

7 Elektromagnetische Momente des Grundzustandes

7.1 Spin, Kernspin und Parität

Protonen und Neutronen haben Spin $1/2\hbar$ und sind damit Fermionen. Im Kern haben die Nukleonen einen Bahndrehimpuls $\hat{\ell}$ und der totale Drehimpuls $\mathbf{j}$ eines Nukleons ist die Kopplung von Spin und Bahndrehimpuls:

$$\hat{j} = \hat{\ell} + \hat{s} \quad (7.1)$$

Die möglichen Werte von j [$\langle \hat{j}^2 \rangle = j(j+1)\hbar^2$] sind damit $j = \ell + 1/2$ und $j = \ell - 1/2$.

Der totale Drehimpuls $\hat{I}$ eines Kerns ist dann die Summe der totalen Drehimpulse aller Nukleonen

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^A \hat{j}_i. \quad (7.2)$$

Wie sich später zeigen wird, lässt sich dies jedoch wesentlich vereinfachen. Den totalen Drehimpuls I eines Kerns bezeichnet man auch als *Kernspin*. Da der Bahndrehimpuls ganzzahlig und der Nukleonenspin halbzahlig ist, sind die Kernspins von Kernen mit geradem A ganzzahlig und für Kerne mit ungeradem A halbzahlig.

Die *Parität* eines Kernzustandes ist eine andere wesentliche Quantenzahl zur Charakterisierung der Zustände. Der Paritätsoperator $\hat{P}$ führt zu einer Punktspiegelung am Ursprung, also dem Übergang $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$. Wenn sich die physikalischen Eigenschaften eines Systems nicht ändern, wenn das Koordinatensystem am Ursprung gespiegelt wird, werden sich auch die Observablen nicht ändern. Da die Observablen des Systems von $|\psi|^2$ abhängen, bedeutet dies, dass $|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi(-\vec{r})|^2$, woraus, unter Berücksichtigung der trivialen Bedingung $P \cdot P = 1$, folgt

$$\psi(-\vec{r}) = \pm \psi(\vec{r}). \quad (7.3)$$

Die Wirkung des Paritätsoperators P kann also wie folgt beschrieben werden

$$\hat{P}\psi(\vec{r}) = \pi\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r}), \quad (7.4)$$

wobei $\pi = \pm 1$ ist. Die Zahl π wird als *Parität* bezeichnet und definiert den Symmetriecharakter der Wellenfunktion unter Raumspiegelung.

Ist das Wechselwirkungspotenzial des Hamiltonian invariant unter Raumspiegelungen ($V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$), folgt auch, dass die Wellenfunktionen definierte Parität haben. Umgekehrt folgt für ein System mit $|\psi(\vec{r})|^2 \neq |\psi(-\vec{r})|^2$, dass die Wechselwirkung nicht invariant unter Raumspiegelungen ist.

Sowohl die Coulomb-Wechselwirkung als auch die starke Wechselwirkung erhalten die Parität. Wie später diskutiert werden wird, gilt dies jedoch nicht für die schwache Wechselwirkung.

Man kann sich nun die Frage stellen, wie man die Parität eines Zustandes experimentell bestimmen kann. Da die Eigenschaften des Systems sich unter der Raumspiegelung nicht verändern, läßt sich die Parität nicht aus Meßgrößen bestimmen, die von $|\psi|^2$ abhängen.

Bei Übergangsmatrixelementen $\langle \varphi | \hat{V} | \psi \rangle$, die zwei verschiedene Zustände φ und ψ verknüpfen, kann es je nach Paritätseigenschaften des Operators $\hat{V}$ und der verknüpften Zustände jedoch dazu kommen, dass das Matrixelement verschwindet, wenn die Paritäten der Zustände nicht gleich oder nicht entgegengesetzt sind. Über die Messung von Übergangsmatrixelementen (z.B. im β -Zerfall oder γ -Zerfall) kann also die Parität bestimmt werden.

Die Parität von Zuständen läßt sich zudem oft aus den Eigenschaften des Problems und dem daraus folgenden mathematischen Charakter der Wellenfunktionen bestimmen. Bei einem Zentralpotential $V(\vec{r}) = V(r)$, mit $V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$, kann man bekannterweise die Wellenfunktionen in einen Radialteil und einen Winkelanteil separieren. Der Winkelanteil der Wellenfunktion ist gegeben durch die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$, die Eigenfunktionen des Bahndrehimpulses mit Werten ℓ und m . Da der Radialteil symmetrisch unter Raumspiegelungen ist, ist die Parität der Wellenfunktionen für ein Zentralpotential durch die Paritätseigenschaften der Kugelflächenfunktionen gegeben:

$$\hat{P}Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^\ell \cdot Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi). \quad (7.5)$$

Daher haben Wellenfunktionen mit geradem ℓ positive Parität ($\pi = +1$) und solche mit ungeradem ℓ negative Parität ($\pi = -1$).

Bei einem System von mehreren Teilchen, dessen Wellenfunktion eine Produktwellenfunktion ist, ist die Parität des Gesamtsystems gleich dem Produkt der Paritäten der beteiligten Teilchen. Die Parität ist also eine *multiplikative Quantenzahl*.

An dieser Stelle sei bereits auf die experimentelle Tatsache hingewiesen, dass der Grundzustand aller gg-Kerne ein $I^\pi = 0^+$ Zustand ist. Hierfür ist die Paarung der Nukleonspins verantwortlich, die bereits bei der Weizsäckerschen Massenformel eingeführt wurde. Eine detailliertere Diskussion wird im Zusammenhang mit dem Schalenmodell und der Restwechselwirkung geführt.

7.2 Magnetisches Moment

Das magnetische Moment einer Ladung auf einer Kreisbahn, also eines Kreisstroms i , der eine Fläche A einschließt ist, gegeben durch

$$|\vec{\mu}| = i \cdot A. \quad (7.6)$$

Für eine Ladung e auf einer Kreisbahn mit Radius r und Geschwindigkeit v ergibt sich somit für das magnetische Moment:

$$|\vec{\mu}| = \frac{e \cdot v}{2\pi r} \cdot \pi r^2 = \frac{e \cdot v \cdot r}{2} = \frac{e}{2m} r \cdot vm = \frac{e}{2m} (r \cdot p) = \frac{e}{2m} \cdot |\vec{\ell}|. \quad (7.7)$$

Quantenmechanisch gilt für das magnetische Moment aufgrund des Spins $\hat{s}$ eines Nukleons

$$\hat{\mu}_s = g_s \frac{e\hbar}{2m_N} \frac{\hat{s}}{\hbar} \quad (7.8)$$

und der Bahndrehimpuls ℓ erzeugt ein magnetisches Moment

$$\hat{\mu}_\ell = g_\ell \frac{e\hbar}{2m_N} \frac{\hat{\ell}}{\hbar}. \quad (7.9)$$

Der Faktor

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_N c} = 3,152 \cdot 10^{-14} \frac{\text{MeV}}{T}. \quad (7.10)$$

wird als *Kernmagneton* (analog zum *Bohrschen Magneton* des Elektrons) bezeichnet, während die Faktoren g_ℓ und g_s als g -Faktoren bezeichnet werden. Man beachte, dass aufgrund der Massenabhängigkeit des Kernmagnetons die magnetischen Momente der Nukleonen sehr viel kleiner als die der Hüllenelektronen sind.

Für ideale Dirac Teilchen, die wir später behandeln werden, ist $g_s = 2$. Für die g -Faktoren von Protonen und Neutronen findet man folgende experimentelle Werte:

$$\begin{array}{lll} g_s = +5,5858 & g_\ell = 1 & \text{für das Proton} \\ g_s = -3,8261 & g_\ell = 0 & \text{für das Neutron} \end{array}$$

Die entsprechenden magnetischen Momente der Spins sind $\mu_p = \langle \mu_p \rangle = 2,79\mu_K$ (Proton) und $\mu_n = \langle \mu_n \rangle = -1,91\mu_K$ (Neutron). Diese anomalen magnetischen Momente der Nukleonen sind ein erster Hinweis auf die Substruktur der Nukleonen, auf die später eingegangen wird. Das negative Vorzeichen von μ_n bedeutet, dass das magnetische Moment entgegengesetzt zum Spin des Neutrons steht.

Das totale magnetische Moment eines Nukleons mit totalem Drehimpuls $\hat{j}$ setzt sich aus den magnetischen Momenten des Spins und des Bahndrehimpulses zusammen:

$$\hat{\mu}_j = \mu_K \frac{1}{\hbar} \left(g_s \hat{s} + g_\ell \hat{\ell} \right). \quad (7.11)$$

Semi-klassisch ist klar, dass $\hat{\mu}_j$ nicht in die selbe Richtung wie $\hat{j}$ zeigt. Um das magnetische Moment μ zu bestimmen, muss man $\hat{\mu}_j$ auf den totalen Drehimpuls $\hat{j}$ projizieren. Quantenmechanisch korrekt ist das magnetischen Moment $\hat{\mu}$ über den Erwartungswert der z-Komponente des Operators $\hat{\mu}_j$ definiert:

$$\hat{\mu} = g_j \mu_K \hat{j} = \frac{\hat{\mu}_j \cdot \hat{j}}{|\hat{j}|} \cdot \frac{\hat{j}}{|\hat{j}|}. \quad (7.12)$$

Hieraus ergibt sich für den g -Faktor g_j

$$g_j = \frac{g_\ell(\hat{\ell} \cdot \hat{j}) + g_s(\hat{s} \cdot \hat{j})}{|j|^2}. \quad (7.13)$$

Mit $j(j+1) = \hat{j}^2 = \hat{\ell}^2 + 2\hat{\ell} \cdot \hat{s} + \hat{s}^2$ und unter Verwendung von $\hat{\ell}^2 = \ell(\ell+1)$ und $\hat{s}^2 = s(s+1) = 3/4$ erhält man

$$g_j = \frac{g_\ell\{j(j+1) + \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\} + g_s\{j(j+1) - \ell(\ell+1) + \frac{3}{4}\}}{2j(j+1)}. \quad (7.14)$$

Dies lässt sich vereinfacht schreiben als:

$$g_j = g_\ell \pm \frac{(g_s - g_\ell)}{2\ell + 1} \quad \text{für} \quad j = \ell \pm \frac{1}{2}. \quad (7.15)$$

7.3 Elektrische Momente - Das Quadrupolmoment

Eine beliebige kontinuierliche Ladungsverteilung erzeugt ein Potential

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} d^3\vec{r} \quad (7.16)$$

Wird das Potential bei Abständen $|\vec{R}| = \sqrt{\sum_i X_i^2}$ evaluiert für die $|\vec{r}|/|\vec{R}|$ klein ist, so kann folgende Entwicklung des Potentials gemacht werden (mit der Gesamtladung $q = \int \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}$):

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}) r \cos \theta}{R^2} d^3\vec{r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}) (3 \cos^2 \theta - 1) r^2}{R^3} d^3\vec{r} + \dots \quad (7.17)$$

Dieser Ausdruck kann in kartesischen Koordinaten ausgedrückt werden als

$$\Phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R} + \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_i}{R^3} X_i + \sum_{ij} \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{ij}}{R^5} X_i X_j + \dots \quad (7.18)$$

wobei p_i die Komponenten des Dipolmomentes und Q_{ij} die Komponenten des Quadrupoltensors sind:

$$p_i = \int \rho(\vec{r}) x_i d^3\vec{r} \quad (7.19)$$

$$Q_{ij} = \int \rho(\vec{r}) (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) d^3\vec{r}. \quad (7.20)$$

Üblicherweise wählt man ein Koordinatensystem, in dem nur die diagonalen Komponenten von Q_{ij} (mit $i = j$) nicht verschwinden.

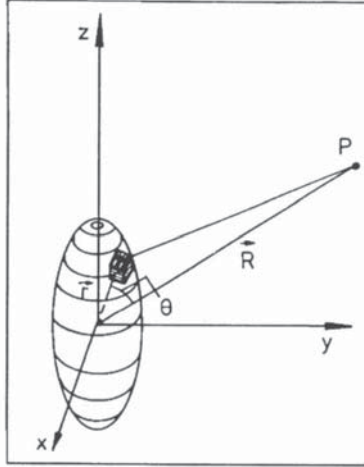


Abb. 7.1: Koordinatensystem für die Berechnung des Potentials, das von der Ladungsverteilung des Korns gebildet wird. Es wird eine axiale Symmetrie der Ladungsverteilung um die z-Achse angenommen (aus Heyde).

Quantenmechanisch hängt die Ladungsdichte ρ eines Korns mit Ladung q mit seiner Wellenfunktion ψ zusammen:

$$\rho(\vec{r}) = q\psi^*(\vec{r})\psi(\vec{r}). \quad (7.21)$$

Aufgrund der definierten Parität der Wellenfunktion ψ gilt $\rho(-\vec{r}) = \rho(\vec{r})$ und das Dipolmoment verschwindet, da es ein Integral über ein Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist. Kerne haben kein statisches Dipolmoment.

Man definiert den quantenmechanischen Quadrupoloperator $\hat{Q}$ bezüglich der Quantisierungsachse z als

$$\hat{Q} = \frac{1}{e} \int (3z^2 - r^2) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = \frac{1}{e} \int r^2 (3\cos^2\theta - 1) \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (7.22)$$

Der Quadrupoloperator steht also mit der klassischen Komponente Q_{zz} in Zusammenhang.

Das Quadrupolmoment kann sowohl für den gesamten Kern als auch für individuelle Nukleonen definiert werden. Für Wellenfunktionen mit sphärischer Symmetrie von $|\psi|^2$, ist $\langle Q \rangle = 0$. Ist $|\psi|^2$ jedoch in der x-y-Ebene ($z \cong 0$) konzentriert, so ist $\langle Q \rangle \sim -\langle r^2 \rangle$. Entsprechend ist für eine erhöhte Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Wellenfunktion entlang der z-Achse $\langle Q \rangle \sim +2\langle r^2 \rangle$.

Man betrachte zum Beispiel ein einfaches Modell für die Beschreibung einer Kernform durch einen homogen geladenen Rotationsellipsoiden (um die z-Achse) der Ladung Ze

mit den Halbachsen b in z -Richtung und a senkrecht hierzu. Das klassische Quadrupolmoment ergibt sich zu

$$Q = \frac{2}{5} Z(b^2 - a^2) = \frac{4}{5} Z \bar{R}^2 \left(\frac{\Delta R}{\bar{R}} \right) \equiv \frac{4}{5} Z \bar{R}^2 \cdot \delta. \quad (7.23)$$

Die Abweichung $\Delta R = (b - a)$ von der Kugelgestalt mit mittlerem Radius $\bar{R} = (a + b)/2$ wird üblicherweise durch den *Deformationsparameter* δ beschrieben. Mit dieser Definition wird das Quadrupolmoment positiv für einen entlang der z -Achse deformierten Ladungsverteilung (zigarrenförmig) und negativ für eine linsenförmige Ladungsverteilung.

7.3.1 Intrinsisches und spektroskopisches Quadrupolmoment

Man muss generell unterscheiden zwischen dem Quadrupolmoment Q_{lab} im Laborsystem, welches auch *spektroskopisches Quadrupolmoment* genannt wird, und dem intrinsischen Quadrupolmoment Q_{intr} . Q_{lab} bezieht sich auf die z -Achse (Quantisierungsachse) im Laborsystem, während die 3-Achse im intrinsischen System, auf das sich Q_{intr} bezieht, gegenüber der z -Achse gedreht sein kann (Abb. 7.2).

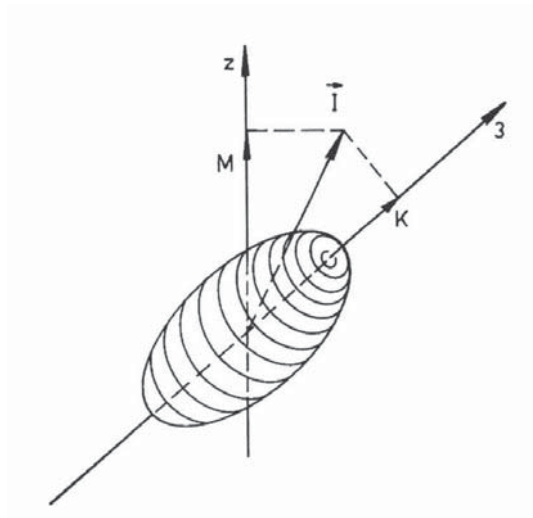


Abb. 7.2: Das spektroskopische Quadrupolmoment im Laborsystem kann semiklassisch durch Mittelung des intrinsischen Quadrupolmomentes über die Präzession des Kernspin J um die z -Achse im Laborsystem bestimmt werden. Die 3-Achse des intrinsischen Systems ist um den Winkel β gegen die z -Achse des Laborsystems gekippt (aus Heyde).

Wenn man den Winkel zwischen den beiden Achsen mit β bezeichnet, ist der Zusam-

menhang zwischen Q_{lab} und Q_{intr} gegeben durch

$$Q_{lab} = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \beta - 1) Q_{intr}. \quad (7.24)$$

Die quantenmechanisch äquivalente Relation ist gegeben durch

$$Q_{lab} = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} Q_{intr}. \quad (7.25)$$

Aus Gleichung 7.25 ergibt sich sofort, dass für einen Kernzustand mit $I = 0$ das spektroskopische Quadrupolmoment verschwindet $Q_{lab}^{I=0} = 0$.

7.4 Methoden zur Messung der Momente

7.4.1 Zeeman Effekt

Die Entartung der magnetischen Unterzustände eines quantenmechanischen Zustandes mit Drehimpuls I wird durch ein externes magnetisches Feld B entlang der Quantisierungsachse (z-Achse) aufgehoben (siehe 7.3). Die Energieaufspaltung zwischen den magnetischen Unterzuständen ist gegeben durch

$$\Delta E_{M,M-1} = g_J \mu_K B. \quad (7.26)$$

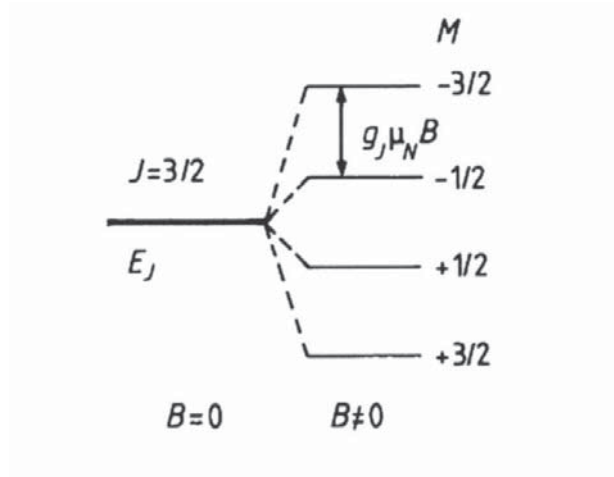


Abb. 7.3: Der Zeeman Effekt: Aufspaltung der magnetischen Unterzustände eines Zustands mit $J = 3/2$ in einem externen Magnetfeld B . hier wird J statt I und $\mu_N = \mu_K$ verwendet (aus Heyde).

Es ist möglich eine Entartung der Hyperfeinniveaus für ein Multiplet eines Gesamtdrehimpuls F durch ein externes Magnetfeld aufzuheben und zum Beispiel durch Mößbauerspektroskopie zu vermessen. Aus der Anzahl der Unterzustände kann der Spin des Kerns bestimmt werden.

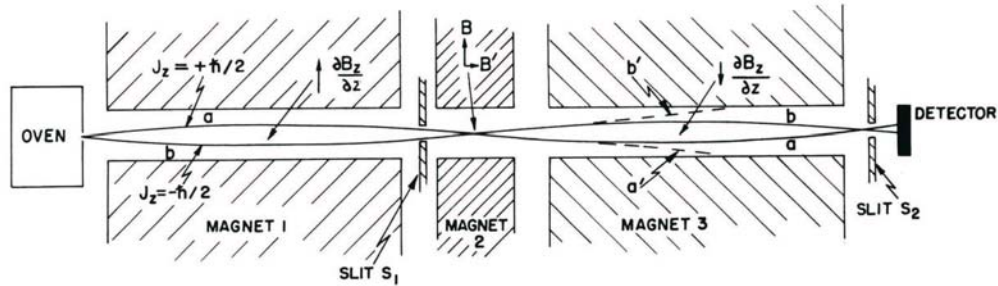


Abb. 7.4: Schema des Atomstrahlversuchs nach Rabi.

Eine mögliche Methode zur Messung magnetischer Momente bietet das Atomstrahlexperiment von Rabi, das in Abb. 7.4 schematisch dargestellt ist. Ein Strahl neutraler Atome tritt von links in ein Magnetfeld (1) ein, das konstant entlang der horizontalen Achse ist, jedoch in vertikaler Richtung einen Gradienten $\partial B/\partial z$ aufweist. Hierdurch wird auf die z -Komponente μ_z des magnetischen Momentes der Atomkerne eine Kraft $F = \mu_z(\partial B/\partial z)$ in z -Richtung ausgeübt. Diese Kraft führt zu einer Krümmung der Bahn. Bei einer korrekten Wahl des Magnetfeldes wird so der divergente Strahl durch den Schlitz hinter dem Magneten (1) fokussiert. Ein zweiter Magnet (3) zwischen dem Schlitz und einem auf der Strahlachse befindlichen Detektor produziert ein Magnetfeld gleicher Stärke wie Magnet (1), jedoch mit entgegengesetztem Feldgradienten. Hierdurch wird der Strahl auf den Detektor fokussiert. Entscheidend für die Messung ist ein homogenes Magnetfeld (2) hinter dem Schlitz und zwischen den Magneten (1) und (3). Hier wird durch den Zeeman-Effekt eine energetische Aufspaltung der magnetischen Unterzustände und eine Präzession des magnetischen Momentes um das homogene Magnetfeld erreicht. Durch Einstrahlung einer elektromagnetischen Hochfrequenz im Bereich des Magneten (2) können bei Wahl der richtigen Frequenz, der Zyklotronfrequenz, Übergänge zwischen den magnetischen Unterzuständen induziert werden. Ändert man auf diese Weise also die z -Komponente des magnetischen Momentes, werden die Atome im Magneten (3) aufgrund der nun veränderten Kraft nicht auf den Detektor fokussiert. Beim Durchfahren der eingestrahlten Frequenz erhält man also ein Resonanzminimum bei der Zyklotronfrequenz, aus der dann das magnetische Moment bestimmt werden kann. Da das magnetische Moment der Elektronen sehr viel größer ist als das der Kerne, kann man diese Messung nur für Atome mit verschwindendem Gesamtdrehimpuls der Hüllenelektronen durchführen.

Eine andere experimentelle Möglichkeit zur Bestimmung des magnetischen Momentes bietet die Kernspinresonanz (NMR), bei der eine Resonanz der Absorption von Hochfrequenzstrahlung durch Übergänge zwischen den magnetischen Unterzuständen gemessen wird.

7.4.2 Hyperfeinwechselwirkung

Aufgrund der Kopplung der Drehimpulse des Kerns und der Hüllenelektronen kommt es zu einer Aufspaltung der Energien der atomaren Zustände. Dabei wird ein Gesamtdrehimpuls $\vec{F}$ eingeführt, zu dem der Kernspin $\vec{I}$ und der Drehimpuls $\vec{J}$ der Elektronen koppeln:

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}. \quad (7.27)$$

Der Gesamtdrehimpuls F kann Werte mit ganzzahligem Abstand zwischen $|I - J|$ und $(I + J)$ annehmen. Das bedeutet, es gibt $(2J + 1)$ Zustände für $J \leq I$ und $(2I + 1)$ Zustände für $I < J$.

Die Hyperfeinwechselwirkung wird häufig dazu verwendet sowohl den Kernspin, das magnetische Moment als auch das Quadrupolmoment von Kernen zu bestimmen.

Nachfolgend sollen nur kurz die wesentlichen Ergebnisse für die Hyperfeinwechselwirkung zusammengefasst werden.

Magnetische Hyperfeinwechselwirkung. Das magnetische Moment μ_I des Kerns spürt ein Magnetfeld B_e , dass durch die Hüllenelektronen am Ort des Kerns erzeugt wird. Die magnetische Wechselwirkungsenergie hierdurch ist

$$E_M = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_e, \quad (7.28)$$

was unter Verwendung von $\vec{\mu}_I = g_I \mu_K \vec{I}$ und der Realisierung, dass $\vec{B}_e \propto \vec{J}$ zur *magnetischen Hyperfeinwechselwirkung* führt:

$$E_M = \frac{A}{\hbar^2} \vec{I} \cdot \vec{J}. \quad (7.29)$$

Hierbei enthält der Faktor $A = g_I \mu_K B_e(0)/J$ die atomaren und nuklearen Eigenschaften inklusive des g-Faktors. Das Vektorprodukt $\vec{I} \cdot \vec{J}$ lässt sich aufgrund der Identität $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ ausdrücken durch $\vec{I} \cdot \vec{J} = \hbar^2/2[F(F + 1) - J(J + 1) - I(I + 1)]$:

$$E_M = \frac{A}{2} [F(F + 1) - J(J + 1) - I(I + 1)]. \quad (7.30)$$

Beispiel 7.1

Abbildung 7.5 zeigt die Hyperfeinaufspaltung in Natrium. Die Energiedifferenz zwischen Hyperfeinzuständen des selben elektronischen Niveaus mit $(F + 1)$ und F ist gegeben durch

$$\Delta E = E(F + 1) - E(F) = A(F + 1).$$

Aus den Intervallen des $3^2P_{3/2}$ Multipletts findet man $A/\hbar = 16,4\text{MHz}$, $A/\hbar = 18\text{MHz}$, $A/\hbar = 20,8\text{MHz}$ für die $F = 1 \rightarrow F = 0$, $F = 2 \rightarrow F = 1$ und $F = 3 \rightarrow F = 2$ Zustände. Würde die Aufspaltung nur durch die magnetische Wechselwirkung hervorgerufen, sollten alle Energiedifferenzen zu den selben Werten für A führen. Aus den unterschiedlichen Werten für A erkennt man, dass eine weitere Wechselwirkung eine Rolle spielt.

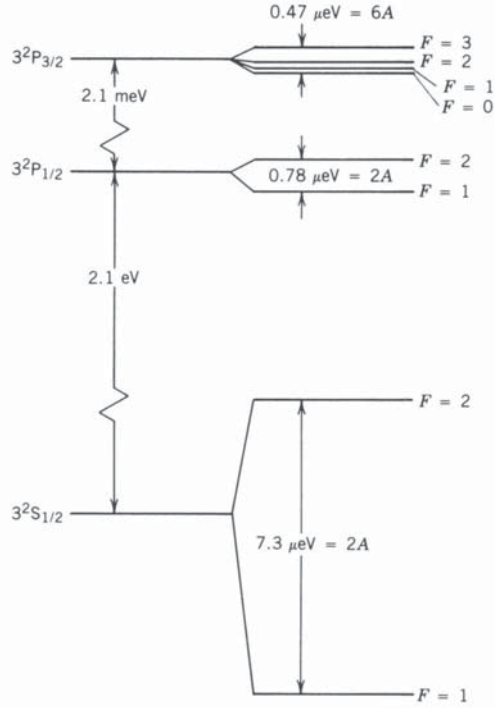


Abb. 7.5: Hyperfeinaufspaltung in Natrium durch die magnetische Wechselwirkung (aus Krane).

Hyperfeinwechselwirkung durch das Quadrupolmoment. Eine weitere Wechselwirkung zwischen dem Kern und den Hüllenelektronen kommt zustande, wenn der Kern ein nicht-verschwindendes Quadrupolmoment hat. Das durch die Hüllenelektronen erzeugte elektrische Potential Φ am Kernort führt zu Wechselwirkungsenergie

$$E_Q = \int \rho(\vec{r}) \Phi(\vec{r}) d^3\vec{r}. \quad (7.31)$$

Setzt man die Multipolentwicklung der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ ein, erhält man für die Wechselwirkung aufgrund des Quadrupolmomentes des Kerns

$$E_Q = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) \int \rho(\vec{r}) (3z^2 - r^2) d^3\vec{r} \quad (7.32)$$

Die genannten Wechselwirkungsenergien führen zu einer Aufspaltung der ansonsten entarteten Multipletts des totalen Drehimpulses F . Die totale Energieaufspaltung aufgrund

der Hyperfeinwechselwirkung ist gegeben durch

$$\Delta E_{HF} = A \frac{C}{2} + B \frac{\frac{3}{2}C(C+1) - 2J(J+1)I(I+1)}{J(2J-1)I(2I-1)} \quad (7.33)$$

mit $C = [F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)]$, $A = g_I \mu_K B_e(0)/J$ und $B = eQ_{lab}(\partial^2 \Phi / \partial z^2)_{r=0}$.

Beispiel 7.2

Für die in Abbildung 7.5 gezeigte Situation mit $J = 1/2$ und $I = 1/2$ für Natrium kann man zeigen, dass gilt:

$$\Delta E_{3 \rightarrow 2} = 3A + B$$

$$\Delta E_{2 \rightarrow 1} = 2A - B$$

$$\Delta E_{1 \rightarrow 0} = A - B$$

Damit findet man $A/\hbar = 19,7 MHz$ und $B/\hbar = 3,3 MHz$ und kann sowohl das Quadrupolmoment als auch das magnetische Moment des Na-Isotops bestimmen.

Es ist also möglich aus der Anzahl der Hyperfeinzustände auf den Kernspin zurückzuschließen und aus den Energiedifferenzen zwischen den Hyperfeinzuständen das Quadrupolmoment und das magnetische Moment des Kerns zu bestimmen. Natürlich ist hierfür eine Berechnung von $B_e(0)$ und $(\partial^2 \Phi / \partial z^2)_{r=0}$ notwendig.

Die Hyperfeinstruktur kann zum Beispiel mittels Laserspektroskopie vermessen und somit diese wesentlichen Eigenschaften des Grundzustandes des Kerns bestimmen.