

3 Stabilität von Kernen

3.1 Massenparabeln und Abbruchkanten

Wie wir gesehen haben, sind die meisten Kerne in der Nuklidkarte, d.h. in der (Z, N) -Ebene nicht stabil. Wenn man Neutronen-Sterne als Kerne mit sehr großer Massenzahl betrachtet, sind es alle vier Grundtypen von Wechselwirkungen die zur Charakterisierung der Stabilität von Kernen beitragen. Es ist die starke Wechselwirkung die den wesentlichen Beitrag zur Bindung von Kernen leistet. Die starke Wechselwirkung zwischen Neutronen oder zwischen Protonen unter sich ist zwar anziehend aber nicht stark genug, um solche Systeme, die nur aus einer Art von Nukleonen bestehen, zu binden. Erst die Gravitation bei Systemen von sehr vielen Neutronen führt in Neutronensternen zu einer solchen Bindung. Bei den üblichen Atomkernen spielt jedoch die Gravitation keine Rolle und es sind nur Systeme gebunden, die zugleich Protonen und Neutronen enthalten. Wir beobachten, dass die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zwischen Proton und Neutron stärker ist als die zwischen gleichen Proton und Proton bzw. Neutron und Neutron. Diese Tatsache führt zur Bindung des Deuterons mit 2,225 MeV Bindungsenergie und zur Bindung schwerer Kernen mit ungefähr gleicher Neutronen- und Protonenzahl. Auch ohne elektro-schwache Wechselwirkung sind jedoch nicht alle Kerne in der Nuklidkarte gebunden. Wenn man sich bei konstanter Massenzahl A sehr weit von der $N=Z$ Linie entfernt, erreicht man zwei Kurven, bei denen die Symmetrieenergie der Volumenenergie die Waage hält. Diese Linien heißen Abbruchkanten. Sie sind dadurch definiert, dass die Separationsenergie verschwindet, d.h. wenn man an der Neutronen-Abbruchkante ein weiteres Neutron hinzufügt, ist das ganze System nicht mehr gebunden. Entsprechendes gilt für die Protonen-Abbruchkante. Ohne Coulombenergie wäre bei fester Massenzahl die $N=Z$ -Linie identisch mit der Linie maximaler Bindungsenergie, die Sohle des Tals der Stabilität. Darüber hinaus wären Kernen mit beliebig großen Teilchenzahlen gebunden.

Die Coulomb-Wechselwirkung zwischen den Protonen bewirkt nun zweierlei: Zum ersten verschiebt sie das ganze Tal der Stabilität, d.h. die Talsohle, aber auch die Abbruchkanten zu größeren Neutronenzahlen. Das bedeutet, dass nur bis etwa $A = 40$ die $N = Z$ -Linie die Sohle des Stabilitätstals bildet. Für schwerere Kerne wird sie zu größeren Neutronenzahlen verschoben, z.B. besitzt der sehr stabile Kern ^{208}Pb 126 Neutronen und nur 82 Protonen. Die $N = Z$ -Linie verläßt bei $N \approx 50$ das Tal der Stabilität. Zum zweiten bewirkt die Coulomb-Wechselwirkung, dass sehr schwere Kerne instabil gegen Spaltung werden. Der Extremfall ist dabei α -Zerfall, d.h. Spaltung in einen Helium-Kern und einen sehr schweren Restkern. Es gibt also keine Kerne mit beliebig großer Massenzahl. Absolut stabil sind dann nur Kerne mit Massenzahl $A \leq 60$. Bei allen schwereren Systemen läßt sich durch Spaltung Energie gewinnen. Wie wir sehen werden, ist dieser Prozess jedoch klassisch verboten und quantenmechanisch nur durch

einen Tunnelprozess möglich ist. Bei Kernen in der Sohle des Tales der Stabilität mit Massenzahl $A \leq 208$ führt dies zu sehr langen Lebensdauern, sodass man diese Kernen praktisch als stabil ansehen kann. Ohne die schwache Wechselwirkung gäbe es also eine sehr große Zahl praktisch stabiler Isotope.

Wenn man nun die schwache Wechselwirkung berücksichtigt, muß man auch Prozesse zulassen, bei denen sich Protonen und Neutronen in einander umwandeln. Auf der rechten Seite des Tals der Stabilität, der neutronen-reichen Seite, kann man also Energie gewinnen durch einen β^- -Zerfall, d.h. durch den Übergang

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3.1)$$

auf der linken Seite durch den β^+ -Zerfall, d.h. durch den Übergang

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e. \quad (3.2)$$

Echt stabil sind deshalb nur Kerne in der Nachbarschaft der Talsohle des Tales der Stabilität. Die schwache Wechselwirkung ist jedoch, wie ihr Name sagt, relativ schwach. Das führt teilweise zu relativ langen Zerfallszeiten. Man untersucht deshalb heute auch instabile, d.h. radioaktive Kerne die mehr oder weniger weit vom der Talsohle entfernt sind.

Wir haben es also bei instabilen Kernen im Grundzustand im wesentlichen mit drei Zerfallsarten zu tun, dem α -Zerfall, bei dem ein He-Kern emittiert wird, dem β -Zerfall, bei dem die Massenzahl A erhalten bleibt und Leptonen emittiert werden, und der Spaltung (f), bei dem der Kern in zwei relativ schwere Bruchstücke zerfällt. Daneben gibt es eine Reihe von exotischen Zerfällen, wie z.B. die Emission eines Protons bei Kernen in der Nähe der Proton-Abbruchkante oder die Emission eines Kohlenstoff-Kerns. Man kann letzteres und im Extremfall auch den α -Zerfall als eine exotische Art der Kernspaltung in zwei sehr ungleiche Fragmente auffassen. Angeregte Zustände in Kernen zerfallen natürlich auch unter Emission von γ -Quanten. Wir werden in späteren Abschnitten dieser Vorlesung darauf zurückkommen. Im Folgenden wollen wir aber zunächst nur die drei wichtigsten Zerfälle von Kernen im Grundzustand, den β -Zerfall, den α -Zerfall und die Kernspaltung (f) diskutieren.

3.2 Beta-Zerfall

Auf Grund der schwachen Wechselwirkung können sich im Nukleon up- und down-Quarks ineinander umwandeln

$$d \longleftrightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3.3)$$

$$d + \nu_e \longleftrightarrow u + e^-, \quad (3.4)$$

$$d + e^+ \longleftrightarrow u + \bar{\nu}_e. \quad (3.5)$$

$$d + e^+ + \nu_e \longleftrightarrow u \quad (3.6)$$

Dem entspricht die Umwandlung von Nukleonen

$$n \longleftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (3.7)$$

$$n + \nu_e \longleftrightarrow p + e^-, \quad (3.8)$$

$$n + e^+ \longleftrightarrow p + \bar{\nu}_e, \quad (3.9)$$

$$n + e^+ + \nu_e \longleftrightarrow p. \quad (3.10)$$

Natürlich muß dabei die Energie- und Impulserhaltung gewährleistet sein.

Wir haben gesehen, dass die Bindungsenergien der Kerne in der Nuklidkarte wegen der Paarungs-Energie drei Schalen bilden. Die größte Bindungsenergie haben gg -Kerne, etwas weniger Bindungsenergie haben ug - und gu -Kerne und die geringste Bindungsenergie haben uu -Kerne.

Man kann die Bethe-Weizsäcker Massenformel in Terme mit unterschiedlichen Potenzen in Z ordnen und erhält damit

$$M(Z, A) = x_1 \cdot Z + x_2 \cdot Z^2 + x_3 \cdot A \pm \delta \quad (3.11)$$

mit

$$x_1 = \left(M(^1H) - M_n - a_A - \frac{a_C}{A^{1/3}} \right),$$

$$x_2 = \left(\frac{a_C}{A^{1/3}} + \frac{a_A}{A} \right)$$

und

$$x_3 = \left(M_n - a_V + \frac{a_S}{A^{1/3}} + \frac{a_A}{4} \right).$$

Für ug -Kerne ($\delta = 0$, A ungerade) ergibt sich also für gegebenes A eine Parabel in Z auf der die Grundzustandsmassen der Kerne liegen. Bezüglich des β -Zerfalls sind nur die Kerne stabil, die nicht durch Änderung der Kernladungszahl um $\Delta Z = \pm 1$ in einen anderen Kern mit gleichem A übergehen können. Für gerades A ergeben sich aufgrund des Paarungsterms zwei Parabeln für uu - und gg -Kerne (siehe Fig. 3.1). Diese Massenparabeln sind der Grund, warum man von einem Tal der Stabilität redet, für das die Massenparabeln bei festem A einen Schnitt durch das Tal repräsentieren.

Im allgemeinen sind die Kerne auf der linken Seite der Massenparabeln (rechte Seite der Nuklidkarte) instabil gegen β^- -Zerfall

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z+1} Y_{N-1} + e^- + \bar{\nu}_e \quad (3.12)$$

bei dem ein Elektron und ein Antineutrino emittiert wird. Für diesen Zerfall gibt es keine Energieschwelle. Es muss zwar die Masse für das erzeugte Elektron aufgebracht werden, gleichzeitig hat aber der erzeugte Tochterkern mit Kernladung $(Z + 1)$ ein Elektron weniger, als das neutrale Atom. Da die Massen-(Energie-)bilanz sich aber auf neutrale Atome bezieht, muss auch diese Elektronenmasse berücksichtigt werden, so dass es insgesamt keine Schwellenenergie für den β^- -Zerfall gibt.

Die Kerne auf der rechten Seite der Massenparabeln (linke Seite der Nuklidkarte) sind instabil gegenüber β^+ -Zerfall

$${}^A_Z X_N \rightarrow {}^A_{Z-1} Y_{N+1} + e^+ + \nu_e \quad (3.13)$$

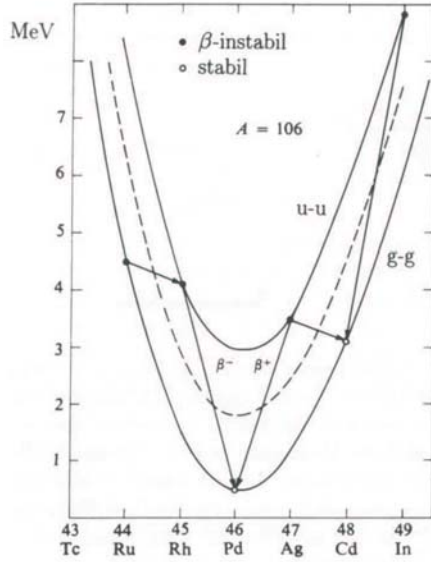


Abb. 3.1: Massenparabeln der Kerne mit der Massenzahl $A=106$ (aus Povh)

Hier wird ein Positron und ein Neutrino emittiert. Die Anzahl der Leptonen ist also erhalten. Dieser Zerfall ist nur möglich, wenn gilt:

$$M(Z, A) > M(Z - 1, A) + 2m_e$$

. Dies kommt daher, dass man einerseits die Masse des erzeugten Positrons aufbringen muss und gleichzeitig der Endkern mit Kernladung $(Z - 1)$ nun ein Elektron gegenüber der neutralen Konfiguration zu viel besitzt. Dieses zusätzliche Elektron des Tochterkerns ist in der Energiebilanz zu berücksichtigen.

Daneben gibt es auch K -Einfang, bei dem ein Hüllenelektron, im allgemeinen aus der K -Schale, eingefangen wird.



Der K -Einfang ist bereits möglich, wenn gilt $M(Z, A) > M(Z - 1, A) + \epsilon$, wobei ϵ die Anregungsenergie der Atomhülle im Endzustand ist.

Wir beschränken uns in der folgenden Diskussion auf den β^- -Zerfall, bei dem sich ein Neutron in ein Proton verwandelt. Die restlichen Prozesse lassen sich in ähnlicher Weise behandeln. In den ersten Experimenten dazu hat man nur das emittierte Elektron und den Rückstoßkern beobachtet. Wegen des großen Massenunterschieds ist die Rückstoßenergie sehr klein. Wir können sie deshalb in sehr guter Näherung bei den folgenden Überlegungen vernachlässigen. Man hat nun die Energie des emittierten Elektrons in

einem β -Spektrometer gemessen und dabei ein kontinuierliches Energiespektrum des Elektrons beobachtet. Da jedoch bei einem Zweiteilchen-Zerfall auf Grund des Energiesatzes die beiden entstehenden Teilchen eine wohldefinierte Energie haben müssen, muß neben dem Elektron mindestens ein weiteres Teilchen, nämlich ein Antineutrino abgestrahlt werden. Auch die Erhaltung des Impulses und des Drehimpulses erfordert die Existenz eines solchen Teilchens. Pauli hat die Notwendigkeit für die Existenz eines weiteren neutralen und nahezu masselosen Teilchens als Erster erkannt und 1930 seine Neutrinohypothese aufgestellt. Die Kerne X und Y haben in der Summe immer ganzzahligen Spin. Da das Elektron den Spin $\frac{1}{2}$ hat, würde die Bilanz nicht stimmen. Das Antineutrino muß also halbzahligen Spin haben.

Die Zerfalls-Energie ist dabei die Differenz der Masse des Mutterkerns und des Tochterkerns

$$E_0 = [m(Z, A) - m(Z + 1, A)] c^2 \quad (3.15)$$

Diese Energie verteilt sich auf die emittierten Teilchen, das Elektron und das Antineutrino und die vernachlässigbar kleine kinetische Rückstoßenergie des Tochterkerns. Das Spektrum des Elektrons ist kontinuierlich. Es reicht von der Energie 0 bis zu einer maximalen Energie

$$E_{\max} = E_0 - m_\nu c^2 \quad (3.16)$$

Zunächst vernachlässigen wir die sehr kleine Masse des Antineutrinos.

Wir wollen nun die Form des Elektronenspektrums berechnen. Dazu gehen wir von der Tatsache aus, dass für den β -Zerfall die schwache Wechselwirkung verantwortlich ist. Wegen der großen Lebensdauer und der geringen Zerfallswahrscheinlichkeit ist diese Wechselwirkung sehr klein gegenüber den anderen im Kern auftretenden Wechselwirkungen, d.h. man kann in sehr guter Näherung zeitabhängige Störungstheorie betreiben und **Fermis goldene Regel** heranziehen. Aus der Atomphysik wissen wir, dass beim Übergang von einem Anfangszustand $|i\rangle$ in einem quantenmechanischen System in einen Endzustand $|f\rangle$ unter Emission eines Photons mit der Energie $E_\gamma = \hbar\omega$ die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit P_{fi} (d.h. die Zerfallsrate) gegeben ist durch den Ausdruck

$$P_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(E_i - E_f - E_\gamma). \quad (3.17)$$

E_i und E_f sind dabei die Energie des Anfangs und des Endzustands und E_γ ist die Energie des emittierten Photons. $\langle f|V|i\rangle$ ist das Matrixelement des Wechselwirkungsoperators, der den Übergang bewirkt. Es muß klein sein gegenüber den Energieabständen des Systems. Andernfalls ist die Störungstheorie nicht gültig. Im Falle der Emission eines Photons aus einem Atom ist V die elektromagnetische Wechselwirkung der Hüllenelektronen mit dem Photon.

Hat man es mit einem Endzustand mit kontinuierlichem Energiespektrum zu tun, so erhält man ein kontinuierliches Photonspektrum und man muß die Zerfallsrate pro Energieintervall berechnen, d.h. die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit $W_{fi}(E_\gamma)dE_\gamma$, dass ein Photon mit der Energie zwischen E_γ und $E_\gamma + dE_\gamma$ emittiert wird. Dazu muß man über alle Endzustände summieren, die im Energieintervall der Größe dE_γ

liegen. Dies sind $\rho_f dE_\gamma$ Zustände, wobei ρ_f die Zustandsdichte des Endsystems ist. Man erhält dann die Zerfallsrate für einen Zerfall unter Emission eines Photons mit der Energie zwischen E_γ und $E_\gamma + dE_\gamma$ als

$$W_{fi}(E_\gamma)dE_\gamma = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(E_i - E_f - E_\gamma) \rho_f dE_\gamma. \quad (3.18)$$

Die gesamte Zerfallsrate erhält man durch Integration über alle E_γ

$$P_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \rho_f. \quad (3.19)$$

wobei ρ_f die Dichte der Endzustände bei der entsprechenden Energie ist. Auch dies ist eine Form der goldenen Regel, die oft benutzt wird. In unserem Fall wollen wir aber das Spektrum der emittierten Elektronen berechnen, d.h. die Zahl der Zerfälle pro Zeit- und Energieeinheit.

Diese Überlegungen lassen sich nun leicht auf den β^- -Zerfall übertragen. In diesem Fall gibt es zwei emittierte Teilchen, das Elektron und das Antineutrino. Man erhält dann die Zerfallsrate für einen Zerfall unter Emission eines Elektrons mit der Energie zwischen E_e und $E_e + dE_e$ und eines Antineutrinos mit der Energie zwischen $E_{\bar{\nu}}$ und $E_{\bar{\nu}} + dE_{\bar{\nu}}$

$$W_{fi}(E_e, E_{\bar{\nu}})dE_e dE_{\bar{\nu}} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \delta(E_0 - E_R - E_e - E_{\bar{\nu}}) \rho_f dE_e dE_{\bar{\nu}}. \quad (3.20)$$

wobei E_0 die Zerfallsenergie (3.15) ist. E_R ist die Rückstoßenergie des Kerns. Wegen seiner großen Masse ist sie jedoch sehr klein und wir werden sie im folgenden vernachlässigen. ρ_f ist die Dichte der Endzustände des Systems aus Tochterkern, Elektron und Antineutrino. $\langle f|V|i\rangle$ ist das Matrixelement der schwachen Wechselwirkung, das den Zerfall beschreibt. Es stellt sich heraus dass die Energieabhängigkeit des Spektrums im wesentlichen schon durch die Niveaudichte der Endzustände ρ_f bestimmt wird, sodass Fermi die Form des Spektrums bereits aus Überlegungen zur Niveaudichte bestimmen konnte.

Da wir es mit diskreten Kernzuständen zu tun haben, ist ρ_f die Niveaudichte im Elektron-Antineutrino-System. Der Einfachheit halber wollen wir im Folgenden vom Spin absehen. Dies ist sicherlich gerechtfertigt, wenn man es mit einem Übergang von einem Zustand mit Drehimpuls 0 im Mutterkern zu einem Zustand mit Drehimpuls 0 im Tochterkern zu tun hat. Dann ist auch das Elektron-Antineutrino-System im einfach entarteten Singulett-Zustand mit Gesamtspin 0. Da es sich beim Elektron und Antineutrino um auslaufende Wellen handelt ergibt sich die Niveaudichte aus folgender Überlegung im Phasenraum.

Die Zahl der Zustände im Phasenvolumen $d\Gamma = V^2 d^3p_e d^3p_{\bar{\nu}} = V^2 p_e^2 dp_e d\Omega_e p_{\bar{\nu}}^2 dp_{\bar{\nu}} d\Omega_{\bar{\nu}}$ ist der Quotient $d\Gamma/(2\pi\hbar)^6$. V ist ein Normierungsvolumen für die ebenen Wellen, das

sich später gegen die Normierung der Elektron- und Antineutrino-Wellenfunktionen im Matrixelement $\langle f|V|i\rangle$ wegheben wird, $d\Omega_e$ und $d\Omega_{\bar{\nu}}$ sind die zugehörigen Raumwinkelemente im Impulsraum und $h = 2\pi\hbar$ ist die Größe der Quantisierungszelle im eindimensionalen Phasenraum. Im Prinzip sind alle Impulsrichtungen erlaubt, da der Rückstoßimpuls vom Tochterkern aufgenommen wird.

Die Absolutbeträge der Impulse p_e und $p_{\bar{\nu}}$ sind durch die relativistischen Energie-Impulsrelationen

$$E_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad \text{und} \quad E_{\bar{\nu}} = p_{\bar{\nu}} c \quad (3.21)$$

festgelegt. Wegen $p_e dp_e = E_e dE_e / c^2$ und $dp_{\bar{\nu}} = dE_{\bar{\nu}} / c$ ergibt sich also die Zahl der Zustände im Energieintervall dE_e und $dE_{\bar{\nu}}$ durch Integration über die Raumwinkel im Impulsraum

$$\rho_f dE_e dE_{\bar{\nu}} = \frac{V^2 (4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 p_{\bar{\nu}}^2 dp_e dp_{\bar{\nu}} = \frac{V^2 (4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6 c^6} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} E_{\bar{\nu}}^2 dE_e dE_{\bar{\nu}} \quad (3.22)$$

Da man das Antineutrino nicht mißt und für dessen Energie gilt $E_{\bar{\nu}} = E_0 - E_e$, erhält man aus Gl. (3.20) nach Integration über die Energie des Antineutrinos $E_{\bar{\nu}}$ die Zerfallsrate für einen Zerfall unter Emission eines Elektrons mit der Energie zwischen E_e und $E_e + dE_e$

$$W_{fi}(E_e) dE_e = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|V|i\rangle|^2 \frac{V^2 (4\pi)^2}{(2\pi\hbar)^6 c^6} E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} (E_0 - E_e)^2 dE_e. \quad (3.23)$$

Der sogenannte Phasenraumfaktor $E_e \sqrt{E_e^2 - m_e^2 c^4} (E_0 - E_e)^2$, der sich aus Niveaudichteüberlegungen ergab, bestimmt die Form des Energiespektrums im wesentlichen. Die schwache Energieabhängigkeit des Matrixelements $|\langle f|V|i\rangle|$ haben wir dabei vernachlässigt.

Dieses Matrixelement ergibt sich durch Integration über die Orts- und Spin-Variablen für das Elektron, das Antineutrino und die Nukleonen im Kern:

$$\langle f|V|i\rangle = \int \Psi_f^* V \Psi_i d\tau. \quad (3.24)$$

Ψ_i und Ψ_f sind dabei die ungestörten Wellenfunktionen des Systems. Es handelt sich also um Produktfunktionen von Elektron-, Antineutrino- und Kernfunktion. Die Reichweite der schwachen Wechselwirkung ist sehr klein. Fermi hat daher vorgeschlagen ihre Ortsabhängigkeit durch δ -Funktionen zu beschreiben. V ist daher proportional zu $\delta(\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_N)$, wobei $\mathbf{r}_l$ die Ortskoordinate des Leptons (Elektron oder Antineutrino) und $\mathbf{r}_N$ die Ortskoordinaten der Nukleonen sind. Wenn wir die sehr kleine Kernaussdehnung vernachlässigen, sind in diesem Integral also nur die Werte der Elektron- und Antineutrino-funktionen am Nullpunkt wesentlich. Wir können daher schreiben

$$|\langle f|V|i\rangle|^2 = |\psi_e(0)|^2 |\psi_{\bar{\nu}}(0)|^2 |M_{fi}|^2 \quad (3.25)$$

Dabei ist M_{fi} ein Kernmatrixelement der schwachen Wechselwirkung, das nicht von der Elektronenenergie abhängt und das die Lepton-Koordinaten nicht mehr enthält. Wir werden im zweiten Teil der Vorlesung, wenn wir die schwache Wechselwirkung besprechen, darauf zurückkommen. $|\psi_e(\mathbf{r})|^2$ und $|\psi_{\bar{\nu}}(\mathbf{r})|^2$ sind jeweils invers proportional zum Normierungsvolumen V . Zusammen mit dem Faktor V^2 in der Niveaudichte (3.22) ergibt sich daraus eine Zerfallswahrscheinlichkeit (3.23), die nicht mehr vom Normierungsvolumen V abhängt.

Wenn wir in einer ersten Näherung für die Elektron- und Antineutrino-Wellenfunktionen ebene Wellen ansetzen, ist $|\psi_e(0)|^2 = |\psi_{\bar{\nu}}(0)|^2 = 1/V$ und es tritt in dem Faktor $|\psi_e(0)|^2 |\psi_{\bar{\nu}}(0)|^2$ keine weitere Energieabhängigkeit auf. Tatsächlich fühlt das Elektron aber die Coulombwechselwirkung mit dem Kern und den Schalelektronen. Wir dürfen also für das Elektron keine ebenen Wellen ansetzen, sondern müssen auslaufende Coulomb-Wellenfunktionen berücksichtigen. Diese sind natürlich von der Energie des Elektrons und von der Kernladungszahl abhängig. Man führt deshalb einen Faktor

$$F(Z, E_e) = \frac{|\psi_e(0)_{Coul}|^2}{|\psi_e(0)_{frei}|^2} \quad (3.26)$$

ein, der tabelliert ist, und erhält dann für das Elektronenspektrum (siehe Fig. 3.2)

$$W_{fi}(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{1}{B} |M_{fi}|^2 F(Z, \varepsilon) \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\varepsilon \quad (3.27)$$

wobei die Konstante $B = 2\pi^3 \hbar^7 / m_e^5 c^4$ nur Naturkonstanten enthält und die Energien $\varepsilon_0 = E_0 / m_e c^2$ und $\varepsilon = E_e / m_e c^2$ in Einheiten der Elektronenmasse genommen werden.

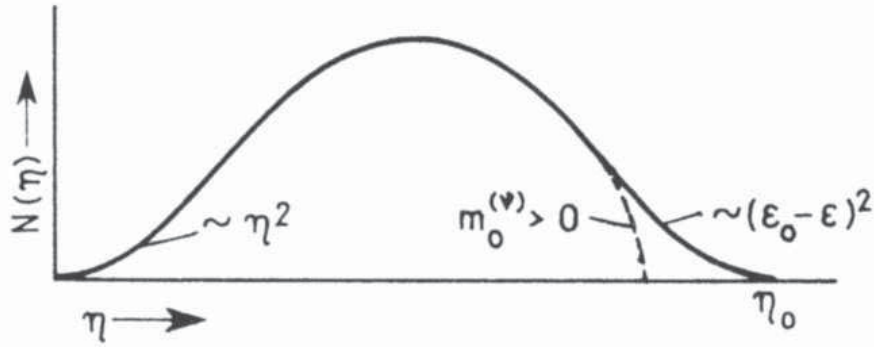


Abb. 3.2: Das Energiespektrum des auslaufenden Elektrons beim β^- -Zerfall

Das Elektron-Spektrum endet bei der maximalen Energie E_0 mit einem quadratischen Abfall. Dies gilt jedoch nur, solange wir die Neutrinomasse vernachlässigen. Bei endlicher Neutrinomasse ergibt sich ein abruptes Ende des Spektrums bei der Energie

$E_0 - m_\nu c^2$. Die Form des oberen Endes des Elektronspektrums erlaubt daher eine Aussage über die Masse des Elektron-Neutrinos. Auf Grund der gegenwärtigen Messgenauigkeit erhält man so eine Grenze von $m_{\nu_e} < 5$ eV.

Die gesamte Zerfallswahrscheinlichkeit ergibt sich durch Integration über die Elektronenergie

$$\lambda = \int_0^{E_0} dE_e W_{fi}(E_e) = \frac{1}{B} |M_{fi}|^2 \int_0^{\varepsilon_0} F(Z, \varepsilon) \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\varepsilon \quad (3.28)$$

Schließlich definieren wir die Funktion

$$f(Z, \varepsilon_0) = \int_0^{\varepsilon_0} F(Z, \varepsilon) \varepsilon \sqrt{\varepsilon^2 - 1} (\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 d\varepsilon \quad (3.29)$$

und erhalten

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{|M_{fi}|^2}{B} f(Z, \varepsilon_0) \quad (3.30)$$

oder

$$f(Z, \varepsilon_0) t_{1/2} = \frac{B \ln 2}{|M_{fi}|^2} \quad (3.31)$$

Die rechte Seite enthält nur noch die Information über die schwache Wechselwirkung und die Kernwellenfunktion. Da man es üblicherweise mit sehr großen Zahlen zu tun hat, hat man sich angewöhnt den Logarithmus dieser Zahl, also den $\log ft$ -Wert

$$\log ft = \log(B \ln 2) - \log |M_{fi}|^2 \quad (3.32)$$

anzugeben.

Die Größe der $\log ft$ Werte sind sehr unterschiedlich. Dies hängt von den für das Kernmatrixelement gültigen Auswahlregeln ab. Man unterscheidet übererlaubte, erlaubte, einfach- und mehrfach verbotene Zerfälle an Hand der Auswahlregeln für Drehimpuls (ΔI) und Parität (π) (siehe Tabelle 3.1)

3.3 Alpha-Zerfall

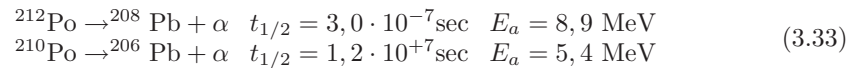
In den natürlichen Zerfallsreihen bildete der α -Zerfall eine der ersten Möglichkeiten, die Radioaktivität von Kernen zu studieren. Er erweist sich auch heute noch als gutes Werkzeug. Seine Vorteile sind, dass er zu diskreten Linien führt, deren Energie in magnetischen Spektrometern oder Ionisationskammern und mit Festkörperdetektoren sehr genau (einige keV) bestimmbar ist. So lassen sich Anregungsspektren von Kernen messen und innerhalb der Zerfallsreihen sehr genaue Massenbestimmungen vornehmen. Die Nachteile sind erstens, dass er nicht bei allen Elementen vorkommt (nur

Übergang	Auswahlregel		$\log ft$	Beispiel	
	ΔI	π		Isotop	$t_{1/2}$
übererlaubt	$0, \pm 1$	+	$3, 5 \pm 0, 2$	^1_0n	11.7 m
erlaubt	$0, \pm 1$	+	$5, 7 \pm 0, 1$	$^{35}_{16}\text{S}$	87 d
einfach verboten	$0, \pm 1$	–	$7, 5 \pm 1, 5$	$^{198}_{79}\text{Au}$	2,7 d
zweifach verb.	± 2	+	$12, 1 \pm 1, 0$	$^{137}_{55}\text{Cs}$	30 a
dreifach verb.	± 3	–	$18, 2 \pm 0, 6$	$^{87}_{37}\text{Rb}$	$6 \cdot 10^{10}$ a
vierfach verb.	± 4	+	22, 7	$^{115}_{51}\text{In}$	$6 \cdot 10^{14}$ a

Tabelle 3.1: Verschiedene Arten der β -Zerfalls

bei den Seltenen Erden und den Elementen jenseits von Blei) und dass die Zerfallswahrscheinlichkeiten extrem energieabhängig sind. Eine der ersten Beobachtungen war das Geiger-Nuttall'sche Gesetz: Trägt man den Logarithmus der Halbwertszeit gegen die reziproke Wurzel aus der zugehörigen Zerfallsenergie auf, so ergeben sich bei Zerfall von gg -Kernen gerade Linien für die verschiedenen Elemente. Bei ungeraden Kernen treten starke Abweichungen auf, die man durch einen sogenannten Hindrance-Faktor charakterisiert. Ein weiteres experimentelles Faktum ist die Tatsache, dass bei gg -Kernen der α -Zerfall bevorzugt zum Grundzustand des Tochterkerns führt, während bei Kernen mit ungeraden Protonen- und Neutronen-Zahlen bevorzugt angeregte Zustände bevölkert werden.

Es gibt Atomkerne, die spontan zerfallen, z.B.



Die Halbwertszeit $t_{1/2}$ ist sehr stark von der Energie des emittierten α -Teilchens abhängig.

$$\Delta E_a = 1 \text{ MeV} \quad \text{entspricht} \quad 4 \text{ Größenordnungen in } t_{1/2}$$

Dies läßt sich nur quantenmechanisch verstehen. Gamov hat dazu bereits 1928 eine Theorie entwickelt, die auf dem quantenmechanischen Tunnelprozess besteht.

Wenn man eine neue Theorie einführt, muß man in folgenden Schritten vorgehen:

1. Zunächst muß man geeignete Freiheitsgrade und dazugehörige Koordinaten wählen.
2. Im zweiten Schritt muß man den Hamiltonoperator festlegen.
3. Zuletzt muß man die Bewegungsgleichung, d.h. die Schrödingergleichung lösen.

Wir wollen den Zerfall des Mutterkerns ($A + 4, Z + 2$) in den Tochterkern (A, Z) und ein α -Teilchen beschreiben und dabei von sphärischen Kernen ausgehen. Wir nehmen dabei an, dass sich zunächst mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit im Mutterkern ein

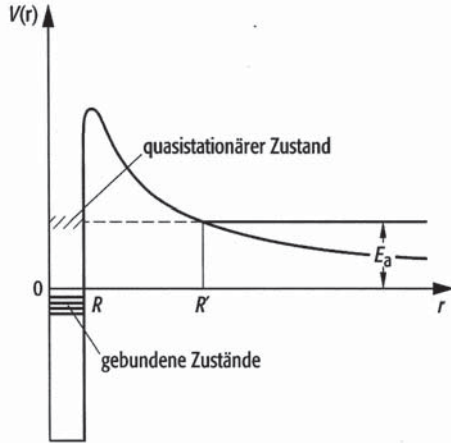


Abb. 3.3: Das Potential des α -Teilchens im Tochterkern

α -Teilchen bildet, das sich im Potential des Tochterkern bewegt und schließlich emittiert wird. Die Koordinate ist deshalb der Relativabstand von Tochterkern und α -Teilchen.

Die kinetische Energie wird durch die reduzierte Masse des Systems

$$\frac{1}{M} \approx \frac{1}{Am_p} + \frac{1}{m_\alpha} \quad (3.34)$$

$$M = \frac{m_\alpha}{1 + 4/A} \approx m_\alpha \quad (3.35)$$

bestimmt. Das α -Teilchen bewegt sich in einem mittleren Potenzial $V(r)$ im Tochterkern (siehe Fig. 3.3). Im Inneren des Kern ist es konstant, außerhalb des Kernradius R ist es ein reines Coulomb-Potenzial

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < R \\ \frac{2Ze^2}{r} & r > R \end{cases} \quad (3.36)$$

Die Tiefe des Potentials im Kerninneren und der Kernradius lassen sich im Prinzip aus Streuexperimenten bestimmen. Man findet bei Pb

$$-V_0 \approx -100 \text{ MeV} \quad R = 6,5 + 1,4 + 1,0 \approx 9 \text{ fm} \quad (3.37)$$

Wegen der hohen Potentialbarriere ist das α -Teilchen nahezu im Kern gebunden. Für $E_a > 0$ kann es aber tunneln. Dies ist ein sehr unwahrscheinlicher Prozess. Bei kleinen Energien hat das Teilchen im Kerninneren den Impuls

$$p \approx \sqrt{2MV_0} \quad (3.38)$$

also die Geschwindigkeit

$$v \approx \sqrt{2V_0/M} \quad (3.39)$$

Es läuft im Kernpotential hin und her und wird dabei an den Wänden reflektiert. Der zeitliche Abstand zweier Stöße an die Wand ist

$$\Delta t \approx \frac{2R}{v} = \frac{2R}{\sqrt{2V_0/M}} \approx \frac{20 fm}{\sqrt{\frac{200 MeV}{3700 MeV/c^2}}} \approx 3 \cdot 10^{-22} \text{ sec.} \quad (3.40)$$

Diese Umlaufzeit ist also sehr klein im Verhältnis zur Halbwertszeit.

Für die Zerfallswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit λ macht man nun folgenden Ansatz

$$\lambda = S \cdot \omega \cdot P \quad (3.41)$$

dabei ist S der *spektroskopische Faktor*, die Wahrscheinlichkeit, dass sich bereits im Kerninneren ein α -Teilchen gebildet hat:

$$S = |\langle \Psi_{A+4} | \Psi_A \Phi_\alpha \rangle|^2. \quad (3.42)$$

Dieser Faktor ist nur schwer zu berechnen, er spielt aber bei der Energieabhängigkeit nur eine geringe Rolle. Man erhält $S \approx 0,01$. ω ist die Frequenz, mit der das Teilchen an die Barriere stößt

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \approx \frac{\sqrt{2V_0/M}}{2R} \quad (3.43)$$

P ist die *Penetrabilität*, die Wahrscheinlichkeit für einen Tunnelprozess. Man kann sie in WKB-Näherung bestimmen und erhält

$$P = e^{-2G} \quad (3.44)$$

mit dem *Gamov-Faktor*

$$G(E_a) = \frac{1}{\hbar} \int_R^{R'} \sqrt{2M(V(r) - E_a)} dr \quad (3.45)$$

Dabei ist R der innere und R' der äußere Wendepunkt, der durch die Gleichung $V(R') = E_a$ festgelegt ist (siehe Abb. 3.3). Wir haben also

$$E_a = \frac{2Ze^2}{R'} \quad (3.46)$$

Darüber hinaus ist die Barrierenhöhe gegeben durch:

$$B = \frac{2Ze^2}{R}. \quad (3.47)$$

Für das Coulomb-Potential läßt sich dieses Integral analytisch lösen und man erhält

$$G = \sqrt{2Mc^2} 2Z\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{E_a}} \arccos \sqrt{\frac{E_a}{B}} - \frac{1}{\sqrt{B}} \sqrt{1 - \frac{E_a}{B}} \right) \quad (3.48)$$

wobei $\alpha = 1/137$. Für $E_a \ll B$, d.h. bis auf Terme $O(E_a^2/B^2)$ finden wir

$$G \approx 2Z\alpha \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2Mc^2}{E_a}} - \sqrt{\frac{2Mc^2}{B}} \right). \quad (3.49)$$

Für den Logarithmus der Zerfallskonstante gilt also das Geiger-Nuttall'sche Gesetz:

$$\begin{aligned} \ln \lambda &= \ln S - \ln \Delta t - 2G(E_a) \\ &= b(Z) - a \frac{Z}{\sqrt{E_a}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

wobei $b(Z)$ eine Funktion der Kernladung und a eine Konstante sind.

Beim Vergleich mit dem Experiment finden wir

$$\frac{t_{1/2}(^{212}\text{Po})}{t_{1/2}(^{210}\text{Po})} = \begin{cases} 4,4 \cdot 10^{-14} & (\text{Gamov-Theorie}) \\ 2,5 \cdot 10^{-14} & (\text{Experiment}) \end{cases}$$

Es gibt 4 Zerfallsreihen in den Aktiniden

Reihe	Mutterkern	$t_{1/2}$	
Thorium	^{232}Th	$1,40 \cdot 10^{10}$ a	(3.51)
Neptunium	^{237}Np	$2,14 \cdot 10^6$ a	
Uranium	^{238}U	$4,47 \cdot 10^9$ a	
Aktinium	^{235}U	$7,04 \cdot 10^8$ a	

Wegen ihrer kurzen Halbwertszeit kommt die Neptunium-Reihe auf der Erde nicht mehr natürlich vor. In Fig. 3.4 zeigen wir die Abhängigkeit des Logarithmus der Halbwertszeit von $1/\sqrt{E_a}$ bei einigen Kernen der Aktiniden. Die experimentell gemessenen Punkte liegen in dieser Darstellung sehr schön auf einer Geraden.

3.4 Kernspaltung

Für die schweren Elemente treibt die Coulomb-Energie den Kern zur Spaltung. Die Oberflächenenergie bevorzugt jedoch eine Kugel. Um zu spalten, muß sich jedoch der Kern zunächst deformieren. Das führt dazu, dass nicht allzu schwere Kerne metastabil sind.

Im Fall der Spaltung ist es schwieriger geeignete Koordinaten einzuführen. Um kleinen Deformationen zu studieren, können wir ellipsoidale Deformationen untersuchen. Bei großen Deformationen gibt es jedoch in der Literatur vielerlei Möglichkeiten. Das Volumen des Gesamtsystems soll dabei konstant bleiben.

- Symmetrische Spaltung mit zwei gleichen Teilkugeln. Dann genügt z.B. der Abstand der Mittelpunkte dieser Kugeln R als Spaltkoordinate

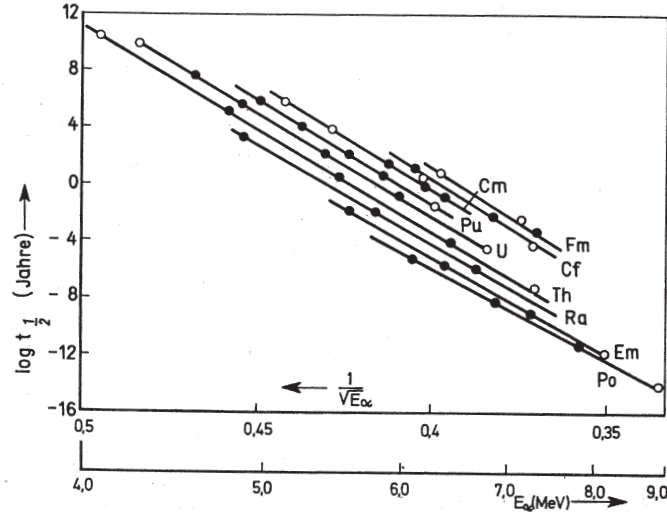


Abb. 3.4: Das Geiger-Nuttall'sche Gesetz (aus Mayer-Kuckuk)

- Bei asymmetrischer Spaltung hat man zusätzlich das Massenverhältnis der Teil-
kugeln

$$\eta = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}.$$

- Man kann auch einen Hals-Freiheitsgrad (Neck) einführen, der eine langsame Tren-
nung der beiden Fragmente erlaubt und durch eine Koordinate h charakterisiert
ist.
- Wir fassen diese Koordinaten zusammen $\alpha = (R, \eta, h, \dots)$ ohne sie im weiteren
Verlauf im Detail zu diskutieren.

Im nächsten Schritt müssen wir den Hamiltonoperator bestimmen. Als potentielle Ener-
gie können wir dabei die Information der Bethe-Weizsäckerformel heranziehen. Wir ver-
nachlässigen dabei die Asymmetrieenergie, da wir annehmen, dass in beiden Fragmenten
dasselbe p/n -Verhältnis besteht, und die Paarungsenergie. Da das Volumen konstant
bleibt, hängt die Volumenenergie nicht von den Spaltkoordinaten ab. Es bleibt also nur
die Coulomb- und die Oberflächenenergie, die den Spaltvorgang dominieren.

Zur Berechnung der Coulombenergie nehmen wir an, dass die Ladungsdichte $\rho_c(\mathbf{r})$ im
Inneren konstant

$$\rho_c = \frac{Ze}{V}$$

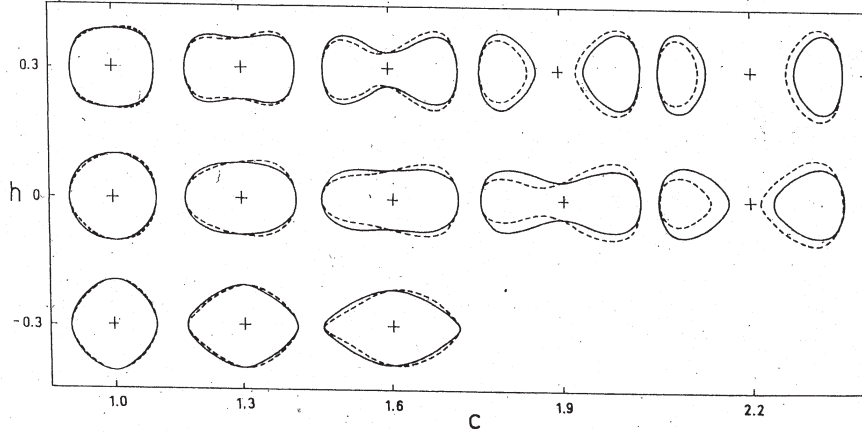


Abb. 3.5: Verschiedene Kernformen beim Spaltprozess. c ist die Elongationskoordinate und h beschreibt einen Halsfreiheitsgrad. Gestrichelte Linien deuten asymmetrische Spaltung an.

ist und dass sie außen verschwindet. Die Coulombenergie ergibt sich dann als ein Integral

$$E_c = \int d^3r_1 d^3r_2 \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \left(\frac{Ze}{V}\right)^2 \iint_{VV} d^3r_1 d^3r_2 \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (3.52)$$

Die Oberflächenenergie erhalten wir als das Produkt der Oberfläche des entsprechenden Körpers mit der Oberflächenspannung σ

$$E_s = \sigma \oint_{S(V)} dA \quad (3.53)$$

Die Oberflächenspannung können wir bei kugelförmigen Kernen im Grundzustand aus der Bethe-Weizsäcker Formel berechnen. Wir finden

$$\sigma = \frac{a_s A^{2/3}}{4\pi R_0^2} = \frac{a_s}{4\pi r_0} \approx 1,03 \text{ [MeV} \cdot \text{fm}^{-2}\text{]}, \quad (3.54)$$

mit $r_0 = 1,2 \text{ fm}$. Da die Oberfläche von den Deformationskoordinaten α abhängt, tut es auch das Potential

$$V(\alpha) = E_s(\alpha) + E_c(\alpha) - E_s(0) - E_c(0) \quad (3.55)$$

$$= E_s(0) \{ (B_s(\alpha) - 1) + 2x(B_c(\alpha) - 1) \}. \quad (3.56)$$

Dabei ist $B_s(\alpha) = E_s(\alpha)/E_s(0)$ die Oberflächenenergie in Einheiten der Oberflächenenergie der Kugel, $B_c(\alpha) = E_c(\alpha)/E_c(0)$ die Coulombenergie in Einheiten der Coulombenergie der Kugel und

$$x = \frac{E_c(0)}{2E_s(0)} = \frac{a_c Z^2}{A^{1/3}} \frac{1}{2a_s A^{2/3}} = \frac{(Z^2/A)}{(Z^2/A)_{crit}} \quad (3.57)$$

der *Fissility-Parameter*. Er charakterisiert den Kern und hängt nicht von der Geometrie ab. Dabei ist

$$\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{crit} = \frac{2a_s}{a_c} \approx 50$$

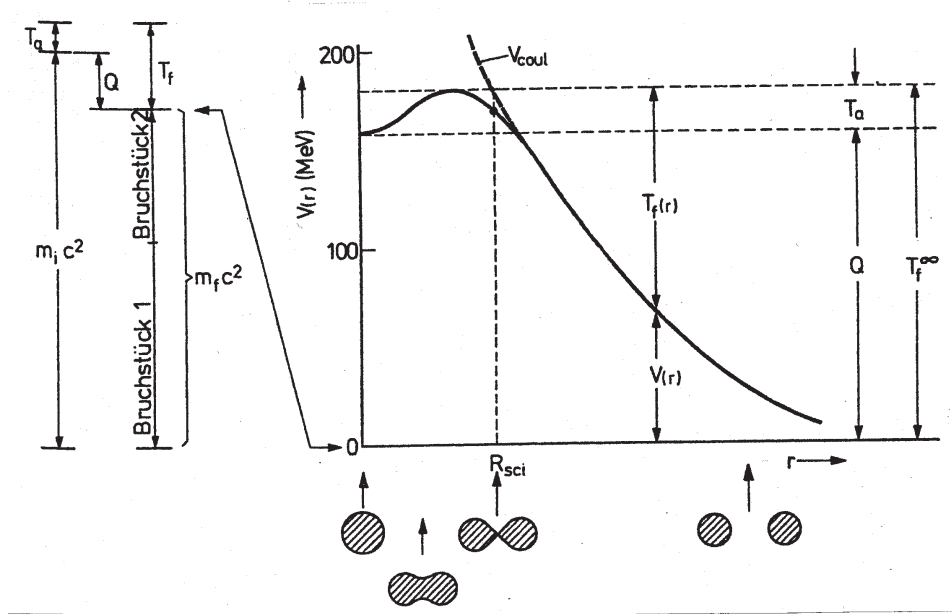


Abb. 3.6: Die Spalt-Barriere im Liquid-Drop Modell

Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Bestimmung der Trägheits-Parameter M in diesen Koordinaten. Nach der Spaltung ist die Trägheit für die Koordinate R sicherlich die reduzierte Masse. Für die restlichen Koordinaten gibt es mehrere mikroskopische Methoden, auf die wir hier nicht eingehen wollen. Im Allgemeinen haben wir es auch mit einem Trägheits-Tensor zu tun. Darüber hinaus hängt die Trägheit von der Deformation ab $M = M(\alpha)$

Wir wollen zunächst die Stabilität bei kleinen Deformationen untersuchen. Dann betrachten wir axialsymmetrische ellipsoidale Formen, die durch den Deformationsparameter α charakterisiert sind. Die Halbachse längs der Symmetrieachse sei a und die senkrecht zur Symmetrieachse sei b :

$$a = R(1 + \alpha) \quad \text{und} \quad b = R(1 - \frac{1}{2}\alpha) \quad (3.58)$$

so dass das Volumen bis auf quadratische Glieder in α^2 erhalten ist

$$V(\alpha) = \frac{4\pi}{3}ab^2 = \frac{4\pi}{3}R^2(1 + \alpha)(1 - \alpha/2)^2 = \frac{4\pi}{3}R^2 + O(\alpha^2). \quad (3.59)$$

Die Oberflächenenergie (3.53) ist

$$E_s = a_s A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \alpha^2 + \dots\right), \quad (3.60)$$

die Coulombenergie (3.52) ist

$$E_c = a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{1}{5} \alpha^2 + \dots\right) \quad (3.61)$$

Die Deformationsenergie ist also

$$\Delta E = E(\alpha) - E(0) = \frac{\alpha^2}{5} \left(2a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3}\right) = \frac{\alpha^2}{5} 2a_s A^{2/3} (1 - x), \quad (3.62)$$

d.h. für $x \lesssim 1$ steigt die Energie mit der Deformation, d.h. die sphärische Gestalt ist stabil. Für $x \gtrsim 1$ ist die sphärische Gestalt nicht mehr stabil und es tritt Spaltung auf.

Für $x \gtrsim 1$ kann wegen des Tunneleffekts spontane Spaltung auftreten. Die Zerfallswahrscheinlichkeit ist entscheidend durch die Penetrabilität bedingt:

$$P = \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \int_{\alpha_0}^{\alpha_a} d\alpha \sqrt{2M(\alpha)(V(\alpha) - E)} \right) \quad (3.63)$$