, wendet man diese zuerst auf die zweiten/ersten Ableitungen an, dann auf die ersten Ableitungen/Funktionen.

- (c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$, insbesondere $e := \exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

17.15 Definition. Seien $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in U$.

- (a) Ist f n -fach differenzierbar, so heißt

$$T_{f,a}^n : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

n -tes *Taylorpolynom* von f mit Entwicklungspunkt a (beachte $f^{(0)} := f$).

- (b) Ist f beliebig oft differenzierbar, so heißt

$$T_{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

die *Taylorreihe* von f in x mit Entwicklungspunkt a .

17.16 Satz (Taylorsche Formel). Seien I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n+1)$ -mal differenzierbar und $a, b \in I$ (dabei darf $b < a$ sein). Dann gibt es ein c echt zwischen a und b , so dass

$$f(b) = T_{f,a}^n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}.$$

Der letzte Term wird das Restglied nach Lagrange genannt.

Beachte

- $T_{f,a}(x)$ kann Konvergenzradius 0 haben.
- Selbst wenn $T_{f,a}(x)$ einen Konvergenzradius $r > 0$ hat, kann für x mit $|x-a| < r$ (für das $T_{f,a}(x)$ konvergiert) $T_{f,a}(x) \neq f(x)$ gelten
- $T_{f,a}(x) = f(x)$, falls das Restglied in Satz 17.16 für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert.

17.17 Beispiel. (a) Man kann zeigen, dass $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \exp(-x^{-2})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$, beliebig oft differenzierbar ist mit $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also hat $T_{f,0}(x)$ den Konvergenzradius ∞ . Aber $T_{f,0}(x) \neq f(x)$ für alle $x \neq 0$.

- (b) $\ln(x) = T_{f,1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$ für $|x-1| < \frac{1}{2}$ (gilt auch für $0 < x \leq 2$).

17.18 Satz. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ Potenzreihe in $\mathbb{R}$ mit Konvergenzradius r . Dann gilt für

$$f : (a-r, a+r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$$

$f^{(k)}(a) = k!c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $T_{f,a}(x) = f(x)$ für alle $x \in (a-r, a+r)$.

17.19 Satz. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar mit $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n)}(c) = 0$ und $f^{(n+1)}(c) \neq 0$ für ein $c \in (a, b)$. Dann gelten:

- (a) Ist n gerade, so ist c keine Extremstelle.
- (b) Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(c) > 0$, so ist c Minimalstelle.
- (c) Ist n ungerade und $f^{(n+1)}(c) < 0$, so ist c Maximalstelle.

18 Riemann-Integral

Im Folgenden sei stets $a < b$.

18.1 Definition. (a) Für ein $n \geq 1$ heißt $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (wobei die Bezeichnung von $x_0, \dots, x_n$ so gewählt sei, dass $x_0 \leq \dots \leq x_n$) eine *Zerlegung* von $[a, b]$, falls $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

$\mu(Z) := \max\{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, \dots, n\}$ heißt *Feinheit* der Zerlegung Z .

Eine Zerlegung Z' heißt *Verfeinerung* von Z , falls $Z \subseteq Z'$.

(b) Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißen

$$\begin{aligned} O(f, Z) &:= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sup f([x_{i-1}, x_i]) \\ U(f, Z) &:= \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \inf f([x_{i-1}, x_i]) \end{aligned}$$

heißen *Ober-* bzw. *Untersumme* von f bzgl. Z .

18.2 Lemma (Eigenschaften von O und U). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und Z, Z' Zerlegungen von $[a, b]$. Dann:

- (a) Ist $Z \subseteq Z'$, so gelten $U(f, Z') \geq U(f, Z)$ und $O(f, Z') \leq O(f, Z)$.
- (b) $U(f, Z) \leq O(f, Z')$ für beliebige Z, Z' .
- (c) $U(f + g, Z) \geq U(f, Z) + U(g, Z)$ und $O(f + g, Z) \leq O(f, Z) + O(g, Z)$.

18.3 Definition. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

- (a) $\underline{Q}(f) := \inf\{O(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$ heißt *Oberintegral* von f und $\overline{U}(f) := \sup\{U(f, Z) \mid Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\}$ *Unterintegral* von f .
- (b) Ist $\underline{Q}(f) = \overline{U}(f)$, so heißt f auf $[a, b]$ (*Riemann*)-*integrierbar* und wir nennen

$$\int_a^b f(x) dx := \underline{Q}(f)$$

das (*Riemann*)-Integral von f („über $[a, b]$ “ oder „von a bis b “).

18.4 Lemma. Seien A, B nichtleere Mengen mit $x \leq y$ für alle $x \in A, y \in B$. Dann existieren $\inf B$ und $\sup A$ in $\mathbb{R}$ und es gilt $\sup A \leq \inf B$.

18.5 Lemma. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gilt $\overline{U}(f) \leq \underline{Q}(f)$.

18.6 Bemerkung. Für eine stetige, nicht-negative Funktion $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ beschreibt $\int_a^b f(x) dx$ den Flächeninhalt zwischen dem Graph von f und der x -Achse. Das Integral existiert in diesem Fall, wie wir in Satz 18.8 sehen werden.

18.7 Beispiel. (a) Für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto c$ integrierbar mit $\int_a^b c dx = c(b - a)$.

(b) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist integrierbar mit $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

(c) $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(x) = 1$ für $x = 1$ ist integrierbar mit $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

(d) Die Dirichletsche Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 1$ für $x \in \mathbb{Q}$ und $f(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Q}$ ist nicht Riemann-integrierbar.

18.8 Satz. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f integrierbar.

18.9 Bemerkung. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Für ein Paar (Z, ξ) bestehend aus einer Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ und zugehörigen Stützstellen $(\xi_i)_{i=1, \dots, n}$ mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ heißt

$$R(f, Z, \xi) := \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$$

die *Riemann-Summe* von f bzgl. (Z, ξ) . Man kann zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (Z, \xi) : \left(\mu(Z) < \delta \Rightarrow \left| R(f, Z, \xi) - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \right),$$

d.h., dass für jede Folgen (Z_n, ξ_n) mit $\mu(Z_n) \rightarrow 0$ die Riemann-Summen $R(f, Z_n, \xi_n)$ gegen $\int_a^b f(x) dx$ konvergieren.

18.10 Definition. Zu einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ sind der *Positivteil* $f^+ : U \rightarrow \mathbb{R}$ von f und der *Negativteil* $f^- : U \rightarrow \mathbb{R}$ von f definiert durch

$$f^+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) \leq 0, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad f^-(x) := \begin{cases} -f(x), & \text{falls } f(x) < 0, \\ 0, & \text{falls } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Beachte:

- $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$,
- Falls $|f|$ integrierbar ist, entspricht $\int_a^b |f|(x) dx$ dem Flächeninhalt, der von dem Graph von f und der x -Achse eingeschlossen wird.

Für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $[c, d] \subseteq [a, b]$ schreiben wir

$$\int_c^d f(x) dx := \int_c^d f|_{[c, d]}(x) dx$$

falls $f|_{[c, d]} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar ist, und sagen „ f ist integrierbar auf $[c, d]$ “.

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Wir schreiben „ $g \geq f$ “ wenn $g(x) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$ gilt (entsprechend für $=, \leq, <, >$).

18.11 Satz. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Linearität: Sind f und g integrierbar, so ist auch $\alpha f + \beta g$ integrierbar mit

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(b) Monotonie: Sind f, g integrierbar und gilt $f \leq g$, so folgt $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

(c) Sei $c \in (a, b)$. Dann ist f genau dann auf $[a, b]$ integrierbar, wenn f auf $[a, c]$ und $[c, b]$ jeweils integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(d) Ist f integrierbar, so sind f^+ , f^- und $|f|$ integrierbar und es gilt

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

18.12 Definition. Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $a \leq c \leq d \leq b$. Dann setzen wir

$$\int_c^c f(x) dx := 0 \quad \text{und} \quad \int_d^c f(x) dx := - \int_c^d f(x) dx.$$

Beachte, dass mit diesen Definitionen auch Aussagen wie in Satz 18.11 (c) für entsprechende Erweiterungen der Integrationsbereiche gelten.

18.13 Beispiel (Stückweise stetige Funktionen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und $c \in [a, b]$ mit in $\mathbb{R}$ existierenden einseitigen Grenzwerten $\lim_{x \nearrow c} f(x)$ und $\lim_{x \searrow c} f(x)$ (bzw. nur einer von diesen, falls c einer der Randpunkte ist). Dann heißt c eine *Sprungstelle* von f , falls

$$\lim_{x \nearrow c} f(x) \neq f(c) \quad \text{oder} \quad \lim_{x \searrow c} f(x) \neq f(c).$$

f heißt *stückweise stetig*, falls f höchstens endlich viele Sprungstellen hat. Dann gibt es eine Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$, so dass f höchstens in $c \in Z$ springt. Wegen der Existenz der Ableitungen können die stetigen Funktionen $f_i : (x_{i-1}, x_i) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$ an den Rändern stetig fortgesetzt werden zu $\tilde{f}_i : [x_{i-1}, x_i] \rightarrow \mathbb{R}$ und wie in Beispiel 18.7 (c) zeigt man $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}_i(x) dx$. Somit ist f integrierbar auf $[a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \tilde{f}_i(x) dx.$$

Insbesondere sind die Funktionswerte an endlich vielen den Sprungstellen ohne Einfluss auf den Wert des Integrals.

18.14 Bemerkung. Es gibt verschiedene Ansätze Integrale einzuführen. Diese können zu verschiedenen Klassen von integrierbaren Funktionen führen. Eine solche Klasse sind z.B. die Lebesgue-integrierbaren Funktionen, die in der Maß- und Integrationstheorie eingeführt werden und deren Integrale schönere Konvergenzeigenschaften haben. Für stetige Funktionen auf beschränkten, abgeschlossenen Mengen stimmen Riemann- und Lebesgue-Integral aber überein.

18.15 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g \geq 0$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Insbesondere (wähle $g = 1$) gibt es ein $c \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

18.16 Definition. Unter den Voraussetzungen von Satz 18.15 nennen wir

$$\bar{f} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

den Mittelwert von f auf $[a, b]$ und, falls $\int_a^b g(x)dx > 0$,

$$\frac{1}{\int_a^b g(x)dx} \int_a^b f(x)g(x)dx$$

das (mit g) gewichtete Mittel von f auf $[a, b]$.

19 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt sei I stets ein Intervall.

19.1 Definition. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F' = f$ heißt Stammfunktion von f .

19.2 Lemma. Seien F und G Stammfunktionen von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $F - G$ konstant.

19.3 Satz. Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$. Dann ist die Funktion

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(y)dy$$

eine Stammfunktion von f .

19.4 Theorem (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in I$ und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

19.5 Notation. (a) Eine nützliche Schreibweise in Theorem 19.4 ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

(b) Wir benutzen das *unbestimmte Integral*

$$\int f(x)dx$$

als Bezeichnung für eine Stammfunktion, z.B. ist „ $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$ “ eine Kurzschreibweise für „ $\int_a^x y^2 dy = \frac{x^3}{3} - \frac{a^3}{3}$ für geeignete a, x “. Oft wird das unbestimmte Integral auch als Bezeichnung für alle Stammfunktionen gewählt. Dann wird dies durch Addition einer unbestimmten Konstante deutlich gemacht.

Beachte

- Satz 19.3 wird wie Theorem 19.4 auch oft als *Hauptsatz der Differential und Integralrechnung* bezeichnet. Er zeigt, dass für stetige Funktionen die Ableitung als die Umkehrung der Integration angesehen werden kann. Dies liefert uns eine große Klasse von Funktionen, von denen wir die Stammfunktion kennen, z.B. liefert Beispiel 17.12

$$\int e^x dx = e^x, \quad \int \cos(x) dx = \sin(x), \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x), \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x).$$

- Es gibt zu einer Funktion f nicht unbedingt eine explizite Stammfunktion (z.B. geht dies nicht für $f(x) = e^{-x^2}$). Die Stammfunktion ist aber bei stetigem f (wie in diesem Fall) nach Satz 19.3 zumindest als Integral gegeben.
- Da es keinen Kalkül gibt, wie man aus einer stetigen Funktion immer eine explizite Stammfunktion bekommt (siehe letzter Punkt), ist eine gute Möglichkeit oft das Raten der Stammfunktion, z.B. um $\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(|1+x|)$ für $x \neq -1$ zu erhalten.

19.6 Satz (Partielle Integration).

Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $a, b \in I$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = g(x)f(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Die Aussage gilt auch für unbestimmte Integrale.

19.7 Beispiel. (a) $\int_0^\pi x \cos(x) dx = -2$.

(b) $\int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) - x$.

19.8 Satz (Substitutionsregel).

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a, b]) \subseteq I$. Dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

19.9 Beispiel. (a) $\int_1^2 x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} (e^{-1} - e^{-4})$.

(b) Die Fläche einer Kreisscheibe mit Radius r ist πr^2 .

19.10 Bemerkung (Integration rationaler Funktionen - Partialbruchzerlegung).

Rationale Funktionen $\frac{\tilde{p}(x)}{q(x)}$ (d.h. $\tilde{p}, q$ sind Polynome) sind integrierbar auf $[a, b]$, falls $q(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. Folgendes Verfahren hilft bei der Berechnung von $\int_a^b \frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} dx$:

1. Mit Polynomdivision finde eine Darstellung $\frac{\tilde{p}(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{p(x)}{q(x)}$ mit Polynomen r und p , so dass der Grad von p kleiner als der Grad von q ist.
2. r kann direkt integriert werden. Betrachte im Folgenden nur $\frac{p}{q}$.
3. q hat eine Zerlegung (Resultat der Algebra)

$$q(x) = K \prod_{i=1}^k (x - a_i)^{m_i} \prod_{i=1}^l (x^2 + b_i x + c_i)^{n_i}$$

mit Konstanten $K, a_i, b_i, c_i, m_i, n_i$. Dabei sind die a_i Nullstellen der Ordnung m_i von q und die quadratischen Polynome $x^2 + b_i x + c_i$ können nicht weiter zerlegt werden (d.h., haben keine Nullstellen).

4. Mit einem Ansatz

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{i,j}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_{i,j}x + C_{i,j}}{(x^2 + b_i x + c_i)^j}$$

können nach der Multiplikation mit $q(x)$ die Konstanten $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ durch einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden.

5. Die Integrale der Summanden können dann leichter bestimmt werden und ihre Summe ergibt das Integral von $\frac{p}{q}$.

19.11 Beispiel. Für $a < b$ mit $0, 1 \notin [a, b]$ ist $\int_a^b \frac{1}{x(1-x)^2} dx = \left(\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} \right) \Big|_a^b$.

19.12 Satz (Taylorsche Formel mit Restglied in Integralform).

Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine $(n+1)$ -fach stetig differenzierbare Funktion und $a, x \in I$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = T_{f,a}^n(x) + \int_a^x f^{(n+1)}(y) \frac{(x-y)^n}{n!} dy.$$

19.13 Satz (Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation).

Sei $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, stetig und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ so gegeben, dass $f_n \rightarrow f$ (glm.). Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

19.14 Folgerung. Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ können innerhalb ihres Konvergenzgebietes gliedweise integriert werden, d.h. für Konvergenzradius $r > 0$, $-r < a \leq b < r$ gilt

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Insbesondere hat $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ auf $(-r, r)$ die Stammfunktion $x \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$.

20 Uneigentliche Integrale

Ist f zwar auf (a, b) definiert, aber sind $a = -\infty$ oder $b = \infty$ oder ist f in a oder b nicht stetig fortsetzbar, so nennen wir $\int_a^b f(x) dx$ ein *uneigentliches Integral*, falls ihm im Sinne der eigentlichen Konvergenz in Definition 20.1 oder im Sinne der uneigentlichen Konvergenz in Bemerkung 20.2 ein Wert in $[-\infty, \infty]$ sinnvoll zugewiesen werden kann.

20.1 Definition. (a) Sei $-\infty < a < b \leq \infty$. Ist $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, t]$ für alle $t \in (a, b)$ integrierbar und existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x) dx$$

in $\mathbb{R}$, so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ *konvergent*.

(b) Sei $-\infty \leq a < b < \infty$. Ist $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[t, b]$ für alle $t \in (a, b)$ integrierbar und existiert der Grenzwert

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x) dx$$

in $\mathbb{R}$, so heißt das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x) dx$ *konvergent*.

- (c) Seien $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und $c \in (a, b)$. Sind $\int_a^c f(x)dx$ und $\int_c^b f(x)dx$ konvergent, so heißt auch

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

konvergent.

- (d) Im Falle der Konvergenz in Teil (a), (b) oder (c) heißt die Funktionen f *uneigentlich (Riemann-)integrierbar auf (a, b)* .

20.2 Bemerkung. In den Teilen (a) und (b) von Definition 20.1 schreibt man in den Fällen bestimmter Divergenz auch $\int_a^b f(x)dx = \infty$ bzw. $\int_a^b f(x)dx = -\infty$ (f ist dann aber *nicht* uneigentlich integrierbar). In Teil (c) ist diese Notation nur erlaubt, wenn die Summe der uneigentlichen Integrale Sinn macht, d.h. wenn nicht die Fälle „ $\infty - \infty$ “ oder „ $-\infty + \infty$ “ auftreten.

20.3 Beispiel. (a) $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$.

- (b) Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{1+\alpha}, & \alpha > -1 \\ \infty, & \alpha \leq -1. \end{cases}$$

- (c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$.

20.4 Satz (Integralkriterium für Reihen). Sei $n_0 \in \mathbb{N}$, $f : [n_0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ *monoton fallend* und auf $[n_0, t]$ *integrierbar* für alle $t > n_0$. Dann gilt

$$\int_{n_0}^\infty f(x)dx \text{ ist konvergent} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=n_0}^\infty f(n) \text{ ist konvergent.}$$

Im Falle der Konvergenz gilt weiter

$$\sum_{n=n_0+1}^\infty f(n) \leq \int_{n_0}^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^\infty f(n)$$

20.5 Beispiel. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \\ \infty, & \alpha \leq 1. \end{cases}$$

d.h. $\int_1^\infty x^\alpha dx$ ist konvergent genau dann, wenn $\alpha > 1$ gilt. Daraus folgt mit Satz 20.4, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergent ist, wenn $\alpha > 1$ gilt.

Teil III

Lineare Algebra

In diesem Kapitel bezeichne K einen beliebigen Körper.

21 Rechnen mit Matrizen

21.1 Definition. (a) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq 1, m \geq 1$. Eine $m \times n$ -Matrix A über K ist eine Anordnung von mn Elementen aus K in der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Schreibweise: $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$, kurz $A = (a_{ij})$ falls m, n bekannt sind.

Die a_{ij} ($= A_{ij}$) heißen die *Koeffizienten* oder *Einträge* von A . Die j -te Spalte und die i -te Zeile von A bezeichnen wir mit

$$a_{\cdot j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad a_{i\cdot} = (a_{i1} \dots a_{in}).$$

Ferner sei $M(m \times n, K) := \{A \mid A \text{ } m \times n\text{-Matrix über } K\}$. Falls $m = n$, schreiben wir für die *quadratischen Matrizen* $M(n, K) := M(n \times n, K)$.

(b) Für $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ heißt die $n \times m$ -Matrix $A^\top$, definiert durch $(A^\top)_{ij} := a_{ji}$ für alle $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, die *Transponierte* von A .

21.2 Definition (Matrixoperationen). (a) Für $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(m \times n, K)$ und $\lambda \in K$ setzen wir die *Addition von Matrizen* und die *Multiplikation mit Skalaren* fest durch

$$A + B := (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\lambda A := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

(b) Für $A = (a_{ij}) \in M(l \times m, K)$, $B \in M(m \times n, K)$ ist das *Matrixprodukt* definiert durch $AB := C$, wobei $C = (c_{ij}) \in M(l \times n, K)$ mit $c_{ij} := \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$.

21.3 Bemerkung. (a) $(M(m \times n, K), +)$ ist eine abelsche Gruppe mit der *Nullmatrix* (alle Koeffizienten gleich Null) als neutralem Element und dem zu A additiv inversen Element $-A := (-1)A$.

(b) Wenn wir mit Matrizen arbeiten, identifizieren wir $K^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in K\}$ mit $M(n \times 1, K)$, d.h. für $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ schreiben wir auch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n)^\top.$$

Insbesondere ist Ax für $A \in M(m \times n, K)$ und $x \in K^n$ durch das Matrixprodukt definiert, also $Ax \in K^m$ mit $(Ax)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ für $i = 1, \dots, m$.

21.4 Definition. Für $A \in M(m \times n, K)$ heißt

$$f_A : K^n \rightarrow K^m, \quad x \mapsto Ax$$

die zu A gehörige Abbildung.

21.5 Satz (Rechenregeln). Für Matrizen A, B, C geeigneter Größe (d.h., für die die folgenden Matrixoperationen definiert sind) gelten

$$(a) \quad A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC \quad (\text{Distributivgesetze}).$$

$$(b) \quad A(BC) = (AB)C \quad (\text{Assoziativgesetz}).$$

$$(c) \quad (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) \quad \text{für } \lambda \in K.$$

$$(d) \quad f_{A+B} = f_A + f_B, \quad f_{\lambda A} = \lambda f_A \quad \text{für } \lambda \in K, \quad f_B \circ f_A = f_{BA}.$$

21.6 Definition. Eine Matrix $A \in M(n, K)$ heißt *invertierbar*, falls es $A^{-1} \in M(n, K)$ so gibt, dass $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$, wobei $I_n = (\delta_{ij}) \in M(n, K)$ die n -te *Einheitsmatrix* bezeichnet. A^{-1} heißt *Inverse* zu A .

Dabei ist in Definition 21.6

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

das sogenannte *Kronecker Delta*. Also hat I_n in der Diagonalen Koeffizienten 1, ansonsten 0.

21.7 Satz. $GL(n, K) := \{A \in M(n, K) \mid A \text{ invertierbar}\}$ ist eine Gruppe bzgl. der *Matrixmultiplikation* mit neutralem Element I_n und zu A *inverses Element* A^{-1} . Für $A, B \in GL(n, K)$ gelten $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ sowie $(A^{-1})^{-1} = A$.

Die Bezeichnung $GL(n, K)$ kommt von der englischen Bezeichnung *general linear group*.

22 Vektorräume und lineare Abbildungen

22.1 Definition. Ein *Vektorraum* V über einem Körper K (kurz K -Vektorraum) besteht aus einer Menge $V \neq \emptyset$ und Verknüpfungen

$$\tilde{+} : V \times V \rightarrow V, \quad (x, y) \mapsto x \tilde{+} y, \quad \tilde{\cdot} : K \times V, \quad (\lambda, x) \mapsto \lambda \tilde{\cdot} x,$$

genannt *Addition* und *skalare Multiplikation*, für die gelten:

(V1) $(V, \tilde{+})$ ist abelsche Gruppe.

(V2) Für $\lambda, \mu \in K, x, y \in V$ gelten

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \tilde{\cdot} x &= \lambda \tilde{\cdot} x \tilde{+} \mu \tilde{\cdot} x, & \lambda \tilde{\cdot} (x \tilde{+} y) &= \lambda \tilde{\cdot} x \tilde{+} \lambda \tilde{\cdot} y \\ \lambda \tilde{\cdot} (\mu \tilde{\cdot} x) &= (\lambda \mu) \tilde{\cdot} x, & 1 \tilde{\cdot} x &= x. \end{aligned}$$

Die Elemente eines Vektorraums nennen wir *Vektoren*.

Beachte

- Wir schreiben ab sofort $+$ statt $\tilde{+}$ und λx für $\lambda \tilde{\cdot} x$. Ob die Addition / Multiplikation im Vektorraum oder im Körper gemeint ist, erschließt sich aus den Summanden bzw. Faktoren.

- Wegen (V1) existiert ein additives neutrales Element, das wir mit 0 oder bei Bedarf mit 0_V bezeichnen.

22.2 Beispiel. (a) $M(m \times n, K)$ mit der Matrixaddition und der Multiplikation mit Skalaren ist ein Vektorraum über K .

- (b) Das Standardbeispiel ist der K^n , $n \geq 1$, mit

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \lambda x := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

für $x = (x_1 \dots x_n)^\top, y = (y_1 \dots y_n)^\top \in K^n, \lambda \in K$.

- (c) Insbesondere für $n = 1$ in (b) folgt, dass K selbst ein Vektorraum über K ist.
- (d) $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum, $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{Q}$ -Vektorraum, aber $\mathbb{Q}$ ist kein $\mathbb{R}$ -Vektorraum.
- (e) Seien X, Y nichtleere Mengen. Die Menge aller Funktionen von X nach Y bezeichnen wir mit Y^X . Für einen Körper K ist

$$K^X = \{f \mid f : X \rightarrow K\}$$

ein Vektorraum. Insbesondere ist die Menge aller Folgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, kurz $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

22.3 Lemma (Rechenregeln für Vektoren). *Sei V ein K -Vektorraum.*

- (a) $0 \cdot x = 0_V$ und $\lambda 0_V = 0_V$ für alle $\lambda \in K, x \in V$.
- (b) Seien $\lambda \in K$ und $x \in V$ mit $\lambda \cdot x = 0_V$. Dann gilt $\lambda = 0$ oder $x = 0_V$.
- (c) $(-1)x = -x$ für alle $x \in V$.

22.4 Definition. Seien V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. Dann heißt U *Unter(vektor)raum* von V , falls für alle $\lambda \in K$ und $x, y \in U$ auch $\lambda x \in U$ und $x + y \in U$ gelten, d.h., falls U bzgl. der Addition und der Multiplikation mit Skalaren abgeschlossen ist.

22.5 Satz. *Jeder Unterraum eines K -Vektorraums ist selbst ein K -Vektorraum.*

Der kleinste Unterraum von einem Vektorraum V ist $\{0_V\}$. Weitere Beispiele sind:

22.6 Beispiel. (a) Sei $V = M(n, K)$. Die Menge der *Diagonalmatrizen* $U = \{A = (a_{ij}) \in V \mid a_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j\}$ ist ein Unterraum von V .

- (b) Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$. Die Gerade $U_m = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = mx_1\}$ durch den Ursprung mit Steigung $m \in \mathbb{R}$ ist ein Unterraum von V .
- (c) Seien $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^2$. Für $c \neq 0$ ist die Gerade $U_{m,c} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = mx_1 + c\}$ kein Unterraum von V , da $0_V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_{m,c}$.
- (d) Sei $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^\mathbb{R}$. Dann ist $U = \{f \in V \mid f \text{ stetig}\}$ ein Unterraum von V .

22.7 Lemma. *Sei I eine Indexmenge, V ein K -Vektorraum und für jedes $i \in I$ sei U_i ein Unterraum von V . Dann ist $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V .*

22.8 Bemerkung. Im Allgemeinen ist die Vereinigung zweier Unterräume nicht wieder ein Unterraum.

22.9 Definition. Sei V ein K -Vektorraum.

- (a) $x \in V$ heißt *Linearkombination* von $x_1, \dots, x_n \in V$, falls $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ existieren mit $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.
- (b) Sei $M \subseteq V$ eine Menge. Die *lineare Hülle* $\text{Lin}(M)$ (oder das *Erzeugnis*) von M ist der Schnitt aller Unterräume von V , die M enthalten.

22.10 Bemerkung. $\text{Lin}(M)$ in Definition 22.9 (b) ist ein Unterraum von V .

22.11 Satz. Sei V ein K -Vektorraum und $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Dann gilt

$$\text{Lin}(M) = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}.$$

22.12 Definition. Seien U und U' Unterräume von einem Vektorraum V . Die *Summe* von U und U' , d.i. $U + U' = \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$, heißt *direkte Summe*, falls jedes $x \in U + U'$ eine eindeutige Darstellung $x = u + u'$ mit $u \in U$, $u' \in U'$ hat.

22.13 Lemma. Seien V ein Vektorraum und U, U' Unterräume von V .

- (a) $U + U' = \text{Lin}(U \cup U')$.
- (b) Es gilt $W = U \oplus U'$ genau dann, wenn $W = U + U'$ und $U \cap U' = \{0\}$.

22.14 Beispiel. In $\mathbb{R}^3$ ist die Summe von den Unterräumen $\{(\lambda \ 0 \ \lambda)^T \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $\{(\mu \ \mu \ \mu)^T \mid \mu \in \mathbb{R}\}$ eine direkte Summe.

22.15 Definition. Seien V und W K -Vektorräume.

- (a) $f : V \rightarrow W$ heißt *linear* (oder *Homomorphismus*), falls

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{für alle } x, y \in V, \lambda \in K.$$

Mit $\text{Hom}(V, W)$ bezeichnen wir die Menge der Homomorphismen von V nach W . Ist $V = W$, so heißt $f \in \text{End}(V) := \text{Hom}(V, V)$ Endomorphismus. Bei Bedarf schreiben wir auch $\text{Hom}_K(V, W)$, $\text{End}_K(V)$.

- (b) Ist $f : V \rightarrow W$ linear und bijektiv, so heißt f ein *Isomorphismus*; und ein *Automorphismus*, falls zusätzlich $V = W$ gilt.
- (c) Existiert ein Isomorphismus von V nach W , so heißen V und W *isomorph*. Wir schreiben dann $V \cong W$.
- (d) Für $f \in \text{Hom}(V, W)$ heißt $\text{Kern}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0_W\}$ der Kern von f . Wir schreiben auch $\text{Bild}(f)$ für $f(V)$.

22.16 Beispiel. (a) Für $A \in M(m \times n, K)$ ist f_A linear.

- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + 3x_2$ ist linear mit $\text{Kern}(f) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -\frac{1}{3}x_1 \}$.
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (x_1 + x_2)^2$ ist nicht linear.
- (d) $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ sind isomorph (als Vektorräume über $\mathbb{R}$).

- (e) Für $a \in \mathbb{R}$ und Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die *Streckung* $f_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto ax$ und die *Drehung* $f_\alpha = f_{A_\alpha}$ um α linear. Dabei ist

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

22.17 Satz. Sei $f \in \text{Hom}_K(V, W)$.

- (a) $f(0_V) = 0_W$ und $f(x - y) = f(x) - f(y)$ für $x, y \in V$.
- (b) Für alle $x_1, \dots, x_n \in V$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, gilt $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.
- (c) Ist f zusätzlich bijektiv, so ist f^{-1} linear (also wieder ein Isomorphismus).
- (d) Ist $g \in \text{Hom}_K(W, X)$, so ist $g \circ f \in \text{Hom}_K(V, X)$.

Aus Teil (a) folgt $0_V \in \text{Kern}(f)$.

22.18 Satz. Sei $f \in \text{Hom}_K(V, W)$.

- (a) Ist U ein Unterraum von V , so ist $f(U)$ ein Unterraum von W . Insbesondere ist $\text{Bild}(f)$ ein Unterraum von W .
- (b) Ist U' ein Unterraum von W , so ist $f^{-1}(U')$ ein Unterraum von V . Insbesondere ist $\text{Kern}(f)$ ein Unterraum von V .
- (c) f ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0_V\}$ gilt.

Zum Beispiel folgt aus Teil (c), dass die Funktion f in Beispiel 22.16 (b) nicht injektiv ist.

22.19 Definition. Seien V ein K -Vektorraum und U ein Unterraum von V . Dann nennen wir $x + U := \{x + u \mid u \in U\}$ einen *affinen Raum* (parallel zu U) oder *Restklasse von x modulo U* und $V/U := \{x + U \mid x \in V\}$ *Quotientenraum von V nach U* oder *Faktorraum von V modulo U* .

22.20 Bemerkung. Durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in U$ wird eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Die Äquivalenzklassen sind von der Form $[x] = x + U$. Nach Satz 7.7 (a) gilt für alle $x, y \in V$

$$x + U = y + U \quad \text{oder} \quad (x + U) \cap (y + U) = \emptyset.$$

22.21 Beispiel. Für $m \in \mathbb{R}$ ist die Gerade $U_m = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = mx_1\}$ durch den Ursprung ein Unterraum vom $\mathbb{R}^2$ (siehe Beispiel 22.6 (b)). Die affinen Räume $y + U_m$ sind Geraden parallel zu U_m . Die Darstellung ist nicht eindeutig. Nach Bemerkung 22.20 gilt $y + U_m = y' + U_m$ genau dann, wenn $y - y' \in U_m$.

22.22 Satz. Seien V ein K -Vektorraum und U ein Unterraum von V .

- (a) V/U ist ein Vektorraum über K mit den Verknüpfungen

$$(x + U) + (y + U) := (x + y) + U, \quad \lambda(x + U) := \lambda x + U$$

für $\lambda \in K$, $x, y \in V$. Ferner ist $0_{V/U} = U$.

- (b) Die kanonische Abbildung $\rho : V \rightarrow V/U$, $x \mapsto x + U$ ist linear und surjektiv mit $\text{Kern}(\rho) = U$.

Die Festsetzung von $+$ und $\cdot$ in (a) ist die einzig mögliche, für die ρ in (b) linear ist.

22.23 Satz (Homomorphiesatz). Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$.

Dann ist $\bar{f} : V/\text{Kern}(f) \rightarrow \text{Bild}(f)$, $x + \text{Kern}(f) \mapsto f(x)$ ein Isomorphismus.

23 Lineare Unabhängigkeit und Basen von Vektorräumen

23.1 Definition. Sei V ein K -Vektorraum. Eine endliche Familie $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ von Vektoren in V heißt *linear unabhängig*, falls

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \right).$$

Eine beliebige Familie von Vektoren in V heißt *linear unabhängig*, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist, und *linear abhängig*, wenn sie nicht linear unabhängig ist.

Ist die Familie $(x_i)_{i \in I}$ linear unabhängig, so nennen wir auch die Vektoren x_i , $i \in I$, sowie die Menge $\{x_i \mid i \in I\}$ *linear unabhängig*.

Eine Linearkombination $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$ mit $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ nennen wir auch *trivial*. Vektoren $x_1, \dots, x_n$ sind also linear unabhängig, wenn $0 = 0_V$ sich nur als triviale Linearkombination von diesen darstellen lässt. Lineare Abhängigkeit von $x_1, \dots, x_n$ bedeutet hingegen

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \quad \wedge \quad \exists i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \neq 0 \right).$$

23.2 Beispiel. Im Vektorraum K^n heißen die Vektoren e_i mit $(e_i)_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$, also

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die *Einheitsvektoren* des K^n . Sie sind linear unabhängig.

23.3 Lemma. Eine Familie von Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn ein Vektor der Familie sich als Linearkombination von anderen Vektoren aus der Familie darstellen lässt.

23.4 Definition. Sei V ein K -Vektorraum.

- (a) Eine Menge $M \subseteq V$ heißt *Erzeugendensystem* von V , falls $\text{Lin}(M) = V$ gilt.
- (b) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt *Basis* von V .

Wir nennen die Elemente einer Basis auch *Basisvektoren*.

Konvention: Wählen wir Vektoren x_i , $i \in I$, aus einer linear unabhängigen Menge, also z.B. aus einer Basis, oder sprechen von einer linear unabhängigen Menge $\{x_i \mid i \in I\}$, so wollen wir stets annehmen, dass die x_i , $i \in I$, paarweise verschieden sind, d.h. $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Trotz dieser Konvention heben wir das „paarweise verschieden“ manchmal besonders hervor, z.B. durch die Sprechweise „Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ mit n Elementen“.

23.5 Beispiel. (a) Die Menge der Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ im K^n bildet eine Basis vom K^n , die *Standardbasis* vom K^n .

- (b) Im K^n ist auch $\{e_1 + e_2, e_2, e_3\}$ eine Basis, aber z.B. $\{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$ ist keine Basis.
- (c) In einem Vektorraum V ist $\{0_V\}$ eine Basis vom Unterraum $\{0_V\}$.

- (d) Wir betrachten in $V = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^n$. Dann ist $\{f_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig, aber keine Basis von V .

23.6 Satz (Eindeutige Darstellung durch Basisvektoren).

Sei V ein K -Vektorraum und $B \subseteq V$. B ist genau dann eine Basis von V , wenn sich jeder Vektor eindeutig als eine Linearkombination von Vektoren aus B schreiben lässt.

23.7 Satz (Existenz und Eindeutigkeitssatz für lineare Abbildungen).

Seien V, W Vektorräume über K , $B = \{x_i \mid i \in I\}$ eine Basis von V und $\{y_i \mid i \in I\}$ eine Teilmenge von W . Dann gibt es genau ein $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $f(x_i) = y_i$ für alle $i \in I$.

Beachte, dass die Vektoren $y_i, i \in I$, nicht paarweise verschieden sein müssen.

23.8 Folgerung. Jede lineare Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m$ ist von der Form $f = f_A$ für eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in M(m \times n, K)$.

23.9 Satz (Charakterisierungssatz für Basen). Seien V ein Vektorraum und B eine Basis von V . Dann sind äquivalent

- (1) B ist eine Basis von V .
- (2) B ist ein minimales Erzeugendensystem (d.h. keine Menge $A \subsetneq B$ ist ein Erzeugendensystem).
- (3) B ist maximale linear unabhängige Menge (d.h. keine Menge $A \subset V$ mit $B \subsetneq A$ ist linear unabhängig).

23.10 Theorem (Existenz von Basen).

- (a) Seien V ein Vektorraum, M ein Erzeugendensystem von V und A eine linear unabhängige Teilmenge von M . Dann gibt es eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq M$.

Insbesondere gelten:

- (b) Jeder Vektorraum hat eine Basis.
- (c) Jede linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums kann zu einer Basis erweitert werden.
- (d) Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums enthält eine Basis.

23.11 Beispiel. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ ist $A = \{a_1, a_2\}$ mit $a_1 = (1 \ 2 \ 0)^T$ und $a_2 = (-1 \ 0 \ 1)^T$ ist linear unabhängig und lässt sich daher nach Theorem 23.10 zu einer Basis vom $\mathbb{R}^3$ erweitern, z.B. durch Hinzunahme von $a_3 = (0 \ 1 \ 0)^T$.

23.12 Beispiel. Es gibt Vektorräume mit überabzählbarer Basis, z.B. $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$.

23.13 Definition. Seien V ein Vektorraum und U, U' Unterräume von V . Der Unterraum U' heißt Komplement von U , wenn $V = U \oplus U'$ gilt.

23.14 Satz. Jeder Unterraum eines Vektorraums besitzt ein Komplement.

23.15 Beispiel. Bezeichne $U_m = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = mx_1\}$ wieder die Gerade durch den Ursprung mit Steigung m . Sei $a \in \mathbb{R}$. Zu der Geraden U_a ist jede Gerade U_b mit $b \in \mathbb{R}, b \neq a$ ein Komplement.

24 Endlichdimensionale Vektorräume

24.1 Definition. Ein Vektorraum V heißt *endlich erzeugt*, wenn V ein Erzeugendensystem mit endlich vielen Elementen besitzt.

Beachte, dass nach Theorem 23.10 dann auch eine endliche Basis von V existiert.

Zum Beispiel ist der Vektorraum K^n endlich erzeugt, da $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis und damit ein Erzeugendensystem vom K^n ist.

24.2 Lemma (Austauschlemma). Sei V ein K -Vektorraum und $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V mit n Elementen. Sei ferner $y \in V$ mit $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, und mit $\lambda_j \neq 0$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist auch $B' = \{x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n\}$ eine Basis von V .

24.3 Satz (Austauschsatz von Steinitz). Seien V ein K -Vektorraum, $\{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von V mit n Elementen und $y_1, \dots, y_m$ linear unabhängige Vektoren aus V . Dann lassen sich $x_1, \dots, x_n$ so umnummerieren, dass $\{y_1, \dots, y_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ eine Basis von V ist. Insbesondere gilt $m \leq n$.

24.4 Satz. Sei V ein Vektorraum.

- (a) Ist V endlich erzeugt, so hat jede Basis von V gleichviele Elemente.
- (b) Ist V nicht endlich erzeugt, so hat jede Basis von V unendlich viele Elemente.

24.5 Definition. Für einen K -Vektorraum V heißt

$$\dim V := \begin{cases} n, & \text{falls } V \text{ eine Basis mit } n \text{ Elementen besitzt,} \\ \infty, & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist,} \end{cases}$$

die *Dimension* von V . Im ersten Fall nennen wir V *endlich-dimensional* oder genauer n -dimensional, im zweiten *unendlich-dimensional*.

Die Dimension hängt von dem Vektorraum als Ganzes ab, d.h. auch von dem betrachteten Körper K ab, siehe Teil (c) von Beispiel 24.7, daher schreibt man manchmal $\dim_K(V)$, wenn es zu Missverständnissen kommen könnte.

24.6 Lemma. Für einen Vektorraum V mit $\dim V = n$ gilt:

- (a) Sei E ein Erzeugendensystem von V . Dann gilt $|E| \geq n$. Genau dann ist E eine Basis von V , wenn $|E| = n$ gilt.
- (b) Sei A eine linear unabhängige Teilmenge von V . Dann ist $|A| \leq n$. Genau dann ist A eine Basis von V , wenn $|A| = n$ gilt.

24.7 Beispiel. (a) $\dim(V) = 0 \Leftrightarrow V = \{0\}$.

(b) $\dim(K^n) = n$.

- (c) Der Vektorraum $\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{C}$ hat z.B. Basis $\{1\}$ und damit Dimension 1.
Der Vektorraum $\mathbb{C}$ über dem Körper $\mathbb{R}$ hat z.B. Basis $\{1, i\}$ und damit Dimension 2.
Der Vektorraum $\mathbb{R}$ über $\mathbb{Q}$ ist unendlich-dimensional, siehe Beispiel 23.12.

24.8 Satz. (a) Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim V = n$. Dann gibt es einen Isomorphismus $f: K^n \rightarrow V$, d.h., es gilt $V \cong K^n$.

(b) Seien V, W endlich erzeugte K -Vektorräume. Dann gilt $W \cong V$ genau dann, wenn $\dim V = \dim W$ gilt.

24.9 Satz. Sei U ein Unterraum von einem endlich erzeugten Vektorraum V . Dann gilt $\dim U \leq \dim V$. Ist sogar $\dim U = \dim V$, so gilt $U = V$.

24.10 Satz (Dimensionsformeln).

Sei V ein K -Vektorraum mit $\dim(V) < \infty$ und seien U, U' Unterräume von V . Dann gelten

(a) $\dim(U + U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U')$.

(b) Sei W Unterraum von V . Dann gilt: $W = U \oplus U' \Leftrightarrow (W = U + U' \text{ und } \dim U + \dim U' = \dim W)$.

(c) $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$.

(d) Sei W ein weiterer K -Vektorraum und $f : V \rightarrow W$ linear. Dann gilt $\dim V = \dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f)$.

24.11 Satz. Ist V endlich erzeugt und $f \in \text{End}(V)$, so gilt

$$f \text{ injektiv} \Leftrightarrow f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ bijektiv.}$$