

2 Massenmessungen und Bindungsenergie

2.1 Einführung

Die Kernmasse ist eine der einfachsten zugänglichen Eigenschaften eines Atomkerns. Moderne Massenmessungen können die Masse eines einzelnen Kerns bis auf weniger als 30 keV genau bestimmen.

Die ersten präzisen Massenmessungen wurden von 1919 an von Aston durchgeführt und es wurde bald deutlich, dass für die meisten Elemente verschiedene Isotope mit unterschiedlichen Massen existieren. Dabei stellte sich heraus, dass die Massen der verschiedenen Isotope fast genau ein ganzzahliges Vielfaches der Masse des Wasserstoffatoms sind. Da seinerzeit die Existenz des Neutrons noch nicht bekannt war und man annahm, dass Atome nur aus Protonen und Elektronen bestehen, warf diese Beobachtung sehr fundamentale Fragen auf.

Heute wissen wir, dass in einem Kern Z Protonen und N Neutronen vorhanden sind. Die Massenzahl des Kerns ist $A = N + Z$. Die Masse des Kerns ist also ungefähr $A \cdot M(^1H)$. Wenn man jedoch genauer hinsieht, sind Protonen und Neutronen unterschiedlich schwer und zudem reduziert sich die Gesamtmasse um die Bindungsenergie des Systems.

Dabei wird die Bindungsenergie BE üblicherweise für Atome und nicht Kerne definiert, da man die Masse der Atome einfacher messen kann als die der Kerne:

$$BE(Z, A) = [Z \cdot M(^1H) + (A - Z) \cdot M_n - M(Z, A)] \cdot c^2 \quad (2.1)$$

Hier ist $M(^1H) = M_p + m_e$ die Masse eines Wasserstoffatoms, wobei die atomare Bindungsenergie von 13,6 eV vernachlässigt werden kann. Des weiteren ist

- $m_e = 0,511 MeV/c^2$ die Ruhemasse des Elektrons,
- $M_p = 938,272 MeV/c^2 = 1836,149 m_e$ die Ruhemasse des Protons und
- $M_n = 939,573 MeV/c^2 = 1838,695 m_e$ die Ruhemasse des Neutrons.

In manchen Tabellenwerken finden wir die Angabe der atomaren Massen nicht direkt als $M(Z, A)$ sondern es wird ein Massendefekt $\Delta = (M(Z, A) - A \cdot 931,5 MeV/c^2) \cdot c^2$ mit der Einheit MeV angegeben.

Weitere wichtige Größen sind die sogenannten Separationsenergien für Protonen und Neutronen.

Die *Neutronenseparationsenergie* S_n ist die Energie, die benötigt wird ein Neutron von einem Kern zu entfernen. Sie ist definiert durch:

$$S_n = BE(Z, A) - BE(Z, A - 1) \quad (2.2)$$

$$= [M(Z, A - 1) - M(Z, A) + M_n] \cdot c^2. \quad (2.3)$$

Analog hierzu ist die *Protonenseparationsenergie* S_p definiert als:

$$S_p = BE(Z, A) - BE(Z - 1, A - 1) \quad (2.4)$$

$$= [M(Z - 1, A - 1) - M(Z, A) + M(^1H)] \cdot c^2. \quad (2.5)$$

Die Separationsenergie ist das Analogon zur Ionisationsenergie in der Atomphysik, da sie etwas über die Bindung des äußersten Nukleons aussagt.

2.2 Magnetspektrographen und -spektrometer

Die älteste Methode der Massenmessung von Kernen wurde von Thomson (1912) und Aston (1919) entwickelt und wird auch heute noch verwendet. Die Methode beruht auf der Tatsache, dass geladene Teilchen in magnetischen und elektrischen Feldern abgelenkt werden. Die meisten Massenspektrometer verwenden sowohl ein elektrisches Feld (als Energiefilter) und ein magnetisches Feld (als Impulsfilter). In einem elektrischen Sektorfeld mit einer Feldstärke E ist der Krümmungsradius r_E einer Ionenbahn proportional zur Energie der Teilchen,

$$r_E = \frac{m}{q} \cdot \frac{v^2}{E}, \quad (2.6)$$

während der Krümmungsradius r_M in einem Magnetfeld B proportional zum Impuls der Ionen ist:

$$r_M = \frac{m}{q} \cdot \frac{v}{B}. \quad (2.7)$$

Das Massen-zu-Ladungs Verhältnis der Ionen ergibt sich dann einfach aus

$$r_E \cdot E \frac{q}{m} = r_M^2 \cdot B^2 \left(\frac{q}{m} \right)^2 \quad (2.8)$$

$$\frac{m}{q} = \frac{r_M^2 \cdot B^2}{r_E \cdot E}. \quad (2.9)$$

Üblicherweise werden einfach geladene Ionen ($q=1$) für dieser Art der Massenmessung verwendet, so dass die Masse eindeutig bestimmt werden kann.

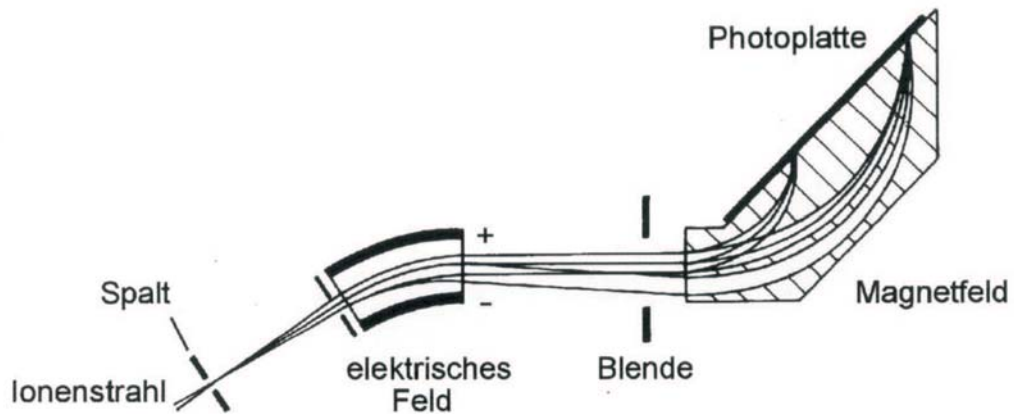


Abb. 2.1: Massenspektrograph (aus Bethge)

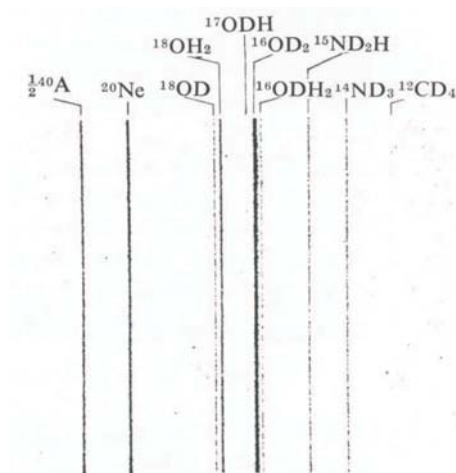


Abb. 2.2: Massenspektrum bei $A=20$ mit verschiedenen Sauerstoffverbindungen und anderen Molekülen. Die Auflösung beträgt etwa $1/80000$. (aus Segre, *Nuclei and Particles*)

Prinzipiell unterscheidet man zwischen Massenspektrographen und Massenspektrometern. Bei einem Massenspektrographen (Abb. 2.1) werden bei fest eingestellter Feldstärke die verschiedenen Massen auf verschiedene Positionen in der Fokalebene des Spektrographen fokussiert (Abb. 2.2). Bei einem Massenspektrometer (Abb. 2.3) wird hingegen eine bestimmte Masse durch eine Veränderung der Felder durch ein Schlitzsystem in einen Faradaycup fokussiert.

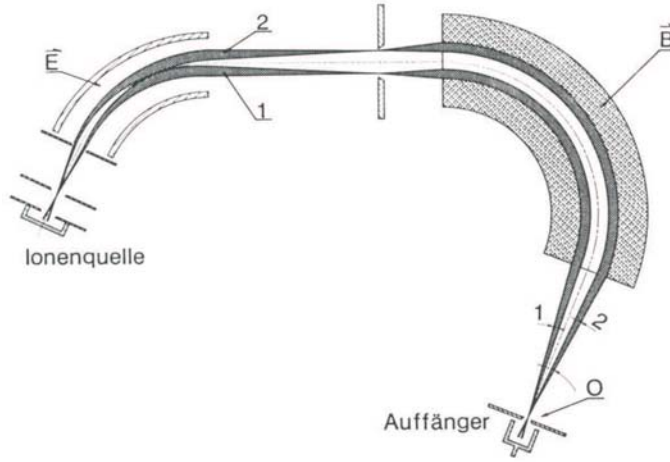


Abb. 2.3: Massenspektrometer (aus Povh)

Es ist offensichtlich, dass relative Messungen erheblich genauer sein können als absolute Messungen. Man benötigt hierfür natürlich einen guten Massenstandard. Wie bei der Definition der atomaren Masseneinheit wird auch hier ^{12}C als Standard herangezogen. Da ^{12}C komplexe Moleküle bildet, stehen Referenzmassen im gesamten Massenbereich der Nuklidkarte zur Verfügung. Bei relativen Massenmessungen können Genauigkeiten bis zu $dM/M \approx 10^{-8}$ erreicht werden.

2.3 Frequenzmessung

Eine grundsätzlich andere Art der Massenmessung geschieht nicht über die Messung der Ablenkradien in elektromagnetischen Feldern oder Spannungsmessungen, sondern durch Frequenz- bzw. Zeitmessungen, die wesentlich genauer durchgeführt werden können.

2.3.1 Zyklotronfrequenz

Wie bereits im vorigen Abschnitt erklärt, wird ein geladenes Teilchen in einem homogenen Magnetfeld senkrecht zur Flugrichtung auf einer Kreisbahn abgelenkt. Bei einem genügend großem Magnetfeldbereich bewegen sich die Teilchen auf einer geschlossenen Kreisbahn mit einem Radius, der durch die folgende Gleichgewichtsbedingung bestimmt ist:

$$m\omega^2 r = q \cdot \omega \cdot r \cdot B. \quad (2.10)$$

Die Teilchen bewegen sich also mit einer Zyklotronfrequenz ω_c von

$$\omega_c = \frac{q}{m} B. \quad (2.11)$$

Beispiel 2.1

In einem nicht zu hohen Magnetfeld von 1 Tesla haben einfach geladene ^{12}C Ionen eine Zyklotronfrequenz von

$$\omega_c = \frac{1e}{12u} 1T = \frac{1,6 \cdot 10^{19} \text{C}}{1,992 \cdot 10^{-26} \text{kg}} \cdot 1 \frac{\text{kg}}{\text{Cs}} = 8,3 \text{MHz}.$$

Es ist also möglich atomare Massen durch Messung der Umlauffrequenz in einem Magnetfeld zu bestimmen. Auf diesem Prinzip basiert die Massenmessung mit der Penning-Falle.

2.3.2 Penning Falle

Die Penning Falle basiert auf hyperbolisch geformten axial-symmetrischen Elektroden zwischen denen die Spannung U_0 angelegt wird, und einem homogenen Magnetfeld in Richtung der Symmetrieachse (z-Achse). Abb. 2.4 zeigt das Schema einer Penning Falle.

Das entlang der z-Achse ausgerichtete homogene Magnetfeld führt zu einem Einschluss der Ionen auf einer Kreisbahn in der Falle in der x-y-Ebene. Das elektrische Potential hat die Form [G. Bollen et al., NIMA 368 (96) 675]

$$U(r, z) = U_0 \frac{2z^2 - r^2}{4d^2} \quad (\text{mit } 4d^2 = 2z_0^2 + \rho_0^2). \quad (2.12)$$

Die Komponente von U entlang der z-Richtung (Abb. 2.5) führt zu einem Einschluss der Ionen in z-Richtung. Dies kann man erkennen, wenn man die Kraft in z-Richtung betrachtet:

$$F_z = -q \cdot E = -q \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{qU_0}{d^2} \cdot z. \quad (2.13)$$

Wir haben es also mit einer linearen Rückstoßkraft zu tun (wie bei einer Feder) und die Bewegungsgleichung in z-Richtung ist daher:

$$\ddot{z} = -\frac{q}{m} \cdot \frac{U_0}{d^2} \cdot z \quad (2.14)$$

was zu einer Oszillationsbewegung führt mit der Frequenz

$$\omega_z = \sqrt{\frac{qU_0}{md^2}}. \quad (2.15)$$

Die Komponenten des elektrischen Feldes in der x-y-Ebene (Abb. 2.5) führen zusammen mit dem Magnetfeld zu einer zusätzlichen Rotationsbewegung der Ionen in dieser Ebene, der so genannten Magnetronbewegung.

Insgesamt führt also die Überlagerung von magnetischem und elektrischem Feld zu einer Bewegung der gespeicherten Ionen, die aus der Superposition von drei harmonischen

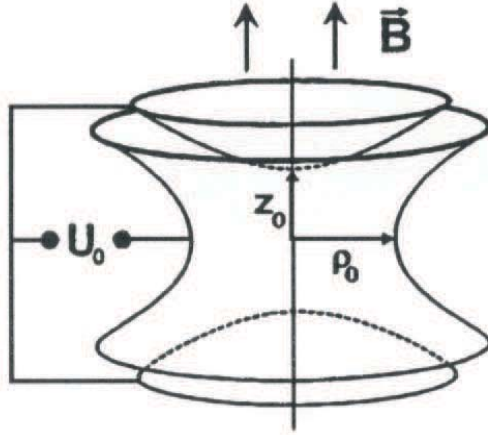


Abb. 2.4: Schematische Anordnung einer Penning Falle (aus W. Mittig, A. Lepine-Szily, N. A. Orr, *Annu. Rev. Nucl. Sci.* 47 (1997)27)

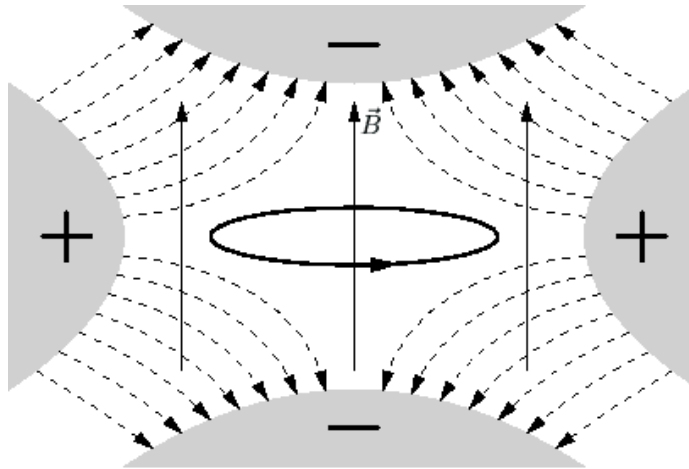


Abb. 2.5: Elektrisches und magnetisches Feld in einer Penningfalle.

Bewegungen besteht. Es gibt einerseits die bereits erwähnte Oszillation in axialer Richtung und andererseits zwei radiale Bewegungen, die reduzierte Zyklotronbewegung und die Magnetronbewegung, mit den Eigenfrequenzen:

$$\omega_+ = \frac{\omega_c}{2} + \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \frac{\omega_z^2}{2}} \quad (\text{reduzierte Zyklotronfrequenz}), \quad (2.16)$$

$$\omega_- = \frac{\omega_c}{2} - \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2 + \frac{\omega_z^2}{2}} \quad (\text{Magnetronfrequenz}). \quad (2.17)$$

Die verschiedenen Bewegungen und die resultierende Gesamtbewegung der Ionen in der Penning-Falle sind in Abb. 2.6 dargestellt.

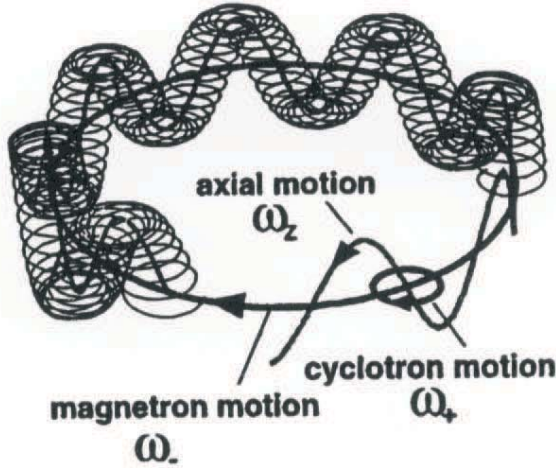


Abb. 2.6: Verschiedene Bewegungsmoden und Gesamtbewegung eines geladenen Teilchens in einer Penningfalle. (aus W. Mittig, A. Lepine-Szily, N. A. Orr, *Annu. Rev. Nucl. Sci.* 47 (1997)27)

2.3.3 Flugzeitmessung mit der Penning-Falle

Die seitliche Elektrode ist im allgemeinen in vier gleiche, elektrisch voneinander isolierte Sektoren aufgeteilt. Somit ist man in der Lage durch Anlegen einer RF Spannung zwischen benachbarten Sektoren ein mit der Frequenz ω_{RF} zeitlich variierendes azimuthales RF-Quadrupolfeld zu injizieren:

$$\varepsilon_x = \frac{2V_d}{\rho_0^2} \cos(\omega_{RF} \cdot t) \cdot y, \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_y = \frac{2V_d}{\rho_0^2} \cos(\omega_{RF} \cdot t) \cdot x. \quad (2.19)$$

Hierzu wird meist nur eine Amplitude von $V_d \approx 5mV$ benötigt. Durch dieses zeitlich variable Feld kommt es zu einer Kopplung der beiden Rotationsbewegungen. Wenn die RF-Frequenz so gewählt wird, dass

$$\omega_{RF} = \omega_+ + \omega_- = \omega_c, \quad (2.20)$$

kommt es zu einer Oszillation zwischen reiner Zyklotronbewegung und reiner Magnetronbewegung. Dies ist in Abb. 2.7 zu sehen, wo der Übergang von einer reinen Magnetronbewegung (große Umlaufbahn in Abb. 2.7a) zu einer reinen Zyklotronbewegung mit dem gleichen Radius (große Umlaufbahn in Abb. 2.7 b) zu sehen ist.

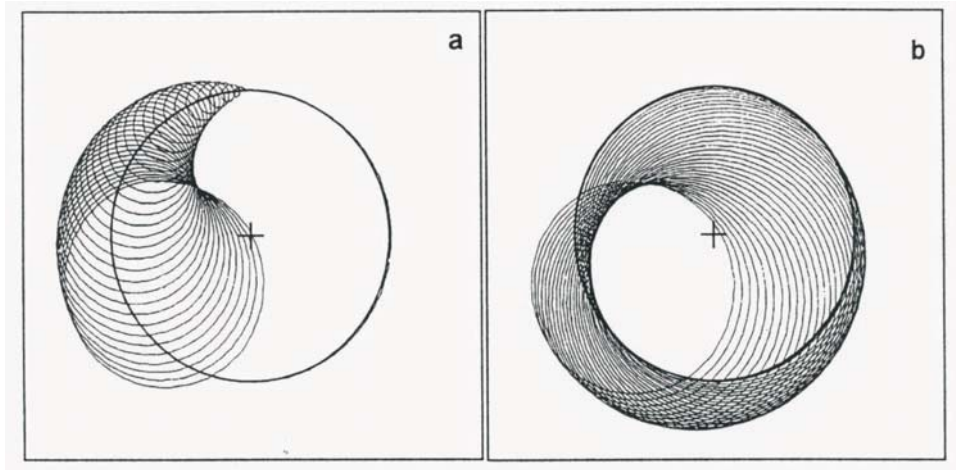


Abb. 2.7: Umwandlung von reiner Magnetronbewegung in reine Zyklotronbewegung in einer Penningfalle durch Einstrahlung eines azimuthalen Quadrupolfeldes. Die Teile a und b zeigen verschiedene Zeitabschnitte.

Für diese Umwandlung wird die Zeit

$$T_{conv} = B \frac{\pi \rho_0^2}{2V_d} \frac{\omega_+ + \omega_-}{\omega_c} \quad (2.21)$$

benötigt.

Üblicherweise werden die Ionen so in die Falle eingebracht, dass sie sich auf einer reinen Magnetronbahn befinden. Nun wird das RF-Feld mit einer bestimmten Frequenz ω_{RF} eingestrahlt. Nach einer festen Einstrahlungszeit, die der zu erwartenden Konversionszeit entspricht, werden die elektrischen Fallenfelder ausgeschaltet und durch einen elektrischen Feldgradienten entlang der z-Achse ersetzt, der die Ionen durch ein zentrales Loch in der oberen Elektrode aus der Falle beschleunigt (Abb. 2.8). Durch einen Magnetfeldgradienten entlang der z-Achse wird die radiale kinetische Energie adiabatisch in axiale kinetische Energie umgewandelt.

Wird die korrekte RF-Frequenz eingestrahlt, so kommt es zu einer vollständigen Umwandlung von Magnetronbewegung in Zyklotronbewegung und die Rotationsenergie der Ionen ist maximal. Dies bedeutet aber auch, dass die Ionen für diese Frequenz $\omega_{RF} = \omega_c$ bei der Extraktion entlang der z-Achse die maximale Energie in axialer Richtung erhalten werden und somit die Flugzeit zum Detektor kürzer ist als für $\omega_{RF} \neq \omega_c$. Misst man also die Flugzeit der Ionen als Funktion der eingestrahlten RF-Frequenz erhält man ein Minimum bei der korrekten Zyklotronfrequenz und kann somit die Masse der Ionen

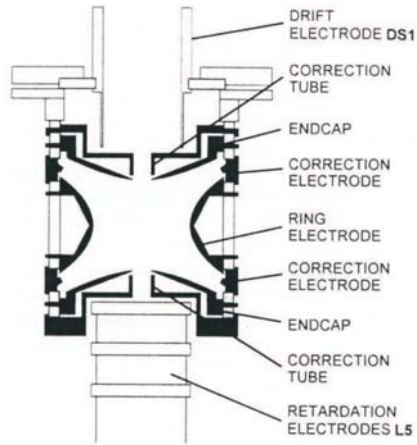


Abb. 2.8: Schnitt durch die Präzisionspenningfalle von ISOLTRAP am CERN (aus: G. Bollen et al., Nucl. Instr. Meth. A368 (1996) 675)

bestimmen. Abb. 2.9 zeigt ein solches Flugzeitspektrum für ^{141}Sm für die Penningfalle ISOLTRAP (Abb. 2.8) an der ISOLDE Facility des CERN. Das Spektrum zeigt eine Massenauflösung von besser als $dm/m \geq 10^{-7}$.

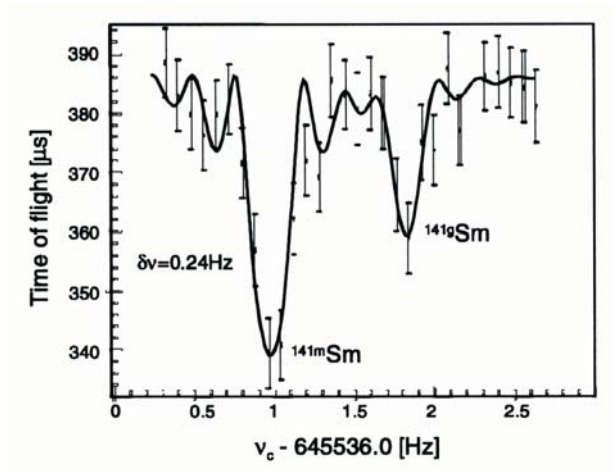
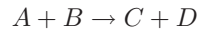


Abb. 2.9: Flugzeitspektrum von ISOLTRAP am CERN für ^{141}Sm . Die beiden Minima repräsentieren den Grundzustand (^{141g}Sm) und den isomeren Zustand (^{141m}Sm), der nur 175 keV über dem Grundzustand liegt. Die Breite der Linien beträgt in diesem Fall $dm/m \approx 10^{-7}$. Der Schwerpunkt der Linien lässt sich genauer bestimmen. (aus G. Bollen, NPA 693 (01) 3)

2.4 Massen aus Kernreaktionen

Neben der direkten Messung der Kernmasse ist es auch möglich die Kernmasse aus Energiebilanzen in Kernreaktionen und Kernzerfällen zu extrahieren. Die Kernzerfälle werden im nächsten Kapitel ausführlich betrachtet und wir werden an dieser Stelle nur die Kernreaktionen diskutieren.

Betrachten wir die Kernreaktion



Die Ruhemassen der vier Teilchen seien M_A , M_B , M_C , M_D . Die Bindungsenergien auf der linken und rechten Seite der Reaktionsgleichung sind nicht gleich.

Diese Differenz wird durch den so genannten Q -Wert der Reaktion beschrieben:

$$Q = [M_A + M_B - M_C - M_D] \cdot c^2 \quad (2.22)$$

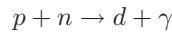
Wir nennen Reaktionen mit $Q > 0$ *exotherme Reaktionen* ($M_{vorher} > M_{nachher}$) und Reaktionen mit $Q < 0$ *endotherme Reaktionen* ($M_{vorher} < M_{nachher}$).

Es ist offensichtlich, dass wir eine unbekannte Kernmasse bestimmen können, wenn wir den Q -Wert der Reaktion messen und die Massen der anderen drei Teilchen kennen.

2.4.1 Masse des Neutrons

Als Beispiel der Bestimmung einer Masse aus Kernreaktionen diskutieren wir die Masse des Neutrons. Da das Neutron nicht geladen ist, lassen sich natürlich die auf elektromagnetischen Feldern beruhenden Methoden nicht anwenden. Die Neutronenmasse muss also durch eine indirekte Methode bestimmt werden.

Wir betrachten die Reaktion zur Bildung von Deuterium, den Einfang eines langsamen Neutrons (thermisch oder kalt) an einem Proton, die zum Beispiel an einem Kernreaktor durchgeführt werden kann:



Hierbei behandeln wir das emittierte Gammaquant als einen der Reaktionspartner. Für die Massenbestimmung des Neutrons benötigen wir als Zutaten die Masse des Protons, die Masse des Deuterons, sowie die Bindungsenergie des Deuterons, die der Energie des emittierten Photons entspricht. Die Neutronenmasse lässt sich berechnen aus

$$M_n = M_d - M_p + BE(d)/c^2 = M_d - M_p + E(\gamma)/c^2.$$

Mit Atommassen von $M(1H) = 938,2796 MeV/c^2$ und $M(^2H) = 1876,1387 MeV/c^2$ und einer Energie des Photons von $E(\gamma) = 2,225 MeV$ erhält man

$$M_n = 939,5731 MeV/c^2.$$

2.5 Bindungsenergie von Kernen

2.5.1 Systematik der Bindungsenergie pro Nukleon

Betrachten wir nun die aus den experimentellen Massen der Atomkerne bestimmten Bindungsenergien

$$BE(Z, A) = [Z \cdot M(^1H) + (A - Z) \cdot M_n - M(Z, A)] \cdot c^2.$$

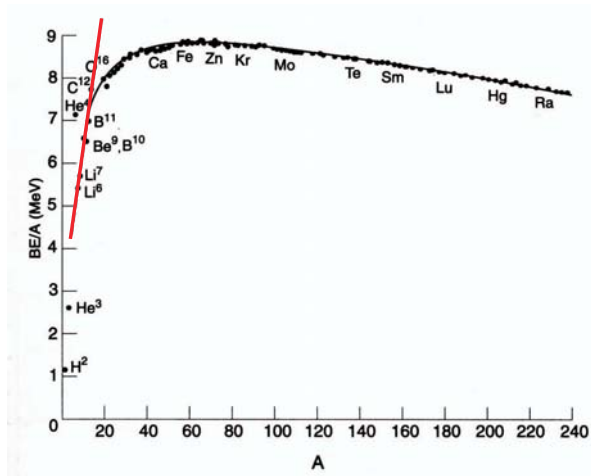


Abb. 2.10: Bindungsenergie pro Nukleon (BE/A) für eine Auswahl von Kernen. Die durchgezogene schwarze Linie ist die Weizsäcker Massenformel. Die rote Linie deutet an, was man erwarten würde, wenn jedes Nukleon mit jedem anderen Nukleon wechselwirkt. (aus Casten, *Nuclear Structure from a simple perspective*, 2000, Oxford Univ. Press)

Abb. 2.10 zeigt die Bindungsenergien pro Nukleon in Abhängigkeit von der Massenzahl A für eine Auswahl von Kernen. Man sieht einen starken Anstieg bei kleinen Massen, ein Abflachen oberhalb von $8 \text{ MeV}/A$ mit einem Maximum bei ca. $A \approx 60$ (Eisen) und nur einen geringen Abfall bis zu $A = 240$.

Aus diesem einfachen Diagramm kann man bereits eine wichtige Eigenschaft der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung im Kern ableiten. Im Prinzip kann in einem Kern mit A Nukleonen jedes Nukleon mit jedem der $(A - 1)$ anderen Nukleonen wechselwirken. Für diesen Fall müsste die Bindungsenergie pro Nukleon mit der Anzahl der Nukleonen linear ansteigen. Die ist jedoch nur bis $A \approx 10$ der Fall. Die Tatsache, dass die Bindungsenergie für $A > 10$ fast konstant ist, zeigt, dass jedes Nukleon nicht mit allen anderen Nukleonen im Kern wechselwirkt, sondern vielmehr nur mit seinen etwa 10 nächsten Nachbarn. Dies bedeutet also, dass es zu einer Sättigung der starken Kernkraft kommt und sie nur eine Reichweite hat, die nicht durch den gesamten Kern reicht, sondern von der Größenordnung der Ausdehnung der Nukleonen ($1 - 2 \text{ fm}$) ist.

2.5.2 Bethe-Weizsäcker Massenformel

In diesem Abschnitt wollen wir ein einfaches semiempirisches Modell für die Beschreibung der Bindungsenergie vorstellen, das von Hans Bethe und Carl Friedrich von Weizsäcker entwickelt wurde.

Der Hauptbeitrag zur Bindungsenergie ist natürlich die Kondensationsenergie, die pro gebundenem Nukleonen frei wird und proportional zur Zahl der gebundenen Nukleonen sein wird.

Im Vorgriff auf ein späteres Resultat sei gesagt, dass die Kerndichte im Inneren von Kernen im wesentlichen unabhängig von der Anzahl der Nukleonen ist. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Nukleonen pro Einheitsvolumen konstant ist. Somit gilt

$$\frac{A}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \text{cons.}$$

und damit ist

$$V \propto A \quad \text{und} \quad R \propto A^{1/3}.$$

Damit kann der Hauptanteil der Bindungsenergie mit einer Volumenenergie identifiziert werden. Wir schreiben den Volumenterm der Bindungsenergie als:

$$a_V \cdot A \quad (\text{Volumenterm})$$

Der Volumenterm geht davon aus, dass alle Nukleonen mit allen ihren Nachbarn gleich stark wechselwirken. Es ist jedoch auch klar, dass die Nukleonen an der Oberfläche des Kerns weniger Nachbarn haben und somit schwächer gebunden sind. Wir führen daher einen Oberflächenterm zur Bindungsenergie hinzu, der jedoch ein negatives Vorzeichen haben muss und natürlich zu $A^{2/3}$ proportional sein muss:

$$-a_S \cdot A^{2/3} \quad (\text{Oberflächenterm})$$

Wir müssen zusätzlich berücksichtigen, dass sich die Protonen im Kern durch die Coulomb-Kraft abstoßen. Jedes der Z Protonen wird von den $(Z-1)$ anderen Protonen abgestoßen. Damit muss der Coulomb-Term proportional zu $Z(Z-1)$ sein. Nimmt man den Kern als homogen geladene Kugel an, so erhält man für die abstoßende Coulombenergie:

$$-a_C \cdot \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} \quad (\text{Coulomb Term})$$

Alle Terme die wir bisher berücksichtigt haben gehen vom Kern als eine Art Flüssigkeitstropfen mit scharfem Radius R aus.

Wie man aus Abb. 1.12 sieht, folgt die Stabilitätslinie für die leichten Kerne der $N = Z$ Linie. Es gibt also eine generelle Präferenz für symmetrische Kerne mit $N = Z$. Für schwere Kerne sorgt die Coulombenergie dafür, dass die stabilen Isotope eines Elements

mehr Neutronen als Protonen haben. Dieses Entfernen von der symmetrischen Situation reduziert jedoch die Bindungsenergie, was in dem so genannten Asymmetrieterm ausgedrückt wird:

$$-a_A \cdot \frac{(Z - \frac{A}{2})^2}{A} \quad (\text{Asymmetrieterm})$$

Der Ursprung des Asymmetrieterms wird später, bei der Betrachtung des Fermi-Gas-Modells klarer werden.

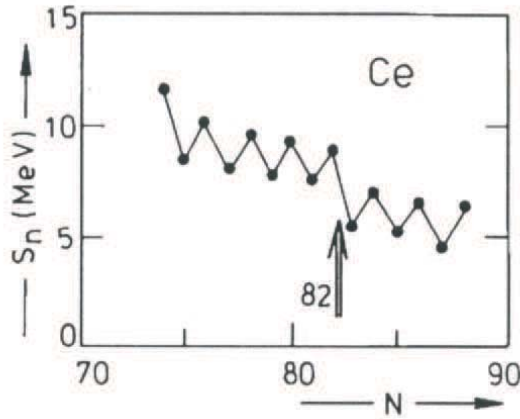


Abb. 2.11: Neutronenseparationsenergie für Ce Isotope ($Z = 58$) als Funktion der Neutronenzahl. (aus K. Heyde, *Basic Ideas and Concepts in Nuclear Physics*, 1999, IOP Publ.)

Zu guter letzt zeigt ein Blick auf Abb. 2.11, die die Neutronenseparationsenergie für Ce Isotope darstellt, dass S_n für gerade N höher ist als für ungerade N . Der Grund hierfür ist in der so genannten Paarungsenergie zu finden, die im Rahmen des Schalenmodells für Kerne noch näher erklärt wird. An dieser Stelle sei nur das Resultat angeben, dass gleichartige Nukleonen sich zu Paaren binden und dabei zusätzliche Energie gewinnen, analog zu den Cooperpaaren in Supraleitern. Somit ist die Bindungsenergie für Kerne mit gerader Protonen- und Neutronenzahl besonders hoch und für Kerne mit ungerader Protonen- und ungerader Neutronenzahl besonders klein. Dies spiegelt sich im so genannten Paarungsterm wider:

$$\left\{ \begin{array}{ll} +\delta & \text{für gg Kerne} \\ 0 & \text{für ug- und gu-Kerne} \\ -\delta & \text{für uu-Kerne} \end{array} \right\} \quad (\text{Paarungsterm}) \quad (2.23)$$

Dabei gilt empirisch:

$$\delta = \frac{a_P}{A^{1/2}}.$$

Damit haben wir alle Terme der Bethe-Weizsäcker Massenformel diskutiert. Die totale Bindungsenergie ergibt sich danach zu:

$$BE(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \pm \delta \quad (2.24)$$

und die Masse der Kerns ist gegeben durch

$$M(A, Z) = Z \cdot M(^1H) + (A-Z) \cdot M_n + a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_A \frac{(Z - A/2)^2}{A} \pm \delta \quad (2.25)$$

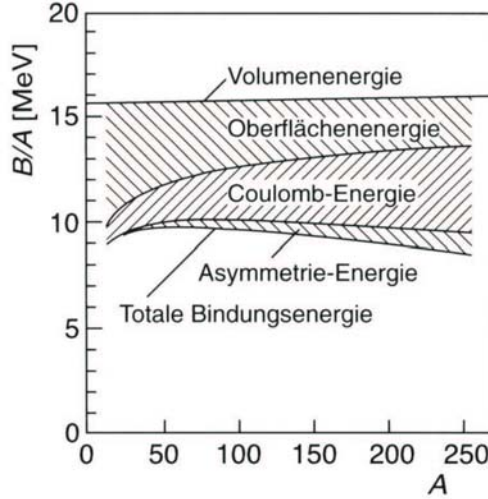


Abb. 2.12: Beiträge der einzelnen Terme der Weizäckerschen Massenformel zur Bindungsenergie pro Nukleon (ohne Paarungsenergie) (aus Povh)

Abb. 2.12 zeigt die Beiträge der einzelnen Komponenten in der Weizäckerschen Massenformel (abgesehen von δ) zur Bindungsenergie. Die in dieser Formel vorkommenden Konstanten werden empirisch bestimmt. Eine mögliche Wahl ist [Wapstrap 1971]:

$$a_V = 15,85 \text{ MeV},$$

$$a_S = 18,34 \text{ MeV},$$

$$a_C = 0,71 \text{ MeV},$$

$$a_A = 92,84 \text{ MeV},$$

$$a_P = 12,0 \text{ MeV}.$$