

8 Streutheorie

(von Prof. Dr. Peter Ring)

Die Streuung zweier Teilchen mit den Massen m_1 und m_2 , die durch eine Zentralkraft mit dem Potential $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ wechselwirken, läßt sich durch Einführung von Schwerpunkts- und Relativkoordinaten als die Streuung eines Massenpunktes mit der reduzierten Masse $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ an einem sphärischen Einteilchenpotential $V(r)$ darstellen. Wir behandeln die Streuung also im Relativ-System. Die dabei erhaltenen Resultate müssen am Ende in das Laborsystem zurücktransformiert werden.

8.1 Wirkungsquerschnitt

Insbesondere wollen wir den Wirkungsquerschnitt definieren. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf ein Potential, daß weit außen verschwindet

$$V(r) = \begin{cases} \text{beliebig} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}, \quad (8.1)$$

wie es z.B. bei der Streuung eines Neutrons an einem Atomkern vorliegt.

Wir betrachten nur den in Figur 8.1 skizzierten Streuvorgang. Der Ursprung des Potentials (das Streuzentrum) befinde sich bei $\mathbf{r} = 0$. Auf diese Streuzentrum falle nun von links parallel zur z -Achse eine ebene Welle mit dem Wellenvektor $\mathbf{k} = (0, 0, k)$ ein. Die einfallende Wellenfunktion ist also

$$\psi_{in}(\mathbf{r}) = A e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = A e^{ikz} \quad (8.2)$$

Die Stromdichte dieser Welle ist

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2mi} \{ \psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi)^* \psi \} = j_{in} \mathbf{e}_z \quad (8.3)$$

mit

$$j_{in} = \frac{\text{Zahl der Teilchen}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \frac{\hbar k}{\mu} |A|^2 = v |A|^2, \quad (8.4)$$

Die Welle wird am Streuzentrum gestreut und nach der Streuung läuft vom Streuzentrum eine Welle nach außen, die für große Abstände eine auslaufende Kugelwelle mit einer von der Richtung abhängigen Amplitude darstellt:

$$\psi_{str}(\mathbf{r}) = A f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{für } r \rightarrow \infty \quad (8.5)$$

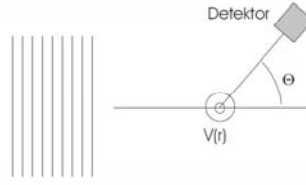


Abb. 8.1: Schematische Darstellung der Streuung eines Teilchens am Potential $V(r)$

Man nennt $f(\theta, \varphi)$ die Streuamplitude. Sie beschreibt die Winkelabhängigkeit der gestreuten Welle und gibt also an, wie stark die Streuung in eine gegebene Richtung erfolgt. Da die Schrödingergleichung linear ist, ist die auslaufende Welle proportional zur Amplitude der einlaufenden Welle, die Streuamplitude f ist also unabhängig von der Stärke des einfallenden Stroms. Die auslaufende radiale Stromdichte ist also bei großen Abständen gegeben durch

$$j_{str} = \mathbf{j}_{str} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{\hbar}{2\mu i} (\psi_{str}^* \partial_r \psi_{str} - \psi_{str} \partial_r \psi_{str}^*) \quad (8.6)$$

$$= |A|^2 \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2} \frac{\hbar k}{\mu} = v |A|^2 \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{r^2}, \quad (8.7)$$

wobei v die Relativ-Geschwindigkeit ist. Dabei wurden Terme $\sim r^{-3}, r^{-4}$ bei großen Abständen vernachlässigt.

Asymptotisch, d.h. für $r \rightarrow \infty$ hat also die Gesamtwellenfunktion die Form

$$\boxed{\psi_{str}(\mathbf{r}) = A \left(e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r} \right)}. \quad (8.8)$$

Dies ist also die Randbedingung, unter der wir die stationäre Schrödingergleichung zu

lösen haben. Da wir von einem radial symmetrischen Potential ausgehen, das nur vom Abstand r abhängt, besitzt die Lösung azimutale Symmetrie bezüglich der z -Achse, d.h. die Streuamplitude darf nicht vom Azimutwinkel φ abhängen.

Wie in der klassischen Mechanik interessieren wir uns für

$$d\sigma = \frac{\text{Zahl der pro Zeit in den Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{einfallende Stromdichte}} \quad (8.9)$$

$$= \frac{j_{str} r^2 d\Omega}{j_{in}} = |f(\theta, \varphi)|^2 d\Omega \quad (8.10)$$

und definieren *differentiellen Wirkungsquerschnitt* als:

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \varphi)|^2} \quad (8.11)$$

Der *totale Wirkungsquerschnitt* ergibt sich durch Integration über alle Richtungen

$$\boxed{\sigma_{tot} = \int d\Omega |f(\theta, \varphi)|^2} \quad (8.12)$$

Um diesen Wirkungsquerschnitt zu berechnen müssen wir also die stationäre Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r) \right) \psi = E\psi \quad (8.13)$$

mit der Randbedingung (8.8) lösen und aus der so erhaltenen Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ den Wirkungsquerschnitt berechnen. Wir sind nicht interessiert an den Details der Wellenfunktion im Bereich des Potentials.

8.2 Partialwellenzerlegung

Es ist evident, daß es von Vorteil ist, das Problem in Kugelkoordinaten zu lösen. Die Randbedingung (8.8) erfüllt selbst keine Kugelsymmetrie, d.h. sie ist keine Eigenfunktion zu $\hat{\mathbf{l}}^2$ und $\hat{l}_z$. Wir können sie aber nach solchen Eigenfunktionen in sogenannte *Partialwellen* zerlegen und dann das Problem für die durch die Quantenzahlen l und m charakterisierten Partialwellen lösen. Am Ende müssen wir dann die Überlagerung aller Partialwellen durchführen.

Dazu zerlegen wir zunächst die ebene Welle $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ in Kugelwellen

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta), \quad (8.14)$$

wobei $j_l(kr)$ sphärische Bessel-Funktionen und $P_l(\cos \theta)$ Legendre-Polynome sind. $\theta = \angle(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ ist der von $\mathbf{k}$ und $\mathbf{r}$ eingeschlossene Winkel, also am Ort des Detektors der Streuwinkel. Für große Abstände $r \rightarrow \infty$ gilt

$$j_l(kr) \approx \frac{1}{kr} \sin(kr - \frac{\pi}{2}l) \quad (8.15)$$

Wir erhalten also asymptotisch

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \approx \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l(2l+1)}{-2ik} \left[\frac{e^{-i(kr-l\pi/2)}}{r} - \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r} \right] P_l(\cos \theta). \quad (8.16)$$

Der erste Teil entspricht einer einlaufenden Kugelwelle, der zweite einer auslaufenden Kugelwelle.

Ebenso entwickeln wir die Streuwelle nach dem vollständigen System der Legendre-Polynome und erhalten asymptotisch für $r \rightarrow \infty$

$$f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l(2l+1)}{2ik} a_l \frac{e^{i(kr-l\pi/2)}}{r} P_l(\cos \theta). \quad (8.17)$$

Insgesamt sieht man hier für große Abstände folgende Randbedingung

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \sum_l i^l \frac{2l+1}{-2ikr} \left(e^{-i(kr-l\pi/2)} - (1+a_l)e^{i(kr-l\pi/2)} \right) P_l(\cos \theta). \quad (8.18)$$

Wir haben dadurch in jedem durch l gekennzeichneten *Kanal* die asymptotische Welle in eine einlaufende Kugelwelle mit der Amplitude 1 und eine auslaufende Kugelwelle mit der Amplitude $1+a_l$ zerlegt. a_l hängt natürlich von der Energie, d.h. von $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$ ab. Wir führen daher die *Streumatrix*

$$S_l = 1 + a_l = \frac{\text{auslaufende Amplitude}}{\text{einlaufende Amplitude}} \quad (8.19)$$

ein. Der Name *Matrix* rührt daher, daß in manchen Fällen ohne Rotationssymmetrie mit einer Matrix $S_{ll'}$ (auslaufende Amplitude mit l' /einlaufende Welle mit l) zu tun hat. Im gegenwärtigen rotationssymmetrischen Fall liegt Drehimpulserhaltung vor und daher ist diese Matrix diagonal $S_{ll'} = S_l \delta_{ll'}$. Aus der Stromerhaltung ergibt sich $|S_l|^2 = 1$, d.h. alles was einläuft muß auch wieder hinauslaufen. Daher können wir schreiben

$$S_l = e^{2i\delta_l} \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < \delta_l \leq \frac{\pi}{2}, \quad (8.20)$$

mit der reellen *Streuphase* $\delta_l(k)$, die von der Energie $E = \hbar^2 k^2/2m$ abhängt. Ohne Streuung haben wir $a_l = 0$ und $\delta_l(k) = 0$. Wenn wir $(1+a_l)$ in Gl. (8.18) durch die Streuphase ersetzen und mit Gl. (8.8) für das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion vergleichen finden wir folgenden Ausdruck für die Streuamplitude

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos \theta) \quad (8.21)$$

mit

$$f_l = \frac{(2l+1)}{k} e^{i\delta_l} \sin \delta_l \quad (8.22)$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt (8.12)

$$\sigma_{tot} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \quad (8.23)$$

mit

$$\sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2 \delta_l, \quad (8.24)$$

Aus diesen Überlegungen ergeben sich folgende Tatsachen:

- Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Imaginärteil der Vorwärtsstreuamplitude $f(0)$ und dem totalen Wirkungsquerschnitt (*optisches Theorem*):

$$\text{Im } f(0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot}. \quad (8.25)$$

- Der maximale Wert von σ_l wird bei $\delta_l = \pi(n + \frac{1}{2})$ erreicht.
- Der Streuwinkel hängt bei der klassischen Streuung eines Teilchens vom Stoßparameter b ab und es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Stoßparameter, Impuls $p = \hbar k$ und dem Drehimpuls $\hbar l$ des Teilchens: $bp = \hbar l$. Da das Potential für $r > R$ verschwindet, ist der maximale Stoßparameter, der zur Streuung führt $b_0 = R$. Der maximale Drehimpuls ist daher

$$l_0 \approx kR. \quad (8.26)$$

Alle Drehimpulse, die größer sind, werden klassisch nicht gestreut, d.h. daß in der Quantenmechanik die Streuphasen für große l -Werte verschwinden:

$$\delta_l \approx 0 \quad \text{für } l \gg l_0 \approx kR. \quad (8.27)$$

Bei kleinen Energien (d.h. für $kR \ll 1$) trägt nur die s -Welle ($l = 0$) zur Streuung bei.

- Für ein Potential endlicher Reichweite R kann man den geometrischen Wirkungsquerschnitt als obere Grenze für den Wirkungsquerschnitt angeben:

$$\sigma_{\max} \leq \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_0} (2l+1) \approx \frac{4\pi}{k^2} l_0^2 \approx 4\pi R^2 = 4\sigma_{\text{geom}}. \quad (8.28)$$

- Bei vielen Potentialen endlicher Reichweite kommt der Hauptbeitrag zum Wirkungsquerschnitt vom maximalen Drehimpuls l_0 , und zwar einerseits wegen dem Faktor $(2l + 1)$, zum anderen deshalb weil Teilchen mit kleinem Stoßparameter bei relativ zentralen Stößen absorbierte werden. Es köIn diesem Fall ist der differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \sim |P_{l_0}(\cos \theta)|^2. \quad (8.29)$$

Aus der Form des differentiellen Wirkungsquerschnittes kann man also auf den entsprechenden l_0 zurückschließen.

.

8.3 Streuung am Coulomb-Potential.

Das Coulombpotential ist ein wichtiger Spezialfall,

$$V_c(r) = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \eta \frac{\hbar v}{r} \quad (8.30)$$

mit dem Sommerfeldparameter

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} = \frac{Z_1 Z_2 \alpha}{\beta} = \frac{1}{ak} \quad (8.31)$$

und dem Bohr'sche Radius $a = \hbar^2 / Z_1 Z_2 m e^2$. Dabei ist die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2E/m}$ und $\beta = v/c$. Da dieses Potential für $r \rightarrow \infty$ nicht hinreichend stark abfällt, genügt die Streulösung nicht der Randbedingung (8.8). Andererseits ist das Potential so einfach, daß es analytische Lösungen gibt, die sich in Form von speziellen Funktionen (genauer hypergeometrischen Reihen), den sog. Coulomb-Funktionen darstellen lassen. In Analogie zu Gl. (8.8) hat diese Lösung für $r \rightarrow \infty$ folgende asymptotische Form

$$\psi_{str}(\mathbf{r}) = A \left(e^{i(kz + \eta \ln k(r-z))} + f_c(\theta) \frac{e^{i(kr - \eta \ln kr)}}{r} \right), \quad (8.32)$$

mit der Coulomb-Streuamplitude

$$f_c(\theta) = \frac{\eta}{2k \sin^2(\theta/2)} e^{-i\eta \ln(\sin^2(\theta/2) + i\sigma_0)} \quad (8.33)$$

mit der Konstanten $\sigma_0 = \arg \Gamma(1 + i\eta)$. Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich wieder als

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_c(\theta)|^2 = \frac{\eta^2}{(2k)^2 \sin^4(\theta/2)} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E \sin^2(\theta/2)} \right)^2 \quad (8.34)$$

Dies ist der Rutherford'sche Streuquerschnitt, den wir schon aus der klassischen Mechanik kennen. Das Coulomb-Problem ist also eines der seltenen Probleme, bei dem sich im Rahmen der Quantenmechanik derselbe Wirkungsquerschnitt ergibt wie in der klassischen Mechanik.

8.4 Formale Lösung des Streuproblems

Wir gehen von der stationären Schrödingergleichung

$$H\Psi_{\mathbf{k}} = (H_0 + V)\Psi_{\mathbf{k}} = E\Psi_{\mathbf{k}} \quad (8.35)$$

aus, wobei

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta \quad (8.36)$$

und die exakte Lösung durch die asymptotische Randbedingung

$$\boxed{\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f_{\mathbf{k}}(\Omega_r) \frac{e^{ikr}}{r}} \quad (8.37)$$

festgelegt ist. Die Energie ist gegeben durch $E = \hbar^2 k^2 / 2m$. Die stationäre Schrödingergleichung läßt sich umschreiben.

$$(E - H_0)\Psi_{\mathbf{k}} = V\Psi_{\mathbf{k}} \quad (8.38)$$

Wenn wir zunächst annehmen, daß die Funktion $\Psi_{\mathbf{k}}$ bekannt ist, können wir dieses Problem als eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit der Inhomogenität $V\Psi_{\mathbf{k}}$ betrachten.

Die allgemeine Lösung ist dann die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, also z.B. eine ebene Welle

$$\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

plus eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, die wir mit Hilfe der Green'schen Funktion des Operators $H_0 - E$ darstellen können.

$$\boxed{\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \int d^3r' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')} \quad (8.39)$$

Wenn wir die Green'sche Funktion so wählen, daß der zweite Teil asymptotisch in eine auslaufende Kugelwelle übergeht, haben wir die erforderliche Randbedingung erfüllt. Die Green'sche Funktion $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ ist durch die Differentialgleichung

$$\boxed{(E - H_0)G_0 = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (8.40)$$

definiert. Die formale Lösung ist

$$G_0 = \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} \quad (8.41)$$

wobei der positive infinitesimal kleine Parameter ε die Randbedingung der auslaufenden Kugelwellen festlegt. Die Gl. (8.39) ist natürlich keine Lösung des Streuproblems. Wir haben nur die Schrödingergleichung, die eine Differentialgleichung ist, in eine Integralgleichung umgeformt. Diese Integralgleichung (8.39) heißt *Lippmann-Schwinger Gleichung*.

In unserem Fall beschreibt H_0 die freie Bewegung. G_0 die Green'sche Funktion der Helmholtz'sche Differentialgleichung

$$(\Delta + k^2)G_0(\mathbf{r}) = \frac{2\mu}{\hbar^2}\delta(\mathbf{r}) \quad (8.42)$$

Die Lösung, die der Randbedingung mit auslaufenden Kugelwellen genügt, ist gegeben durch

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.43)$$

Wir erhalten also die *Lippmann-Schwinger* Gleichung:

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'). \quad (8.44)$$

Die Entwicklung nach $\mathbf{r}'/r$ ergibt

$$k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = k\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\mathbf{r}'} \approx k\left(r - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}'}{r}\right) = kr - \mathbf{k}'\mathbf{r}' \quad (8.45)$$

wobei

$$\mathbf{k}' = k \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (8.46)$$

Damit erhalten wir für große Abstände $r \rightarrow \infty$

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (8.47)$$

oder die Streuamplitude

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = f_{\mathbf{k}}(\Omega_{\mathbf{k}'}) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \quad (8.48)$$

Dabei gibt ist $\Omega_{\mathbf{k}'}$ die Richtung vom $\mathbf{k}'$, d.h. die Richtung des Vektors $\mathbf{r}$.

Formal läßt sich die Streuamplitude als ein Matricelement darstellen

$$\boxed{f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} T_{fi}}, \quad (8.49)$$

Wobei die T -Matrix definiert ist durch

$$T_{fi} = \langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Psi_{\mathbf{k}_i} \rangle \quad (8.50)$$

Dabei steht auf der rechten Seite die exakte Streulösung mit der Randbedingung einer ebenen Welle mit Impuls $\hbar \mathbf{k}_i$ und einer auslaufenden Kugelwelle und auf der linken Seite eine ebene Welle mit Impuls $\hbar \mathbf{k}_f$.

Schließlich führen wir noch die Dichte der Zustände $\rho(E)$ mit der Energie E und dem Raumwinkel Ω_f ein. Sie ergibt sich aus der Größe des zugehörigen Phasenvolumens dividiert durch die Größe der Quanten-Zelle

$$\rho_f(E) dE d\Omega_f = \frac{V p^2 dp d\Omega_f}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (8.51)$$

$V = 1/A^2$ ist dabei ein Normierungsvolumen. Da wir die ebenen Wellen mit der Amplitude 1 versehen haben, ist unser Normierungsvolumen $V = 1$. Falls wir berücksichtigen, dass $dE = dp^2/2\mu = v dp$, erhalten wir für die Niveaudichte

$$\rho_f(E) = V \frac{p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{dp}{dE} = V \frac{\mu^2 v}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (8.52)$$

Damit erhalten wir für den exakten Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|^2 = \frac{\mu^2}{4\pi^2 \hbar^4} |\langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Psi_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2 \quad (8.53)$$

$$= \frac{2\pi}{\hbar v} |\langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Psi_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2 \frac{\mu^2 v}{8\pi^3 \hbar^3} = \frac{2\pi}{\hbar v} |\langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Psi_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2 \rho_f(E). \quad (8.54)$$

Dieser Ausdruck ist natürlich für die praktische Berechnung des Wirkungsquerschnitts nicht sehr nützlich, da er ja die Kenntnis der exakten Wellenfunktion $\Psi_{\mathbf{k}_i}(\mathbf{r})$ im gesamten Raum voraussetzt. Er spielt aber eine wichtige Rolle bei der Begründung von Näherungen.

8.5 Die Born'sche Näherung

In der Born'schen Näherung nehmen wir an, daß Streuung nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit stattfindet, d.h. daß die Wellenfunktion $\Psi_{\mathbf{k}_i}$ in guter Näherung durch eine ebene Welle $\Phi_{\mathbf{k}_i}$ gegeben ist, d.h. daß der rechte Term in der Lippmann-Schwinger-Gleichung (8.44) klein ist gegenüber der ungestörten Welle. Formal können wir die Lippmann-Schwinger-Gleichung auch in folgender Weise schreiben

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \Phi_{\mathbf{k}} + G_0 V \Psi_{\mathbf{k}}, \quad (8.55)$$

wobei G ein Integraloperator ist. Indem wir $\Psi_{\mathbf{k}}$ auf der rechten Seite durch den Ausdruck auf der linken Seite einsetzen, iterieren wir diese Gleichung und erhalten die *Born'sche Reihe*

$$\Psi_{\mathbf{k}} = \Phi_{\mathbf{k}} + G_0 V \Phi_{\mathbf{k}} + G_0 V G_0 V \Phi_{\mathbf{k}} + \dots, \quad (8.56)$$

$$= (1 + G_0 V + G_0 V G_0 V + \dots) \Phi_{\mathbf{k}} \quad (8.57)$$

$$= (1 - G_0 V)^{-1} \Phi_{\mathbf{k}} \quad (8.58)$$

Für die T -Matrix erhalten wir also formal

$$T = V + V G_0 V + V G_0 V G_0 V + \dots \quad (8.59)$$

$$= V(1 - G_0 V)^{-1} = (1 - V G_0)^{-1} V \quad (8.60)$$

Wenn wir diese Reihe nach dem ersten Glied abbrechen ergibt sich in 1. Born'scher Näherung für die Streuamplitude

$$\boxed{f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Phi_{\mathbf{k}_i} \rangle} \quad (8.61)$$

und den Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|^2 = \frac{2\pi}{\hbar v} |\langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Phi_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2 \rho_f(E) \quad (8.62)$$

Dieses Resultat ist eine Näherung. Wir hätten es auch aus Fermi's goldener Regel ableiten können: Die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, d.h. die Zerfallsrate, dass der Zustand $\mathbf{k}_i$ in den Zustand $\mathbf{k}_f$ übergeht ist nach dieser Regel

$$W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Phi_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2 \rho_f(E) \quad (8.63)$$

Diese Zerfallsrate können wir auch ausdrücken als

$$W_{i \rightarrow f} = \dot{N}(\mathbf{k}_f) / N(\mathbf{k}_i), \quad (8.64)$$

wobei $N(\mathbf{k}_i)$ die Zahl der Teilchen mit Impuls $\mathbf{k}_i$ ist und $\dot{N}(\mathbf{k}_f)$ die Zahl der Teilchen, die pro Zeiteinheit in einen Zustand mit dem Impuls $\mathbf{k}_f$ übergeht. Pro Zeiteinheit werden also in einem in Richtung $\Omega_{\mathbf{k}_f}$ angebrachten Detektor $\dot{N}(\mathbf{k}_f) d\Omega_{\mathbf{k}_f}$ Teilchen gezählt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt ist also.

$$d\sigma = \frac{\text{Zahl der pro Zeit in } d\Omega_{\mathbf{k}_f} \text{ gestreuten Teilchen}}{\text{einfallende Stromdichte}} = \frac{\dot{N}(\mathbf{k}_f) d\Omega_{\mathbf{k}_f}}{nv} \quad (8.65)$$

wobei $n = N(\mathbf{k}_i)/V$ die Teilchendichte des einfallenden Strahles und v dessen Geschwindigkeit ist. Wenn wir berücksichtigen, daß wir das Normierungsvolumen $V=1$ gewählt haben, erhalten wir für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = \frac{1}{v} W_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar v} |\langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Phi_{\mathbf{k}_i} \rangle|^2 \rho_f(E) \quad (8.66)$$

Diese Formel gilt sehr allgemein. Insbesondere können wir mit dieser Formel auch allgemeine Streuprozesse berücksichtigen, bei denen $\Phi_{\mathbf{k}_i}$ und $\Phi_{\mathbf{k}_f}$ Anfangs- und Endzustand eines komplizierten Systems sind.

Falls, wie oben, V ein lokales Potential ist, gilt in dieser Näherung für die Streuamplitude

$$f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \langle \Phi_{\mathbf{k}_f} | V | \Phi_{\mathbf{k}_i} \rangle \quad (8.67)$$

$$= -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \int d^3r V(\mathbf{r}) e^{-i(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i) \cdot \mathbf{r}} = -\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad (8.68)$$

wobei $\tilde{V}(\mathbf{q})$ die Fouriertransformierte des Potentials $V(\mathbf{r})$ ist. $\mathbf{q} = \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_f$ ist dabei der Impulsübertrag bei der Streuung. Die Streuamplitude ergibt sich also in 1. Born'scher Näherung aus der Fouriertransformierten des Potentials und es gilt folgender Zusammenhang mit dem Streuwinkel:

$$(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}_i)^2 = k_i^2 + k_f^2 - 2\mathbf{k}_i \mathbf{k}_f = 2k^2(1 - \cos \theta) = (2k \sin \frac{\theta}{2})^2, \quad (8.69)$$

d.h.

$$|\mathbf{q}| = 2k \sin \frac{\theta}{2}. \quad (8.70)$$

Für das Coulomb-Potential ergibt sich in erster Born'scher Näherung der exakte Rutherford'sche Wirkungsquerschnitt:

$$\left. \frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}} = |f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|^2 = \left(\frac{\mu}{2\pi\hbar^2} \frac{4\pi Z_1 Z_2 e^2}{q^2} \right)^2 = \left(\frac{1}{4E} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 \quad (8.71)$$

Dies ist aber eigentlich mehr ein Zufall, da wir bei der Berechnung keine Coulomb-Wellenfunktionen zugrunde gelegt haben.

Bisher haben wir aus Gründen der Einfachheit nur elastische Streuung an einem Potential $V(r)$ betrachtet. Tatsächlich kann jedoch bei der Streuung zweier Teilchen eines oder beide der Teilchen durch die Streuung in einen angeregten Zustand übergehen (inelastische Streuung)

$$A + a \rightarrow A^* + a \quad (8.72)$$

Es können auch Reaktionen, d. h. Teilchenumwandlungen der Art

$$A + a \rightarrow B + b \quad (8.73)$$

auftreten. Die hier beschriebene Streutheorie läßt sich dann entsprechend erweitern (siehe z. B. R. G. Newton, *Scattering theory of waves and particles*, Springer Verlag,

Heidelberg). In diesem Falle läßt sich der Streuquerschnitt in der oben angegebenen Form darstellen

$$\boxed{\frac{d\sigma_{i \rightarrow f}}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar v_i} |\langle \Phi_f | V | \Psi_i \rangle|^2 \rho_f(E)}, \quad (8.74)$$

wobei die Indizes i und f den Anfangs- und den Endzustand des Systems charakterisieren.

8.6 Elektronen-Streuung

8.6.1 Mottstreuung

Elektronen bilden eine ausgezeichnete Sonde, um die Eigenschaften von kleinen Strukturen zu untersuchen. Ihre Wechselwirkung mit geladenen Teilchen ist die Coulombwechselwirkung. Sie ist sehr genau bekannt. Außerdem lassen sie sich auf hohe Energien beschleunigen und dadurch auch sehr kleine Strukturen auflösen. Nach der Unschärferelation gilt

$$\Delta x \cdot \Delta p \approx \hbar \quad (8.75)$$

Wenn wir also Kerne mit einem Durchmesser von ca 2 fm untersuchen wollen brauchen wir Impulse von ca.

$$\Delta p \approx \frac{\hbar c}{c \Delta x} \approx \frac{197}{2} [\text{MeV}/c] \approx 100 [\text{MeV}/c] \quad (8.76)$$

Wegen der kleinen Elektronenmasse von $m_e \approx 0.5 [\text{MeV}/c^2]$ ist zugehörige Ruhemasse klein gegenüber der zugehörigen kinetischen Energie. Wir haben es also mit ultrarelativistischen Teilchen zu tun. Das bedeutet, daß wir bei der Berechnung des Streuquerschnitts nicht von der Schrödingergleichung ausgehen müssen, sondern von der Dirac-Gleichung, die relativistische Elektronen im elektromagnetischen Feld des Kerns beschreibt. Wir betrachten zunächst die Streuung eines Elektrons an einem punktförmigen geladenen Objekt, z.B. einem Proton. Mott hat dazu den folgenden differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnet

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}} \cdot \left(1 - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \quad (8.77)$$

wobei $\beta = v/c$. Für untrarelativistische Teilchen ($\beta \approx 1$) ergibt sich daraus

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \left(\frac{1}{4E} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \right)^2, \quad (8.78)$$

Im Gegensatz zum Rutherford'schen Wirkungsquerschnitt, der symmetrisch zu $\theta = 90^\circ$ ist, fällt er für Rückwärtsstreuung ($\theta \approx 180^\circ$) stark ab. Dies ist ein relativistischer

Effekt, der sich qualitativ dadurch verstehen läßt, daß bei ultrarelativistischen Teilchen mit verschwindender Ruhemasse die Helizität

$$h = \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{s}| \cdot |\mathbf{p}|} = \pm 1, \quad (8.79)$$

eine Erhaltungsgröße ist. Diese Quantenzahl gibt den Winkel zwischen dem Impuls und dem Spin des Teilchens an. Bei Rückwärtsstreuung dreht sich der Impuls des Teilchens um. Es müßte also auch der Spin umklappen. Eine spin-unabhängige Coulombwechselwirkung kann dies jedoch nicht bewirken.

8.6.2 Streuung an zusammengesetzten Objekten

Im Kern wird das einlaufende Elektron an den einzelnen Protonen gestreut. Wir wollen zunächst annehmen, daß sie punktförmig sind und die Streuung eines Elektrons an einem System von Z punktförmigen geladenen Protonen und N punktförmigen Neutronen untersuchen. Die exakte Wellenfunktion dieses Systems sei $\Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A)$ mit $A = N + Z$. Wir vernachlässigen dabei der Einfachheit halber die Spin-Koordinaten. Der klassische Ausdruck für die Ladungsdichte

$$\rho_c(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (8.80)$$

geht in den quantenmechanischen Operator

$$\hat{\rho}_c(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^A q_i \delta(\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}}_i) \quad (8.81)$$

über. Dabei ist $q_i = e$ für die Protonen und $q_i = 0$ für die Neutronen. Wir erhalten die exakte Ladungsdichte des Systems als den Erwartungswert

$$\rho_c(\mathbf{r}) = \langle \Phi | \hat{\rho}_c(\mathbf{r}) | \Phi \rangle \quad (8.82)$$

$$= \sum_{i=1}^A q_i \int d^3r_1 \dots d^3r_A \Phi^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Phi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (8.83)$$

Wir berechnen nun in erster Born'scher Näherung den Wirkungsquerschnitt für die elastische Streuung eines Elektrons mit der Ortskoordinate $\mathbf{r}_e$ an diesem System. Die Gesamtwellenfunktionen vor und nach der Streuung sind dann

$$\Phi_i(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}_e} \Phi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A), \quad (8.84)$$

$$\Phi_f(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = e^{i\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{r}_e} \Phi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A), \quad (8.85)$$

wobei Φ_0 die exakte Grundzustandswellenfunktion des Kerns ist. Wenn wir die Coulombwechselwirkung

$$V_c(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) = - \sum_{i=1}^A \frac{eq_i}{|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i|} = \sum_{i=1}^A V_c(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_i) \quad (8.86)$$

zwischen dem Elektron und den Protonen vernachlässigen, sind die Funktionen Φ_i und Φ_f Eigenfunktionen des exakten Hamiltonoperators H_0 des Systems. In erster Born'scher Näherung brauchen wir das Matricelement

$$\langle f | V_c | i \rangle = \sum_{i=1}^A \int d^3 r_e d^3 r_1 \dots d^3 r_A \Phi^*(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) V(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_i) \Phi(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (8.87)$$

$$= \sum_{i=1}^A \int d^3 r d^3 r_e \phi_f^*(\mathbf{r}_e) V(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \phi_i(\mathbf{r}_e) \times \quad (8.88)$$

$$\times \int d^3 r_1 \dots d^3 r_A \Phi_0^*(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \Phi_0(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_A) \quad (8.89)$$

$$= \int d^3 r_e \phi_f^*(\mathbf{r}_e) W(\mathbf{r}_e) \phi_i(\mathbf{r}_e) = \langle \phi_f | W | \phi_i \rangle \quad (8.90)$$

Dabei sind ϕ_i und ϕ_f die Elektronwellenfunktionen (ebene Wellen) und

$$W(\mathbf{r}) = \int d^3 r' V_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_c(\mathbf{r}') = \int d^3 r' \frac{\rho_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.91)$$

das gemittelte Wechselwirkungspotential zwischen dem Elektron und den einzelnen Teilchen. Es ergibt sich, wie in der Elektrodynamik, aus der Ladungsdichte des Kerns. Das Potential $W(\mathbf{r})$, das das Elektron spürt, ist ein Faltungsintegral aus der Zweiteilchenwechselwirkung $V_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und der Ladungsdichte $\rho_c(\mathbf{r}')$.

In erster Born'sche Näherung (8.68) benötigen wir also nicht den gesamten Hamiltonoperator $H_0 + V_c$ des Systems, der die starke Wechselwirkung enthält, sondern nur die Fourier-Transformierte des Potentials $W(\mathbf{r})$, d.h. die Fouriertransformierte einer Faltung. Nach dem Faltungssatz der Fouriertransformation ergibt sich die Fouriertransformierte einer Faltung als das Produkt der Fouriertransformierten, d. h. wir erhalten

$$\tilde{W}(\mathbf{q}) = \tilde{V}_c(\mathbf{q}) \tilde{\rho}(\mathbf{q}) \quad (8.92)$$

$\tilde{V}_c(\mathbf{q})$ und $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ sind die Fouriertransformierten des Zweiteilchenpotentials $V_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ und der Dichteverteilung $\rho_c(\mathbf{r})$ im Target. Die Streuamplitude ist in erster Bornscher Näherung (8.68) gegeben durch

$$f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = -\frac{mZ}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}_c(\mathbf{q}) F(\mathbf{q}^2) \quad (8.93)$$

wobei $\hbar\mathbf{q} = \hbar\mathbf{k}_i - \hbar\mathbf{k}_f$ der Impulsübertrag und $F(\mathbf{q}^2) = \tilde{\rho}(\mathbf{q})/Z$ der *Formfaktor* ist. Für den Wirkungsquerschnitt erhalten wir

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|^2 = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} |F(\mathbf{q}^2)|^2,} \quad (8.94)$$

wobei $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{Mott}}$ der Wirkungsquerschnitt an einem punktförmigen Teilchen ist, d.h. bei Elektron-Streuung der Mott'sche Wirkungsquerschnitt. $F(q^2)$ wird als *Formfaktor* bezeichnet, da er die Form des zusammengesetzten Objekts beschreibt. Wenn wir also den Wirkungsquerschnitt als Funktion des Streuwinkels, d.h. als Funktion des Impulsübertrags q in Gl. (8.70) messen erhalten wir die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung. Die so abgeleitete Formel für den Streuquerschnitt an zusammengesetzten Objekten gilt natürlich nicht nur für die Coulomb-Wechselwirkung und die Streuung von Elektronen an Kernen, sondern sie ist allgemein gültig für die Streuung eines Teilchens an einem zusammengesetzten Objekt. Voraussetzung war nur, dass wir es mit einer Zweiteilchenwechselwirkung zu tun haben, die relativ schwach ist, sodaß die Born'sche Näherung gültig ist.

8.6.3 Elektronstreuung an Kernen

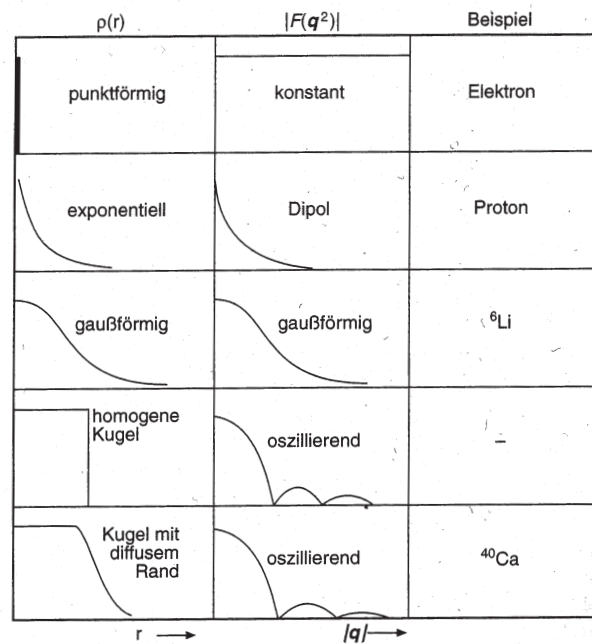


Abb. 8.2: Modelle für Dichteverteilungen und zugehörige Formfaktoren $F(q^2)$

Für kugelförmige Kerne hängt auch der Formfaktor nur vom Absolutbetrag des Im-

pulsübertrags ab. Nach Integration über die Winkel ergibt sich

$$F(q^2) = \frac{4\pi}{Z} \int_0^\infty r^2 dr \frac{\sin qr}{qr} \rho(r) \quad (8.95)$$

Die Umkehrung dazu ist

$$\rho_c(r) = \frac{Z}{(2\pi)^3} \int d^3q F(q^2) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \quad (8.96)$$

Als Beispiele betrachten wir wie in Fig. 8.2 dargestellt folgende Dichten mit den dazugehörigen Formfaktoren

Beispiel	$\rho_c(r)$	$F(q^2)$	
Punktladung	$\delta(\mathbf{r})$	1	—
exponentiell	$\frac{a^3}{8\pi} e^{-ar}$	$\frac{1}{1+q^2/a^2}$	Dipol
Gauss	$\left(\frac{a^2}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-a^2 r^2/2}$	e^{-q^2/a^2}	Gauss
homog. Kugel	$\begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$	$\frac{3}{(qR)^3} (\sin qR - qR \cos qR)$	oszillierend

(8.97)

Bei der Streuung an der homogenen Kugel treten wie bei der Beugung an Scheiben Interferenzminima auf. Als Beispiel sehen wir in Fig. den Wirkungsquerschnitt der Streuung von Elektronen an ^{12}C (siehe Fig. 8.3). Er besitzt ein Minimum bei $|\mathbf{q}| = 1.8 \text{ fm}^{-1}$. Wenn wir es mit der Nullstelle im Wirkungsquerschnitt der homogenen Kugel bei $qR = 4.5$ vergleichen finden wir für den Kernradius $R \approx 2.5 \text{ fm}$.

Im Allgemeinen beobachten wir, daß der Wirkungsquerschnitt als Funktion des Impulsübertrags, d.h. des Streuwinkels um mehrere Größenordnungen variiert. Man sieht Beugungsminima aus denen sich präzise Informationen über die Kerngestalt ableiten läßt. Oft ist eine Fouriertransformation aus den gemessenen Werten nicht direkt möglich. Man macht deshalb einen Ansatz für die Form der Dichteverteilung, die von vielen Parametern abhängt und passt diese Parameter an den gemessenen Wirkungsquerschnitt an. Auf diese Weise gelingt es heute "parameterfreie" Dichteverteilungen zu bestimmen.

Für kleine Impulsüberträge, d.h. für $qR \ll 1$ läßt sich die Exponentialfunktion im Fourierintegral entwickeln

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}^2) &= \frac{1}{Z} \int d^3r \rho_c(r) e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \\ &= \frac{1}{Z} \int d^3r \rho_c(r) \left(1 - i\mathbf{q}\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{q}\mathbf{r})^2 + \dots\right) \\ &= 1 - 0 - \frac{1}{6} \mathbf{q}^2 \langle r^2 \rangle, \end{aligned} \quad (8.98)$$

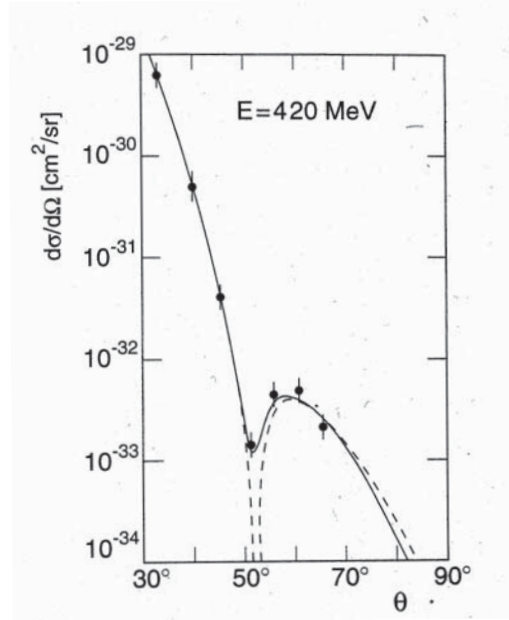


Abb. 8.3: Wirkungsquerschnitt für elastische Elektronstreuung an ^{12}C

wobei

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF}{dq^2} \right|_{q=0} = \frac{1}{Z} \int r^2 \rho_c(r) d^3r \quad (8.99)$$

der mittlere quadratische Radius ist. In Fig. 8.4 sehen wir eine Reihe von Dichteverteilungen, die durch Elektronstreuung experimentell bestimmt wurden.

Oft wird die Dichteverteilung durch eine Fermi-Funktion dargestellt

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - c)/a)} \quad (8.100)$$

Empirisch findet man $c \approx 1.07 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ fm und $a \approx 0.54$ fm. Daraus ergibt sich der mittlere quadratische Radius

$$r_{\text{rms}} = \sqrt{\langle r^2 \rangle} = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad \text{mit} \quad r_0 = 0.94 \text{ fm} \quad (8.101)$$

Wenn man nun den Kern durch eine homogen geladene Kugel mit Radius R annähert gilt,

$$R^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle = 1.21 \cdot A^{\frac{1}{3}}. \quad (8.102)$$

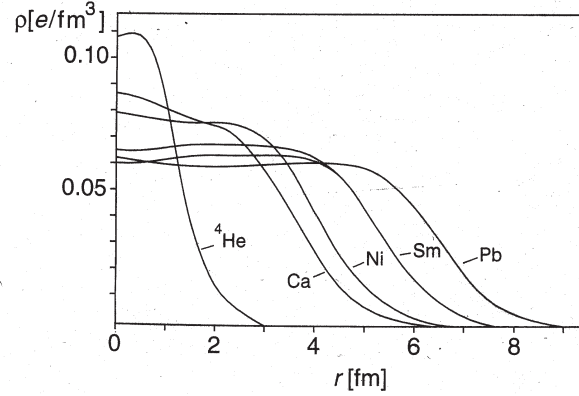


Abb. 8.4: Die durch Elektronstreuung ermittelten Ladungsdichten für verschiedene Kerne

Die Hautdicke ist definiert als die Dicke der Schicht, in der die Ladungsdichte von $0.9\rho_0$ auf $0.1\rho_0$ abfällt

$$t = r_{\rho=0.1\rho_0} - r_{\rho=0.9\rho_0} \quad (8.103)$$

Man erhält

$$t = 2a \ln 9 \approx 2.4 \text{ fm} \quad (8.104)$$

Die Ladungsdichte $\rho_c(0)$ im Zentrum des Kern ist als Funktion von A nahezu konstant. Im Detail nimmt sie wegen der Coulombkraft geringfügig ab. Zusammen mit den Neutronen erhält man aber eine konstante Nukleonendichte ρ_N im Kernzentrum

$$\rho_N \approx 1.7 \text{ Nukleonen/fm}^3 \quad (8.105)$$

Dem entspräche $c = 1.12 \cdot A^{\frac{1}{3}}$

Es gibt auch deformierte Kerne. Dies sind Schaleneffekte, auf die wir später zurückkommen werden.

Leichte Kerne, wie z. B. ${}^4\text{He}$ oder ${}^{6,7}\text{Li}$ etc. sind Sonderfälle. Die Ladungsverteilung ist näherungsweise Gauss-förmig.