

Rechnen mit Beträgen

$x, y \in K$ (K angeordneter Körper)

- (i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- (ii) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
- (iii) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$
- (iv) $||x| - |y|| \leq |x - y| \leq |x| + |y|$

Maximum und Minimum

Für $x, y \in \mathbb{R}$:

- $\max(\{x, y\}) := \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$
- $\min(\{x, y\}) := \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$

Binomialkoeffizient und allgemeine binomische Formel

$\alpha \in \mathbb{R}, n, k \in \mathbb{N}_0$:

- $\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot \dots \cdot (\alpha-k+1)}{k!} = \prod_{j=1}^k \frac{\alpha-j+1}{j}$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$
- $\binom{\alpha}{k} + \binom{\alpha}{k+1} = \binom{\alpha+1}{k+1}$
- $\binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$
- $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Reihen

Euler'sche Zahl $e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

Harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (divergent)

Für $|q| < 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

Exponentialfunktion und Logarithmus

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =: \exp(x) = e^x$
 $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$
 $\exp'(x) = \exp(x)$
- $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist Umkehrabb. zu $\exp$
 $\log(e) = 1, \quad \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y), \quad \log(\frac{1}{x}) = -\log(x)$
 $\log'(x) = \frac{1}{x}$
Für $x < -1$: $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$
- $f(x) = a^x := \exp(x \cdot \log(a)), \quad f'(x) = \log(a) \cdot a^x$

Grenzwerte

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$
- $\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^k}{\exp(x)} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k \cdot \exp(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1$

Landau-Symbol

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\Psi(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = o(\Psi(x))$ für $x \rightarrow x_0$
- Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x}, \Psi(x) = \frac{1}{x^2}$
 - $f(x) = o(\Psi(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{x} = o(\frac{1}{x^2})$ für $x \rightarrow 0$
 - $\Psi(x) = o(f(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ für $x \rightarrow \infty$

Taylorpolynom und Taylorreihe

- $T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$
- $R_n(x, x_0, f) = f(x) - T_n(x, x_0, f)$

Lagrange-Restglied $\exists \eta \in (0, 1) : R_n(x, x_0, f) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \eta(x-x_0))$

Cauchy-Restglied $\exists \bar{\eta} \in (0, 1) : R_n(x, x_0, f) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!} \cdot (1-\bar{\eta})^n \cdot f^{(n+1)}(x_0 + \bar{\eta}(x-x_0))$

Regel von de l'Hôpital

f, g auf (a, b) differenzierbar, $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Trigonometrische Funktionen

- $\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \cos'(x) = -\sin(x)$
- $\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad \sin'(x) = \cos(x)$
- $\cosh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \cosh'(x) = \sinh(x)$
- $\sinh(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad \sinh'(x) = \cosh(x)$

Umkehrabbildungen und ihre Ableitungen

- Umkehrabbildung zu $\sin(x)$: $\arcsin(x) \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Umkehrabbildung zu $\cos(x)$: $\arccos(x) \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- Umkehrabbildung zu $\tan(x)$: $\arctan(x) \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$