

9 Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung

9.1 Das Deuteron

Das Deuteron ist das einfachste gebundene System von Nukleonen und sollte daher ideal zum Studium der Wechselwirkung zwischen den Nukleonen sein. Im einfachsten gebundenen System der Atomphysik, dem Wasserstoffatom, konnten aus der Sequenz und den Zerfällen zwischen den angeregten Zuständen Rückschlüsse auf die Wechselwirkung gezogen werden.

Leider ist dies beim Deuteron nicht möglich, da das Deuteron keine gebundenen angeregten Zustände hat.

9.1.1 Masse und Bindungsenergie

Das Deuteron hat eine Masse von $m(^2H) = 2,014u$ und eine Bindungsenergie von $B.E. = 2,225MeV$. Wie bereits in Kapitel 2 erwähnt, ist die Bindungsenergie gleich der Energie des emittierten Gamma-Photons bei der Bildung eines Deuterons beim Neutroneneinfang am Proton.

9.1.2 Tiefe des Deuteronenpotenzials

Nachfolgend soll eine einfache Abschätzung der Tiefe des Potenzials zwischen Proton und Neutron im Deuteron gemacht werden. Das Zweikörperproblem kann auf ein eindimensionales Problem reduziert werden, bei dem r der Relativabstand zwischen Proton und Neutron ist. Da an dieser Stelle noch nichts über die Form des Potenzials bekannt ist, soll ein einfaches Zentralpotenzial mit Rechteckform angenommen werden. Das Potenzial habe die Tiefe $-V_0$ und die Breite R_0 (siehe Abb. 9.1). Es sei zudem angenommen, dass die beiden Nukleonen sich im niedrigsten Zustand dieses Systems in einem Zustand mit relativen Bahndrehimpuls $\ell = 0$ befindet.

Die stationäre Schrödingergleichung hat die Form

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2u}{dr^2} + (V(r) - E)u = 0, \quad (9.1)$$

mit

$$\mu = \frac{m_n \cdot m_p}{(m_n + m_p)} \approx \frac{m_p}{2} \equiv \frac{m}{2},$$

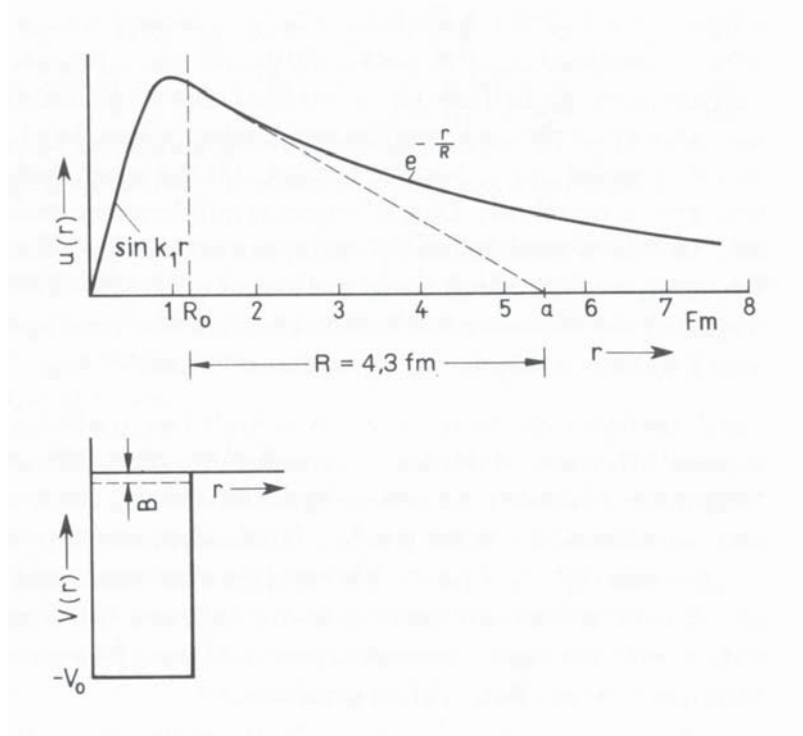


Abb. 9.1: Wellenfunktion und Potentialverlauf für das einfachste Deuteronenmodell (aus Mayer-Kuckuk).

$$u(r) = r \cdot \psi(r) \quad \text{und}$$

$$\phi(r, \vartheta, \phi) = \psi(r) \cdot Y_{\ell m}(\vartheta, \phi).$$

Damit ergibt sich mit der Bindungsenergie E_B des Deutrons:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m}{\hbar^2} (V_0 - E_B) u = 0 \quad (r < R_0) \quad (9.2)$$

$$\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{m}{\hbar^2} E_B u = 0 \quad (r > R_0) \quad (9.3)$$

Der Standardansatz hierfür ist:

$$u(r) = \alpha e^{ikr} + \beta e^{-ikr} \quad (9.4)$$

Für $r < R_0$ (Subskript i) ergibt sich $\alpha_i = -\beta_i$ wegen $u_i(0) = 0$ und damit

$$u_i(r) = A_i \cdot \sin k_i r \quad \text{mit} \quad k_i = \frac{1}{\hbar} \sqrt{m(V_0 - E_B)}. \quad (9.5)$$

Für $r > R_0$ (Subskript a) muss die Wellenfunktion exponentiell in der klassisch verbotenen Region abfallen:

$$u_a(r) = A_a \cdot e^{-\frac{r}{R}} \quad \text{mit } R = \frac{\hbar}{\sqrt{mE_B}}. \quad (9.6)$$

Aus der Stetigkeitsbedingung für $r = R_0$ ($u_i(R_0) = u_a(R_0), u'_i(R_0) = u'_a(R_0)$) ergibt sich

$$A_i \cdot \sin(k_i R_0) = A_a \cdot e^{-\frac{R_0}{R}} \quad (9.7)$$

$$k_i \cdot A_i \cdot \cos(k_i R_0) = -\frac{A_a}{R} \cdot e^{-\frac{R_0}{R}}, \quad (9.8)$$

woraus durch Division folgt:

$$k_i \cdot \cot(k_i R_0) = -\frac{1}{R} = -\frac{\sqrt{mE_B}}{\hbar} \quad (9.9)$$

und damit

$$\cot\left(\sqrt{\frac{m(V_0 - E_B)R_0^2}{\hbar^2}}\right) = -\sqrt{\frac{E_B}{V_0 - E_B}} \quad (9.10)$$

Diese Gleichung lässt sich nur numerisch lösen. Man kann jedoch eine einfache Abschätzung machen. Die Bindungsenergie des Deuterons $E_B = 2,225 \text{ MeV}$ ist bekannt. Zudem kann man aus der Sättigung der Bindungsenergien ja bereits eine Abschätzung der Reichweite des Nukleon-Nukleon Potentials machen, die hier mit $R_0 \approx 1,4 \text{ fm}$ abgeschätzt sei. Löst man Gleichung 9.10 mit diesem Weten, erhält man eine Potenzialtiefe von $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$.

Aus dieser ersten Abschätzung kann man $V_0 \gg E_B$ folgern, was bedeutet, dass die rechte Seite von (9.10) $\ll 1$ ist. Dies bedeutet aber, dass das Argument des cot auf der linken Seite etwa $\pi/2$ ist, da $\cot(\pi/2) = 0$.

Damit ist also

$$\frac{mV_0 R_0^2}{\hbar^2} \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad (9.11)$$

und damit

$$V_0 \approx \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\hbar^2}{mR_0^2}. \quad (9.12)$$

Diese einfache Abschätzung liefert also eine Beziehung zwischen der Tiefe des Potentials und dessen Reichweite: $V_0 \approx 100/R_0^2$ (V_0 in MeV, R_0 in fm). Für $R_0 = 1,4 \text{ fm}$ erhält man $V_0 \approx 40 \text{ MeV}$.

Ein wesentliches Ergebnis dieser Betrachtung ist, dass das Nukleon-Nukleon Potenzial trotz seiner Tiefe von ca. 40 MeV nur zu einer Bindungsenergie von 2,225 MeV führt. Letztendlich können wir froh sein, dass die Nukleon-Nukleon Kraft nicht noch schwächer ist, was zu einem ungebundenen Deuteron geführt hätte. Damit würde der erste Schritt in der Synthese aller Elemente oberhalb von Wasserstoff wegfallen. Gäbe es also kein gebundenes Deuteron, gäbe es uns auch nicht.

Abbildung 9.1 zeigt auch die Wellenfunktion für dieses einfache Problem. Im Innenraum ergibt sich eine Sinusfunktion, die bei $r = R_0$ in eine exponentiell abfallende Amplitude übergeht, die im Abstand $r = R$ auf $1/e$ abfällt. $R = \hbar/\sqrt{mE_B}$ wird häufig auch als Radius des Deuterons bezeichnet, der mit 4,3 fm wesentlich größer als die Reichweite der Kernkraft ist. Dieser relative langsame Abfall der Wellenfunktion, und damit deren große räumliche Ausdehnung ist auf die geringe Bindungsenergie des Deuterons zurückzuführen.

Die geringe Bindung bei der großen Potenzialtiefe lässt sich durch die große kinetische Energie der Relativbewegung von Proton und Neutron erklären. Aus Gleichung (9.5) kann man mit $V_0 - E_B \approx V_0 \approx 40 \text{ MeV}$ den Impuls zu $p = \hbar k_i \approx 180 \text{ MeV}/c$ abschätzen, woraus sich eine kinetische Energie für die Relativbewegung von $E_{kin} \approx 33 \text{ MeV}$ ergibt.

Die große kinetische Energie ergibt sich im Übrigen auch direkt über die geringe Reichweite des Potenzials von nur $R_0 = 1,4 \text{ fm}$ und unter Verwendung der Unschärferelation:

$$\Delta p \approx \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{\hbar}{R_0} \frac{197 \frac{\text{MeV fm}}{c}}{1,4 \text{ fm}} \approx 140 \text{ MeV}. \quad (9.13)$$

9.1.3 Kernspin und Parität des Deuterons

Der totale Drehimpuls (Kernspin) I des Deuterons ist gegeben durch die Kopplung der Spins der Nukleonen ($\mathbf{s}_n, \mathbf{s}_p$) und dem relativen Bahndrehimpuls $\tilde{\ell}$ zwischen Proton und Neutron:

$$\mathbf{I} = \mathbf{\tilde{s}}_n + \mathbf{\tilde{s}}_p + \mathbf{\tilde{\ell}}.$$

Der gemessene Kernspin des Deuterons ist $I = 1$ [$\langle \hat{I}^2 \rangle = I(I+1)\hbar^2$] womit sich folgende Möglichkeiten für die Kombination der Spins und des Bahndrehimpulses ergeben:

- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ parallel und $\ell = 0$.
- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ antiparallel und $\ell = 1$.
- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ parallel und $\ell = 1$.
- $\vec{s}_n$ und $\vec{s}_p$ parallel und $\ell = 2$.

Neben dem Drehimpuls kann man auch die Parität des Deuterons bestimmen. Die Untersuchung der Eigenschaften der emittierten Gammastrahlung beim Neutroneneinfang am Proton ergibt, dass die Parität des Deuterons positiv ($\pi = +1$) ist. Aufgrund der im vorigen Kapitel diskutierten Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen ergibt sich

die Parität zu $(-1)^\ell = +1$, woraus folgt, dass nur gerade Bahndrehimpulse vorkommen können.

Damit ist nur eine parallele Kopplung der beiden Nukleonenspins möglich und Bahndrehimpulse von $\ell = 0$ und $\ell = 2$. Dieses Resultat ist konsistent mit der bei der Potenzialbetrachtung gemachten Annahme, dass $\ell = 0$ ist. Natürlich kann man $\ell = 2$ nicht ausschließen.

9.1.4 Magnetisches Moment

Das magnetische Moment des Deuterons, welches sich z.B. durch Kernspinresonanz (NMR) bestimmen läßt, ergibt sich zu

$$\mu = 0,8574\mu_K. \quad (9.14)$$

Bei einer parallelen Ausrichtung der Nukleonenspins und einem angenommenen Bahndrehimpuls $\ell = 0$ ergibt die Summe der magnetischen Momente von Proton und Neutron:

$$\vec{\mu}_p + \vec{\mu}_n = \frac{g_{sn}\mu_K}{\hbar}\vec{s}_n + \frac{g_{sp}\mu_K}{\hbar}\vec{s}_p \quad (9.15)$$

Mit $g_{sn} = -3,8261$ und $g_{sp} = 5,5857$ und $s_n = s_p = 1/2$ folgt

$$\mu(\ell = 0) = \mu_p + \mu_n = \frac{1}{2}\mu_K(g_{sn} + g_{pn}) = 0,8798\mu_K. \quad (9.16)$$

Dieser Wert stimmt fast, aber eben nicht vollständig, mit dem Wert des Deuterons überein. Diese Differenz kann aus vielen Effekten resultieren. Hier soll sie im Rahmen einer Beimischung einer d -Komponente ($\ell = 2$) zu einer dominanten s -Wellenfunktion ($\ell = 0$) diskutiert werden. Die Wellenfunktion des Deuterons sei angenommen als

$$\psi = a_s\psi(\ell = 0) + a_d\psi(\ell = 2), \quad (9.17)$$

wobei a_s und a_d die Mischungsamplituden sind. Das magnetische Moment ergibt sich dann zu

$$\mu = a_s^2\mu(\ell = 0) + a_d^2\mu(\ell = 2), \quad (9.18)$$

wobei $\mu(\ell = 2) = 1/4(2 - g_{sn} - g_{sp})$ das magnetische Moment für den d -Zustand ist. Das gemessene magnetische Moment ist konsistent mit $a_s^2 = 0,96$ und $a_d^2 = 0,04$, was bedeutet, dass die Wellenfunktion des Deuterons zu 96% aus einem $\ell = 0$ Zustand und zu 4% aus einem $\ell = 2$ Zustand besteht.

9.1.5 Quadrupolmoment des Deuterons

Sowohl das freie Neutron als auch das freie Proton haben kein elektrisches Quadrupolmoment, woraus folgt, dass das Deuteron nur aufgrund der Bahnbewegung von Proton

und Neutron ein Quadrupolmoment haben kann. Eine reine $\ell = 0$ Wellenfunktion hat aufgrund ihrer Rotationssymmetrie ein verschwindendes Quadrupolmoment.

Das Deuteron hat ein experimentell bestimmtes Quadrupolmoment von

$$Q = 0,00288 \text{ eb.} \quad (9.19)$$

Obwohl dieser Wert nur etwa ein halbes Prozent des geometrischen Querschnitts πR^2 ($R = 4,5 \text{ fm}$) des Deuterons ist, ist er nicht null. Der Wert ist mit den Mischungsamplituden von s- und d-Wellenfunktion, die aus dem magnetischen Moment abgeschätzt wurden, konsistent. Dies sollte man aber aufgrund der sehr vereinfachenden Annahmen eher als glücklichen Zufall betrachten.

Das nicht-verschwindende Quadrupolmoment des Deuterons weist auf eine Deformation durch die d-Wellenfunktion hin. Die Mischung der Wellenfunktionen mit unterschiedlichem Drehimpuls kann nur durch eine nicht zentrale Wechselwirkung erzeugt werden. Das Quadrupolmoment des Deuterons ist daher ein wichtiger Hinweis auf die Existenz einer nicht zentralen Komponente der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung. Auf diese Tensorkraft wird später näher eingegangen.

Die oben geführte Diskussion der Potenzials war zwar sehr schematisch, liefert jedoch bereits einige wesentliche Erkenntnisse zu den Eigenschaften des Deuterons. Zum einen wird zur korrekten Beschreibung der geringen Bindungsenergie des Deuterons ein sehr tiefes Potenzial benötigt. Je kürzer die Reichweite des gewählten Potenzials, desto größer ist die benötigte Tiefe. Es ist jedoch nicht möglich eine Aussage über die Form des Potenzials zu machen. Da keine angeregten Zustände des Deuterons existieren, kann man diese nur aus Streuexperimenten von Nukleonen aneinander erhalten.

9.2 Nukleon-Nukleon Streuung

Die wesentlichen Aspekte der Streutheorie wurden bereits im vorherigen Kapitel eingeführt. Um die Nukleon-Nukleon Streuung qualitativ und quantitativ zu verstehen, ist es jedoch notwendig, noch einige weitere Begriffe zur Betrachtung der Streuung einzuführen.

9.2.1 Streulänge

Eine wichtige Größe für die Analyse von Streuproblemen bei kleinen Energien ist die *Streulänge* a , die nachfolgende erläutert wird.

Die Streulänge ist so definiert, dass der totale Wirkungsquerschnitt bei verschwindender Energie der gestreuten Teilchen gegeben ist durch

$$\lim_{k \rightarrow 0} \sigma = 4\pi a^2. \quad (9.20)$$

Die Streulänge definiert also eine effektive Querschnittsfläche, die Auskunft über die Stärke und Art des Streupotentials gibt. *Obwohl die Streulänge die Dimension einer Länge hat, gibt sie keine Auskunft über die Reichweite des Potenzials.*

Wegen $\sigma = 4\pi d\sigma/d\Omega = 4\pi f_0^2 = 4\pi \sin^2 \delta_0/k^2$ ist also

$$a = \pm \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin \delta_0}{k}, \quad (9.21)$$

wobei das Vorzeichen frei gewählt werden kann und üblicherweise negativ gewählt wird. Für die Streuwellenfunktion ψ_{str} gilt für ($\ell = 0$) damit

$$\psi_{str} = f(\vartheta) \frac{e^{ikr}}{r} = \frac{1}{k} e^{i\delta_0} \sin \delta_0 \cdot P_0 \propto a e^{i\delta_0}. \quad (9.22)$$

Die Streulänge hängt also mit der Amplitude der Streuwellenfunktion zusammen.

Bevor die Streulänge weiter diskutiert wird, soll ein einfaches Beispiel ihre Rolle klarer machen.

s-Wellenstreuung am zentralen Potenzial. Als ein einfaches Beispiel zur Veranschaulichung der Streulänge soll die s-Wellenstreuung ($\ell = 0$) am Rechteckpotenzial betrachtet werden.

Ein Blick zurück auf die Partialwellenzerlegung zeigt, dass $\ell = p \cdot b = \hbar k \cdot b$. Wenn die Energie der einfallenden Strahlen also unterhalb von $E < \hbar^2 k_{(\ell=1)}^2/2m = \ell^2/(2mb^2)$ ist, kann nur s-Wellenstreuung stattfinden.

Es wird also hier der Grenzfall kleiner Energie und später sogar der Übergang $E \rightarrow 0$ gemacht.

Das Streupotential der s-Wellenstreuung an einem Potenzial mit Radius R_0 sei durch die radiale Wellenfunktion $u(r) = r\psi_{str}(r)$ exakt gelöst.

Für Energien $E > 0$ (aber klein genug für $\ell = 0$) ist die Wellenfunktion außerhalb gegeben durch $u_a(r) \propto \sin(k_a r + \delta_0)$. Da keine Annahmen über die Form des Potenzials gemacht wurden, ist die Form der Wellenfunktion für $r < R_0$ nicht bekannt und sie sei nur mit $u_i(r)$ bezeichnet.

Es wird nun eine weitere Wellenfunktion $v(r)$ definiert, die für $r > R_0$ mit $u_a(r)$ identisch sein soll. Der Unterschied zu $u(r)$ ist jedoch, dass $v(r)$ nicht vom Potenzial beeinflusst wird. Zusätzlich sei noch eine Normierung eingeführt, so dass $v(0) = 1$ ist:

$$v(r) = \frac{\sin(k_a r + \delta_0)}{\sin \delta_0}. \quad (9.23)$$

Die stationäre radiale Schrödingergleichung für $u(r)$ ist

$$u'' + k^2 u = 0, \quad (9.24)$$

was für $E \rightarrow 0$, also $k \rightarrow 0$ übergeht zu

$$u''_0 = 0. \quad (9.25)$$

Der Index 0 steht dabei für das Limit $E \rightarrow 0$. Die Lösung ist

$$u_0(r) = c(r - a), \quad (9.26)$$

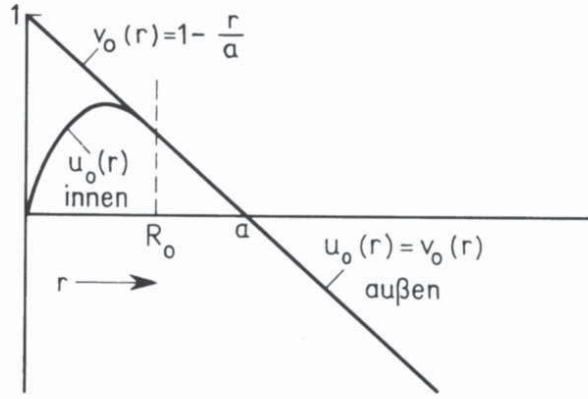


Abb. 9.2: *S-Wellen-Streuung am Rechteckpotenzial und die Streulänge (aus Mayer-Kuckuk).*

was einer unendlich großen Wellenlänge entspricht. Damit ist

$$v_0(r) = c(r - a) \quad (9.27)$$

und wegen der Normierung $v(0) = 1 = -c \cdot a$ folgt $c = -1/a$ und

$$v_0(r) = 1 - \frac{r}{a}. \quad (9.28)$$

Damit ist a der Abstand bei dem die hier lineare Wellenfunktion $v_0(r)$ die horizontale Achse schneidet.

Gleichzeitig läßt sich $v_0(r)$ ausdrücken als

$$v_0(r) = \frac{\sin(k_a r + \delta_0)}{\sin \delta_0} = \frac{\sin(k_a r) \cdot \cos \delta_0 + \cos(k_a r) \cdot \sin \delta_0}{\sin \delta_0}. \quad (9.29)$$

Für $k_a \rightarrow 0$ geht dieser Ausdruck gegen

$$v_0(r) \approx \frac{k_a r \cdot \cos \delta_0 + \sin \delta_0}{\sin \delta_0} = 1 + k_a r \cot \delta_0. \quad (9.30)$$

Setzt man die beiden Ausdrücke für $v_0(r)$ gleich, erhält man

$$1 + k_a r \cot \delta_0 = 1 - \frac{r}{a}, \quad (9.31)$$

woraus sich für a ergibt:

$$-\frac{1}{a} = k_a \cot \delta_0. \quad (9.32)$$

Es ist nun möglich, die Streuamplitude $f_0 = (1/k_a)e^{i\delta_0} \sin \delta_0$ umzuschreiben. Wegen $1/f_0 = k_a \exp(-i\delta_0)/\sin \delta_0$ folgt

$$\frac{\sin \delta_0}{f_0} = k_a e^{-i\delta_0} = k_a (\cos \delta_0 - i \sin \delta_0), \quad (9.33)$$

woraus sich ergibt

$$f_0 = \frac{1}{k_a \cot \delta_0 - ik_a}. \quad (9.34)$$

Aus der Näherung $k_a \rightarrow 0$ und Vergleich mit 9.32 kann man folgern, dass

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_0 = -a. \quad (9.35)$$

Dies ist das Ergebnis, dass oben allgemein angegeben wurde.

Streulänge für verschiedene Potenziale. Sowohl die Größe als auch das Vorzeichen der Streulänge sagen etwas über die Eigenschaften des Streupotenzials.

Betrachtet man beliebige zentrale Potenziale, so erhält man die Funktion u_0 außen als Tangente an die reale Radialwellenfunktion $u(r)$ bei $r = R_0$. Die Streulänge ergibt sich dann als der Schnittpunkt dieser Tangente mit der radialen Achse. Abbildung 9.3 zeigt mehrere Fälle zur Illustration.

Abbildung 9.3 (a) zeigt, dass für einen gebundenen Zustand mit Bindungsenergie B die Funktion u_0 eine negative Steigung haben muss, da die Wellenfunktion im Außenraum exponentiell abfällt. Dies führt zu einem positiven Wert von a mit $a > R_0$.

Für die Situation in Abbildung 9.3 (b) liegt sowohl im Innenraum als auch im Außenraum eine sinusförmige Wellenfunktion vor. Aufgrund der höheren Energiedifferenz $E_0 - V$ im Innenraum ist die Wellenlänge im Innenraum kleiner als im Außenraum, was zu einer negativen Streulänge $a < 0$ führt.

Für ein abstoßendes Potenzial, wie es in Abbildung 9.3 (c) dargestellt ist, muss die Wellenfunktion im Innenraum exponentiell zum Ursprung hin abfallen, was zu einer positiven Steigung und damit zu einer positiven Streulänge mit $0 < a < R_0$ führt.

Abbildung 9.4 verdeutlicht zudem, wie ein anziehendes Potenzial, aufgrund der kleineren Wellenlänge der Sinusfunktion im Innenraum, die Phase der auslaufende Welle im Bezug auf die ungestörte Welle verschiebt. Ein abstoßendes Potenzial hat die umgekehrte Wirkung aufgrund des exponentiellen Verhaltens der Wellenfunktion im Innenraum.

Effektive Reichweite. Im obigen Beispiel wurde der folgende Zusammenhang zwischen der Streulänge und der Streuphase hergestellt:

$$-\frac{1}{a} = k_a \cot \delta_0. \quad (9.36)$$

Schrödingergleichung $u'' + k^2 u = 0$, $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)]$

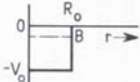
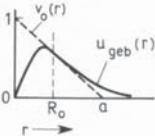
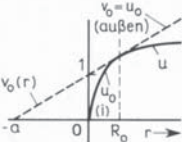
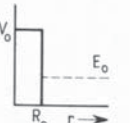
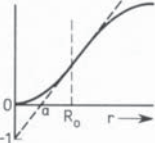
	1 Potentialform $V(r)$	2 k^2 i =Innenraum a =Außenraum	3 Form der Lösung $u(r)$	4 Bei der <u>Streulösung</u> für $E \rightarrow 0$ ist k^2 Krümmung $u'' = -k^2 u$	5 Skizze der Wellenfunktionen	6 Streulänge a
a)	 $B = \text{Bindungs-energie}$	$k_i^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - B) > 0$ $k_a^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (-B) < 0$ Für gebundenen Zustand (innen $E = -B, V(r) = -V_0$)	$\sin k_i r$ $e^{- k_a r}$	> 0 0	Negativ (innen) 0	 $a > R_0$
b)		$k_i^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 + E_0) > 0$ $k_a^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_0 > 0$	$\sin k_i r$ $\sin(k_a r + \delta)$	> 0 0	Negativ (innen) 0	 $a < 0$
c)		$k_i^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E_0 - V_0) < 0$ $k_a^2 = \frac{2m}{\hbar^2} E_0 > 0$	$e^{ k_i r}$ $\sin(k_a r - \delta)$	< 0 0	Positiv (innen) 0	 $0 < a < R_0$

Abb. 9.3: Zusammenhang zwischen Potentialeigenschaften und Streulänge (aus Mayer-Kuckuk).

Geht man von der Einschränkung auf die Näherung $E \rightarrow 0$ ab, bleibt jedoch bei kleinen Energien ($E \ll V$), so dass man immer noch s-Wellenstreuung betrachtet, so erhält man

$$k_a \cot \delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_e k_a^2 + \dots \quad (9.37)$$

Dabei wird mit r_e die *effektive Reichweite* des Potentials bezeichnet.

Die beiden Parametern a und r_e kann man eindeutig aus dem gemessenen Wirkungsquerschnitt extrahieren. Aus den Parametern lernt man jedoch nichts über die Potentialform, denn verschiedene Potentialformen können mit entsprechender Wahl der Parameter zu den gleichen Werten von a und r_e führen. Für eine bestimmte Potentialform definieren a und r_e jedoch die Parameter des Potentials eindeutig.

9.2.2 Neutron-Proton-Streuung

Das Studium von Streuexperimenten bei kleinen Energien ermöglicht es Wesentliches über die Nukleon-Nukleon Kraft zu lernen. Man betrachte zunächst die Streuung von

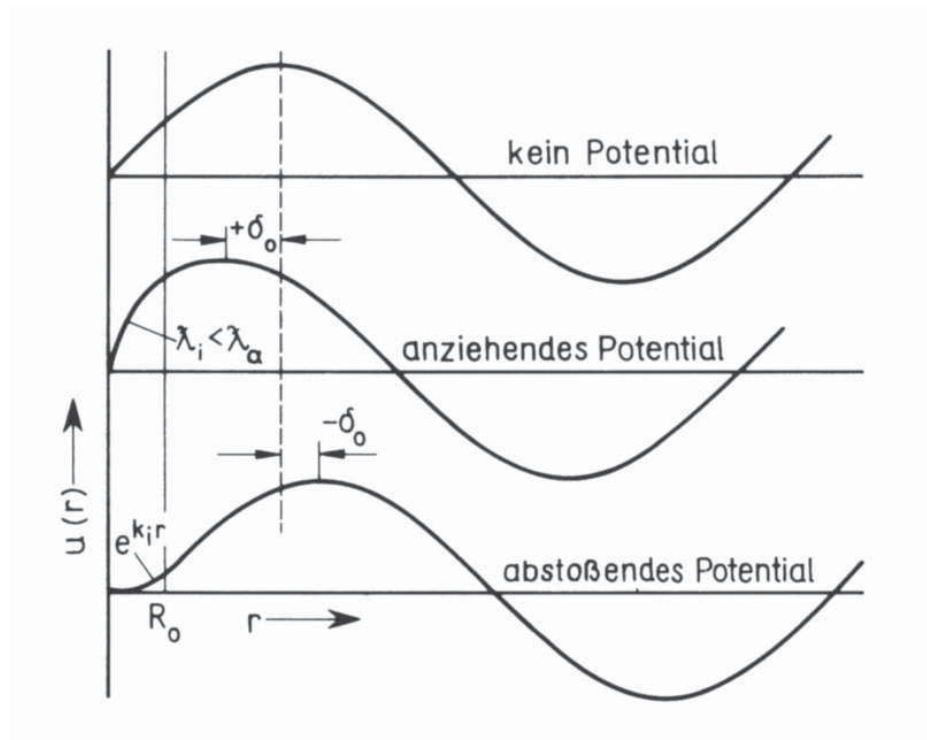


Abb. 9.4: Streuphase für verschiedene Potenzialformen (aus Mayer-Kuckuk).

Neutronen an Protonen in einem Wasserstofftarget bei sehr kleinen Neutronenenergien (ca. 10 eV), was die Einschränkung auf $\ell = 0$ Streuung erlaubt. Damit ist die Streuung isotrop und man hat nur die Information des totalen Wirkungsquerschnittes zur Verfügung.

Die obigen Betrachtungen ermöglichen es, eine Abschätzung des zu erwartenden Wirkungsquerschnittes für diese Streuung zu machen.

Für das Rechteckpotenzial, das im oberen Abschnitt als Modell des Deuteronpotenzials angenommen wurde, erwartet man für den totalen Wirkungsquerschnitt einfach

$$\sigma = 4\pi a^2.$$

Die Streulänge, für dieses Problem ergibt sich zu $a = R + R_0 = 5,7 fm$. Abbildung 9.1 zeigt die Bestimmung der Streulänge für das Deuteron.

Mit dieser Streulänge ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt von $4b$, der bei kleinen Energien konstant sein sollte. Zugegebenermaßen ist das angesetzte Potenzial sehr vereinfacht, jedoch erhält man für all sinnvollen Potenziale immer Wirkungsquerschnitte von unter $9b$. Eine realistische Erwartung ist $\sigma = 4,6b$.

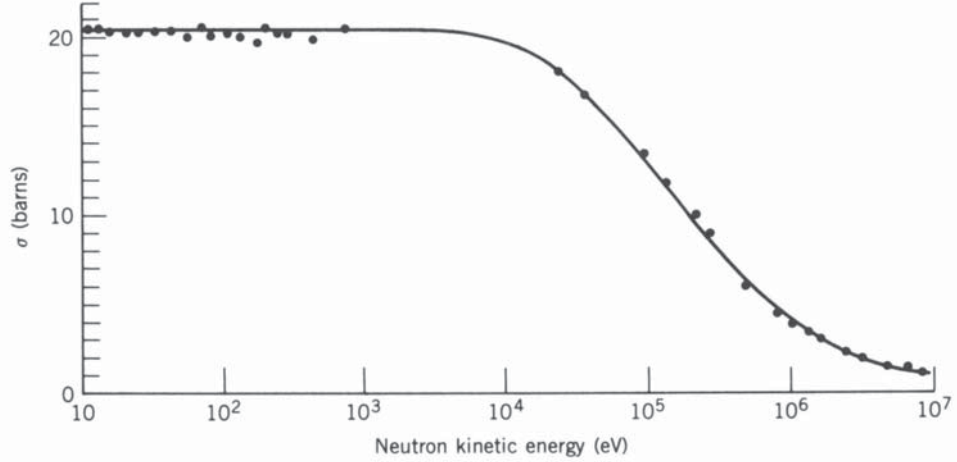


Abb. 9.5: Gemessener Wirkungsquerschnitt für die Neutron-Proton Streuung (aus Krane).

Abbildung 9.5 zeigt den experimentellen Wirkungsquerschnitt als Funktion der Energie der einfallenden Neutronen. In der Tat stellt man einen konstanten Wirkungsquerschnitt bei kleinen Energien fest, der mit $20,4b$ jedoch sehr viel höher ist, als mit allen realistischen Potenzialen zu erwarten ist.

Um diese Diskrepanz zu verstehen, muss man bedenken, dass das Deuteron Spin $S = 1$ hat. Aufgrund der drei magnetischen Unterzustände $S_z = -1, 0, +1$ wird dieser Zustand auch als Triplet-Zustand bezeichnet im Gegensatz zum $S = 0$ Singulett-Zustand.

Da bei der hier betrachteten Proton-Neutron-Streuung sowohl die Spins der Neutronen als auch die der Protonen nicht ausgerichtet sind, ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für die beiden Zustände als

$$\begin{aligned} \text{Singulettzustand} \quad P_{S=0} &= \frac{1}{4} \\ \text{Tripletzustand} \quad P_{S=1} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der zu erwartende totale Wirkungsquerschnitt für die $\ell = 0$ Streuung als

$$\sigma_{total} = \frac{3}{4}\sigma_t + \frac{1}{4}\sigma_s, \quad (9.38)$$

wobei die Indizes t und s für Triplet und Singulett stehen.

Der oben gemachten Abschätzung liegt der gebundene $S = 1$ Tripletzustand zu Grunde. Damit ist $\sigma_t = 4,6b$ und aus (9.38) ergibt sich

$$\sigma_s = 4\sigma_{total} - 3\sigma_t = 67,4b. \quad (9.39)$$

Man erkennt sofort den dramatischen Unterschied zwischen dem Wirkungsquerschnitt für den $S = 0$ und den $S = 1$ Zustand und kann daraus schließen: *Die Nukleon-Nukleon*

Wechselwirkung hängt stark von der Spinausrichtung der Nukleonen ab. Dies ist im Prinzip schon daraus erkennbar, dass nur der $S = 1$ Triplettzustand gebunden ist.

Aus den Wirkungsquerschnitten lassen sich die Streulängen, jedoch nicht die Vorzeichen, für die Singlett- und Triplettstreuung bestimmen. Aus der Tatsache, dass der $S = 1$ Zustand gebunden ist, folgt allerdings sofort nach der obigen Betrachtung, dass $a_t > 0$. Da der $S = 0$ Zustand nicht gebunden ist, das Potenzial jedoch attraktiv ist, folgt auch sofort $a_s < 0$.

Damit folgt mit dem oben skizzierten einfachen Bild:

$$a_t = +\sqrt{\frac{\sigma_t}{4\pi}} \approx +6 fm \quad (9.40)$$

und

$$a_s = -\sqrt{\frac{\sigma_s}{4\pi}} \approx -23 fm. \quad (9.41)$$

Bei einer genaueren Analyse muss natürlich sowohl die Streulänge a als auch die effektive Reichweite r_e berücksichtigt werden.

Experimentell kann die Singulett- und Triplettstreuung zum Beispiel durch Streuung von niederenergetischen Neutronen ($E < 0,001 eV$, $\lambda > 0,05 nm$) an Wasserstoffmolekülen H_2 untersucht werden. Die Protonen im H_2 befinden sich im Mittel in einem Abstand von ca. 0,08 nm. Die Wellenfunktion der einfallenden Neutronen überlappt also mit beiden Protonen, was bei der Behandlung des Problems berücksichtigt werden muß und zu Interferenzen führt.

Man unterscheidet beim H_2 zwischen Parawasserstoff, mit antiparallelen Protonenspins, und Orthowasserstoff, mit parallelen Protonenspins. Aus der Theorie der Neutronenstreuung ergeben sich für die Wirkungsquerschnitte der Streuung an den beiden Wasserstoffzuständen:

$$\sigma_{para} = 5,7(3a_t + a_s)^2 \quad (9.42)$$

und

$$\sigma_{ortho} = \sigma_{para} + 12,9(a_t - a_s)^2. \quad (9.43)$$

Die numerischen Koeffizienten sind nur für eine bestimmte Neutronenenergie gültig.

Aus diesen Messungen erhält man

$$a_t = +5,35 \pm 0,06 fm \quad (9.44)$$

und

$$a_s = -23,55 \pm 0,12 fm. \quad (9.45)$$

Allerdings wurde bisher nur die Streulänge und nicht die effektive Reichweite berücksichtigt. Für $k \neq 0$ werden die Wirkungsquerschnitte für die Singulett- und Triplettstreuung

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k^2 + \left[-\frac{1}{a_t} + \frac{1}{2}r_{e(t)}k^2 \right]} \quad (9.46)$$

und

$$\sigma_s = \frac{4\pi}{k^2 + \left[-\frac{1}{a_s} + \frac{1}{2} r_{e(s)} k^2 \right]}. \quad (9.47)$$

Durch Streuexperimente mit Neutronen mit Energien unterhalb von 10 eV ergeben sich die folgenden Streuparameter:

$$a_t = +5,426 \pm 0,004 fm \quad r_{e(t)} = 1,763 \pm 0,005 fm \quad (9.48)$$

und

$$a_s = -23,715 \pm 0,015 fm \quad r_{e(s)} = 2,73 \pm 0,03 fm. \quad (9.49)$$

Die s-Wellenstreuung gibt also Aufschluss über die Spinabhängigkeit der Wechselwirkung, deren Reichweite und Stärke. Sie kann aber nichts über die genaue Potenzialform aussagen, da verschiedenen Potenziale zu den gleichen Streuparametern führen können.

9.2.3 Streuung identischer Nukleonen

Bei der Betrachtung der Streuung identischer Nukleonen muss man natürlich berücksichtigen, dass man es hierbei mit Fermionen zu tun hat. Die totale Wellenfunktion $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \hat{s}_1, \hat{s}_2) \equiv \psi(1, 2)$ des Zweiteilchensystems muss daher antisymmetrisch gegenüber Vertauschung der beiden Teilchen sein:

$$\psi(1, 2) = -\psi(2, 1).$$

Bei der bisher betrachteten s-Wellenstreuung sind die räumlichen Wellenfunktionen isotrop und daher symmetrisch unter Vertauschung der Teilchen. Daher müssen, um die Asymmetrie der Gesamtwellenfunktion zu gewährleisten, die Spin-Wellenfunktionen antisymmetrisch sein. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass die Spins der beiden Nukleonen antiparallel zueinander stehen müssen. Daher kann also für identische Nukleonen nur der $S = 0$ Singulettzustand zur s-Wellenstreuung ($\ell = 0$) beitragen.

Bei der Streuung identischer Teilchen können die Detektoren nicht unterscheiden, welches der beiden an der Streuung beteiligten Teilchen nachgewiesen wurde. Abbildung 9.6 zeigt die beiden möglichen Streuprozesse, die zum Nachweis von Teilchen unter dem Streuwinkel θ (im Schwerpunktsystem) führen können. Der gesamte differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2. \quad (9.50)$$

Proton-Proton Streuung. Bei der pp -Streuung wirkt neben der hier betrachteten Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung natürlich auch die Coulomb-Wechselwirkung. Die Streulänge und effektive Reichweite unter Berücksichtigung beider Wechselwirkungen führt zu

$$a = -7,82 \pm 0,01 fm \quad r_e = 2,79 \pm 0,02 fm. \quad (9.51)$$

Aus der negativen Streulänge $a < 0$ schließt man auf ein attraktives Potenzial, dass jedoch den pp -Zustand nicht bindet. Es gibt kein Diproton.

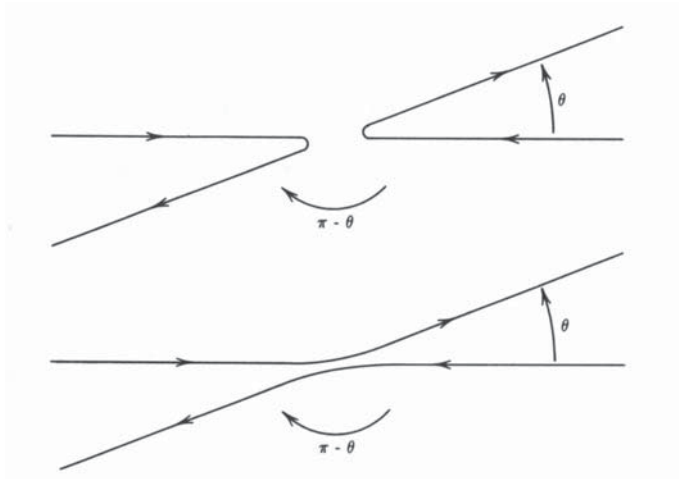


Abb. 9.6: Streuung identischer Teilchen im Schwerpunktsystem. Für die Detektoren ist es unmöglich zwischen den beiden gezeigten Prozessen zu unterscheiden (aus Krane).

Neutron-Neutron Streuung. Bei der nn -Streuung wirkt nur die Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung und die Streulänge und effektive Reichweite ergeben sich zu

$$a = -16,6 \pm 0,5 fm \quad r_e = 2,66 \pm 0,15 fm. \quad (9.52)$$

Während man bei der pp -Streuung argumentieren könnte, dass die Coulombwechselwirkung für den ungebundenen Zustand verantwortlich ist, kann dieses Argument für die nn -Streuung nicht verwendet werden. Die negative Streulänge für die nn -Streuung zeigt eindeutig, dass auch kein Dineutron existiert.

Effektive Reichweiten. Man erkennt, dass die effektiven Reichweiten den np -, pp - und nn -Streuung mit $2,73(3) fm$, $2,79(3) fm$ und $2,66(15) fm$ im wesentlichen gleich und damit unabhängig von der Ladung der Nukleonen sind.

Streulängen. Wenn man den Effekt der Coulomb-Wechselwirkung bei der pp -Streuung herausrechnet, ergibt sich eine Streulänge von $a_s(pp) = -17,1(2) fm$. Dieser Wert ist innerhalb der Fehler gleich dem Wert für die nn -Streuung von $a_s(nn) = -16,6(5) fm$. Die Streulänge für die np -Streuung ist mit $a_s(np) = -23,715(15) fm$ nur ein wenig größer, was später im Zusammenhang mit dem Austauschmodell erklärt werden soll.

Eine wesentliche Schlußfolgerung aus den Streuparametern für die Streuung identischer Teilchen ist die Ladungssymmetrie der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung. Eine vollständige Ladungsunabhängigkeit kann aus den Streulängen nicht abgeleitet werden, da die Streulänge für die np -Streuung größer als die für pp - und nn Streuung.

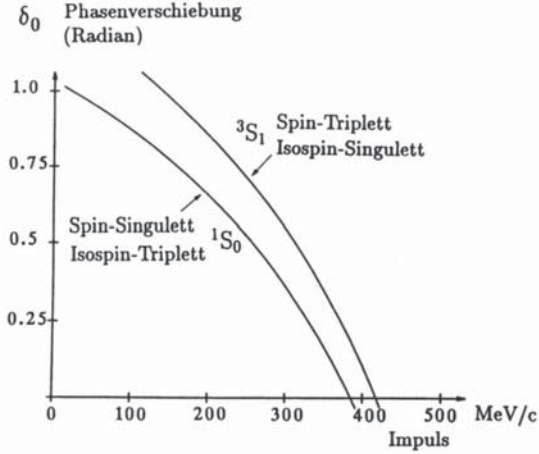


Abb. 9.7: Abhängigkeit der Streuphase für die s -Wellenstreuung für die Triplett- ($S = 1$) und Singlettkonfiguration ($S = 0$) vom Relativimpuls im Schwerpunktsystem (aus Povh).

9.2.4 Streuphase der Nukleon-Nukleon Streuung

Bisher wurde nur die Streuung bei sehr kleinen Energien betrachtet. Um mehr über das Nukleon-Nukleon-Potenzial zu lernen, ist es sinnvoll, die Energieabhängigkeit der Streuphase zu betrachten.

Abbildung 9.7 zeigt die Streuphase δ_0 für die s -Wellenstreuung der np -Streuung in Abhängigkeit vom Relativimpuls im Schwerpunktsystem. Die Streuphase fällt oberhalb von 100 MeV/c stark ab und wird bei ca. 400 MeV/c negativ. Wenn man sich die Abhängigkeit des Vorzeichens der Streuphase δ_0 vom anziehenden ($\delta_0 > 0$) bzw. abstoßenden ($\delta_0 < 0$) Charakter in Erinnerung ruft (siehe auch Abb. 9.8), ist klar, dass es eine abstoßende Komponente in der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung geben muß. Abbildung 9.9 zeigt, wie die anziehende und abstoßende Komponenten des NN-Potenzials jeweils zu einer Streuphase führen, aus denen sich die gemessene Gesamtstreuphase ergibt.

Die Tatsache, dass die abstoßende Komponente des Potenzials bei hohen Impulsen dominant wird, ist natürlich ein klarer Hinweis darauf, dass diese Komponente nur bei kleinen Abständen relevant wird, die ja bei hohen Impulsen aufgelöst werden.

Abbildung 9.10 zeigt schematisch die radiale Abhängigkeit des Nukleon-Nukleon Potenzials mit einem unendlich hohen abstoßendem Potenzial bei kleinen Abständen und einem daran anschließenden anziehenden Potenzial, dass sehr schnell mit ansteigendem Radius abfällt.

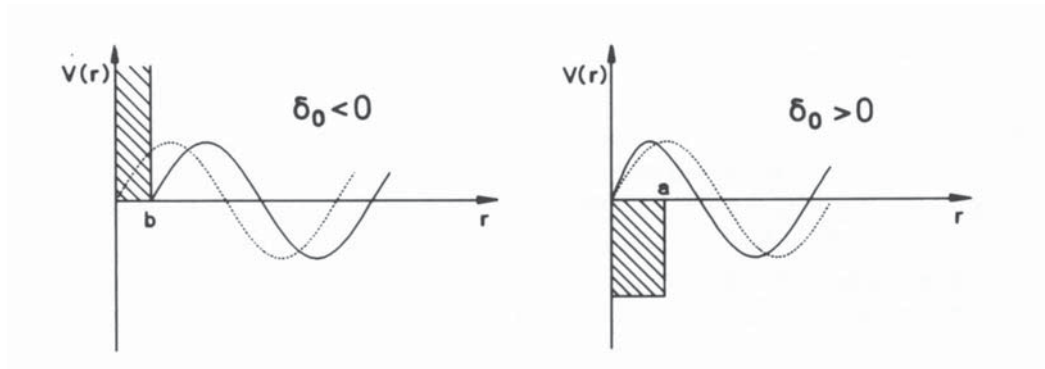


Abb. 9.8: Wirkung eines abstoßenden (links) und eines anziehenden Potentials (rechts) auf die Streuphase (aus Povh).

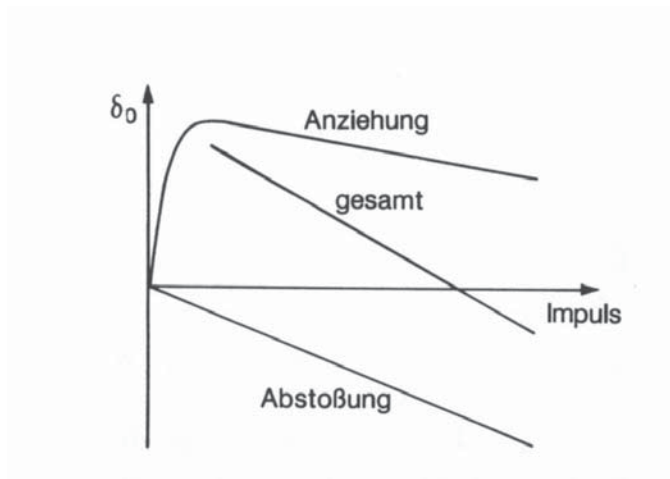


Abb. 9.9: Die insgesamt abfallende Streuphase der s -Wellenstreuung setzt sich aus den Effekten einer anziehenden und einer abstoßenden Komponente des Nukleon-Nukleon-Potentials (aus Povh).

9.3 Eigenschaften der Nukleon-Nukleon Kraft

An dieser Stelle seien die wesentlichen Eigenschaften des Nukleon-Nukleon-Potentials zusammengefasst. Das Nukleon-Nukleon Potential besteht aus

1. einem zentralen anziehenden Potential bei $r > \sim 0,5 fm$,
2. einem abstoßenden kurzreichweitigen Teil (hard core) für $r < \sim 0,5 fm$,
3. einer spinabhängigen Komponente,

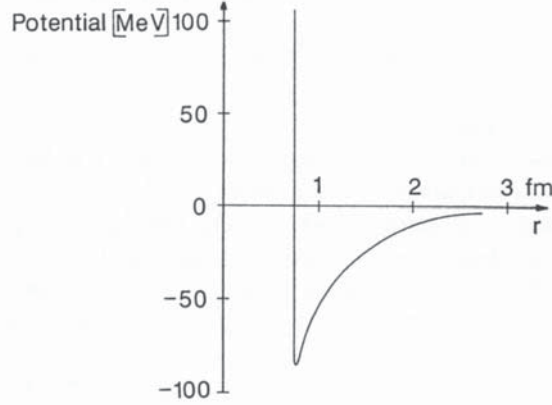


Abb. 9.10: Schematische Darstellung der radialen Abhängigkeit des Nukleon-Nukleon Potentials (aus Povh).

4. einem nicht-zentralen Tensorpotenzial,
5. einer impulsabhängigen Komponente
6. und ist zudem ladungssymmetrisch und fast ladungsunabhängig.

In den vorhergehenden Abschnitten wurden alle diese Punkte, bis auf das Vorkommen einer impulsabhängigen Komponente bereits diskutiert. Nachfolgend werden einfache Parametrisierungen für die verschiedenen Komponenten des Potentials gegeben. Es ist natürlich klar, dass auch komplexere Parametrisierungen möglich sind. Man ist jedoch immer bestrebt, eine möglichst einfache Beschreibung zu finden. Gleichzeitig muss das Potenzial gewisse Symmetrien erfüllen, wie zum Beispiel die Invarianz unter Paritätstransformation und Zeitumkehr.

zu 1): Das zentrale Potenzial $V_c(r)$, das aufgrund der kurzen Reichweite schneller abfallen muss als das Coulombpotenzial, wird durch folgende Form beschrieben, die im nächsten Abschnitt begründet wird:

$$V_c(r) = V_0 \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r} \quad (9.53)$$

zu 2): Die Analyse der Streuphasen hat ergeben, dass bei kleinen Abständen $r < \sim 0,5 fm$ ein im wesentlichen unendlich hohes Potenzial vorliegt. Bereits die Tatsache, dass die Nukleonendichte im Kerninneren im wesentlichen konstant und unabhängig von der Nukleonenzahl ist, deutet auf diesen *hard core* hin.

zu 3): Die einfachste mögliche Form einer spinabhängigen Wechselwirkung ist gegeben durch

$$V_s(r, S) = V_s(r) \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2. \quad (9.54)$$

Das Potenzial $V_s(r)$ sei dabei ein zentrales Potenzial. Der Erwartungswert von $\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle$ lässt sich schreiben als:

$$\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = \frac{1}{2} [S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)] \hbar^2$$

Für $S = 1$ ergibt sich:

$$\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = \frac{1}{4} \hbar^2$$

während man für $S = 0$

$$\langle \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \rangle = -\frac{3}{4} \hbar^2$$

erhält, was die Spinabhängigkeit eindeutig darlegt.

zu 4): Aus dem Quadrupolmoment und dem magnetischen Moment des Deuteron konnte man erkennen, dass es eine nicht-zentrale Komponente der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung geben muss. Die einzige Richtung, die für ein einzelnes Nukleon ausgezeichnet ist, ist die Richtung seines Spins. Das richtungsabhängige Tensorpotenzial lässt sich ausdrücken durch

$$S_{12} = 3 \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{r})(\vec{s}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) \quad (9.55)$$

zu 5): Prinzipiell kann das Nukleon-Nukleon-Potenzial natürlich auch vom Impuls der Nukleonen abhängen. Es stellt sich heraus, dass die einfachste impulsabhängige Potenzialkomponente, die sowohl invariant unter der Paritätstransformation als auch unter Zeitumkehr ist, die Spin-Bahn-Kopplung $\vec{L} \cdot \vec{S}$ ist. Die Spin-Bahn-Wechselwirkung wird beschrieben durch:

$$V(r, p) = V_{Ls}(r) \frac{(\vec{s}_1 \cdot \vec{L})(\vec{s}_2 \cdot \vec{L})}{\hbar^4} \quad (9.56)$$

Dieser Term enthält eine explizite Impulsabhängigkeit über die Definition des Drehimpulses $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$.

zu 6): Aus den Streulängen der Nukleon-Nukleon-Streuung konnte man erkennen, dass das Potenzial für das Proton-Proton- und das Neutron-Neutron-System die gleiche Stärke hat. Im Proton-Neutron Kanal ist die Wechselwirkung stärker, was im nächsten Abschnitt plausibel gemacht wird.

9.4 Das Austauschmodell der Wechselwirkung

Wenn man das bisher entwickelte Modell der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung betrachtet, fallen gewisse Ähnlichkeiten zum Potenzial auf, dass zwischen den Atomen eines zweiatomigen Moleküls wirkt (siehe Abb. 9.11). Die kovalente Molekülbindung lässt sich durch den Austausch von Elektronen zwischen den Atomen beschreiben. Es liegt nahe, einen ähnlichen Ansatz für die Beschreibung der Nukleon-Nukleon Wechselwirkung zu verwenden. Es bleibt jedoch die Frage, welche Teilchen hierbei ausgetauscht werden. Nachfolgend wird jedoch zunächst das formale Argument für die Form des Potenzials gegeben.

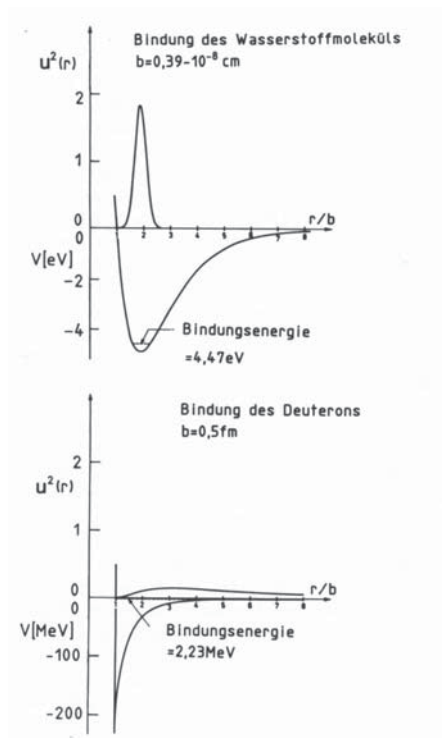


Abb. 9.11: Potenziale und radiale Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für Wasserstoffatome im Wasserstoffmolekül (oben) und Nukleonen im Deuteron (unten). Die kovalente Bindung im Wasserstoffmolekül führt zu einer starken Lokalisierung der H-Atome, da die Bindungsenergie vergleichbar mit der Tiefe des Potenzials ist. Im Deuteron hingegen ist die Bindungsenergie klein gegen die Bindungsenergie, was zu einer Delokalisierung der Nukleonen führt (aus Povh).

9.4.1 Elektromagnetische Wechselwirkung

Man betrachte die Wellengleichung für ein skalares elektromagnetisches Potenzial Φ

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{r})}{\partial t^2} - \nabla^2(\vec{r}) \right) \Phi = 4\pi q\rho \quad (9.57)$$

Für eine zeitunabhängige Ladungsverteilung ergibt sich hierdurch eine Definitionsgleichung für das skalare Potenzial $\Phi(r)$:

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 4\pi q\rho \quad (9.58)$$

Man beachte, dass in der Quantenmechanik die Dichtefunktion eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \psi^* \psi$ ist.

Die Lösung für das Potenzial ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \frac{q\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (9.59)$$

was für eine Punktladung in das bekannte Coulombpotenzial übergeht:

$$\Phi(r) = \frac{q}{r}. \quad (9.60)$$

Es ist üblich, die Wechselwirkung zwischen zwei Teilchen durch den Austausch eines Feldbosons (Austauschteilchen) zu beschreiben. Das Feldboson der elektromagnetischen Wechselwirkung ist das Photon. Aufgrund der verschwindenden Ruhemasse des Photons hat die Wechselwirkung eine unendlich große Reichweite. Die Streuung von zwei Elektronen aneinander lässt sich durch ein so genanntes Feynman-Diagramm darstellen. Abbildung 9.12 zeigt die Streuung zweier Elektronen durch Austausch eines Photons. Dabei ist die Vertikale die Richtung der Zeit und die Raumdimensionen sind durch die Horizontale repräsentiert. Feynman-Diagramme stellen eine verkürzte Schreibweise der exakten Berechnungsvorschrift der Wechselwirkungsprozesse dar, sollen jedoch hier nur der diagrammatischen Beschreibung der Prozesse dienen.

Die Wellengleichung für ein freies Photon ist gegeben durch:

$$\left(\nabla^2(\vec{r}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{r})}{\partial t^2} \right) \Phi = 0 \quad (9.61)$$

9.4.2 Das Yukawa-Potenzial

Yukawa's Idee für das Nukleon-Nukleon-Potenzial war es, einen vergleichbaren Ansatz wie für die elektromagnetische Wechselwirkung zu machen, jedoch einen zusätzlichen Term einzufügen, um die kürzere Reichweite für die Wechselwirkung zu erhalten.

Die Wellengleichung für ein skalares Nukleon-Nukleon-Potenzial ist nach Yukawa gegeben durch

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2(\vec{r})}{\partial t^2} - \nabla^2 + k^2 \right) \Phi(\vec{r}) = 4\pi \frac{g}{\sqrt{\hbar c}} \rho(\vec{r}) \quad (9.62)$$

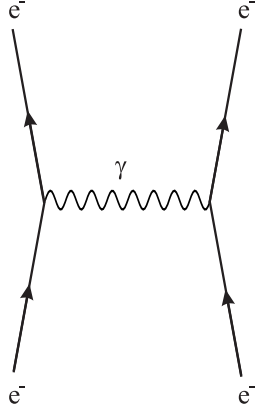


Abb. 9.12: Feynman-Diagramm für die Wechselwirkung zwischen zwei Elektronen über den Austausch eines Photons

Für eine zeitunabhängige "hadronische Ladungsverteilung" erhält man die stationäre Wellengleichung

$$(\nabla^2 - k^2)\Phi(\vec{r}) = 4\pi \frac{g}{\sqrt{\hbar c}} \rho(\vec{r}) \quad (9.63)$$

mit der Lösung

$$\Phi(\vec{r}) = -\frac{g}{\sqrt{\hbar c}} \int d^3\vec{r}' \frac{e^{-k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \rho(\vec{r}'). \quad (9.64)$$

Für eine "hadronische Punktladung" ergibt sich das *Yukawa-Potenzial*

$$\Phi(r) = -\frac{g}{\sqrt{\hbar c}} \frac{e^{-kr}}{r}. \quad (9.65)$$

Das Yukawa-Potenzial fällt exponentiell mit der Zerfallskonstante k ab und hat damit eine kürzere Reichweite als das Coulomb-Potenzial.

Auch die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung wird durch den Austausch eines Feldbosons beschrieben. Für die Zerfallskonstante k , ergibt sich

$$k = \frac{mc}{\hbar} = \frac{1}{\lambda_C} \quad (9.66)$$

mit der Compton Wellenlänge λ_C und der Masse m des Austauschbosons, bei dem es sich hier um das π -Meson handelt. Es gibt drei Mesonen π^0 , π^- und π^+ . Abbildung 9.13 zeigt die pp - und nn -Streuung unter Austausch eines π^0 -Mesons gezeigt.

Aus der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung für ein Teilchen der Ruhemasse m :

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 \quad (9.67)$$